arXiv:2611.30544v1 [math.GT] 23 Nov 2026

$\mathbb{R}^4$ 中具有非平凡链环的余秩一 Lipschitz 正规嵌入曲面

L. BIRBRAIR、RODRIGO MENDES 和 J. J. NUÑO-BALLESTEROS

谨以此文纪念 *C. T. C. Wall*

摘要。我们证明，文献 [4] 中关于 $\mathbb{R}^4$ 中 Lipschitz 正规嵌入（LNE）余秩一曲面奇点的结平凡性定理，不能无条件推广。更确切地说，我们给出一个多项式映射芽 $F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^4,0)$，它在原点处余秩一，具有孤立奇点，且二阶喷射为 $(x,0,0,0)$；其像 $X=F(\mathbb{R}^2)$ 在原点处是 LNE，但其链环是奶奶结 $T\#T$，因此是非平凡的。该例通过对文献 [4] 中研究的三叶结多项式参数化应用一种通用的一致次数齐次化过程而得。我们还给出了一个有限 A 决定的多项式实现，具有相同的 LNE 和纽结性质。

1. 引言

设 $(X,0)\subset(\mathbb{R}^n,0)$ 是道路连通亚解析集合芽。记 d_X X 上的内在（内）度量（更准确地说，是原点在 X 中的某个选定小邻域 U 上的度量），其定义为连接两点的可求长路径在 X （分别在 U ）中的长度下确界。若存在 X 中原点 0 的一个邻域 U 和一个常数 $C\geq 1$，使得

$$d_X(z,w)\leq C\|z-w\| \qquad \text{for all } z,w\in U,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得范数。

设 $F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^4,0)$ 是一个实解析映射芽，其像为 $X=F(\mathbb{R}^2)$。若在充分小的代表元上， F 在其定义域上是拓扑嵌入，且在原点以外是浸入（特别地，$F^{-1}(0)=\{0\}$ 且对 $p\neq 0$ 有 $\operatorname{rank}(dF_p)=2$ ），则称 F 在原点有孤立奇点。根据 [5, 中证明的锥结构定理，定理 3.2]，表明，对于任意具有孤立奇点的实解析映射芽 $F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^4,0)$，其链环 $K_\varepsilon=X\cap S^3_\varepsilon$ 是一个光滑嵌入圆，在 S^3_ε 中的同伦类型是良定义的，且与充分小的 $\varepsilon>0$ 无关，因此构成拓扑等价的完备不变量。在 [4]，中构造了实现非平凡结——尤其是三叶结——的显式多项式参数化，并在 [3], 中分析了该构造的度量性质，证明其不是 LNE。

在 [3], 中，Birbrair、Mendes 和 Nuño-Ballesteros 证明，对于 $\mathbb{R}^4$ 中一大类余秩一实解析曲面芽，LNE性质迫使其链环为平凡结。对于所有具有孤立奇点的余秩一实解析曲面芽，这一蕴含是否成立，仍是一个悬而未决的问题

在 $\mathbb{R}^4$ 中。

本文旨在对这一问题给出否定答案：

定理1.1 (主定理)。 存在一个多项式映射 $F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^4,0)$，它在原点处的秩为1，其 2-喷射为 $j^2F(0)=(x,0,0,0)$；该映射是从 $\mathbb{R}^2$到 $\mathbb{R}^4$ 的全局拓扑嵌入，并且在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上是浸入（特别地，它有一个孤立奇点），其像$X=F(\mathbb{R}^2)$ 在原点处是 *LNE*，而其链环 $K_\varepsilon=X\cap S^3_\varepsilon$ 同痕于奶奶结$T\#T$ （非平凡）。特别地， [3] 的解结定理不能推广到任意余秩一奇点。

2020 数学主题分类。 14B05, 32S50, 58K15.关键词与短语。 Lipschitz正规嵌入，余秩一曲面奇点，非平凡纽结链环，有限 $\mathcal{A}$-决定性。

另一方面，论文 [2]致力于研究包含微结的曲面，即 LNE 曲面芽 $X \subset (\mathbb{R}^4,0)$，其切锥是具有平凡结链环的曲面，而 X 的链环是非平凡结。该论文中的例子表明，包含微结的曲面可以通过代数参数化获得。

渐近记号。设有两个在 0（或在 ∞）附近定义的实值函数 f, g，若存在正的常数 c_1, $c_2 > 0$，使得在相应的情形下 $c_1|g| \le |f| \le c_2|g|$，则记作 $f \sim g$。若 $|f/g|$ 有界，则记作 $f = O(g)$；若 $f/g \to 0$（其中$g \neq 0$），则记作 $f = o(g)$。

切锥。设 $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^n,0)$ 是一个半代数芽。其切锥 C_0X 是切链环上的闭锥

$$S_0X := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \ v = \lim_{j\to\infty} \frac{x_j}{\|x_j\|}, \quad x_j \in X \setminus \{0\}, \ x_j \to 0 \right\}.$$

切锥也可以等价地描述为经过原点的半代数弧的切方向。

本文结构如下。第2节中，我们建立了一个独立的截面判据，用于判断 $\mathbb{R}^n$ 中秩一参数化解析曲面的 LNE 性质（定理 2.3）；借助 [6]，我们证明 LNE 等价于垂直于 x 轴的侧截面具有一致LNE，而无需检验互补的水平截面。第3节中，我们为多项式长结 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 引入了一种一致次数齐次化过程 $\mathcal{H}_d(\gamma)$，并证明（定理 3.3）该过程总能得到一个 LNE 曲面芽，其链环为 $K\#K$。最后，第4节中，我们将这一构造应用于 [4,3], 中的经典多项式三叶结参数化，从而证明定理1.1。我们还给出一个有限$\mathcal{A}$-决定的实现（定理 4.1），并证明这两个例子都包含微纽结（推论4.3）。

2. Lipschitz正规嵌入的截面判据

我们首先回顾Mendes和Sampaio的链环判据 [6] 及其在 ℓ^∞-范数下的表述。

命题2.1 (Mendes–Sampaio [6]). 设$(X,0) \subset (\mathbb{R}^n,0)$ 是一个闭半解析芽，且$(X \setminus \{0\},0)$ 是连通的。对于 $\mathbb{R}^n$上的任意半解析范数 ρ，以下条件等价:

(1) $(X,0)$ 是 *Lipschitz* 正规嵌入（*LNE*）；*(2)* 存在 $C \ge 1$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得链环族$\{K^\rho_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$（其中 $K^\rho_\varepsilon := X \cap \{\rho = \varepsilon\}$）是 C-*LNE*。

这里，C-*LNE*表示该族中的每个成员都是LNE，且具有相同的常数 C。特别地，可以取 $\rho(z) = \|z\|_\infty := \max_{1\le j\le n} |z_j|$。

注 2.2 (超立方体截面). 对于 $\rho = \|\cdot\|_\infty$，记

$$Q_\varepsilon = [-\varepsilon,\varepsilon]^n, \quad K^\infty_\varepsilon = X \cap \partial Q_\varepsilon, \quad A^\sigma_{j,\varepsilon} := X \cap Q_\varepsilon \cap \{z_j = \sigma\varepsilon\}, \quad j = 1,\dots,n, \ \sigma \in \{+,-\}.$$

设 J 由那些使得面 $\{v : \|v\|_\infty = 1, \ v_j = \sigma\}$ 与 C_0X 相交的对 (j,σ) 组成。由归一化方向的紧性，对于充分小的 ε，仅有的可能非空的面截面是 $A^\sigma_{j,\varepsilon}$，其中 $(j,\sigma) \in J$。因此命题*2.1*可写为

$$(X,0) \text{ is LNE} \iff \left\{ \bigcup_{(j,\sigma)\in J} A^\sigma_{j,\varepsilon} \right\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \text{ is } C\text{-LNE for some } C \ge 1.$$

此处的一致 *LNE* 条件适用于相关面的并；一般而言，若无粘合论证，它不能被各面上各自的 *LNE* 条件所替代。

现在给出真正的截面约化。下面的所有截面都由同一个超立方体 Q_ε截断；这一约定至关重要。我们记 $dP_0 = 0$ 为 P 的梯度，记$dG_0 = 0$ 为 G 在原点处的雅可比矩阵。

定理 2.3（秩一截面 LNE 判据）。设 $F\colon (\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 为实解析映射，并且是到其像芽 $X=F(\mathbb{R}^2)$ 上的同胚，且 秩$(dF_0)=1$。经过解析源坐标变换以及适当的环境空间解析坐标变换，可写为

$$F(x,y)=\big(x,P(x,y),G(x,y)\big),\qquad dP_0=dG_0=0,\qquad P(x,0)=0,\quad G(x,0)=(0,\dots,0),$$

其中 G 具有 $n-2$ 坐标，并令

$$\Gamma^{\pm}_{\varepsilon}:=X\cap Q_{\varepsilon}\cap\{x=\pm\varepsilon\}.$$

那么，以下条件等价：

(i) $(X,0)$ 是 *LNE*；*(ii)* 对某个 C，超立方体链环族 $\{K^{\infty}_{\varepsilon}\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ 是 C-*LNE*；*(iii)* 对某个共同常数 C，两族侧截面 $\{\Gamma^{+}_{\varepsilon}\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ 和 $\{\Gamma^{-}_{\varepsilon}\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ 是 C-*LNE*。

特别地，无需检验与 P 轴正交的水平截面即可验证 *LNE*。此判据不需要原点以外的浸入假设。

证明。由于 F是到其像上的同胚，$F(0,y)$ 不是常值函数。选取沿 $x=0$ 横向阶数 $p\ge 2$ 最小的 P，并在必要时从 G 的分量中减去其首项 y^p，再将其符号反转。因此

$$P(0,y)=ay^p+O(y^{p+1}),\qquad G(0,y)=O(y^{p+1}),\qquad a>0.$$

经过这些归一化处理，解析性给出

$$\begin{aligned}P(x,y)&=ay^p+O(|y|^{p+1}+|x|\,|y|),\\ G(x,y)&=O(|y|^{p+1}+|x|\,|y|).\end{aligned}\tag{1}$$

若 p 为偶数，则切锥是一个半平面，且 (i) 和 (iii) 均不成立（ [3, 推论 3.4]，的偶数阶障碍在侧截面上也可见）。因此，我们可以假设 p 为奇数；此时 $C_0X=\mathbb{R}^2\times\{0\}^{n-2}$。由注 2.2 可知，只有面 $x=\pm\varepsilon$ 和 $P=\pm\varepsilon$ 对超立方体链环有贡献。

令 $H^{\pm}_{\varepsilon}:=X\cap Q_{\varepsilon}\cap\{P=\pm\varepsilon\}$。我们先证明这些水平帽是具有一致利普希茨常数的图。对于每个 $\sigma\in\{+,-\}$和 $|x|\le\varepsilon$，小代表元中的方程 $P(x,y)=\sigma\varepsilon$ 迫使

$$|y|^p\sim\varepsilon,\qquad |x|\le\varepsilon\lesssim|y|^p.\tag{2}$$

事实上，由 (1) 可知，在此情形下误差为 $o(\varepsilon+|y|^p)$。求导得到

$$P_y(x,y)=apy^{p-1}+O(|y|^p+|x|)\sim|y|^{p-1}>0\quad\big(P(x,y)=\sigma\varepsilon,\ |x|\le\varepsilon\big).\tag{3}$$

由于 $p-1$ 为偶数，对每个 $|x|\le\varepsilon$ 恰有一个解 $y=\psi^{\sigma}_{\varepsilon}(x)$；由隐函数定理可知，$\psi^{\sigma}_{\varepsilon}$ 是解析的。此外，

$$|P(x,y)|\le\varepsilon\quad\Longleftrightarrow\quad\psi^{-}_{\varepsilon}(x)\le y\le\psi^{+}_{\varepsilon}(x).$$

因此，超立方体链环是一条由两个侧截面和两个水平帽组成的简单闭曲线。

(1) 中的估计还给出

$$|P_x|+\|G_x\|\le C|y|,\qquad \|G_y\|\le C(|x|+|y|^p).\tag{4}$$

由于 $(\psi^{\sigma}_{\varepsilon})'=-P_x/P_y$，根据链式法则、(2)–(4) 以及 $|x|\lesssim|y|^p$，沿着每个帽可得，

$$\left\|\frac{d}{dx}G(x,\psi^{\sigma}_{\varepsilon}(x))\right\|\le\|G_x\|+\|G_y\|\frac{|P_x|}{|P_y|}\le C_1(|y|+|y|^2)\le M,$$

其中 M 与 ε和 σ相互独立。现在我们可以明确地参数化所有四条弧：

$$\Gamma_\varepsilon^\sigma: \quad y \longmapsto \ell_\varepsilon^\sigma(y) := (\sigma\varepsilon, P(\sigma\varepsilon, y), G(\sigma\varepsilon, y)), \qquad \psi_\varepsilon^-(\sigma\varepsilon) \le y \le \psi_\varepsilon^+(\sigma\varepsilon),$$
$$H_\varepsilon^\sigma: \quad x \longmapsto h_\varepsilon^\sigma(x) := (x, \sigma\varepsilon, G(x, \psi_\varepsilon^\sigma(x))), \qquad -\varepsilon \le x \le \varepsilon,$$

对于 $\sigma \in \{+,-\}$。特别地，帽 H_ε^σ 都是一致利普希茨图，并且 $K_\varepsilon^\infty = \Gamma_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon^- \cup H_\varepsilon^+ \cup H_\varepsilon^-$。对于 $z = h_\varepsilon^\sigma(x_1)$ 和 $w = h_\varepsilon^\sigma(x_2)$，我们有

$$\operatorname{length}([z,w]_{H_\varepsilon^\sigma}) \le \sqrt{1+M^2}\,|x_1 - x_2| \le \sqrt{1+M^2}\,\|z-w\|. \tag{5}$$

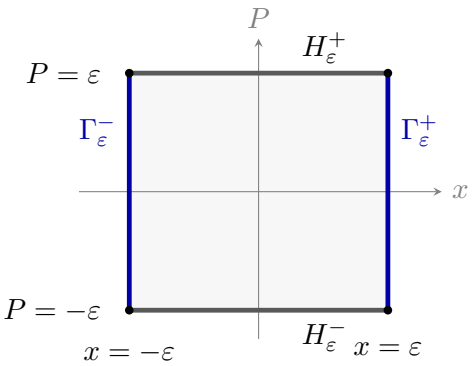


图1。将 K_ε^∞ 的四条弧示意性地投影到 $(x,\ P)$ 平面上。两条侧截面 $\Gamma_\varepsilon^\pm$ 和两个水平帽 $H_\varepsilon^\pm$ 在四个角点处相交。横向 G 坐标未显示。

等价关系 (i)⇔(ii) 即命题2.1。为证明 (iii)⇒(ii)，首先注意到 length($\Gamma_\varepsilon^\pm$) $\le A\varepsilon$：事实上，侧向参数区间位于 $|y| \le C\varepsilon^{1/p}$ 中，且在 $x = \pm\varepsilon$ 上，界 $|P_y| + \|G_y\| \le C'(|y|^{p-1} + \varepsilon)$ 积分后得到 $O(\varepsilon)$。

令 C 为侧向弧的公共 LNE 常数，并设 $L = \sqrt{1+M^2}$。对于相邻面上的 $\overline{z \in \Gamma_\varepsilon^\sigma}$ 和 $w \in H_\varepsilon^\tau$，令 c 为公共角点。由于 $x(c) = x(z)$，且帽是 x 上的 L-Lipschitz 图像，因此我们有 $\|w - c\| \le$ length$([w,c]) \le L|x(w) - x(c)| \le L\|z-w\|$。利用侧向弧的 C-LNE 性质和三角不等式可得 $d_{K_\varepsilon^\infty}(z,\ w) \le C\|z-c\| + L\|z-w\| \le [C(1+L)+L]\|z-w\|$。对于相对面，$\|z-w\| \ge 2\varepsilon$，而连接路径的长度为 $O(\varepsilon)$。同一面上的点可由 (iii) 或 (5) 处理。因此，整个超立方体链环一致地满足 LNE 性质，从而证明 (ii)。

反之，若 K_ε^∞ 是 L-LNE，则每条侧弧都一致地满足 LNE：其沿链环的另一条绕行路径长度至少为 4ε，而其自身长度至多为 $A\varepsilon$。根据 $L\|z-w\| < 4\varepsilon$ 或 $L\|z-w\| \ge 4\varepsilon$ 分类，可得任一侧弧的共同上界为 $\max\{L,\ AL/4\}\|z-w\|$。这就证明了 (iii)。□

3. 一致齐次化与多项式构造

回顾一下，$\mathbb{R}^3$ 中的一个长纽结是一个真光滑嵌入 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$（一条开且非闭合的纽结曲线），其一点紧化 $\gamma(\mathbb{R}) \cup \{\infty\} \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$ 定义了一个闭纽结 $K \subset S^3$。

构造 3.1 (一致齐次化)。令 $\gamma(u) = (p(u)\ q(u)\ r(u))$：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 为一个单射多项式浸入（一个多项式长结 K），满足

$$d := \deg r > \max\{\deg p, \deg q\}, \qquad d \ge 3 \ \textit{odd},$$

且 r 的首项系数 a 为正。定义一致齐次化 $F = H_d(\gamma){:}(\mathbb{R}^2{,}0) \to (\mathbb{R}^4{,}\,0)$ 为

$$F(x,y) := (x, x^d r(y/x), x^d p(y/x), x^d q(y/x)) =: (x, P_1(x,y), P_2(x,y), P_3(x,y)),$$

其中，最后三个坐标视为关于(x,y)的 d 次齐次多项式。

由于 $d > \max\{\deg p, \deg q\}$，我们有 $P_1(0,y) = ay^d (a>0)$，而 P_2 和 P_3 在 $\{x=0\}$ 上恒等为零。由 $d \geq 3$ 可知，$j^2F(0) = (x,0,0,0)$，且 $\operatorname{rank}(dF_0) = 1$。令 $\widetilde{\gamma} := (r,p,q)$，它由 γ 对其坐标作循环置换得到。

注 3.2（超立方体链环与球面链环）。尽管径向双 *Lipschitz* 同胚 $\Phi(z) = (\|z\|/\|z\|_\infty)z$ 将 S^3_ε 映射到 ∂Q_ε上，但它不保持 X，因为 X 是加权齐次的，而不是锥形的。尽管如此，$K_\varepsilon = X \cap S^3_\varepsilon$ 和 $K^\infty_\varepsilon = X \cap \partial Q_\varepsilon$具有相同的纽结类型。对于 $t>0$，缩放

$$\Lambda_t(x,z_1,z_2,z_3) := (tx, t^d z_1, t^d z_2, t^d z_3)$$

满足 $F(tx,ty) = \Lambda_t(F(x,y))$，并保持 X。对于每个 $s \in [0,1]$ 和 $z \in X \setminus \{0\}$，量 $\|\Lambda_t(z)\|_s$ 随着 t 严格地从 0 增至 $+\infty$。令 $t_s(z) > 0$ 为使得 $\|\Lambda_{t_s(z)}(z)\|_s = \varepsilon$ 成立的唯一连续参数，并令 $\rho(w) = \varepsilon w/\|w\|$。那么

$$z \in K_\varepsilon \longmapsto \rho\big(\Lambda_{t_s(z)}(z)\big) \in S^3_\varepsilon$$

是一个从 K_ε 到径向像 $\rho(K^\infty_\varepsilon)$的同伦。

定理 3.3 (多项式构造与链环)。在构造 *3.1* 的假设下，多项式映射 $F = H_d(\gamma)$ 满足：

(a) F是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的全局拓扑嵌入，并且在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$上是浸入（特别地，$F$ 在原点处有一个孤立奇点）；*(b)* $(X,0)$ 是 *Lipschitz* 正规嵌入，其中 $X = F(\mathbb{R}^2)$；*(c)* 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对每个 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$，链环 $K_\varepsilon = X \cap S^3_\varepsilon$ 都有定义，其同伦类型与 ε无关，并且 K_ε 与连通和 $K \# K$ 同痕（特别地，只要 K 非平凡，K_ε 就非平凡）。

证明。（*a*）孤立奇点与拓扑嵌入。由于 $F(0,y) = (0, ay^d, 0, 0)$，d的奇性和 γ 的单射性意味着 F 在 $\mathbb{R}^2$上是单射的。由于当 x 有界且 $|y| \to \infty$时，ay^d 在第二个坐标上占主导地位（而当$|x| \leq \|F(x,y)\|$时），它也是适当映射。此外，对于 $(x,y) \neq 0$，$\operatorname{rank}(dF_0) = 1$ 且 $\operatorname{rank}(dF_{(x,y)}) = 2$：对于 $x \neq 0$，这由 $\widetilde{\gamma}' \neq 0$可得；而在 $(0,y)$ 处，$y \neq 0$，则由 $\partial_y P_1(0,y) = day^{d-1} \neq 0$可得。因此，$F$ 是全局拓扑嵌入，并且在 0 以外是浸入。

*(b) LNE*性质的证明。由 (a) 和 $P_1(0,y) = ay^d$ 且 $d \geq 3$ 为奇数，定理 2.3 适用（取 $P = P_1$，$G = (P_2, P_3)$，以及 $p = d$）：只需证明两个侧截面 $\Gamma^\pm_\varepsilon = X \cap Q_\varepsilon \cap \{x = \pm\varepsilon\}$ 一致 LNE。

对于 $x = \varepsilon > 0$，令 $y = \varepsilon u$，得到

$$F(\varepsilon, \varepsilon u) = (\varepsilon, \varepsilon^d \widetilde{\gamma}(u)), \qquad J_\varepsilon := \{u \in \mathbb{R} : \|\widetilde{\gamma}(u)\|_\infty \leq \varepsilon^{1-d}\}.$$

我们首先注意到，当 ε 足够小时，J_ε 是一个区间。事实上，存在 $R > 0$，使得 r 在两侧尾部（$-\infty, -R]$ 和 $[R, \infty)$ 上严格递增，并且只要 $|u| \geq R$，就有 $|p(u)|, |q(u)| \leq |r(u)|$。对于大于 $|p|, |q|, |r|$ 在 $[-R, R]$ 上最大值的 $T = \varepsilon^{1-d}$，可得

$$J_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R} : |r(u)| \leq T\} = [u_-(T), u_+(T)], \qquad r(u_\pm(T)) = \pm T.$$

接下来我们证明，$\widetilde{\gamma}(\mathbb{R})$ 是全局LNE 的。将 $r(u)$ 写为 $= au^d + s(u)$，其中 $\deg s < d$。对于 $u < v$和 $H = \max\{|u|, |v|\} \geq 1$，$d$ 的奇性给出

$$\frac{v^d - u^d}{v-u} \geq \frac{1}{2} H^{d-1}, \qquad |s(v) - s(u)| \leq A H^{d-2}(v-u)$$

对于某个 $A > 0$。事实上，不妨利用对称性取 $H = v > 0$ 和 $u = \lambda v$, $\lambda \in [-1, 1)$；则 $(1-\lambda^d)/(1-\lambda) \geq 1/2$。因此，当 $H \geq H_0$ 足够大时，

$$r(v) - r(u) \geq \frac{a}{4} H^{d-1}(v-u).$$

由于 $\|\widetilde{\gamma}'(t)\| \leq BH^{d-1}$ 对于 $t \in [u,v]$，我们得到

$$\int_u^v \|\widetilde{\gamma}'(t)\|\, dt \leq \frac{4B}{a}|r(v) - r(u)| \leq \frac{4B}{a}\|\widetilde{\gamma}(v) - \widetilde{\gamma}(u)\|.$$

对于 u, $v \in [-H_0, H_0]$, 由紧致连通的 C^1 嵌入正则曲线是 LNE 这一事实可知，同一不等式只需将常数换成另一个常数即可得出，因为 $\widetilde{\gamma}$ 是单射多项式浸入。因此，存在 $C \geq 1$ 使得

$$\int_u^v \|\widetilde{\gamma}'(t)\|\, dt \leq C\|\widetilde{\gamma}(v) - \widetilde{\gamma}(u)\| \qquad (u < v \text{ in } \mathbb{R}). \tag{6}$$

由于 J_ε 是一个区间，(6) 得出，对于 $u < v$ 属于 J_ε,

$$d_{\Gamma_\varepsilon^+}(F(\varepsilon, \varepsilon u), F(\varepsilon, \varepsilon v)) \leq \varepsilon^d \int_u^v \|\widetilde{\gamma}'(t)\|\, dt \leq C\|F(\varepsilon, \varepsilon v) - F(\varepsilon, \varepsilon u)\|.$$

最后， d的齐次性和奇性给出 $F(-x,-y) = -F(x,y)$；因此 $\Gamma_\varepsilon^- = -\Gamma_\varepsilon^+$也是 C-LNE。定理 2.3 蕴含（X,0）是 LNE。

(c) 链环的识别。 根据 (a) 和锥结构定理 [5, 定理 3.2]，存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得链环 $K_\varepsilon = X \cap S_\varepsilon^3$ 定义良好，并且对于 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$具有恒定的同伦类型。根据注 3.2，只需确定 $K_\varepsilon^\infty = X \cap \partial Q_\varepsilon$的纽结类型。切锥是（$x, P_1$）-平面，并且对于足够小的 ε ，超立方体链环分解为

$$K_\varepsilon^\infty = \Gamma_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon^- \cup H_\varepsilon^+ \cup H_\varepsilon^-.$$

每个帽 H_ε^σ都位于面 $\partial Q_\varepsilon \cap \{P_1 = \sigma\varepsilon\}$ 内，并且是一个图

$$x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \longmapsto (x, \sigma\varepsilon, g_2^\sigma(x), g_3^\sigma(x)), \qquad |g_j^\sigma(x)| = o(\varepsilon) < \varepsilon.$$

因此，每个帽都是其三维面中的一个平凡弧。

球面 $\Sigma := \partial Q_\varepsilon \cap \{x = 0\} \cong S^2$将 ∂Q_ε分成两个闭三维球 $B^\pm = \partial Q_\varepsilon \cap \{\pm x \geq 0\}$。链环在 Σ 处与其横截地相交于两点 $q^\pm = H_\varepsilon^\pm \cap \{x = 0\}$ ，并分裂成适当弧 $\Delta^\pm = K_\varepsilon^\infty \cap B^\pm$。选取一条简单弧 $\beta \subset \Sigma$ ，连接 q^+ 与 q^- ，并通过以下方式闭合两个缠结

$$K_+ := \Delta^+ \cup \beta, \qquad K_- := \Delta^- \cup (-\beta).$$

沿 Σ 进行标准的连通和分解可得 $K_\varepsilon^\infty \cong K_+ \# K_-$。对跖映射 $A(z) = -z$的 $\det(-I_4) = +1$，并且在 ∂Q_ε上保定向；由于 $F(-x,-y) = -F(x,y)$，它交换两个缠结。其对 β的像在 Σ中相对于端点同痕于反向的闭合弧。因此， $K_- \cong K_+$ 作为无向结型，具有相同的手性。

半帽 $H_\varepsilon^\pm \cap \{x \geq 0\}$ 和 β 构成了一个与 Γ_ε^+内部不相交的平凡闭合缠结。由 $F(\varepsilon, \varepsilon u) = (\varepsilon, \varepsilon^d \widetilde{\gamma}(u))$，侧截面是 $\widetilde{\gamma}(J_\varepsilon)$ 的平移和缩放副本。当 $|u|$充分大时， r 严格递增，且其绝对值大于 p 和 q 。因此，所得闭合曲线同痕于长纽结 γ 的一点紧化。于是 $K_+ \cong K$ 和

$$K_\varepsilon \cong K_\varepsilon^\infty \cong K \# K.$$

由纽结亏格的可加性，当 K 非平凡时， $g(K\#K) = 2g(K) > 0$ ，从而证明了 (c)。 □

4. 显式反例与微纽结

定理*1.1*的证明。 考虑用于 [4, 3]的长三叶结的经典多项式参数化：

$$\gamma(u) = (p(u), q(u), r(u)) = \left(u^3 - u,\ u^4 - \frac{3}{2}u^2,\ u^5 - \frac{5}{3}u^3 + \frac{3}{5}u\right).$$

我们直接验证 γ 在 $\mathbb{R}$ 上是单射浸入：

- $p'(u)$ 的根 $= 3u^2 - 1$ （即 $u = \pm 1/\sqrt{3}$）不会使 $q'(u) = 4u^3 - 3u$ 消失，因此对每个 $u \in \mathbb{R}$， $\gamma'(u) \neq 0$ 。
- 若 $p(u_1) = p(u_2)$ 且 $q(u_1) = q(u_2)$ 满足 $u_1 < u_2$，则

$$u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 = 1, \qquad (u_2^2 - u_1^2)(u_1^2 + u_2^2 - \tfrac{3}{2}) = 0.$$

若 $u_2 = -u_1$，则得到 $(u_1, u_2) = (-1, 1)$，其中 $r(1) - r(-1) = -2/15 \neq 0$；否则 $u_1 u_2 = -1/2$, $u_1 + u_2 = \pm 1/\sqrt{2}$, 并且

$$r(u_2) - r(u_1) = (u_2 - u_1)\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) = \frac{11}{60}(u_2 - u_1) \neq 0.$$

事实上，这些多项式恒等式在 $\mathbb{C}$ 上成立，因此 $\gamma_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ 是单射浸入。

由于 $d = \deg r = 5 > \max\{\deg p, \deg q\} = 4$ 为奇数且首项系数为 $1 > 0$，应用构造 3.1 可得多项式映射

$$\boxed{F(x,y) = \left(x,\ y^5 - \frac{5}{3}x^2y^3 + \frac{3}{5}x^4y,\ x^2y^3 - x^4y,\ xy^4 - \frac{3}{2}x^3y^2\right).} \tag{7}$$

根据定理 3.3，F 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的全局拓扑嵌入，在原点之外是浸入，其二阶喷射为 $j^2F(0) = (x, 0, 0, 0)$，且其像 $X = F(\mathbb{R}^2)$ 在原点处是 LNE。此外，X 的链接是奶奶结 $T\#T$，其亏格为 2，因此是非平凡的。□

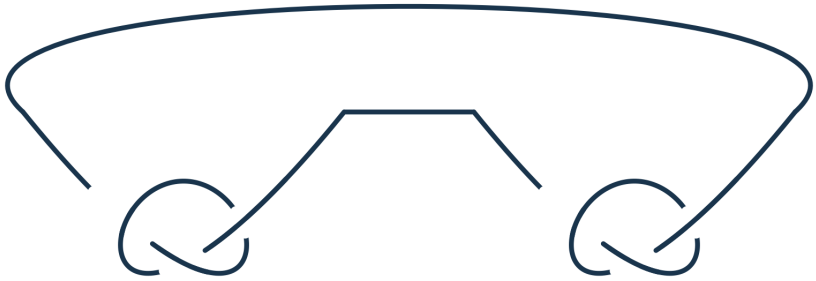


图 2. 奶奶结 $T\#T$ 的示意图（两个手性相同的三叶结）。这两个三叶结缠结取自多项式曲线 γ 在式 (7) 中的平面投影（$p(u)$, $q(u)$），交叉信息由 $r(u)$ 确定。

定理 4.1（有限决定实现）。多项式芽

$$\widehat{F}(x,y) = (x,\ y^5 - \tfrac{5}{3}x^2y^3 + \tfrac{3}{5}x^4y,\ x^2y^3 - x^4y + y^7,\ xy^4 - \tfrac{3}{2}x^3y^2 + y^8) \tag{8}$$

在 $\mathbb{R}$ 上具有孤立奇点，其像是 *LNE*，且其链环是奶奶结 $T\#T$。其复化以及由此得到的实芽本身都是有限 A-决定的。

证明。记 $F_s = F + s(0,\ 0,\ y^7,\ y^8)$，$0 \le s \le 1$，从而 $F_0 = F$ 且 $F_1 = \widehat{F}$。复有限决定性。复化的多项式曲线 $\widetilde{\gamma}_{\mathbb{C}} = (r,\ p,\ q)$ 是一个单射浸入：定理 1.1 证明中的代数恒等式在 $\mathbb{C}$ 上仍然成立，并且 p' 和 q' 没有公共根。由于向量 $\partial_y(P_1,\ P_2,\ P_3)$ 是四次齐次的，且在 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 中没有零点，因此七次和八次项在一个小代表元上不会在 0 以外产生临界点。

我们还排除了复重合点。任何这样的点对都具有 $(x,y), (x,z)$ 的形式，其中$y \neq z$。当 $x = 0$ 时，方程 $y^5 = z^5$ 和 $y^7 = z^7$ 推出 $y = z$。对于 $x \neq 0$，令 $u = y/x$和 $v = z/x$。如果 u, v保持有界，则曲线 $u \mapsto (r(u)\ p(u) + x^2u^7, q(u) + x^3u^8)$ 在紧集上仍然是嵌入的，因为它们在 C^1 中收敛到 $\widetilde{\gamma}_{\mathbb{C}}$。因此，在一列趋近于 0 且不属于此情形的假想重合点中，$|u|$ 和 $|v|$ 变得无界；事实上，$r(u) = r(v)$ 不可能使其中一个保持有界而另一个发散。必要时交换y和 z，令 $a = x/y \to 0$ 和 $b = z/y \to \zeta$，其中第二坐标相等给出 $\zeta^5 = 1$。如果 $\zeta = 1$，则差商 $\Delta P_1(x;\ y, z) := [P_1(x, y) - P_1(x, z)]/(y - z) =$

$5y^4(1+o(1))$ 不能为零。对于 $\zeta \neq 1$，代入$x = ay$, $z = by$ 并除以 y^5后，最后两个坐标相等给出

$$\begin{aligned} a^2(b^3-1) - a^4(b-1) + y^2(b^7-1) = 0, \\ a(b^4-1) - \tfrac{3}{2}a^3(b^2-1) + y^3(b^8-1) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

由于 $\zeta^3, \zeta^4, \zeta^7, \zeta^8 \neq 1$，这两个方程分别给出 $|a| \sim |y|$ 和 $|a| \sim |y|^3$，从而得到一个矛盾。因此， $F_{\mathbb{C}}$ 在一个去心代表元上是单射浸入，故根据 Mather–Gaffney 判据 [7, 定理 2.1]，它是有限$\mathcal{A}$决定的。复化的有限决定性意味着实解析芽的有限决定性。

LNE 与实嵌入。在侧截面 $x = \pm\varepsilon$ 上，令 $y = xu$。将横向坐标除以 x^5 后，得到 $\tilde{\gamma}(u) + E_{x,s}(u)$，其中 $E_{x,s}(u) = (0, sx^2u^7, sx^3u^8)$。由于侧截面包含于超立方体 $Q_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]^4$，可得 $|r(u)| \le \varepsilon^{-4}$，因此 $|u| = O(\varepsilon^{-4/5})$ 且 $|xu| = O(\varepsilon^{1/5})$。此外，$\|E'_{x,s}(u)\| \le C(|xu|^2 + |xu|^3)$ $\|\tilde{\gamma}'(u)\| \le \kappa_\varepsilon \|\tilde{\gamma}'(u)\|$，其中 $\kappa_\varepsilon = O(\varepsilon^{2/5}) \to 0$。当 $|u|$ 充分大时， r 严格递增，且大于其他坐标（包括它们的扰动）；因此，可容许参数集仍为定理 3.3(b) 中的区间 J_ε。导数估计保持浸入性，并与 (6) 一起将扰动后的弧长限制在 $C(1+\kappa_\varepsilon)/(1-C\kappa_\varepsilon)$ 乘以端点间距离以内。因此，侧截面一致地满足 LNE 且为嵌入；实映射在一个去心代表元上仍为嵌入，而定理 2.3 给出 $F_s(\mathbb{R}^2)$ 的 LNE，特别是对 $s = 1$ 也成立。

纽结的保持。对于 $\theta = (a, b) \in S^1$，写作 $F_s(t\theta) = (ta, t^5A(\theta) + st^7B_7(\theta) + st^8B_8(\theta))$。这里， $A = (P_1, P_2, P_3)|_{S^1}$ 是五次齐次部分，而 $B_7(a, b) = (0, b^7, 0)$ 和 $B_8(a, b) = (0, 0, b^8)$ 是扰动向量。由于 A 仅在$b = 0$时为零，我们有 $\|B_7\| + \|B_8\| \le C\|A\|$。因此，对 s 和 θ 一致地有 $\frac{d}{dt}\|F_s(t\theta)\|^2 = 2ta^2 + 10t^9\|A(\theta)\|^2 + O(t^{11}\|A(\theta)\|^2) > 0$，其中 $0 < t \ll 1$。于是，每条源射线都与一个固定且充分小的球面的原像恰好相交一次。由此得到的 S^3_ε 中嵌入圆族构成了从 F 的链环到 $\widehat{F}$ 的链环的同伦，因此后者是 $T\#T$。□

现在，我们将这一构造与 Birbrair、Denkowski、Medeiros 和 Sampaio [2] 引入的微结理论联系起来。在当前例子中，非平凡缠结位于两个相反的 x-轴射线周围逐渐变窄的扇区内。

我们称一个在原点处具有孤立奇点的 LNE曲面芽（X,0）含有一个微结，如果它在外双 Lipschitz 意义下等价于（X,0）在 $0 \in \mathbb{R}^4$ 处的切锥，但不在环境双 Lipschitz 意义下等价于（X,0）在 $0 \in \mathbb{R}^4$ 处的切锥。

注4.2。 论文（[2]）中的例子满足这一定义。该定义与 [2],中的定义并不完全相同，但为简便起见，我们采用此定义。

推论4.3 （微结的存在性）。 由（7）或（8）描述的 *LNE* 曲面 X 在每个半曲面 $X_\pm$ 中都含有与 K 相对应的微结：$= F$（$\{\pm x \ge 0\}$）。

证明。 注意，(X,0) 的切锥是平面 $\mathbb{R}^2$，其链环是平凡结。由于 $(X, 0)$ 是 LNE，根据 Hölder复形理论 [1]，(X,0) 与 ($\mathbb{R}^2$,0) 外双 Lipschitz 等价。在这两种情形下， X 的链环都是非平凡的，因此 $(X, 0)$ 与其切锥并非环境双 Lipschitz 等价。□

致谢：在准备本文期间，作者使用了 ChatGPT 和 Gemini 协助完善和修订稿件。作者对最终稿件的内容和准确性承担全部责任。

参考文献

[1] L. Birbrair. 二维半代数集的局部双利普希茨分类。《休斯顿数学杂志》，25，（1999），453-472。[2] L. Birbrair、M. Denkowski、D. L. Medeiros 与 J. E. Sampaio，*LNE* 赫尔德三角形的普遍性定理，《国际数学研究通知》**2025** （2025），第11期，rnaf123，1–9。

[3] L. Birbrair、R. Mendes 与 J. J. Nuño-Ballesteros，曲面的度量非打结余秩一奇点，载于 $\mathbb{R}^4$，《几何分析杂志》**28**（2018），3708–3717。[4] R. Mendes 与 J. J. Nuño-Ballesteros，奇异曲面的纽结与拓扑，载于 $\mathbb{R}^4$，载于《实奇点与复奇点》，《当代数学》**675**，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016，第229–239页。[5] R. Mendes 与 J. J. Nuño-Ballesteros，打结映射的拓扑分类与有限决定性，《密歇根数学杂志》**69**（2020），第4期，831–848。[6] R. Mendes 与 J. E. Sampaio，论利普希茨正规嵌入集的链环，《国际数学研究通知》**2024**（2024），第9期，7488–7501。[7] C. T. C. Wall，光滑映射芽的有限决定性，《伦敦数学会公报》**13**（1981），第6期，481–539。数学系，塞阿拉联邦大学，皮西校区，914号楼，福塔莱萨，CE，邮编60455-760，巴西电子邮箱： lev.birbrair@gmail.com精确科学与自然科学研究所，巴西葡语非洲裔国际融合大学（Unilab），帕尔马雷斯校区，阿卡拉佩，CE，邮编62785-000，巴西电子邮箱： rodrigomendes@unilab.edu.br数学系，瓦伦西亚大学，布尔哈索特校区，46100 布尔哈索特，西班牙电子邮箱： Juan.Nuno@uv.es