风险厌恶型代理人的适当且最优评分规则

Ying Liu* Raimundo Saona

伦敦政治经济学院数学系

2026年11月23日

arXiv:2611.30563v1 [cs.GT] 23 Nov 2026

摘要

评分规则用于通过取决于报告和实际结果的支付来诱导概率信念。我们探讨当代理人为风险厌恶时，应如何设计这些规则以诱导如实报告并激励有成本的信息获取。对于具有熵式风险偏好且处于有限状态空间中的代理人，我们通过指数变换刻画适当评分规则，在有界支付下推导信息获取的最优结构，并在二元情形中得到显式最优系数。风险中性极限保持适当性，并在二元情形中保持最优性，同时恢复非二元状态的最优投注结构。对于二元模型中的最优设计，只需关注其关联凹函数在先验两侧均为仿射的规则。最优系数仅取决于先验和风险厌恶参数。我们所构造的二元最优规则也可由某一特定风险中性最优规则经精确变换得到。在非二元模型中，最优设计归结为在变换后的投注机制中选择最佳先验界。

关键词： 适当评分规则、信息引出、信息获取、风险厌恶、熵确定性等价、机制设计。

1 引言

决策者往往需要由他人掌握的信息。在机制设计中，引出这类信息是一个经典问题：决策者必须预先设定奖励规则，以激励信息持有者分享信息。例如，投资者想知道某个项目是否会成功，以便决定是否投资；而分析师可以通过有成本的研究，对项目成功的可能性形成信念。因此，投资者承诺采用一项支付规则：分析师将根据其报告以及项目结果获得金钱奖励。随后，分析师进行研究，并以概率预测的形式向投资者报告其信念。双方观察到结果后，投资者按照规则向分析师支付报酬。这类支付规则称为评分规则（Gneiting and Raftery，2007年）。

分析师关心的是自己的支付，而不是帮助投资者。他们
因此，如果虚报预测能提高自己的报酬，他们就可能这么做。如果评分规则使分析师如实报告成为最优选择，那么该评分规则就称为适当：无论其信念是什么，如实报告都能使其对最终随机支付的评价达到最大。在风险中性条件下，这种评价就是期望支付。

在假设风险中性的前提下，经典文献已对适当评分规则的刻画进行了广泛研究。Savage（1971年）表明，当结果空间有限时，适当评分规则与代理人信念的凸函数相对应：当且仅当规则的支付由此类函数的支撑仿射函数给出时，该规则才是适当的

*电子邮件：y.liu12123@gmail.com。

。Gneiting and Raftery（2007年）进一步发展了这一表示，并将适当评分规则的理论推广至一般概率空间。

在实践中，代理人往往是风险厌恶的：他们不仅关心期望支付，也关心支付有多大风险。在风险中性条件下适当的评分规则，对这类代理人而言未必适当。

二次评分规则就是这类规则的一个常见例子。再考虑一位希望了解分析师对某个项目能否成功的信念的投资者。该项目有两种可能的结果：成功（$x = 1$）和失败（$x = 0$）。分析师报告成功概率 $r \in [0, 1]$，投资者按照以下方式向分析师支付

$$s(r, x) = 100[1 - (r - x)^2].$$

假设分析师认为该项目成功的概率为 0.75。如实报告这一信念，在项目成功时可获得 93.75，在项目失败时可获得 43.75，期望支付为 81.25。相比之下，报告 0.5 无论结果如何都可获得 75。风险中性分析师会选择如实报告，因为这样期望支付更高。然而，风险厌恶型分析师也会厌恶如实报告所带来的风险，因为支付可能低至 43.75。如果分析师的风险厌恶程度足够高，他们对这种有风险的随机支付的估值会低于确定的 75，因此更愿意报告 0.5。因此，如实报告并非这类分析师的最优选择，二次评分规则对他们而言也不适当。

关于风险偏好下信念引出的研究颇为丰富，针对这一问题的研究可归纳为三种路径。第一，有些研究沿用在风险中性条件下适当的评分规则，并考察具有不同风险偏好的代理人会如何扭曲报告。Peysakhovich and Plagborg-Møller (2012)表明，风险厌恶的期望效用最大化者倾向于将报告向均匀分布方向偏移，正如上文示例所示。Chambers et al. (2019)刻画了更一般偏好下适当评分规则所引出的报告；这类偏好可能兼具风险厌恶和模糊厌恶。

第二，当代理人的效用函数或偏好模型已知时，另一类研究会修改支付规则，使如实报告成为最优选择，或设计程序来纠正扭曲的报告。对于期望效用代理人，Fang et al. (2010)指出，如果评分规则 h对风险中性代理人而言是适当的，且其取值范围包含在一个可逆的冯·诺伊曼–摩根斯坦效用函数 u的值域内，那么货币评分规则 $u^{-1} \circ h$ 对效用为 u的代理人而言是适当的。对于具有非期望效用偏好的代理人（例如秩依赖效用者），Offerman et al. (2009)、Kothiyal et al. (2011)和Carvalho (2015)提出了纠正所报告信念或恢复这类代理人用以替代信念进行报告的决策权重的方法。

第三，有些研究旨在寻找这样的引出程序：即使设计者对代理人的风险偏好所知有限，这些程序仍然有效。Lambert（2011）刻画了适用于广泛一类具有概率推理能力的代理人的概率引出机制，并证明这些机制具有激励相容性。采用确定性事件或有支付时，这类机制通常只能引出某事件是否比其补事件更可能发生。相较之下，通过对固定货币奖品进行随机化，可以引出精确概率。

这些研究关注的是如何促使代理人如实报告。然而，能够使如实报告成为最优选择的适当评分规则，仍可能无法向分析师支付足够报酬，使其愿意首先进行有成本的研究：如果分析师获取信息所带来的收益低于成本，分析师就没有理由获取这些信息。此外，不同的适当评分规则所能带来的收益可能大不相同。

在我们的模型中，我们将决策者称为委托人，将信息持有者称为代理人。我们研究在代理人的研究需要付出成本时，委托人应如何设计评分规则。世界状态的可能数量是有限的。在最简单的情况下，只有两种状态：项目成功或失败。我们首先研究这种情况，然后将分析扩展到任意

有限数量的状态。研究会产生关于状态的信号。信号与状态的联合分布为双方所知，每个可能的信号所对应的信念也为双方所知。代理人无法选择信号，只能决定是否观察信号。时序如下。

1. 委托人宣布一项评分规则。2. 代理人决定是否支付固定成本以观察信号。如果决定支付，他们会私下观察信号并更新信念；否则，他们保留先验信念。3. 代理人报告对状态的概率预测。他们可以自由报告任何预测，不一定要如实反映自己的信念。4. 状态揭晓后，委托人根据评分规则向代理人支付报酬。

代理人知道成本，但委托人不知道。代理人厌恶风险，并使用指数效用来评估风险支付，其中双方都知道的参数 θ衡量风险厌恶程度。无论报告内容和实现状态如何，每笔支付都必须介于0和1之间（以某种货币单位计）。由于委托人不知道成本，她希望即使成本很高，代理人也愿意进行研究。因此，我们要寻找能够使代理人仍愿意观察信号的最高成本达到最大值的评分规则。

这一设定引出了两个问题。
1. 哪些评分规则能使如实报告成为这类风险厌恶型代理人的最优选择？这个问题属于上述第二种方法：偏好模型已知，我们改变支付规则。2. 在这些规则中，哪一种能提供最强的获取信息的激励？

在第二个问题中，将注意力限制在适当评分规则上并不会损失一般性。我们只考虑这样一类规则：在每种信念下，代理人都有一个最优报告；否则，报告问题就无解。对于每一种此类规则，启示原理（Myerson，1979年）都给出一种适当规则，使其在每种信念下、每种状态中的支付，都等于原规则下最优报告所获得的支付。由于每种状态下的支付都保持不变，这对风险厌恶型代理人也成立。代理人在有无信号时能够获得的最佳支付也不变，因此新规则提供相同的获取信息的激励。其支付属于原规则的支付范围，因此满足相同的支付界限。

我们的第二个问题——哪种评分规则能最有力地激励信息获取——属于通过评分规则和契约激励有成本的信息获取这一文献。该领域的论文首先在代理人如何获取信息以及如何使用信息方面有所不同。在与我们最接近的论文中，Li 等人（2025）假设代理人决定是否获取一个信号，其后验信念的分布为委托人所知，随后报告一个信念。在其他论文中，代理人选择学习多少。Osband（1989）研究了一位预测者，该预测者可以按每单位精确度固定的边际成本来提高预测的精确度；Wu（2026）则允许代理人选择有关连续状态的信号精确度。在 Clemen（2002）和 Neyman 等人（2021）的研究中，预测者收集样本并更新贝叶斯信念。前者中的专家在看到任何数据之前就预先选择样本量，而后者中的预测者逐个购买硬币样本，并根据情况决定何时停止。在另一些研究中，代理人选择学习什么。Hartline 等人（2023）考虑了若干任务，每项任务都有各自的成本和信号，代理人选择在哪些任务上付出努力。在 Whitmeyer 和 Zhang（2023）以及 Rappoport 和 Somma（2017）的研究中，代理人可以付出成本选择任意信息结构，也就是任意后验信念分布；前者中，代理人私下观察后验信念并报告它，后者中，实验结果可观察且可写入契约。委托人掌握的信息也各不相同。Li 等人（2025）假设委托人知道后验信念的分布，Chen 和 Yu（2026）假设委托人只知道一组可能的信息结构，而 Chen 等人（2023）假设委托人既不知道成本，也不知道

信息结构，并通过重复互动学习评分规则。代理人如何使用信息也有所不同。Papireddygari 和 Waggoner（2022）允许代理人在获取信息后采取隐蔽行动，因此委托人只能观察到最终结果；Lindbeck and Weibull（2020）将投资决策本身委托给代理人；而在 Keppo and Li（2025）的研究中，代理人付出有成本的尽职调查努力，随后建议是否投资。

这些论文在支付约束和委托人的目标方面也有所不同，而最优规则取决于这两者。在 Li 等人（2025年）、Hartline 等人（2023年）和 Wu（2026年）中，支付在每种状态下都有上限；在 Chen 和 Yu（2026年）中，支付的期望值有上限；而在 Papireddygari 和 Waggoner（2022年）中，支付只需满足非负条件。委托人在 Li 等人（2025年）中最大化代理人的信号收益，在 Chen 和 Yu（2026年）中最大化其在各种信息结构下的最坏情况收益，在 Neyman 等人（2021年）中最大化预测精度，在 Wu（2026年）中最大化代理人的信号精度，并在 Papireddygari 和 Waggoner（2022年）及 Whitmeyer 和 Zhang（2023年）中最小化自身支付。因此，最优规则的形式各不相同。当目标是最大化信号收益且信息结构已知时，最优规则呈 V 形（Li 等人，2025年；Chen 和 Yu，2026年）；在 Li 等人（2025年）中，该规则对信息结构的依赖仅通过先验均值体现。当目标是最大化精度时，若报告与状态足够接近，则支付全部预算，否则不予支付（Wu，2026年）。其中几篇论文利用启示原理，将讨论范围限制在适当评分规则内，且不失一般性（Li 等人，2025年；Chen 等人，2023年；Papireddygari 和 Waggoner，2022年）。

这些论文大多假设代理人是风险中性的，或者像 Wu（2026）那样，以效用衡量信息的成本，因此风险态度可以纳入支付中。少数论文关注风险厌恶的影响。Whitmeyer 和 Zhang（2023）指出，对于风险厌恶型决策者，委托人无法实现第一最佳，因为诱使代理人学习会使其承担风险。Lindbeck and Weibull（2020）研究了这样一种情形：委托人将信息获取和投资决策委托给一名受到有限责任保护的代理人；他们通过数值分析发现，委托人可以从风险厌恶型代理人身上获益，因为风险厌恶会减弱有限责任所造成的奖金与惩罚之间的不对称性。在附录中，Clark and Reggiani（2021）考虑了一名风险厌恶型代理人，此时对激励的最优扭曲也能提供保险。我们的问题与这些研究的不同之处在于代理人的选择以及委托人的优化目标。

我们以 Li 等人（2025）的有界评分规则设计框架为出发点；在该框架中，代理人是风险中性的。我们研究风险厌恶如何改变如实报告的条件以及信息获取的最优激励。我们将代理人建模为具有指数效用的期望效用最大化者。对于货币收益 $z \in \mathbb{R}$ 和风险厌恶参数 $\theta > 0$，效用函数为

$$u_\theta(z) = -e^{-\theta z}.$$

该函数体现了常绝对风险厌恶（CARA），其系数为 θ。与之对应的确定性等价物称为熵确定性等价（CE）。我们选择这一模型有两个原因。首先，在期望效用框架下，分两步评估支付——先在给定信号的条件下评估，再对可能的信号进行评估——所得数值与直接评估最终支付相同。否则，获取信息的价值就会取决于代理人是逐步评估支付，还是将其作为整体来评估。其次，给每种结果都加上相同金额，不会改变代理人对货币彩票的排序。因此，固定获取成本会使 CE 恰好减少相同数额的成本（Föllmer 和 Schied，2002年；Föllmer 和 Weber，2015年），而代理人愿意获取信息的最高成本，正是有信息与无信息时的 CE 之差。在具有严格风险厌恶的期望效用偏好中，指数效用是唯一具有第二个性质的效用形式（Müller，2007年），并且当 $\theta \to 0$ 时，它会恢复风险中性。

该 p 委托人希望在有界支付的同时，促使代理人获取信息 .

因此，按照 Li 等人（2025）的做法，我们要求 $s(r,\ x) \in [0,1]$ 对每个报告 r 和每个实现状态 x 都成立。上界限制了委托人在每种状态下的支付，而不仅仅是平均支付。仅对期望支付设限，会允许委托人在不太可能出现的状态下支付极高金额。下界是一项有限责任约束：代理人永远不会被要求支付费用（Papireddygari and Waggoner，2022年；Whitmeyer and Zhang，2023年）。Hartline 等人（2023）和 Wu（2026）也采用了有界支付。在风险中性问题中，这一上界还能防止委托人通过不断提高支付来获得任意大的激励（Li 等人，2025）。从代理人的角度看，上界 1 确定了衡量风险厌恶参数 θ 所用的货币单位。

主要结果。 我们首先研究二元状态情形。对于具有风险厌恶θ的代理人，我们刻画适当评分规则（定理 3.1）。该刻画与 Savage（1971年）的结果相似：一旦将每笔支付 s 变换为 $e^{-\theta s}$，一个规则是适当的，当且仅当其变换后的支付是某个正凹函数的支撑仿射函数；正如在风险中性情形下，它们是凸函数的支撑线一样。我们证明，当$\theta \to 0$时，适当规则的极限对于风险中性代理人而言仍是适当规则（推论 3.2）。我们还刻画了同时对每个 θ 都适当的规则（定理 3.3）。对于向两个状态都赋予正概率的报告，这些规则要么使支付独立于报告，要么在所报告的更可能状态实际发生时支付固定的较高金额，否则支付固定的较低金额。表达对状态确定性的报告允许一些额外的支付选择。前两个结果可扩展至任意有限数量的状态（定理 4.1 和推论 4.2）。

接下来，在二元情形下，我们研究最优规则。我们证明，对于任意信息性后验分布，都存在一个最优规则，使得适当性刻画中的凹函数呈倒 V 形，且峰值位于先验处（定理 3.4）。具体而言，所有严格低于先验的报告在每个状态下都给出相同的支付；严格高于先验的报告也一样。我们明确推导出其系数：这些系数仅取决于先验和 θ，而与后验信念的分布无关（命题 3.5）。当 $\theta \to 0$ 时，一族最优规则收敛于一个风险中性最优规则（推论 3.6）。我们还给出一个依赖于 θ 的显式变换，它能将一个特定的风险中性最优规则映射为适用于每个 θ 的最优规则（命题 3.7）。

对于有限多个状态，最优规则可以通过投注机制来实现（定理 4.3），这与风险中性问题中的做法相同（Li 等人，2025年）。委托人提供所有支付均处于 $[0,1]$ 且在先验下的期望变换后的支付不低于指定界限的赌注，代理人则根据自身信念选择最优赌注。这一选择是一个分数背包问题。当 $\theta \to 0$ 时，对于相应的先验界，这些赌注和获取激励收敛于风险中性机制中的相应赌注和激励（推论 4.4）。

本文其余部分安排如下。第 2 节建立模型并给出一个二元状态示例。第 3 节介绍二元状态下的结果，第 4 节介绍有限多个状态下的结果。第 5 节总结全文。

2 预备知识

2.1 环境与时序

委托人希望了解一个不确定状态 X ，该状态取值于有限集合$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$。代理人可以通过私下观察信号 Y来获取关于 X的信息，但需付出成本。委托人旨在设计一种支付有界的评分规则，以促使代理人如实地报告，并使其即使在成本很高时也愿意获取信息。

令 π 表示 X 与 Y 的联合分布，并令 $\Delta(\mathcal{X})$ 表示概率 y

在 $\mathcal{X}$ 上的分布。观察到 $Y = y$ 后，代理人形成后验信念 $q(y) \in \Delta(\mathcal{X})$，其中$q_i(y) = \Pr_\pi($ $X = x_i \mid Y = y)$。我们将随机后验信念记为 $Q = q(Y)$，并令 F 表示由 π 诱导的其分布。先验为 $p \in \Delta(\mathcal{X})$，其中 $p_i = \Pr_\pi(X = x_i)$。贝叶斯可行性给出 $\mathbb{E}_{Q\sim F}[Q] = p$。除要求先验具有满支撑外，我们不对 π 作任何限制，因此对于每个 $i = 1,\ldots,m$， $p_i > 0$。信号 Y 和后验信念 Q 可以取无限多个值。若 $\Pr(Q \neq p) > 0$，我们称该信号具有信息性。联合分布 π 是共同知识，因此双方也知道从信号到后验信念的映射 $y \mapsto q(y)$。

委托人首先承诺采用并宣布一项评分规则 s。对于每个报告 $r \in \Delta(\mathcal{X})$ 和每个实现状态 $x \in \mathcal{X}$，该规则规定向代理人支付 $s(r, x)$。看到规则后，代理人决定是否承担固定的货币成本 $c \geq 0$ 以观察 Y。代理人知道 c，但委托人不知道。如果代理人获取信息，就会私下观察到实现的信号 y，并将其信念更新为 $q(y)$。否则，其信念保持为 p。随后，代理人提交一份报告 $r \in \Delta(\mathcal{X})$。观察到状态 X 后，委托人支付 $s(r, X)$。如果代理人获取了信息，其净货币收益为 $s(r, X) - c$；否则为 $s(r, X)$。

2.2 偏好与适当性

代理人使用指数效用 $u_\theta(z) = -e^{-\theta z}$来评估货币收益，其中 z 为货币收益， $\theta > 0$ 为双方均知晓的绝对风险厌恶系数。具体而言，

$$-\frac{u_\theta''(z)}{u_\theta'(z)} = \theta.$$

该系数不受效用函数的正仿射变换影响，但其数值取决于货币单位。若一个新货币单位等于 $a > 0$ 个旧单位，写作 $t = z/a$，则有 $\widetilde{u}(t) = u_\theta(at) = -e^{-a\theta t}$。因此，以新单位表示的系数为 $a\theta$，而代理人的偏好保持不变。

与之对应的确定性等价物，是其效用等于随机收益的期望效用的确定货币收益（Föllmer 和 Weber，2015年，第 4.4 节）。对于有界随机收益 Z，其定义为

$$u_\theta\big(\mathrm{CE}_\theta(Z)\big) = \mathbb{E}[u_\theta(Z)].$$

对于指数效用，解这个方程可得以下表达式。

定义 2.1（熵确定性等价）。对于有界随机收益 Z 和 $\theta > 0$，熵确定性等价为

$$\mathrm{CE}_\theta(Z) = -\frac{1}{\theta}\log\mathbb{E}\left[e^{-\theta Z}\right].$$

θ 值越大，表示绝对风险厌恶程度越高。我们定义 $\mathrm{CE}_0(Z) := \mathbb{E}[Z]$，它是当 $\theta \to 0^+$ 时 $\mathrm{CE}_\theta(Z)$ 的极限。因此， $\theta = 0$ 表示风险中性基准。当 $\theta \to \infty$ 时，$\mathrm{CE}_\theta(Z)$ 收敛于 Z 的本质下确界（Föllmer 和 Schied，2002年）。

令 $U_\theta(q, r)$ 表示在信念 q 下支付 $s(r, X)$ 的确定性等价物，对于 $q, r \in\Delta(\mathcal{X})$。对于 $\theta > 0$，

$$U_\theta(q, r) = -\frac{1}{\theta}\log\left(\sum_{i=1}^{m} q_i e^{-\theta s(r,x_i)}\right).$$

在风险中性下， $U_0(q, r) = \sum_{i=1}^{m} q_i s(r, x_i)$。

给定信念 q，代理人会选择一份报告，使其净货币收益的确定性等价物最大化。如果代理人已经获取信息，平移不变性意味着

固定成本 c 会使每份报告的确定性等价物都减少相同的数额。因此，在信念 q 下，最优报告满足

$$r \in \arg\max_{\hat{r}\in\Delta(\mathcal{X})} U_\theta(q,\hat{r}).$$

我们将适当评分规则的经典概念（Savage，1971年；Gneiting 和 Raftery，2007年）推广到这些偏好。

定义 2.2 （θ-适当评分规则）。 对于 $\theta \geq 0$，评分规则 s 若为 θ-适当，则

$$U_\theta(q,q) \geq U_\theta(q,r) \qquad \text{for all } q,r \in \Delta(\mathcal{X}).$$

全文中，适当性均按弱意义理解。如实报告是一种最优选择，但也可能与其他报告并列。我们不设定任何并列时的择优规则，因此最优报告可能无法识别代理人的信念。

2.3 信息获取激励

在决定是否获取信息时，代理人会评估其在尚未知晓后验信念 Q 或实现状态 X之前将获得的支付。观察到 Q后，代理人可以选择使其条件确定性等价物最大化的报告。若不获取信息，代理人则根据先验 p选择报告。对于在每种信念下均存在最优报告的评分规则 s ，将扣除信息获取成本前的信息获取激励定义为

$$\mathcal{I}_\theta(s) = \mathrm{CE}_\theta\left(\max_{r\in\Delta(\mathcal{X})} U_\theta(Q,r)\right) - \max_{r\in\Delta(\mathcal{X})} U_\theta(p,r).$$

根据引言中的启示原理论证，在最优设计问题中，我们可以将注意力限制在 θ-适当评分规则上。对于这类规则，如实报告能够达到两个最大值。因此，我们可以用如实报告 Q 计算最优条件确定性等价物 $U_\theta(Q,\ Q)$，因为在给定后验信念下，所有最优报告都会产生相同的条件值。因此，对于 θ-适当评分规则

$$\mathcal{I}_\theta(s) = \mathrm{CE}_\theta\big(U_\theta(Q,Q)\big) - U_\theta(p,p). \tag{2.1}$$

如果代理人获取信息，就需要支付固定成本 c。根据平移不变性，获取信息的净收益为

$$\begin{aligned}\mathrm{CE}_\theta\big(U_\theta(Q,Q)-c\big) - U_\theta(p,p) &= \mathrm{CE}_\theta\big(U_\theta(Q,Q)\big) - U_\theta(p,p) - c\\ &= \mathcal{I}_\theta(s) - c.\end{aligned}$$

若 $c < \mathcal{I}_\theta(s)$，代理人严格偏好获取信息；若 $c > \mathcal{I}_\theta(s)$，则严格偏好不获取信息；两者相等时则无差异。委托人旨在满足下文所述支付界限的前提下，使这一成本阈值最大化。

备注。 在风险中性条件下，对于适当评分规则，Li 等人（2025年，式（1））将获取激励定义为报告后验信念而非先验所带来的期望支付增益。用我们的符号表示，

$$\mathcal{I}_0(s) = \mathbb{E}_{Q\sim F}\big[U_0(Q,Q) - U_0(Q,p)\big].$$

期望中的差值比较了在后验信念 Q下评估的报告 Q 与报告 p所对应的期望支付。

对于 $\theta > 0$，同样的比较可以表示为确定性等价之差。由于 $U_\theta(Q,\ p)$是支付 $s(p,\ X)$的条件确定性等价物，时间一致性意味着

$$\mathrm{CE}_\theta\big(U_\theta(Q,p)\big) = U_\theta(p,p).$$

因此，

$$\mathcal{I}_\theta(s) = \mathrm{CE}_\theta\big(U_\theta(Q,Q)\big) - \mathrm{CE}_\theta\big(U_\theta(Q,p)\big).$$

这两项必须分别计算，因为差值的确定性等价物通常不等于确定性等价物之差。

2.4 支付约束与最优设计

我们称一个 评分规则 s在 θ 下可行，当且仅当它是 θ-适当的，并满足事后支付上界 s

$$0 \le s(r,x) \le 1 \qquad \text{for every } r \in \Delta(\mathcal{X}) \text{ and } x \in \mathcal{X}.$$

具有支付界限 $[0,1]$ 和 $\theta \ge 0$ 的模型族涵盖任何固定的有限支付区间 $[B_L, B_U]$，其中 $B_L < B_U$。具有支付 $s'(r,\ x) \in [B_L, B_U]$且风险厌恶系数为 θ' 的模型可通过设定以下内容进行归一化

$$s(r,x) = \frac{s'(r,x) - B_L}{B_U - B_L}, \qquad \theta = \theta'(B_U - B_L).$$

获取成本和激励均除以 $B_U - B_L$ ，以换算为新的货币单位。这种标准化不会改变代理人的最优报告和获取选择。

定义 2.3 （θ最优评分规则）。给定后验信念的分布 F 和 $\theta \ge 0$，如果某评分规则在 θ 下可行的所有评分规则中，使获取激励 $\mathcal{I}_\theta(s)$ 最大化，则该评分规则是 θ最优的。

2.5 二元状态示例

考虑一位委托人，他要求代理人预测某个项目是否会成功。令 $X = 1$ 表示成功，$X = 0$ 表示失败。在这个二元示例中，信念和报告用赋予 $X = 1$ 的概率表示。代理人可以支付成本 c，以获得一项私人评估，其结果有两种可能：y_1 （有利）和 y_2 （不利），二者发生的概率均为 $\alpha = \frac{1}{2}$。相应的成功后验概率分别为 $q_1 = \frac{3}{4}$ 和 $q_2 = \frac{1}{4}$。根据贝叶斯可行性，先验为 $p = \frac{1}{2}$。

考虑以下评分规则

$$s(r,x) = \begin{cases} 1, & r \ge \frac{1}{2},\ x = 1, \\ 1, & r < \frac{1}{2},\ x = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

报告阈值两侧提供相同的两种可能支付，因此代理人更倾向于选择获得 1 的概率更高的一侧。当信念为 $q > \frac{1}{2}$ 时，在上侧报告是最优的；当信念为 $q < \frac{1}{2}$ 时，在下侧报告是最优的。当信念为 $q = \frac{1}{2}$ 时，两侧给出的支付分布相同。因此，对于每个 $\theta \ge 0$ ，该规则都是弱 θ 适当的，并满足支付界限。如实报告是最优的，但阈值同一侧的所有报告都带来相同的支付，因此如实报告未必是唯一的最优选择。例如，后验信念为 3 4 的代理人，无论报告 0.6、0.75 还是 0.9，获得的支付都相同。

没有信息时，任意一方给出的获得 1 的概率都是1 2 。有信息时，代理人可以选择信号所指示的一方，将这一概率提高到3 4。对于 $\theta =$

log 2，在扣除成本之前，无信息和有信息时的确定性等价物分别为

$$U_\theta(p,p) = -\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1}{2}e^{-(\log 2)\cdot 0} + \frac{1}{2}e^{-(\log 2)\cdot 1}\right) = \log_2\frac{4}{3},$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{CE}_\theta(U_\theta(Q,Q)) = -\frac{1}{\log 2}\log\Bigg[&\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}e^{-(\log 2)\cdot 1} + \frac{1}{4}e^{-(\log 2)\cdot 0}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{-(\log 2)\cdot 0} + \frac{3}{4}e^{-(\log 2)\cdot 1}\right)\Bigg]\\ = \log_2\frac{8}{5}.&\end{aligned}$$

因此，获取信息所带来的净收益（扣除成本后）为 $\mathcal{I}_{\log 2}(s) - c = \log_2(6/5) - c$。当 $c < \log_2(6/5) \approx 0.263$ 时，代理人会严格偏好获取信息；等号成立时则无差异。

在相同的评分规则和信息结构下，风险厌恶程度更高的代理人可能愿意承担更高的成本来获取信息。对于 $\theta > 0$,

$$\mathcal{I}_\theta(s) = \frac{1}{\theta}\log\left[\frac{2(1+e^{-\theta})}{1+3e^{-\theta}}\right].$$

我们有 $\mathcal{I}_0(s) = \frac{1}{4} < \mathcal{I}_{\log 2}(s) \approx 0.263$，以及 $\mathcal{I}_\theta(s) \to 0$，因为 $\theta \to \infty$。因此，获取激励并非关于风险厌恶参数 θ 的单调函数。

3 二元状态下的评分规则

如第 2.5 节中的例子所示，设 $\mathcal{X} = \{0,1\}$。我们将每个信念或报告与赋予 $X = 1$ 的概率相对应，因此 $p \in (0,1)$ 且 $q, r \in [0,1]$。

3.1 θ-适当评分规则的刻画

3.1.1 固定 θ时的刻画

固定 $\theta > 0$，并省略 A、G 和 g 对 θ 的依赖。定义变换后的支付

$$A(r,x) := e^{-\theta s(r,x)}. \tag{3.1}$$

在信念 q 下，来自报告 r 的支付的确定性等价物为

$$U_\theta(q,r) = -\frac{1}{\theta}\log\left[qA(r,1) + (1-q)A(r,0)\right].$$

由于 $z \mapsto -\frac{1}{\theta}\log z$ 严格递减，最大化确定性等价物等价于最小化期望变换支付。对于每个固定的报告 r，期望变换后的支付关于 q 是仿射的。适当性要求该直线在 $q = r$ 处达到下包络。这提示我们可以用一个凹函数及其从上方作出的支撑线来表示。

对于凹函数 $G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，$G$ 在 $r \in [0,1]$ 处的超微分为

$$\partial^+ G(r) = \{a \in \mathbb{R} \mid G(q) \le G(r) + a(q-r) \text{ for all } q \in [0,1]\}.$$

$\partial^+ G(r)$中的每个元素都称为 G在 r处的超梯度。

规则 s 是 θ-适当的，当且仅当支付为 $u_\theta(s(r,x)) = -A(r,x)$ 的评分规则在风险中性条件下是适当的。因此，以下刻画将萨维奇表示（Savage，1971）应用于这些效用变换后的支付。

定理 3.1 (θ-适当评分规则的刻画)。 固定 $\theta > 0$。评分规则 s 是 θ-适当的，当且仅当存在正凹函数 $G: [0,1] \to \mathbb{R}$，以及对每个 $r \in [0,1]$，一个超梯度的选取 $g(r) \in \partial^+ G(r)$，使得

$$s(r,x) = -\frac{1}{\theta}\log[G(r) + g(r)(x-r)]$$

对于每个 $r \in [0,1]$ 和 $x \in \{0、1\}$。

证明。仅当。假设 s 是 θ-适当的。在如实报告下，将期望变换后的支付定义为

$$G(q) := qA(q,1) + (1-q)A(q,0). \tag{3.2}$$

根据 θ-适当性，

$$G(q) = \min_{r\in[0,1]} \{qA(r,1) + (1-q)A(r,0)\}.$$

因此， G 作为仿射函数的逐点最小值是凹函数。此外， $G(q) > 0$，因为 $A(q、x) > 0$ 在两种状态下均成立。

对于每个固定的报告 r，相应的仿射函数经过（r、$G(r)$），且斜率为

$$g(r) := A(r,1) - A(r,0).$$

因此

$$qA(r,1) + (1-q)A(r,0) = G(r) + g(r)(q-r) \geq G(q) \qquad \text{for all } q \in [0,1].$$

因此 $g(r) \in \partial^+ G(r)$。在 $q = 0$ 和 $q = 1$ 处代入等式，得到

$$A(r,x) = G(r) + g(r)(x-r), \qquad x \in \{0,1\}. \tag{3.3}$$

结合 (3.1) 和 (3.3)，得到 s的上述表示。

如果。假设 G 和 g 满足定理中的条件。由于 $g(r) \in \partial^+ G(r)$，

$$G(r) + g(r)(x-r) \geq G(x) > 0 \qquad \text{for all } r \in [0,1],\ x \in \{0,1\}.$$

因此，表示中的对数定义良好。两边取指数，得到

$$A(r,x) = G(r) + g(r)(x-r).$$

因此，

$$qA(r,1) + (1-q)A(r,0) = G(r) + g(r)(q-r) \geq G(q), \qquad \text{for all } q,r \in [0,1].$$

在如实报告 $r = q$时，等号成立。因此，如实报告使期望变换支付最小化，从而使 $U_\theta(q,\ r)$最大化。因此， s 是 θ-适当的。□

备注。 对于每个内点 $r \in (0,1)$，

$$\partial^+ G(r) = [G'_+(r), G'_-(r)].$$

在可微内点处， $g(r) = G'(r)$。在内点折角处，可从该区间中选取任意值作为 $g(r)$。

3.1.2 风险中性极限

现在令 $\theta \to 0^+$，并考察适当性如何传递到极限评分规则。前述刻画适用于每个固定的 $\theta > 0$。若在表示中固定 G 和 g，则只要 $G(r) + g(r)(x - r) \neq 1$，$|s(r,\ x)|$ 就会发散。因此，为了研究一致有界的 θ-适当评分规则族 s_θ，我们允许相应的函数 G_θ 和 g_θ 随 θ变化。

变换后的支付关于报告和状态一致地满足

$$A_\theta(r,x) = 1 - \theta s_\theta(r,x) + O(\theta^2).$$

因此，

$$\begin{aligned} G_\theta(r) &= 1 - \theta\big[r s_\theta(r,1) + (1-r)s_\theta(r,0)\big] + O(\theta^2), \\ g_\theta(r) &= -\theta\big[s_\theta(r,1) - s_\theta(r,0)\big] + O(\theta^2). \end{aligned}$$

乘以 $-\theta$ 的表达式与风险中性情形下二元适当评分规则刻画中的凸函数及其选定次梯度具有相同的代数形式。因此，我们定义

$$H_\theta(r) := \frac{1 - G_\theta(r)}{\theta}, \qquad h_\theta(r) := -\frac{g_\theta(r)}{\theta}.$$

推论 3.2 (风险中性极限)。设 $\{s_\theta\}_{\theta>0}$ 是一个一致有界的评分规则族，并一致收敛于 s_0，当 $\theta \to 0^+$ 时。如果对每个充分小的 $\theta > 0$，s_θ 都是 θ-适当的，那么 s_0 在风险中性情形下是适当的。

更精确地，设

$$H(r) := r s_0(r,1) + (1-r)s_0(r,0), \qquad h(r) := s_0(r,1) - s_0(r,0).$$

因此，H 是凸的，$h(r)$ 是 H 在每个 $r \in [0,1]$处的一个次梯度，并且

$$s_0(r,x) = H(r) + h(r)(x - r), \qquad r \in [0,1],\ x \in \{0,1\}.$$

证明。对每个足够小的 $\theta > 0$，令 A_θ、G_θ和 g_θ 表示定理 3.1 中与s_θ 相关的函数。以下所有展开和收敛均关于相关报告和状态一致地成立。

根据 H_θ 和 h_θ的定义、A_θ的展开以及 $s_\theta \to s_0$的一致收敛，当 $\theta \to 0^+$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} H_\theta(r) &= r\frac{1 - A_\theta(r,1)}{\theta} + (1-r)\frac{1 - A_\theta(r,0)}{\theta} \\ &\longrightarrow r s_0(r,1) + (1-r)s_0(r,0), \\ h_\theta(r) &= \frac{1 - A_\theta(r,1)}{\theta} - \frac{1 - A_\theta(r,0)}{\theta} \\ &\longrightarrow s_0(r,1) - s_0(r,0). \end{aligned}$$

因此，$H_\theta \to H$ 和 $h_\theta \to h$ 一致地成立，其中 H 和 h 在推论中定义。

由于 G_θ 是凹的，H_θ 是凸的。因此，其一致极限 H 也是凸的。此外，超梯度不等式

$$G_\theta(q) \le G_\theta(r) + g_\theta(r)(q - r)$$

可以改写为

$$H_\theta(q) \ge H_\theta(r) + h_\theta(r)(q - r).$$

取 $\theta \to 0^+$ 得到

$$H(q) \ge H(r) + h(r)(q - r) \qquad \text{for all } q, r \in [0,1].$$

因此，$h(r)$ 是 r处 H 的一个次梯度。

最后，变换后的支付表示给出

$$\frac{1-A_\theta(r,x)}{\theta} = H_\theta(r) + h_\theta(r)(x-r).$$

由于

$$\frac{1-A_\theta(r,x)}{\theta} = s_\theta(r,x) + O(\theta) \longrightarrow s_0(r,x)$$

当 $\theta \to 0^+$ 时，取极限可得

$$s_0(r,x) = H(r) + h(r)(x-r).$$

根据二元 Savage 表示（Gneiting and Raftery，2007年，第 3.2 节，式（12）），当 H 为凸函数且 $h(r)$ 在每个 $r \in [0,1]$ 处都是 H 的次梯度时，此形式的评分规则在风险中性下是适当的。这两个条件均成立，因此 s_0 在风险中性下是适当的。□

3.2 对每种风险厌恶程度均保持适当的规则

定理 3.3（每种风险厌恶程度下的适当性）。评分规则 s 对每种 $\theta > 0$ 都是 θ-适当的，当且仅当它具有以下形式之一。

1. 存在 W_a、$W_b \in \mathbb{R}$，使得

$$(s(r,0), s(r,1)) = (W_a, W_b) \qquad for\ all\ r \in (0,1),$$

端点支付满足

$$s(0,0) = W_a, \qquad s(0,1) \le W_b,$$

and

$$s(1,1) = W_b, \qquad s(1,0) \le W_a.$$

2. 存在 W_L、$W_H \in \mathbb{R}$，且 $W_L < W_H$，使得

$$(s(r,0), s(r,1)) = \begin{cases} (W_H, W_L), & 0 < r < 1/2, \\ (W_L, W_H), & 1/2 < r < 1. \end{cases}$$

在 $r = 1/2$ 处，支付向量可以是(W_H, W_L)或(W_L, W_H)。端点支付满足

$$s(0,0) = W_H, \qquad s(0,1) \le W_L,$$

and

$$s(1,1) = W_H, \qquad s(1,0) \le W_L.$$

证明。仅当。假设固定的评分规则 s 对每个 $\theta > 0$ 都是 θ-适当的。我们先考虑 $\theta \to \infty$ 时的极限。对于任意内部信念 $q \in$ （0,1），两种状态的概率均为正，因此

$$\lim_{\theta\to\infty} U_\theta(q,r) = \min\{s(r,0), s(r,1)\}.$$

在适当性不等式中取此极限，得到

$$\min\{s(q,0), s(q,1)\} \ge \min\{s(r,0), s(r,1)\}$$

对于每个 $q \in$ (0，1) 和 $r \in [0,1]$。通过双向比较任意两个内部报告可知，存在一个共同的值 W_L，使得

$$\min\{s(r,0), s(r,1)\} = W_L \qquad \text{for all } r \in (0,1).$$

假设两个内部报告在状态 1 下都给出支付 W_L。它们在状态 0 下的支付必须相同。否则，在状态 0 下支付较高的报告在每个内部信念下都会严格优于另一个报告。对于在状态 0 下给出支付 W_L 的报告，同样的论证也成立。

因此，内部报告至多生成两个不同的支付向量。如果只有一个，则将其写作（W_a，W_b）。如果有两个，则它们必定具有以下形式

$$(W_{H0}, W_L) \qquad \text{and} \qquad (W_L, W_{H1}), \qquad W_{H0}, W_{H1} > W_L.$$

对于这两个向量，将其期望变换支付除以$e^{-\theta W_L}$ 可得

$$(1-q)e^{-\theta(W_{H0}-W_L)} + q \qquad \text{and} \qquad (1-q) + qe^{-\theta(W_{H1}-W_L)}.$$

由于 $\theta \to \infty$，这些表达式分别收敛于 q 和 $1-q$。因此，当 $q < 1/2$时，对于充分大的 θ，第一个向量严格更受偏好，所以在每个这样的 q处，如实报告必须给出（W_{H0}，W_L）。类似地，当 $q > 1/2$时，如实报告必须给出（W_L，W_{H1}）。

现在固定任意一个 $\theta > 0$。对于任意内部信念 $q_- < 1/2 < q_+$，适当性给出

$$(1-q_-)e^{-\theta W_{H0}} + q_- e^{-\theta W_L} \le (1-q_-)e^{-\theta W_L} + q_- e^{-\theta W_{H1}},$$
$$(1-q_+)e^{-\theta W_L} + q_+ e^{-\theta W_{H1}} \le (1-q_+)e^{-\theta W_{H0}} + q_+ e^{-\theta W_L}.$$

由这些表达式关于信念的连续性，令 $q_- \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$和 $q_+ \to \left(\frac{1}{2}\right)^+$可得两个极限值之间双向的不等式。因此，

$$\frac{1}{2}e^{-\theta W_{H0}} + \frac{1}{2}e^{-\theta W_L} = \frac{1}{2}e^{-\theta W_L} + \frac{1}{2}e^{-\theta W_{H1}}.$$

因此，$W_{H0} = W_{H1} =: W_H$。

由于 $r = \frac{1}{2}$是一个内部报告，其支付向量必须是这两个向量之一。在信念 $q = \frac{1}{2}$ 下，两者给出的期望变换后的支付相同，因此在 $r = \frac{1}{2}$ 处可以任选其一。

接下来需要确定端点支付。令 (W_a, W_b) 表示充分接近 0 的内部报告处的支付向量。在信念 0 下的适当性要求

$$s(0,0) \ge W_a.$$

反过来，固定 $\theta > 0$。对于每个充分小的 $q > 0$，将如实报告与报告 0 进行比较可得

$$(1-q)e^{-\theta W_a} + qe^{-\theta W_b} \le (1-q)e^{-\theta s(0,0)} + qe^{-\theta s(0,1)}.$$

取 $q \to 0^+$ 可得 $W_a \ge s(0,0)$，因此 $s(0,0) = W_a$。将这一等式代回不等式可得

$$s(0,1) \le W_b.$$

在 1 处采用对称论证，并使用 1 附近的内部支付向量，可得

$$s(1,1) = W_b, \qquad s(1,0) \le W_a.$$

在双向量情形下，接近 0 和 1 的内部支付向量分别为（W_H，W_L）和（W_L，W_H）。因此，端点限制变为

$$s(0,0) = W_H, \qquad s(0,1) \le W_L,$$

and

$$s(1,1) = W_H, \qquad s(1,0) \le W_L.$$

如果。 假设 s具有所述两种形式之一。在第一种情形下，每个内部报告都给出相同的支付向量（W_a，W_b），而每个端点报告在两种状态下给出的支付都不更高。因此，在每个内部信念下，如实报告都是最优的。在信念 0 下，除 1 以外的每个报告都给出支付 W_a，而报告 1 至多给出 W_a。信念 1 下的论证类似。因此，第一种情形下的规则对于每个 $\theta > 0$ 都是 θ-适当的。

在第二种情形下，固定任意 $\theta > 0$。(W_H, W_L) 与 (W_L, W_H) 的期望变换支付之差为

$$(1-q)e^{-\theta W_H} + qe^{-\theta W_L} - \left[(1-q)e^{-\theta W_L} + qe^{-\theta W_H}\right] = (1-2q)(e^{-\theta W_H} - e^{-\theta W_L}).$$

对于内部信念，由于 $W_H > W_L$，当 $0 < q < \frac{1}{2}$ 时，向量 (W_H, W_L) 更受偏好；当 $\frac{1}{2} < q < 1$ 时，向量 (W_L, W_H) 更受偏好；当 $q = \frac{1}{2}$ 时，两者给出的值相同。端点报告被其对应的内部支付向量弱支配。在信念为 0 和 1 时，如实报告在唯一可能的状态下达到最高支付 W_H。因此，对每个 $\theta > 0$，这两种形式都是 θ-适当的。□

3.3 支付界限下的最优评分规则

现在，我们寻求一种可行的 θ-适当评分规则，使获取信息的激励最大化。我们允许任意后验分布 F，其均值为 $p \in (0, 1)$。

利用式 (2.1) 中定义的获取激励，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\theta(s) &= \mathrm{CE}_\theta(U_\theta(Q,Q)) - U_\theta(p,p)\\ &= -\frac{1}{\theta}\log \mathbb{E}_{Q\sim F}[G(Q)] + \frac{1}{\theta}\log G(p)\\ &= -\frac{1}{\theta}\log \frac{\mathbb{E}_{Q\sim F}[G(Q)]}{G(p)}.\end{aligned}$$

由于 $\theta > 0$，最大化 $\mathcal{I}_\theta(s)$ 等价于最小化

$$\frac{\mathbb{E}_{Q\sim F}[G(Q)]}{G(p)}. \tag{3.4}$$

支付约束也可以用 G 和 g表示。由于 $A(r, x) = e^{-\theta s(r,x)}$，界限 $0 \le s(r, x) \le 1$ 等价于

$$e^{-\theta} \le G(r) + g(r)(x-r) \le 1 \qquad \text{for all } r \in [0,1],\ x \in \{0,1\}. \tag{3.5}$$

因此，我们在满足 (3.5) 的正凹函数 G 和超梯度 $g(r) \in \partial^+ G(r)$ 的取值上，最小化 (3.4)。

3.3.1 最优结构

固定 $G(p)$ 不变，将 G替换为一个处处不高于它的函数，不会增加 (3.4) 中的目标函数。根据凹性，G 位于连接其在 0 和 p处取值的弦以及连接其在 p和 1 处取值的弦上方。因此，用这两条弦替换 G 会使目标函数不增。在图1中，~虚线表示 G，实线段表示 G。这两个函数在 0、p和 1 处相等，而在其他位置，G 均不高于 G。

定理 3.4（最优结构）。固定 $\theta > 0$ 以及先验为 $p \in$（0，1）的后验信念分布 F。在可行的 θ-适当评分规则中最大化获取信息的激励时，不失一般性，可以将注意力限制在其关联函数 G 分别在 $[0, p]$ 和 $[p, 1]$ 上均为仿射函数的规则上。

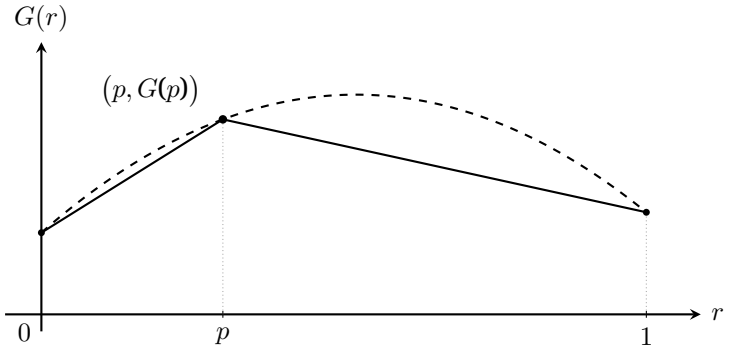

图1：由 G （实线）构造 $\widetilde{G}$ （虚线）。

证明。 设 $(G,\ g)$ 是任意可行的 θ-适当评分规则所对应的二元组。记作$v := G(p)$，并令 a 和 b 为两条弦的斜率：

$$a := \frac{G(p) - G(0)}{p}, \qquad b := \frac{G(1) - G(p)}{1 - p}.$$

定义

$$\widetilde{G}(r) = \begin{cases} v + a(r - p), & 0 \le r \le p, \\ v + b(r - p), & p < r \le 1. \end{cases}$$

这两段在 p处相接，且端点处的值均为正。 G 的凹性意味着 $b \le a$，$\widetilde{G}$，因此 $\widetilde{G}$ 为正、连续且凹。它还意味着，对于所有 $r \in [0, 1]$，$\widetilde{G}(r) \le G(r)$。由于$\widetilde{G}(p) = G(p)$，

$$\frac{\mathbb{E}_{Q\sim F}[\widetilde{G}(Q)]}{\widetilde{G}(p)} \le \frac{\mathbb{E}_{Q\sim F}[G(Q)]}{G(p)}.$$

$\widetilde{G}$ $\widetilde{G}$根据 G的凹性，取 $\gamma \in [b, a] = \partial^+ G(p)$，并令 $\widetilde{g}(r) = a$ ，其中 $r < p$, $\widetilde{g}(p) = \gamma$，且$\widetilde{g}(r) = b$ ，其中 $r > p$。相应的变换后的支付为

$$\widetilde{A}(r, x) = \widetilde{G}(r) + \widetilde{g}(r)(x - r).$$

G 在0和1处的超梯度不等式给出

$$G(p) \le G(0) + pg(0), \qquad G(p) \le G(1) + g(1)(p - 1).$$

因此 $a \le g(0)$ 和 $g(1) \le b$。在状态 $x = 0$ 下，由于 $\widetilde{g}(r) \in [b, a]$，

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(r, 0) &\ge v - pa = G(0) = A(0, 0) \ge e^{-\theta}, \\ \widetilde{A}(r, 0) &\le v - pb = G(1) - b \le G(1) - g(1) = A(1, 0) \le 1. \end{aligned}$$

在状态 $x = 1$ 下，相同的斜率界给出

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(r, 1) &\ge v + (1 - p)b = G(1) = A(1, 1) \ge e^{-\theta}, \\ \widetilde{A}(r, 1) &\le v + (1 - p)a = G(0) + a \le G(0) + g(0) = A(0, 1) \le 1. \end{aligned}$$

根据定理 3.1，规则 $\widetilde{s}(r,\ x) = -\frac{1}{\theta}\log\widetilde{A}(r,\ x)$ 是 θ-适当的，而对 $\widetilde{A}$ 的界限使其可行。上述目标函数比较表明，这种替换不会降低获取信息的激励。□

3.3.2 最优系数

根据定理 3.4，只需考虑

$$G(r)=\begin{cases} v+a(r-p), & r\le p,\\ v+b(r-p), & r>p, \end{cases}$$

其中 $v=G(p)$ 且 $a\ge b$。

使用定理 3.4 证明中的超梯度选择，变换后的支付可写为

$$A(r,x)=\begin{cases} v+a(x-p), & r<p,\\ v+\gamma(x-p), & r=p, \qquad b\le\gamma\le a.\\ v+b(x-p), & r>p, \end{cases}$$

因此，$A(r,1)$ 关于 r 单调不增，而 $A(r,0)$ 单调不减。对每个状态下的最大值和最小值进行界定，可得

$$\begin{aligned} v+a(1-p)&\le 1,\\ v-pb&\le 1,\\ v+b(1-p)&\ge e^{-\theta},\\ v-pa&\ge e^{-\theta},\\ b&\le a. \end{aligned} \tag{3.6}$$

命题 3.5（最优系数）。固定 $\theta>0$，令 $Q\sim F$ 具有先验 $p\in(0,1)$，其中$\Pr(Q\ne p)>0$。一个最优系数组为

$$(a^*,b^*,v^*)=\begin{cases} \left(1-e^{-\theta},-\dfrac{p}{1-p}(1-e^{-\theta}),e^{-\theta}+p(1-e^{-\theta})\right), & p\le\dfrac12,\\ \left(\dfrac{1-p}{p}(1-e^{-\theta}),-(1-e^{-\theta}),e^{-\theta}+(1-p)(1-e^{-\theta})\right), & p>\dfrac12. \end{cases}$$

这两个表达式在 $p=\frac12$ 处相等。令 G_θ^* 表示由这些系数确定的函数。对于任意在 $r=p$ 处选取的超梯度 $\gamma^*\in[b^*,a^*]$，相应的评分规则都是可行的，且为 θ-最优。

证明。根据贝叶斯可行性，我们可以定义

$$D:=\int_{(p,1]}(q-p)\,dF(q)=-\int_{[0,p)}(q-p)\,dF(q)=\frac12\mathbb{E}_{Q\sim F}|Q-p|.$$

利用分段仿射表示，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G(Q)]&=v+a\int_{[0,p)}(q-p)\,dF(q)+b\int_{(p,1]}(q-p)\,dF(q)\\ &=v-D(a-b). \end{aligned}$$

由于 $G(p)=v$，(3.4) 中的目标函数变为

$$\frac{\mathbb{E}[G(Q)]}{G(p)}=1-D\frac{a-b}{v}.$$

对于有信息的信号，$\Pr(Q\ne p)>0$, $D>0$，因此最小化该比率等同于最大化

$$\frac{a-b}{v}$$

满足条件 (3.6)。信息结构仅通过正因子 D 产生影响，因此，对于先验为 p 的每一种后验信念信息性分布，都适用相同的系数优化。

(3.6) 中的前四个约束给出了有效界限

$$a(v) := \min\left\{\frac{v - e^{-\theta}}{p}, \frac{1-v}{1-p}\right\}, \qquad b(v) := \max\left\{\frac{e^{-\theta} - v}{1-p}, \frac{v-1}{p}\right\}.$$

由于

$$v = G(p) = pA(p,1) + (1-p)A(p,0),$$

可行性要求 $e^{-\theta} \le v \le 1$。对于此区间内的每个 v，

$$b(v) \le 0 \le a(v).$$

因此，固定 v 时，可行系数满足

$$b(v) \le b \le a \le a(v).$$

可行区域如图 2 所示。目标函数 $(a - b)/v$ 在其左上角处取得最大值，其中

$$a = a(v), \qquad b = b(v).$$

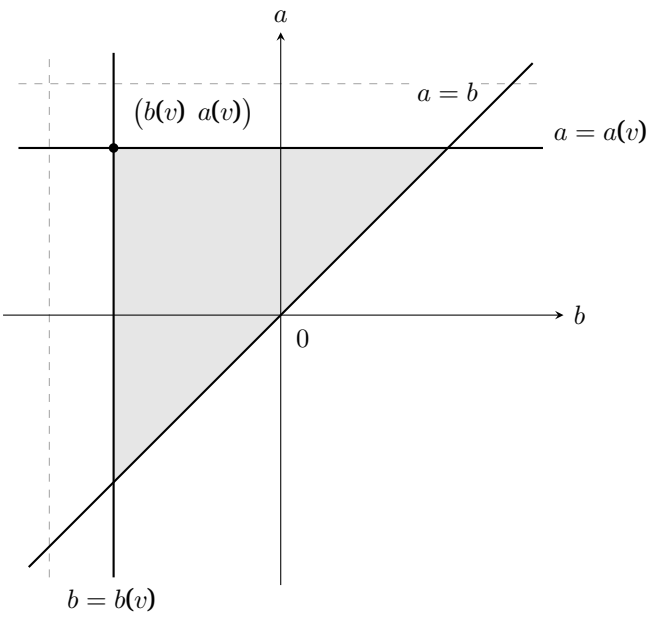

图 2：在固定 v 下，$(b,\ a)$ 平面中的示意可行区域。标记的角点使 $(a-b)/v$ 最大；虚线表示冗余界。

剩下的问题是最大化

$$\Phi(v) := \frac{a(v) - b(v)}{v} \qquad \text{over } v \in [e^{-\theta}, 1].$$

定义 $a(v)$ 的两个界在以下位置重合

$$v_a := p + e^{-\theta}(1-p),$$

而定义 $b(v)$的两个界限在此处重合

$$v_b := 1 - p + e^{-\theta}p.$$

Th这些值决定哪些界限是 a
有效。

首先，假设 $p \le \frac{1}{2}$。那么 $v_a \le v_b$，代入 Φ 可得

$$\Phi(v) = \begin{cases} \dfrac{v - e^{-\theta}}{v\,p(1-p)}, & e^{-\theta} \le v \le v_a, \\ \dfrac{1 - e^{-\theta}}{v(1-p)}, & v_a \le v \le v_b, \\ \dfrac{1 - v}{v\,p(1-p)}, & v_b \le v \le 1. \end{cases}$$

第一个表达式关于 v 严格递增，而第二个和第三个表达式严格递减。因此，最大值在以下位置取得：

$$v^* = v_a = e^{-\theta} + p(1 - e^{-\theta}).$$

代入 $a(v)$ 和 $b(v)$，得到

$$a^* = 1 - e^{-\theta}, \qquad b^* = -\frac{p}{1-p}(1 - e^{-\theta}).$$

现在，假设 $p > \frac{1}{2}$。那么 $v_b < v_a$，并且

$$\Phi(v) = \begin{cases} \dfrac{v - e^{-\theta}}{v\,p(1-p)}, & e^{-\theta} \le v \le v_b, \\ \dfrac{1 - e^{-\theta}}{vp}, & v_b \le v \le v_a, \\ \dfrac{1 - v}{v\,p(1-p)}, & v_a \le v \le 1. \end{cases}$$

同样，第一个表达式严格递增，而其余表达式严格递减。因此，

$$v^* = v_b = e^{-\theta} + (1-p)(1 - e^{-\theta}),$$

这给出

$$a^* = \frac{1-p}{p}(1 - e^{-\theta}), \qquad b^* = -(1 - e^{-\theta}).$$

这些系数满足 (3.6)，并使 $(a-b)/v$ 最大化。任意选择 $\gamma^* \in [b^*, a^*]$ 都能保持可行性，且不改变获取激励，因此相应的评分规则是θ-最优的。□

备注。 如果 $\Pr(Q = p) = 1$，那么在任何可行的 θ-适当评分规则下，获取激励 $\mathcal{I}_\theta(s)$ 均为零，因此所有此类规则都是最优的。

所构造的规则是弱适当的：如实报告是最优选择，但并非唯一的最优选择。所有严格低于 p 的报告都对应相同的状态依存支付，所有严格高于 p 的报告也同样如此。

3.3.3 风险中性极限

推论 3.6 (风险中性极限)。 对于每个 $\theta > 0$，令 s^*_θ 为通过在 $r = p$ 处选择 $\gamma^*_\theta = b^*_\theta$，由命题 *3.5* 得到的最优规则。当 $\theta \to 0^+$ 时， s^*_θ 一致地收敛于评分规则

$$s^*_0(r, x) = \begin{cases} 1 - x, & p \le \frac{1}{2},\ r < p, \\ 1 - p + \dfrac{p}{1-p}(x - p), & p \le \frac{1}{2},\ r \ge p, \\ p - \dfrac{1-p}{p}(x - p), & p > \frac{1}{2},\ r < p, \\ x, & p > \frac{1}{2},\ r \ge p, \end{cases} \tag{3.7}$$

该规则在风险中性条件下可行且最优。

证明。 以下所有展开和收敛均关于报告和状态一致。采用 $r = p$ 处的这一选择，我们有：对于 $r < p$，$A^*_\theta(r,\ x) = v^*_\theta + a^*_\theta(x - p)$；对于$r \geq p$，$A^*_\theta(r,\ x) = v^*_\theta + b^*_\theta(x - p)$。代入最优系数并提出公因子 $1 - e^{-\theta}$，得到

$$\frac{1 - A^*_\theta(r, x)}{\theta} = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta}\, s^*_0(r, x),$$

其中s^*_0 由 (3.7) 给出。

由于 $(1 - e^{-\theta})/\theta \to 1$，我们有

$$\frac{1 - A^*_\theta(r, x)}{\theta} \longrightarrow s^*_0(r, x) \qquad \text{as } \theta \to 0^+.$$

根据命题 3.5，每个 s^*_θ 都是 θ-适当的。推论 3.2 的证明中使用的一致泰勒估计给出 $s^*_\theta \to s^*_0$ 一致地成立，因此该推论意味着，在风险中性下，s^*_0 是适当的。此外，由于 $0 \leq s^*_\theta(r,\ x) \leq 1$，取极限可得

$$0 \leq s^*_0(r, x) = \lim_{\theta \to 0^+} s^*_\theta(r, x) \leq 1.$$

因此s^*_0 是可行的。

作为比较，将 Li 等人（2025）的风险中性最优规则记为（其中右侧支付在 $r = p$ 处选取）

$$s^*_{\mathrm{RN}}(r, x) = \begin{cases} \dfrac{p}{1-p}(1 - x), & p \leq \frac{1}{2},\ r < p, \\ x, & p \leq \frac{1}{2},\ r \geq p, \\ 1 - x, & p > \frac{1}{2},\ r < p, \\ \dfrac{1-p}{p}x, & p > \frac{1}{2},\ r \geq p. \end{cases}$$

将该规则与 (3.7) 比较可得 $s^*_0(r,\ x) = s^*_{\mathrm{RN}}(r,\ x) + K(x)$，其中

$$K(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - 2p}{1 - p}(1 - x), & p \leq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{2p - 1}{p}x, & p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

在信念 q 处，这会使每份报告的期望支付增加 $qK(1) + (1 - q)K(0)$。根据贝叶斯可行性，获取信息后的期望增量等于先验处的增量：

$$\mathbb{E}_{Q \sim F}[QK(1) + (1 - Q)K(0)] = pK(1) + (1 - p)K(0).$$

因此，这两条规则带来的获取激励相同$\mathcal{I}_0$, 所以 s^*_0 在风险中性下也同样是最优的。 □

3.4 最优评分规则的精确变换

T同样的构造还为每个 $\theta > 0$ 给出了 s^*_0 与 s^*_θ 之间的精确关系 .

命题 3.7 （最优评分规则的变换）。 对于在 （3.7） 中构造的特定风险中性最优规则 s^*_0，以及每个 $\theta > 0$，评分规则

$$s^*_\theta(r, x) = -\frac{1}{\theta}\log\left[1 - s^*_0(r, x) + s^*_0(r, x)e^{-\theta}\right]$$

*is t*通过选择 $\gamma^*_\theta = b^*_\theta$ *at* $r = p$，由命题 *3.5* 得到的可行 θ-最优规则 .

Proof. 对于选择 $\gamma_\theta^* = b_\theta^*$ at $r = p$，推论 3.6 的证明中的恒等式给出 s

$$1 - A_\theta^*(r,x) = (1 - e^{-\theta}) s_0^*(r,x).$$

重新整理并应用逆指数变换，得到

$$s_\theta^*(r,x) = -\frac{1}{\theta}\log A_\theta^*(r,x) = -\frac{1}{\theta}\log\Big[1 - s_0^*(r,x) + s_0^*(r,x)e^{-\theta}\Big].$$

□

备注。 仅有风险中性最优性并不足以使该变换得到 θ-最优规则。为说明选择为何重要，考虑在公式中用s_{RN}^* 替换s_0^* 。由此得到的评分规则为

$$s_{\theta,\mathrm{RN}}(r,x) = -\frac{1}{\theta}\log\Big[1 - (1 - e^{-\theta}) s_{\mathrm{RN}}^*(r,x)\Big].$$

由于 $e^{-\theta s_{\theta,\ \mathrm{RN}}(r,\ x)} = 1 - (1 - e^{-\theta}) s_{\mathrm{RN}}^*(r,\ x)$，最小化期望指数支付等价于最大化在 s_{RN}^* 下的期望支付。后一规则在风险中性条件下是适当的，因此 $s_{\theta,\ \mathrm{RN}}$ 是 θ-适当的。此外， $0 \le s_{\mathrm{RN}}^*(r,\ x) \le 1$ 意味着

$$e^{-\theta} \le 1 - (1 - e^{-\theta}) s_{\mathrm{RN}}^*(r,x) \le 1.$$

因此 $0 \le s_{\theta,\ \mathrm{RN}}(r,\ x) \le 1$，所以 $s_{\theta,\ \mathrm{RN}}$ 是可行的。

由于 $s_0^*(r,\ x) = s_{\mathrm{RN}}^*(r,\ x) + K(x)$，这两个规则满足

$$e^{-\theta s_{\theta,\mathrm{RN}}(r,x)} - e^{-\theta s_\theta^*(r,x)} = (1 - e^{-\theta}) K(x).$$

设 $G_{\theta,\ \mathrm{RN}}$ 和 G_θ^* 分别为与 $s_{\theta,\ \mathrm{RN}}$ 和 s_θ^*相关联的函数。利用推论 3.6 的证明中建立的贝叶斯可行性恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q\sim F}[G_{\theta,\mathrm{RN}}(Q)] - \mathbb{E}_{Q\sim F}[G_\theta^*(Q)] &= G_{\theta,\mathrm{RN}}(p) - G_\theta^*(p) \\ &= (1 - e^{-\theta})\big[pK(1) + (1-p)K(0)\big].\end{aligned}$$

因此，将 $s_{\theta,\mathrm{RN}}$ 替换为 s_θ^*，会使目标比率的分子和分母减少相同的量。

根据 K 的定义，

$$pK(1) + (1-p)K(0) = \begin{cases} 1 - 2p, & p \le \frac{1}{2}, \\ 2p - 1, & p > \frac{1}{2}, \end{cases} = |1 - 2p|.$$

当 $p \ne \frac{1}{2}$ 且 $\mathcal{I}_0(s_{\mathrm{RN}}^*) > 0$ 时，共同减少量为正。对于变换后的规则 $s_{\theta,\mathrm{RN}}$，该变换给出

$$\begin{aligned}G_{\theta,\mathrm{RN}}(p) - \mathbb{E}_{Q\sim F}[G_{\theta,\mathrm{RN}}(Q)] &= 1 - (1 - e^{-\theta})U_0(p,p) \\ &\quad - \mathbb{E}_{Q\sim F}\Big[1 - (1 - e^{-\theta})U_0(Q,Q)\Big] \\ &= (1 - e^{-\theta})\left(\mathbb{E}_{Q\sim F}[U_0(Q,Q)] - U_0(p,p)\right) \\ &= (1 - e^{-\theta})\mathcal{I}_0(s_{\mathrm{RN}}^*) > 0,\end{aligned}$$

其中 U_0 是根据原始风险中性规则 s_{RN}^*计算的。因此，从两者中减去相同的正数会严格降低目标比率，所以 s_θ^* 比$s_{\theta,\ \mathrm{RN}}$提供了更强的获取信息的激励。

命题 3.7 中的变换具有彩票解释。给定报告 r 和状态 x，考虑这样一种彩票：以 $s_0^*(r,\ x)$ 的概率支付 1，否则支付 0。其期望支付为 $s_0^*(r,\ x)$，熵确定性等价为 $s_\theta^*(r,\ x)$。

备注。对于任意固定的 $\delta \in [0,1]$，只要我们选择 $\gamma_{\theta,\delta}^* = \delta a_\theta^* + (1-\delta) b_\theta^*$ 在 $r = p$ 处成立，同样的变换也适用。令 $s_{\theta,\delta}^*$ 表示由此得到的最优规则。这一选择只影响 $r = p$ 处的支付，因此只需验证该报告处的变换。

其在 $r = p$ 处变换后的支付为

$$A_{\theta,\delta}^*(p,x) = v_\theta^* + \gamma_{\theta,\delta}^*(x-p),$$

它关于 $\gamma_{\theta,\delta}^*$ 是仿射的。

对于 $j \in \{0, 1, \delta\}$，定义极限支付为

$$s_{0,j}^*(p,x) := \lim_{\theta\to 0^+} s_{\theta,j}^*(p,x) = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1 - A_{\theta,j}^*(p,x)}{\theta}.$$

由系数公式和上文使用的一致泰勒估计可知，这些极限均存在。因此

$$\frac{1 - A_{\theta,\delta}^*(p,x)}{\theta} = \delta \frac{1 - A_{\theta,1}^*(p,x)}{\theta} + (1-\delta)\frac{1 - A_{\theta,0}^*(p,x)}{\theta}.$$

取 $\theta \to 0^+$，得到

$$s_{0,\delta}^*(p,x) = \delta s_{0,1}^*(p,x) + (1-\delta) s_{0,0}^*(p,x).$$

选择 $j = 0$ 和 $j = 1$ 分别给出右侧和左侧的支付向量。因此，这两个向量所确立的恒等式给出

$$\begin{aligned} A_{\theta,\delta}^*(p,x) &= \delta A_{\theta,1}^*(p,x) + (1-\delta) A_{\theta,0}^*(p,x) \\ &= \delta\big[1 - (1-e^{-\theta}) s_{0,1}^*(p,x)\big] \\ &\quad + (1-\delta)\big[1 - (1-e^{-\theta}) s_{0,0}^*(p,x)\big] \\ &= 1 - (1-e^{-\theta}) s_{0,\delta}^*(p,x). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} s_{\theta,\delta}^*(p,x) &= -\frac{1}{\theta}\log A_{\theta,\delta}^*(p,x) \\ &= -\frac{1}{\theta}\log\Big[1 - (1-e^{-\theta}) s_{0,\delta}^*(p,x)\Big]. \end{aligned}$$

对于 $r \neq p$，定义 $s_{0,\ \delta}^*(r,\ x) = s_0^*(r,\ x)$。相应的支付 $s_{\theta,\ \delta}^*(r,\ x)$ 保持不变，因此该变换对每个报告和状态都成立。与推论 3.6 中相同的极限论证可得 $s_{\theta,\ \delta}^* \to s_{0,\ \delta}^*$ 一致地趋于 $\theta \to 0^+$。

4 非二元状态下的评分规则

我们回到第 2 节的有限状态设定，其中 $\mathcal{X} = \{x_1,\ \ldots,\ x_m\}$ 且 $p,\ q,\ r \in \Delta(\mathcal{X})$。

4.1 θ-适当评分规则的刻画

4.1.1 固定 θ 时的刻画

二元刻画可推广至非二元状态，此时支撑线由支撑超平面取代。令 e_i 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的第 i 个单位向量。对于凹函数 $G:\ \Delta(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$，其在 $r \in \Delta(\mathcal{X})$ 处的超微分定义为

$$\partial^+ G(r) = \{a \in \mathbb{R}^m \mid G(q) \le G(r) + a \cdot (q-r) \text{ for all } q \in \Delta(\mathcal{X})\}.$$

定理 4.1 (θ非二元状态下的适当评分规则的刻画**)**。 固定 $\theta > 0$。评分规则 s 是 θ 适当的，当且仅当存在正凹函数 $G:\ \Delta(X) \to \mathbb{R}$以及一组选定的超梯度 $g(r) \in \partial^+ G(r)$，使得

$$s(r, x_i) = -\frac{1}{\theta}\log[G(r) + g(r)\cdot(e_i - r)], \qquad r \in \Delta(\mathcal{X}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

证明。记

$$A(r, x_i) := e^{-\theta s(r, x_i)}, \qquad A(r) := (A(r, x_1), \ldots, A(r, x_m)).$$

与二元情形一样，在 r 上最大化 $U_\theta(q,\ r)$ 等价于最小化期望变换支付 $q \cdot A(r)$。

仅当。 假设 s 是 θ-适当的，并定义

$$G(q) := q \cdot A(q).$$

则 $G(q) > 0$，而适当性给出

$$G(q) = \min_{r \in \Delta(\mathcal{X})} q \cdot A(r).$$

由于每个函数 $q \mapsto q \cdot A(r)$ 关于 q 都是仿射的，它们的逐点最小值 G 是凹函数。

对于每个报告 r，仿射函数 $q \mapsto q \cdot A(r)$ 在 r 处从上方支撑 G。令 $g(r) \in \partial^+ G(r)$ 表示该支撑仿射函数在单纯形上的一个斜率向量，使得

$$q \cdot A(r) = G(r) + g(r)\cdot(q - r) \geq G(q) \qquad \text{for all } q \in \Delta(\mathcal{X}).$$

将该仿射表示与 $G(r)$的定义相结合，可得

$$G(r) + g(r)\cdot(q - r) = \sum_{i=1}^{m} q_i A(r, x_i),$$
$$G(r) = \sum_{i=1}^{m} r_i A(r, x_i).$$

用第一个方程减去第二个方程，得到

$$(A(r) - g(r))\cdot(q - r) = 0 \qquad \text{for all } q \in \Delta(\mathcal{X}).$$

因此，$A(r) = g(r) + \lambda(r)\mathbf{1}$，其中 $\lambda(r)$是与状态索引 i 无关的标量，而 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$。利用 $r \cdot \mathbf{1} = 1$，我们得到

$$G(r) = r \cdot A(r) = r \cdot g(r) + \lambda(r),$$
$$\lambda(r) = G(r) - r \cdot g(r).$$

代回可得

$$A(r) = g(r) + \big(G(r) - r \cdot g(r)\big)\mathbf{1},$$
$$A(r, x_i) = g_i(r) + G(r) - r \cdot g(r)$$
$$= G(r) + g(r)\cdot(e_i - r).$$

由于 $A(r, x_i) = e^{-\theta s(r, x_i)}$，取对数可得到 s的上述表示。

如果。 反之，假设 G 和 g 满足定理中的条件。由超梯度不等式可得

$$G(r) + g(r)\cdot(e_i - r) \geq G(e_i) > 0,$$

因此，对数定义良好。对该表示取指数，并使用 $\sum_i q_i = 1$ 和 $\sum_i q_i e_i = q$，我们得到

$$\begin{aligned} q \cdot A(r) &= \sum_{i=1}^{m} q_i \big[G(r) + g(r) \cdot (e_i - r) \big] \\ &= G(r) + g(r) \cdot (q - r) \\ &\geq G(q) = q \cdot A(q). \end{aligned}$$

因此，如实报告可使期望变换支付最小化，从而最大化 $U_\theta(q, r)$。因此，s 是 θ-适当的。□

超梯度选择并不唯一。对于任意标量 $\kappa(r)$，将 $g(r)$ 替换为 $g(r) + \kappa(r)\mathbf{1}$，超梯度不等式和评分规则都保持不变，因为对于所有 q，$r \in \Delta(\mathcal{X})$，都有 $\mathbf{1} \cdot (q - r) = 0$。

4.1.2 风险中性极限

二元情形中使用的归一化方法同样适用于非二元状态。定义

$$H_\theta(r) := \frac{1 - G_\theta(r)}{\theta}, \qquad h_\theta(r) := -\frac{g_\theta(r)}{\theta}.$$

推论 4.2（风险中性极限）。设 $\{s_\theta\}_{\theta > 0}$ 是一族一致有界的评分规则，并且当 $\theta \to 0^+$ 时一致收敛于 s_0。若对每个充分小的 $\theta > 0$，s_θ 都是 θ-适当的，则在风险中性条件下，s_0 是适当的。

更准确地说，对于每个充分小的 $\theta > 0$，选取表示超梯度 $g_\theta(r) := A_\theta(r) - \mathbf{1}$。令

$$H(r) := \sum_{i=1}^{m} r_i s_0(r, x_i), \qquad h(r) := \big(s_0(r, x_1), \ldots, s_0(r, x_m) \big).$$

因此，H 是凸的，$h(r)$ 是 H 在每个 $r \in \Delta(X)$ 处的一个次梯度，并且

$$s_0(r, x_i) = H(r) + h(r) \cdot (e_i - r), \qquad r \in \Delta(\mathcal{X}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

证明。利用在二元情形中得到的一致泰勒展开以及一致收敛 $s_\theta \to s_0$，当 $\theta \to 0^+$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} H_\theta(r) &= \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{1 - A_\theta(r, x_i)}{\theta} \\ &= \sum_{i=1}^{m} r_i s_\theta(r, x_i) + O(\theta) \longrightarrow H(r), \\ h_{\theta,i}(r) &= \frac{1 - A_\theta(r, x_i)}{\theta} \\ &= s_\theta(r, x_i) + O(\theta) \longrightarrow s_0(r, x_i) = h_i(r), \qquad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

因此，$H_\theta \to H$ 并且 $h_\theta \to h$ 一致地。

由于 G_θ 是凹的，H_θ 是凸的，且其极限 H 也为凸的。此外，超梯度不等式变为

$$H_\theta(q) \geq H_\theta(r) + h_\theta(r) \cdot (q - r).$$

取 $\theta \to 0^+$ 得到

$$H(q) \geq H(r) + h(r) \cdot (q - r) \qquad \text{for all } q, r \in \Delta(\mathcal{X}).$$

因此， $h(r)$ 是 H 在 r 处的次梯度。

最后，变换后的支付表示给出

$$\frac{1 - A_\theta(r, x_i)}{\theta} = H_\theta(r) + h_\theta(r) \cdot (e_i - r).$$

取极限可得

$$s_0(r, x_i) = H(r) + h(r) \cdot (e_i - r).$$

根据有限状态萨维奇表示（Gneiting and Raftery，2007年，第 3.1 节，式 (10)），这一表示与凸 H 及选定的次梯度 h（r）意味着 s_0 在风险中性下是适当的。□

4.2 θ-最优评分规则的结构

4.2.1 变换后的投注机制

二元构造降低了 G，同时保留了 G（p）和支付界限。要将这一构造扩展到非二元状态，需要控制单纯形每个顶点处各个支撑超平面的取值。因此，我们直接处理满足界限的变换支付向量。

对于任何可行规则，先验下的适当性意味着

$$p \cdot A(r) \geq p \cdot A(p) = G(p) \qquad \text{for every } r \in \Delta(\mathcal{X}).$$

写作 $v := G(p)$，因此每个报告都提供一个属于

$$\left\{ A \in [e^{-\theta}, 1]^m \,\middle|\, p \cdot A \geq v \right\}.$$

在信念 q下，代理人选择使 $q \cdot A(r)$最小化的报告，从而选出相应的向量 $A(r)$。因此，我们考虑一种机制，允许代理人直接从上述整个集合中选择一个变换后的支付向量。这扩大了后验信念下可选的菜单，同时使先验下的最低期望变换支付保持为 v。我们称之为变换后的投注机制。

对于每个 $v \in [e^{-\theta}, 1]$ 以及每个信念 $q \in \Delta(\mathcal{X})$，选取一个向量

$$A_v(q) \in \underset{\substack{A \in [e^{-\theta}, 1]^m \\ p \cdot A \geq v}}{\arg\min} \; q \cdot A.$$

这些选择定义了一个向量值函数 $A_v \colon \Delta(\mathcal{X}) \to [e^{-\theta}, 1]^m$。令 $A_{v,i}(r)$ 表示 $A_v(r)$的第i个分量。由此诱导的评分规则为

$$s_v(r, x_i) := -\frac{1}{\theta} \log A_{v,i}(r), \qquad r \in \Delta(\mathcal{X}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

定理 4.3 (非二元状态下的最优结构)。 固定 $\theta > 0$ 和一个后验信念分布 F，其先验为 p。那么，当 s 遍历所有可行评分规则时，

$$\max_s \mathcal{I}_\theta(s) = \max_{v \in [e^{-\theta}, 1]} \mathcal{I}_\theta(s_v).$$

定理 4.3 表明，在可行评分规则中最大化获取激励时，将注意力限制在由变换后的投注机制诱导的这一类规则上并不失一般性。

对于固定的先验界 v，代理人按如下方式选择最优的变换后的支付向量。在先验信念 p 下，代理人最小化 $p \cdot A$。因此，任何满足$p \cdot A = v$ 的可行向量都是最优的。

在后验信念 q 下，代理人最小化 $q \cdot A$。这是一个分数背包问题：从所有 i 的 $A_i = e^{-\theta}$ 开始，增加分量 i 会使 $q \cdot A$ 按每单位增加 $p \cdot A$ 的 q_i/p_i 速率上升。因此，最优选择是按照 q_i/p_i 非递减的顺序增加各分量，直到 $p \cdot A = v$。

重新标记状态，使得

$$\frac{q_1}{p_1} \le \frac{q_2}{p_2} \le \cdots \le \frac{q_m}{p_m}.$$

令 k 为满足条件的最小索引

$$\sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=k+1}^{m} e^{-\theta} p_i \ge v.$$

最优赌注将变换后的支付 1 分配给状态 1、……、$k-1$，将变换后的支付 $e^{-\theta}$分配给状态 $k+1$、……、m，并将一个中间值的变换后支付分配给状态 k，使先验约束恰好取等。也就是说，

$$A_{v,i}(q) = \begin{cases} 1, & i < k, \\ \dfrac{v - \sum_{j=1}^{k-1} p_j - \sum_{j=k+1}^{m} e^{-\theta} p_j}{p_k}, & i = k, \\ e^{-\theta}, & i > k. \end{cases}$$

定理 *4.3* 的证明。令 s 为任意可行评分规则，记 $A(r)$ 为其变换后的支付向量，并令 $v := p \cdot A(p) = G(p)$。

先验处的适当性和支付界限给出

$$p \cdot A(r) \ge p \cdot A(p) = v, \qquad A(r) \in [e^{-\theta}, 1]^m \qquad \text{for every } r \in \Delta(\mathcal{X}).$$

因此，原规则提供的每个向量在变换后的投注机制下均可用。对于每个后验信念 q,

$$q \cdot A(q) \ge \min_{\substack{A \in [e^{-\theta},1]^m \\ p \cdot A \ge v}} q \cdot A = q \cdot A_v(q).$$

取期望可得

$$\mathbb{E}_{Q \sim F}[Q \cdot A(Q)] \ge \mathbb{E}_{Q \sim F}[Q \cdot A_v(Q)].$$

与此同时，在信念 p 下，代理人选择

$$A_v(p) \in \operatorname*{arg\,min}_{\substack{A \in [e^{-\theta},1]^m \\ p \cdot A \ge v}} p \cdot A.$$

最小值为 v，因为原向量 $A(p)$可用且能达到该值。因此，

$$p \cdot A_v(p) = v = p \cdot A(p).$$

因此，

$$\begin{aligned} &\log \mathbb{E}_{Q \sim F}[Q \cdot A(Q)] - \log[p \cdot A(p)] \\ &\quad \ge \log \mathbb{E}_{Q \sim F}[Q \cdot A_v(Q)] - \log[p \cdot A_v(p)]. \end{aligned}$$

由于 $\theta > 0$，两边乘以 $-1/\theta$ 可知，相较于 s，变换后的投注机制会弱增加获取信息的激励。

为证明适当性，定义相应的函数

$$G_v(q) := q \cdot A_v(q) = \min_{\substack{A \in [e^{-\theta},1]^m \\ p \cdot A \geq v}} q \cdot A.$$

由于每个函数 $q \mapsto q \cdot A$ 都是仿射函数，因此它们的逐点最小值 G_v 是凹函数。此外，每个报告 r 都会选择一个可用向量 $A_v(r)$，因此

$$q \cdot A_v(r) \geq G_v(q) = q \cdot A_v(q) \qquad \text{for all } q, r \in \Delta(\mathcal{X}).$$

因此，如实报告会使期望变换支付最小化，进而最大化$U_\theta(q,\ r)$。所以，s_v 是 θ-适当的。

最后，变换后的支付界限意味着

$$0 \leq s_v(r, x_i) = -\frac{1}{\theta} \log A_{v,i}(r) \leq 1 \qquad \text{for all } r \in \Delta(\mathcal{X}),\ i = 1, \ldots, m.$$

因此，对于任意 $v \in [e^{-\theta}, 1]$，s_v 都是可行的。

上述贪心公式表明，对于任意 q，$G_v(q)$关于 v 是连续的。由于 $e^{-\theta} \leq G_v(q) \leq 1$，由有界收敛定理可知，$\mathcal{I}_\theta(s_v)$关于 v是连续的。因此，它在紧区间 $[e^{-\theta}, 1]$ 上的最大值可以取到。结合每个 s_v 的可行性，以及上述对每个可行 s所证明的弱改进，这就证明了所述等式。□

4.2.2 风险中性极限

在风险中性且状态为非二元的情况下，一种最优结构是 Li 等人（2025年，定义 12 和定理 5）所描述的投注机制。该机制允许代理人选择满足以下条件的支付向量 $s \in [0,1]^m$

$$p \cdot s \leq \beta.$$

要在这一类机制中获得最优规则，需要对 β进行优化。在此，我们固定任意一个$\beta \in [0,1]$。

在信念 q 下，代理人最大化 $q \cdot s$。具体而言，重新标记状态，使得

$$\frac{q_1}{p_1} \geq \frac{q_2}{p_2} \geq \cdots \geq \frac{q_m}{p_m}.$$

令 k 为满足以下条件的最小索引

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \geq \beta.$$

最优选择定义了所诱导的评分规则

$$s_{\beta,0}(q, x_i) = \begin{cases} 1, & i < k, \\ \dfrac{\beta - \sum_{j=1}^{k-1} p_j}{p_k}, & i = k, \\ 0, & i > k. \end{cases}$$

为将此机制与变换后的投注机制进行比较，针对这个固定的 β，定义相应的变换后先验界如下：

$$v_\theta := 1 - (1 - e^{-\theta})\beta.$$

推论 4.4 (风险中性极限)。 令 $s_{\beta,\ 0}$ 为参数为 β 的风险中性投注机制所诱导的评分规则。对于每个 $\theta > 0$，令 s_θ 为参数为 v_θ 的变换后投注机制所诱导的评分规则。在两个机制中，均按照相同的 q_i/p_i 非递增排序进行贪心选择，并根据固定的状态顺序处理并列；该状态顺序独立于 θ。

随着 $\theta \to 0^+$， s_θ 在报告和状态上一致地收敛到$s_{\beta,\ 0}$，并且

$$\mathcal{I}_\theta(s_\theta) \longrightarrow \mathcal{I}_0(s_{\beta,0}).$$

证明。 固定一个信念 q。为进行这一比较，按 q_i/p_i的非递增顺序重新标记各状态，从而反转上文所用的排序方向:

$$\frac{q_1}{p_1} \geq \frac{q_2}{p_2} \geq \cdots \geq \frac{q_m}{p_m}.$$

在此排序下，风险厌恶情形下的边界索引是满足下述条件的最小 k

$$e^{-\theta}\sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=k+1}^{m} p_i \leq v_\theta.$$

代入 v_θ的定义，该条件变为

$$1-(1-e^{-\theta})\sum_{i=1}^{k} p_i \leq 1-(1-e^{-\theta})\beta,$$

或等价地,

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \geq \beta.$$

其最小解恰好是风险中性下的边界索引。因此这两种机制使用相同的 k。

风险中性时选定的支付向量为

$$s_{\beta,0}(q,x_i) = \begin{cases} 1, & i<k, \\ \dfrac{\beta - \sum_{j=1}^{k-1} p_j}{p_k}, & i=k, \\ 0, & i>k. \end{cases}$$

风险厌恶时选定的变换后的支付向量为

$$A_\theta(q,x_i) = \begin{cases} e^{-\theta}, & i<k, \\ \dfrac{v_\theta - \sum_{j=1}^{k-1} e^{-\theta} p_j - \sum_{j=k+1}^{m} p_j}{p_k}, & i=k, \\ 1, & i>k. \end{cases}$$

因此，对于 $i<k$，两种机制下的货币支付均为 1；对于 $i>k$，均为 0。

对于边界状态，代入 v_θ 后得到

$$\begin{aligned} A_\theta(q,x_k) &= \frac{1-(1-e^{-\theta})\beta - e^{-\theta}\sum_{j=1}^{k-1} p_j - \sum_{j=k+1}^{m} p_j}{p_k} \\ &= 1-(1-e^{-\theta})\frac{\beta - \sum_{j=1}^{k-1} p_j}{p_k} \\ &= 1-(1-e^{-\theta})s_{\beta,0}(q,x_k). \end{aligned}$$

相同　　该恒等式对所有状态都成立；由于 q 是任意的，因此对每个报告 r 都成立。因此 y,

$$\begin{aligned} s_\theta(r, x_i) &= -\frac{1}{\theta}\log\Big[1-(1-e^{-\theta})s_{\beta,0}(r, x_i)\Big] \\ &= \frac{1-e^{-\theta}}{\theta}s_{\beta,0}(r, x_i) + O(\theta) \longrightarrow s_{\beta,0}(r, x_i). \end{aligned}$$

由于 $0 \leq s_{\beta,0}(r, x_i) \leq 1$，余项在报告和状态上是一致的。因此，$s_\theta \to s_{\beta,0}$一致地成立。

最后，写作 $s_{\beta,0}(q) := (s_{\beta,0}(q, x_1) \ldots, s_{\beta,0}(q, x_m))$。支付恒等式给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\log[p \cdot A_\theta(p)] &= \frac{1}{\theta}\log\Big[1-(1-e^{-\theta})p \cdot s_{\beta,0}(p)\Big] \\ &= -\frac{1-e^{-\theta}}{\theta}\, p \cdot s_{\beta,0}(p) + O(\theta) \\ &\longrightarrow -p \cdot s_{\beta,0}(p), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\theta}\log \mathbb{E}_{Q\sim F}[Q \cdot A_\theta(Q)] &= -\frac{1}{\theta}\log\Big[1-(1-e^{-\theta})\mathbb{E}_{Q\sim F}[Q \cdot s_{\beta,0}(Q)]\Big] \\ &= \frac{1-e^{-\theta}}{\theta}\mathbb{E}_{Q\sim F}[Q \cdot s_{\beta,0}(Q)] + O(\theta) \\ &\longrightarrow \mathbb{E}_{Q\sim F}[Q \cdot s_{\beta,0}(Q)]. \end{aligned}$$

将这些极限相加可得

$$\lim_{\theta\to 0^+} \mathcal{I}_\theta(s_\theta) = \mathbb{E}_{Q\sim F}[Q \cdot s_{\beta,0}(Q)] - p \cdot s_{\beta,0}(p) = \mathcal{I}_0(s_{\beta,0}).$$

□

5 结论

本文为二元状态推导了显式最优规则，并将非二元状态下的最优设计归结为选择先验界。所构造的规则是弱适当的，因此，最优报告未必能识别后验信念。未来工作可研究严格适当评分规则下的信息获取。另一个研究方向是确定非二元状态模型中的最优先验界。

作者贡献

Ying Liu（Y.L.）完成了大部分研究。Y.L. 建立了模型，推导并证明了研究结果，梳理了相关文献，撰写了稿件，并独立提出了论文所探讨的部分研究方向。Raimundo Saona（R.S.）构思并指导了该项目。R.S. 提议将 Li 等人（2025）的评分规则设计框架扩展至具有熵式风险偏好的风险厌恶型代理人，提出了研究问题，并在整个研究过程中提供方向和反馈，包括对稿件草稿的评论。

生成式人工智能声明

我们使用 ChatGPT 对草稿的语言、符号、LaTeX 和呈现方式提出改进建议，并查找可能相关的文献。我们使用 Claude 翻译引言和预备知识部分中的个别短语，并提出措辞修改建议。在完成数学论证的初稿后，我们使用 ChatGPT 检查论证是否可能存在遗漏

或表述不清之处，并在采纳任何由此产生的修改前，对照定义和我们的计算进行核查。论文中列出的所有参考文献均已对照原始来源核实。

参考文献

Arthur Carvalho。定制化严格评分规则引出决策权重。《判断与决策》，10(1):86–96，2015年。doi：10.1017/S193029750000320X。

Christopher P. Chambers、Paul J. Healy 和 Nicolas S. Lambert。具有一般偏好的适当评分规则：最优报告的对偶刻画。《博弈与经济行为》，117:322–341，2019。doi：10.1016/j.geb.2019.07.012。

Siyu Chen、Jibang Wu、Yifan Wu 和 Zhuoran Yang。学习激励信息获取：适当评分规则与委托代理模型的结合。载于第*40*届国际机器学习会议论文集，第202卷《机器学习研究论文集》，第5194–5218页。PMLR，2023年。URL https://proceedings.mlr.press/v202/chen23ah.html。

Yiling Chen 和 Fang-Yi Yu。部分知识下的最优评分规则设计。载于《网络与互联网经济学》，收录于《计算机科学讲义》第 15534 卷，第 383–400 页，Cham，2026年。施普林格。doi: 10.1007/978-3-032-08560-3_22。

Aubrey Clark 和 Giovanni Reggiani。信息获取合同。arXiv 预印本 arXiv:2103.03911，2021年。URL https://arxiv.org/abs/2103.03911。

Robert T. Clemen。激励合同与严格适当评分规则。*TEST*，11(1):167–189，2002年。doi: 10.1007/BF02595735。

Fang Fang、Maxwell B. Stinchcombe 和 Andrew B. Whinston。具有任意价值函数的适当评分规则。《数理经济学杂志》，46(6):1200–1210，2010年。doi: 10.1016/j.jmateco.2010.09.002。

Hans Föllmer 和 Alexander Schied。凸风险度量与交易约束。《金融与随机过程》，6：429–447，2002年。doi：10.1007/s007800200072。

Hans Föllmer 和 Stefan Weber。资本确定的风险度量公理化方法。《金融经济学年度评论》，7：301–337，2015年。doi：10.1146/ annurev-financial-111914-042031。

Tilmann Gneiting 和 Adrian E. Raftery。严格适当评分规则、预测与估计。《美国统计学会会刊》，102(477)：359–378，2007年。doi：10.1198/016214506000001437。

Jason D. Hartline、Liren Shan、Yingkai Li 和 Yifan Wu。多维努力的最优评分规则。载于第*36*届学习理论会议论文集，《机器学习研究论文集》第195卷，第2624–2650页。PMLR，2023年。URL https://proceedings.mlr.press/v195/hartline23a.html。

Jussi Keppo 和 Yingkai Li。《三级与阈值：私人市场投资中的激励》。arXiv 预印本 arXiv:2512.19405，2025年。网址： https://arxiv.org/abs/2512.19405。

Amit Kothiyal、Vitalie Spinu 和 Peter P. Wakker。用于衡量模糊性和主观信念的共单调适当评分规则。《多准则决策分析杂志》，17 (3–4):101–113，2011年。doi: 10.1002/mcda.454。

Nicolas S. Lambert。面向具有任意风险偏好的代理人的概率引导。工作论文，斯坦福大学商学院，2011年。URL https://ai.stanford.edu/~nlambert/papers/riskpreferences_nov2011.pdf。Yingkai Li、Jason D. Hartline、Liren Shan 和 Yifan Wu。评分规则的优化。arXiv 预印本 arXiv:2007.02905v3，2025年。URL https://arxiv.org/abs/2007.02905。首次发表于2020年。两页摘要发表于第23届 ACM 经济学与计算会议论文集（EC '22），第988–989页。Assar Lindbeck 和 Jörgen Weibull。投资决策授权与代理人的最优薪酬。《欧洲经济评论》，129:103559，2020年。doi: 10.1016/j.euroecorev. 2020.103559。Alfred Müller。作为风险度量的确定性等价物。《巴西概率与统计杂志》，21(1):1–12，2007年。URL https://www.jstor.org/stable/43601086。Roger B. Myerson。激励相容与议价问题。《计量经济学》，47(1): 61–73，1979年。doi: 10.2307/1912346。Eric Neyman、Georgy Noarov 和 S. Matthew Weinberg。激励精确度的二元评分规则。载于第*22*届 *ACM* 经济学与计算会议论文集，第718–733页。ACM，2021年。doi: 10.1145/3465456.3467639。Theo Offerman、Joep Sonnemans、Gijs van de Kuilen 和 Peter P. Wakker。面向非贝叶斯主义者的真话血清：针对风险态度校正适当评分规则。《经济研究评论》，76(4):1461–1489，2009年。doi: 10.1111/j.1467-937X.2009.00557.x。Kent Osband。最优预测激励。《政治经济学杂志》，97(5):1091–1112，1989年。doi: 10.1086/261644。Maneesha Papireddygari 和 Bo Waggoner。通过评分规则订立包含信息获取的契约。载于第*23*届 *ACM* 经济学与计算会议论文集，第703–704页。ACM，2022年。doi: 10.1145/3490486.3538261。Alexander Peysakhovich 和 Mikkel Plagborg-Møller。关于适当评分规则与风险厌恶的简短说明。《经济学快报》，117(1):357–361，2012年。doi: 10.1016/j.econlet.2012.05.030。Daniel Rappoport 和 Valentin Somma。激励信息设计。SSRN 工作论文第3001416号，2017年。URL https://ssrn.com/abstract=3001416。Leonard J. Savage。个人概率与期望的引导。《美国统计学会杂志》，66(336):783–801，1971年。doi: 10.1080/01621459.1971.10482346。Mark Whitmeyer 和 Kun Zhang。购买意见。arXiv 预印本 arXiv:2202.05249，2023年。URL https://arxiv.org/abs/2202.05249。修订于2023年7月。Fan Wu。激励信息获取。arXiv 预印本 arXiv:2410.13978v4，2026年。URLhttps://arxiv.org/abs/2410.13978。首次发表于2024年。