arXiv:2611.30571v1 [math.MG] 23 Nov 2026

平面倍增测度在分段 C^1 约当区域* 上的限制测度

王小华[1] 文帆[2†]中国经济与管理研究院，中央财经大学，中国fridman wxh@163.com

[2]暨南大学数学系，广州 510632，中国
wenfan@jnu.edu.cn

摘要

我们比较了分段 C^1 约当域上全支撑平面倍增测度的限制测度类 $\mathscr{R}(\Omega)$ 与内部倍增测度类 $\mathcal{D}(\Omega)$。在不存在零内角尖点时，这两个类相同。在任何此类尖点处，$\mathscr{R}(\Omega)\backslash\mathcal{D}(\Omega)$ 非空。对于幂可比宽度，$\mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathscr{R}(\Omega)$；对于无限平坦宽度，这两个类互不相交。在光滑端点正则性条件下，有限接触阶与无限接触阶分别对应这两种情况。若仅满足 C^1 正则性，则有限对数阶不能确定这两个类是否相交；此外，还存在交集非空且任一类都不包含另一类的例子。对于单个内部测度，其属于 $\mathscr{R}(\Omega)$ 的判据由其轴向投影满足的势不等式给出。我们通过正核构造和 Whitney 质量替换证明了这一判据，并得到了变幂宽度的充分条件以及一个独立的有限系统判据。

关键词： 倍增测度；限制测度；乔丹域；零内角；尖点宽度；有限阶。

MSC[2020]: 28A75

1 引言与主要结果

倍增测度是度量空间分析中的基本工具；参见 Heinonen [5]。Vol'berg 和 Konyagin [14]、Luukkainen 和 Saksman [9], 的存在性结果，以及 Käenmäki、Rajala 和 Suomala [7], 的嵌套立方体构造，保证欧几里得空间的紧致子集上存在倍增测度。但这些结果并不能推出，对给定的环境倍增测度取限制测度后仍保持倍增性。我们研究这一问题，以及内部倍增测度与平面限制测度之间的关系，并在同一域上考察两类测度。

所有距离均为欧几里得距离。对于 $X \subset \mathbb{R}^2$，记 $B_X(x,r) = X \cap B(x,r)$，并用$\mathcal{D}(X)$表示 X 上全支撑的倍增拉东测度。因此， $\mu \in \mathcal{D}(X)$ 意味着存在某个

*本研究得到国家自然科学基金委员会（NSFC）资助，项目编号：12571094 和 1250010257。

†通讯作者。电子邮箱： wenfan@jnu.edu.cn。

$D_\mu \geq 1$ 满足

$$0 < \mu(B_X(x,2r)) \leq D_\mu \mu(B_X(x,r)) < \infty \qquad (x \in X,\ r > 0). \tag{1.1}$$

对于有界约当域 Ω，令 $E = \overline{\Omega}$，并定义

$$\mathscr{R}(\Omega) = \{\nu \llcorner \Omega : \nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}. \tag{1.2}$$

对于闭域和截断模型也使用相同的记号。$\mathscr{R}(\Omega)$ 和 $\mathcal{D}(\Omega)$ 都由 Ω 上的测度组成；隶属于 $\mathscr{R}(\Omega)$ 并不要求具有内部倍增性。我们研究它们的交集及两者的差集。因此，$\mathscr{R}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ 表示每个平面倍增限制都是倍增的，而 $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{R}(\Omega)$ 表示每个内部倍增测度都是平面限制测度。测度相等始终指在每个博雷尔集上相等。

1.1 边界约定与接触阶

定义 1.1。分段 C^1 约当域 是一个有界约当域 Ω，其边界是有限条正则 C^1 弧按循环顺序首尾相接而成（端点除外）。每条弧都可在一个闭区间上作单射参数化，且其导数在整个区间内处处非零；不同的弧仅在相邻弧的端点处相交。若 Ω 的一个连接点 $p \in \partial$处，两条背离 p 的切射线重合，且 Ω 局部位于相邻弧之间，则该点是一个零内角尖点 。

我们先说明，选择开域 Ω 还是其闭包 $E = \overline{\Omega}$ 并无影响。每个 $\mu \in \mathcal{D}(E)$ 和每个 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ 对 $\partial\Omega$ 的测度都为零。为此，设 m 是定义在连通空间 $X = E$ 或 $X = \mathbb{R}^2$ 上的倍增测度。对每个 $x \in X$ 和充分小的 r，由连通性可得 $q \in X$，使得 $|q - x| = 3r/4$。由于 $B_X(q, r/8)$ 包含于 $B_X(x,r) \setminus B_X(x,r/2)$，且 $B_X(x,r) \subset B_X(q,2r)$，应用四次倍增性可得

$$m(B_X(x,r/2)) \leq (1 - D_m^{-4}) m(B_X(x,r)). \tag{1.3}$$

迭代可得 $m(\{x\}) = 0$。除有限个弧连接点外，边界点都有一个 C^1 图像邻域。以该点为中心的每个充分小的球 $B(x,r)$ 都包含一个内部球 $B(a, \kappa r)$，满足 $\subset \Omega \cap B(x,r)$，且有固定的局部 $\kappa > 0$。倍增性赋予这个内部球的测度是 $m(B_X(x,r))$ 的固定正比例。因此，在这样的点处，边界的密度不可能为一；而倍增测度的微分定理 [5] 表明，正则边界弧是零测集。由无原子性可知，有限个连接点的测度为零。

因此，限制测度给出了从$\mathcal{D}(E)$到$\mathcal{D}(\Omega)$的一个双射。事实上，其逆映射将边界赋予零测度：对于 $\lambda \in \mathcal{D}(\Omega)$，令 $\lambda(A) = \lambda(A \cap \Omega)$。这是一个有限拉东测度，因为 Ω 有界，并且 λ 在每个相对球上都是有限的。给定 $x \in E$ 和 $r > 0$，取 $a \in \Omega$，使得 $|a - x| < r/4$。于是 $B(x,2r) \cap \Omega \subset B_\Omega(a,3r)$，且 $B_\Omega(a, r/2) \subset B(x,r) \cap \Omega$，因此 λ具有至多为 D_λ^3的倍增常数。环境中的边界零测性还给出

$$\nu \llcorner \Omega \in \mathcal{D}(\Omega) \iff \nu \llcorner E \in \mathcal{D}(E), \qquad \nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2). \tag{1.4}$$

在这一对应关系下，$\mathscr{R}(\Omega)$ 和 $\mathcal{D}(\Omega)$在开域和闭域上的含义相同。当紧致性便于表述时，我们在陈述中使用 Ω 和 E 。由于 E 是紧致的且具有几何倍增性，Luukkainen 和 Saksman 的存在性定理 [9]也给出 $\mathcal{D}(\Omega) \neq \varnothing$。

补集中的一个尖点的内角为 2π，且不是 Ω 的零内角尖点。全局正则的 C^1 约当曲线没有零角尖点。

如果一个分片 C^1 约当域没有零内角尖点，那么 $\mathscr{R}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$。事实上，正则边界点和非零角连接处（包括内角为 2π 的连接处）均满足一致的小尺度内球条件。引理 2.3 给出 $\mathscr{R}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$，而引理 2.12 中的反射质量构造给出反向包含关系。上述边界识别适用于两者。

在主要结果中，除非另有说明，Ω 是一个分段 C^1 约当区域，其唯一的零内角尖点位于 0 处，称为单尖点区域。

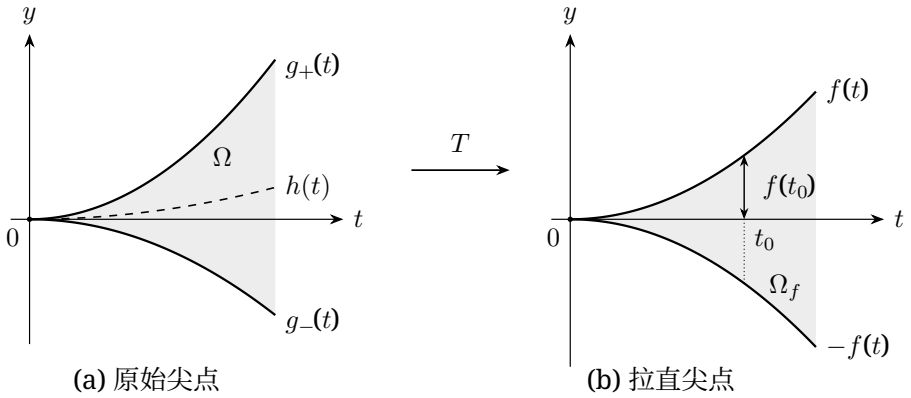
取公共切线为正 t轴。在 0 附近，边界弧是图像$g_-(t) < g_+(t)$，其中 $g_\pm \in C^1([0,a])$ 且 $g_\pm(0) = g'_\pm(0) = 0$。令

$$h(t) = \frac{g_+(t) + g_-(t)}{2}, \qquad f(t) = \frac{g_+(t) - g_-(t)}{2}. \tag{1.5}$$

利普希茨剪切将中点图像拉直。所得的局部区域为

$$\Omega_f = \{(t,y) : 0 < t < a,\ |y| < f(t)\}, \qquad f(0) = f'(0) = 0, \quad f(t) > 0\ (t > 0). \tag{1.6}$$

记号 Ω_f 仅表示尖点邻域；正则封盖使有界区域在 0 之外闭合。图1 展示了原始尖点及其拉直后的局部模型。



(a) 原始尖点　　(b) 拉直尖点

图 1：零内角尖点的局部几何。左：边界分支 g_- 和g_+及其中点图像 h。右：剪切 $T(t,\ y) = (t,\ y - h(t))$ 给出 Ω_f。0 处的公共切线射线是正 t 轴；t_0 处的总垂直宽度为 $2f(t_0)$。图中仅显示了一个尖点邻域。轮廓为示意图；不假设其具有单调性。

W我们区分关于 f的三个条件。若在 0 附近，存在幂可比较阶 $\alpha > 1$，使得

$$ct^\alpha \le f(t) \le Ct^\alpha \tag{1.7}$$

对某个 $c,\ C > 0$成立。若其具有对数阶 α，则

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\log f(t)}{\log t} = \alpha. \tag{1.8}$$

若对每个 $M > 0$，都存在 $C_M,\ a_M > 0$ 使得，则称其为无限平坦

$$f(t) \le C_M t^M \qquad (0 < t < a_M). \tag{1.9}$$

幂比较蕴含相应的对数阶，但反之不成立。这些定义使用（1.5）中的固定切向坐标；不假设存在高于一阶的导数。

若相邻弧在 C^∞ 处相交，则其接触阶 为

$$m = \min\{j \geq 2 : f^{(j)}(0) \neq 0\}, \tag{1.10}$$

满足 $m = \infty$ 若所有导数均为零。对于有限的 m，泰勒定理给出 $f(t) = bt^m + o(t^m)$满足 $b > 0$；对于 $m = \infty$，(1.9) 成立。

1.2 两类之间的关系

定理 1.2. 对于每个单尖点分段 C^1 约当域，$\mathscr{R}(\Omega) \setminus D(\Omega) \neq \varnothing$。这个差集中的一个测度可以选为某个绝对连续、支撑为全平面的倍增测度的限制测度。

定理 1.3. 令 $F(r) =$上确界$_{0\leq t\leq r} f(t)$。若 $\mathscr{R}(\Omega) \cap D(\Omega) \neq \varnothing$，则存在某些 $c > 0$、$N > 1$和 $r_0 > 0$ 满足

$$F(r) \geq cr^N \qquad (0 < r < r_0). \tag{1.11}$$

因此，无限阶平坦宽度意味着 $\mathscr{R}(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega) = \varnothing$。若 f 是非递减的，$F(r)$ 中的(1.11) 可以替换为 $f(r)$。

定理 1.4。 如果宽度满足 (1.7) 对于某个 $\alpha > 1$，那么

$$\mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathscr{R}(\Omega), \qquad \mathcal{L}^2 \llcorner \Omega \in \mathcal{D}(\Omega).$$

相邻弧只需具备 C^1 正则性。特别地，如果$f(t) = bt^\alpha + o(t^\alpha)$ 且 $b > 0$，则结论成立，无需任何导数渐近假设。

定理 1.5。 假设两条相邻弧在 C^∞ 意义下直至 0 都是正则的，并令 m为它们的接触阶。如果 $m < \infty$，则 $D(\Omega) \subsetneq \mathscr{R}(\Omega)$，且限制面积具有倍增性。如果 $m = \infty$，则$\mathscr{R}(\Omega) \cap D(\Omega) = \varnothing$。

定理 1.6。 对于每个 $\alpha > 1$，都存在一个单尖点分段 C^1 约当域，其宽度 $f \in C^1([0, a]) \cap C^\infty((0, a])$ 上严格递增，且 $f(0) = f\prime(0) = 0$，使得

$$t^\alpha \leq f(t) \leq 3t^\alpha \exp\sqrt{\log(1/t)} \quad (0 < t < a), \tag{1.12}$$

但 $\mathscr{R}(\Omega) \cap D(\Omega) = \varnothing$。其对数阶为 α。

定理 1.4 和 1.6 表明，即使对于具有多项式下界的严格递增宽度，有限对数阶也不能确定这两个类是否相交。

1.3 内部测度的隶属关系

对于局部判据，将拉直尖点截断并线性缩放为

$$\begin{aligned} E_f &= \{(t, y) : 0 \leq t \leq 1,\ |y| \leq f(t)\}, \\ f \in C^1([0, 1]), &\quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f(t) > 0\ (t > 0). \end{aligned} \tag{1.13}$$

通过缩放也允许其他正的轴向端点。我们使用 $\pi(t,\ y) = t$, $I(t,\ r) = (t - r,\ t + r) \cap [0, 1]$, 以及轴向投影

$$\lambda = \pi_\# \mu \qquad (\mu \in \mathcal{D}(E_f)). \tag{1.14}$$

将内部测度限制在足够短的截断尖 cusp 上后，仍具有倍增性：在新的截面处，半径相当的内部球可提供所需的质量比较；其他位置的小球继承原有估计，而紧致性则处理其余尺度。定义1.1 之后的边界对应允许采用这一闭集局部模型，同时仍以Ω 为主要对象。

定理 1.7。 设 E_f 由 (1.13)给出，设 $\mu \in \mathcal{D}(E_f)$，并令 $\lambda = \pi_{\#}\mu$。那么 $\mu \in \mathscr{R}(E_f)$当且仅当存在 $0 < \varepsilon < 1$、 $N \geq 2$和 $C < \infty$，使得对每个充分小的$t > 0$，

$$\int_{[0,1]} \left(\frac{f(t)}{f(t) + |t - s|} \right)^N f(s)^{-\varepsilon} \, d\lambda(s) \leq C f(t)^{-\varepsilon} \lambda(I(t, f(t))). \tag{1.15}$$

投影 λ 是倍增的，且在0处没有原子。不假设 f 具有任何单调性或满足任何加倍条件。当检验成立时，存在一个测度 $\nu \in \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2)$，使得 ν $E_f = \mu$ 且$\nu(\mathbb{R}^2 \setminus E_f) \ll \boldsymbol{L}^2$。

参数可能取决于给定的测度。特别是，该判据并未声称对于同一个域上的所有测度，都有一组相同的参数适用。

推论 1.8. 令 $\lambda \in \mathcal{D}([0,1])$ 定义为

$$d\eta_\lambda(t, y) = \frac{\mathbf{1}_{\{|y| \leq f(t)\}}}{2f(t)} \, d\lambda(t) \, dy. \tag{1.16}$$

那么 $\eta_\lambda \in \boldsymbol{D}(E_f)$ 和 $\pi_{\#}\eta_\lambda = \lambda$。对于任意 $\mu \in \boldsymbol{D}(E_f)$，

$$\mu \in \mathscr{R}(E_f) \quad \Longleftrightarrow \quad \eta_{\pi_{\#}\mu} \in \mathscr{R}(E_f).$$

更一般地，轴向投影可比较的两个内部倍增测度，要么都属于 $\mathscr{R}(E_f)$，要么都不属于其中。

推论 1.9。 如果 $\mu \in \boldsymbol{D}(\Omega) \cap \mathscr{R}(\Omega)$ 且 λ 是其在$(0, a)$上的局部轴向投影，那么，对于某个 $\varepsilon > 0$，

$$\int_{(0,a)} f(t)^{-\varepsilon} \, d\lambda(t) < \infty. \tag{1.17}$$

这已经可以由势判据推出，因为其核在任意固定的正 t上都在该紧轴向区间上有下界。第 3 节给出了通过条带衰减得到的直接证明。该条件并不充分；参见注3.4。

定理 1.10。 存在一个单尖点分片 C^1 约当域，其宽度属于 $C^1([0,a]) \cap C^\infty((0,a])$，并且三个集合

$$\mathscr{R}(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega), \qquad \mathscr{R}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(\Omega), \qquad \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathscr{R}(\Omega)$$

均非空。

该构造利用了围绕具有较小上盒维数的重缩放紧集的狭窄宽度谷。其中一个轴向倍增测度通过了势检验；另一个则不具有有限负宽度矩。因此，非空交集并不必然意味着任一包含关系。命题 3.6 和定理 3.7 给出了关于 $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{R}(\Omega)$ 的其他充分几何条件。定理 3.12 通过有限质量约束系统给出了一个独立的隶属关系判据。

1.4 相关工作与证明策略

限制问题属于环境倍增测度的研究范畴；参见 Kaufman 和 Wu [8]。若缺乏边界控制，那么闭包上存在倍增测度并不意味着域上也存在：Saksman [13] 构造了不携带任何倍增测度的有界 Jordan 域。

对于一致区域，环境倍增测度限制后仍为倍增测度，且在边界上的测度为零；参见 Murugan [10, 引理 3。5]。正如 García-Bravo、Ikonen 和 Zhu [4, 例 54]所指出的，零角尖点不满足底层的内部开瓶器条件，但面积测度在二次尖点上仍具有倍增性。他们还讨论了尖点宽度不断增加、以致限制面积不再具有倍增性的情形。Dai、Wen、Xing 和 Zhan [3] 构造了携带倍增测度、但不存在任何环境倍增测度的倍增限制的约当区域。

相关工作探讨了倍增测度的零测集与厚度。Wu [20] 研究了倍增测度和二进倍增测度的零测集；Buckley、Hanson 和 MacManus [1]考察了由一般集合定义的倍增条件以及拟对称厚康托集。Csörnyei 和 Suomala [2], 、Ojala、Rajala 和 Suo- mala [11], ，以及 W. Wang、S. Wen 和 Z.-Y. Wen [15]研究了薄集与厚集。对于我们的区域，任意全支撑环境倍增测度赋予其正质量；问题在于这些限制测度与内部倍增测度之间有何关系。

Kaufman 和 Wu [8, p. 537] 也曾提出，完美集上的哪些倍增测度可由环境限制得到。Wang、Wen 和 Wen [17, 18]研究了 Whitney 修改集上的互补质量构造；Wang 和 Wen [16]以及 Wei、Wen 和 Wen [19]探讨了与康托测度相关的限制问题。这里，两个量词由 $\mathscr{R}(\Omega)$ 与 $\mathcal{D}(\Omega)$ 之间的两个包含关系来表述。势判据保留了完整的指定内部测度，而不仅仅是其相差常数倍的质量。

定理 1.10 中使用的具有正倍增测度的低维紧集，由 Rossi 和 Shmerkin [12, 第 4]节讨论；我们提供所需的端点归一化构造。我们的有限系统判据采用嵌套正方形上的一致测度，这与嵌套分解的思路相近 [7, 6], ，并在每一层比较所有相邻正方形。

第 2 节建立几何估计、投影引理、Whitney 质量替换和正核构造。第 3 节证明所述集合关系、隶属关系判据及相关例子。最后一条几何评注讨论有限个尖点的情形。

2 主要引理

我们用 $A \lesssim B$ 表示 $A \le CB$，其中估计中的常数与点和尺度无关； $A \asymp B$ 表示双向可比。常数可以依赖于固定的域以及固定测度的倍增常数。

我们还将使用一个简单的局部化观察。用尖点邻域、普通边界图和内部邻域对 E 作有限覆盖，可将一致的局部倍增估计转化为所有充分小尺度上的倍增估计。对于其余半径 $r \ge r_* > 0$，用半径为 $r_*/4$ 的相对球作有限覆盖，可得到球测度的一致正下界，而总测度有限。因此，这些局部估计蕴含全局倍增性。

2.1 几何比较与环境估计

引理 2.1。 如果 $\mu \in D(X)$ 且 $\lambda \ge 1$，那么

$$\mu(B_X(x, \lambda r)) \le D_\mu^{\lceil \log_2 \lambda \rceil} \mu(B_X(x, r)). \tag{2.1}$$

对于 $0 < r \le R$，当 $s = \log_2 D_\mu$ 时，也有

$$\mu(B_X(x, r)) \ge D_\mu^{-1} (r/R)^s \mu(B_X(x, R)). \tag{2.2}$$

半径相近且中心间距为这些半径固定倍数的球，其测度也相近。倍增性在双 *Lipschitz* 映射下保持不变；若将测度替换为在所有博雷尔集上与之相近的测度，倍增性也保持不变。

证明。 迭代倍增不等式，并利用球包含关系。对于常数为 L 的双 Lipschitz 映射 T，使用 $B(x,\ r/L) \subset T^{-1}(B(Tx,\ r)) \subset B(x,\ Lr)$。若 $c\mu \le \lambda \le C\mu$，则 $\lambda(B_X(x,\ 2r)) \le (C/c)D_\mu\lambda(B_X(x,\ r))$。 □

引理 2.2。 局部表示 （1.5）–（1.6）在单尖点分段C^1 约当区域的尖点 $\mathbb{R}^2$ *0* 处成立。拉直映射可以选取为 $\mathbb{R}^2$ 上的保持面积的全局双 *Lipschitz* 同胚。与$\mathcal{D}$ 之间的关系在该坐标变换下保持不变。

证明。 每个相邻切向量的水平分量都非零。因此，单侧反函数定理给出了直到 0 的两个图像表示。它们的中点h 在 $[0,a]$上是 Lipschitz 的。在 $t<0$ 上将其延拓为 0，并在 $t>a$上延拓为 $h(a)+h'(a)(t-a)$，从而得到一个全局 C^1 Lipschitz 函数。定义 $T(t,\ y) = (t,\ y-h(t))$。 T和 T^{-1} 都是 Lipschitz 的。由 Fubini 定理可知面积保持。对于每个博雷尔测度 ν，

$$T_\#(\nu \llcorner \Omega) = (T_\#\nu) \llcorner T(\Omega).$$

引理2.1 证明了关于两个测度类的断言。如果原始弧在 0 处光滑延拓，那么图函数在那里也同样光滑。 □

引理 2.3。 假设对于所有 $x \in E$ 和 $0<r<r_*$，都存在一个开球

$$B(a,\kappa r) \subset \Omega \cap B(x,r) \tag{2.3}$$

具有固定的 $\kappa>0$。那么每个 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ 对 E都有倍增限制。该条件在规则 C^1 边界点处，以及具有非零内角（包括角 2π）的规则 C^1 弧的连接点处局部一致成立。

证明。 包含关系 $B(x,\ 2r) \subset B(a,\ 3r)$ 和（2.3）给出

$$\nu(B(x,2r)\cap E) \le \nu(B(a,3r)) \le D_\nu^{\lceil \log_2(3/\kappa)\rceil}\nu(B(a,\kappa r)) \le C\nu(B(x,r)\cap E).$$

更大的半径由上述局部化观察处理。在规则点处，Lipschitz 图坐标图提供内部球。如果切射线形成严格介于 0 和 2π 之间的内角，则极限射线之间的一个较小扇形区域包含这样的球。切射线的 C^1 近似在附近的中心处给出同样的结论。当内角为 2π 时，被排除的区域位于两条具有公共切射线的弧之间。在任一弧的另一侧且位于尖端后方的球，给出与尺度相当的半径的内部球。等价地，以尖端为中心进行缩放后，任何避开该射线的固定扇形区域，在足够小的尺度下都位于域内；中心远离尖端的球则在图坐标图中处理。有限覆盖在没有零角连接点的紧边界部分上给出一致常数。

□

引理 2.4. 对于 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$，存在仅依赖于 D_ν 的 $C \ge 1$ 和 $\eta>0$，使得

$$\nu([-r,r]^2 \cap \{|y| \le b\}) \le C(b/r)^\eta \nu([-r,r]^2), \qquad 0<b\le r. \tag{2.4}$$

平移和旋转后，同样的估计仍然成立，且常数不变。

证明。 直线是 ν-零集，这由定义 1.1之后的孔隙性和微分论证可知。将一个正方形划分为九个相等的子正方形。比较一个子正方形的内接球与母正方形的外接球，倍增性给出 $\theta = \theta(D_\nu) > 0$，使得每个子正方形至少具有母正方形质量的 θ 倍。仅保留中间水平行会舍弃至少该比例的质量。经过 k 次重复后，保留集为

$$[-r, r] \times [-3^{-k}r, 3^{-k}r]$$

其质量至多为 $(1-\theta)^k \nu([-r,r]^2)$。边界的质量为零。取 $k = \lfloor \log_3(r/b) \rfloor$ 和 $\eta = -\log(1-\theta)/\log 3$。旋转和平移保持倍增常数不变。

□

引理 2.5。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是闭集，并且 $\mu = \nu$ $E \in D(E)$ 对某个 $\nu \in D(\mathbb{R}^2)$成立。固定 $A \geq 1$。若 $p \in E$, $0 < b, \rho \leq r$，且

$$E \cap B(p,r) \subset \{x : \operatorname{dist}(x, L) \leq b\}, \qquad |a - p| \leq Ar, \qquad B(a,\rho) \subset E, \tag{2.5}$$

其中 L是经过 p的一条直线，则

$$\frac{b}{r} \geq c \left(\frac{\rho}{r}\right)^N \tag{2.6}$$

对于 $c, N > 0$，其取值仅取决于 A, D_ν, D_μ。

证明。 令 Q为边长为 $2r$ 且以 p为中心、一边平行于 L的正方形。引理 2.4给出

$$\mu(B_E(p,r)) \leq C(b/r)^\eta \nu(Q).$$

令 $s = \log_2 D_\nu$。由于 $Q \subset B(a, (A+\sqrt{2}+1)r)$,

$$\nu(Q) \leq C_A (r/\rho)^s \nu(B(a,\rho)) = C_A (r/\rho)^s \mu(B(a,\rho)).$$

此外， $B(a, \rho) \subset B_E(p, (A+1)r)$，因此最后一个质量至多为 $C_{A,\, D_\mu} \mu(B_E(p, r))$。除以 $B_E(p, r)$ 的正质量，得到 $1 \leq C(b/r)^\eta (r/\rho)^s$，这就用 $N = s/\eta$ 证明了该结论。 □

推论 2.6。 若构形序列 (2.5)满足条件，且固定 A，则

$$\frac{\log(r_k/b_k)}{1 + \log(r_k/\rho_k)} \longrightarrow \infty, \tag{2.7}$$

那么，不存在全支撑环境倍增测度在 E 上的限制是倍增测度 .

证明。 (2.6) 的对数将分子界定为 $\log(1/c) + N\log(r_k/\rho_k)$，这与 (2.7) 矛盾。

□

引理 2.7。 对每个 *Lipschitz* 函数 g： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，测度

$$d\nu_g(t,y) = |y - g(t)|^2 \, dt \, dy \tag{2.8}$$

是 $\mathbb{R}^2$上的全支撑倍增测度。

证明。 在最大度量下， $d\sigma = dt\, v^2 dv$ 满足

$$\sigma\big((t-r, t+r) \times (v-r, v+r)\big) = 4v^2 r^2 + \tfrac{4}{3} r^4.$$

其倍增常数至多为 16。最大度量与欧几里得度量双利普希茨等价。全局双Lipschitz剪切 $(t,v) \mapsto (t, v + g(t))$ 将 σ 映射到 ν_g，这可由 Fubini 定理推出。应用引理2.1。每个非空开球的质量都为正。

□

引理 2.8。 对于 $\alpha > 1$，在局部尖点宽度为 t^α 的域上，限制面积在尖点附近具有倍增性，且对中心及充分小的半径一致成立。

证明。 令 $S(p,r) = p+(-r,r)^2$, 其中 $p = (t,y)$ 且 $|y| \le t^\alpha$。只要 $t+r$ 足够小，

$$\mathcal{L}^2(S(p,r) \cap E) \asymp r \min\{r, (t+r)^\alpha\}. \tag{2.9}$$

对于上界，水平长度至多为 $2r$ ，且每个垂直截面的长度至多为 $2\min\{r,(t+r)^\alpha\}$。对于下界，先假设 $r \le t/2$。当 $s \in [t, t+r/2]$ 时，有 $s^\alpha \ge t^\alpha \ge |y|$ 且 $s^\alpha \asymp (t+r)^\alpha$。$(y-r, y+r)$ 与 $[-s^\alpha, s^\alpha]$ 的交集长度至少为 $\min\{r, s^\alpha\}$。积分即可证明该估计。

若 $r > t/2$，则 $t + r < 3r$。缩小尖点邻域可确保 $(t+r)^\alpha < r/4$。因此 $|y| < r/4$，并且当 $s \in [t + r/4, t + r/2]$ 时，整个垂直截面都包含在$(y-r, y+r)$内。其积分面积至少为 $cr(t+r)^\alpha$。这就证明了（2.9），包括 $t = 0$ 的情形。

由于 $t+2r \le 2(t+r)$，当 r加倍时，(2.9) 右侧的变化至多是一个有界因子。度量等价性意味着欧几里得倍增性。 □

引理 2.9. 设 $f, g \in C^1([0,a])$ 在0处为零，在$(0,a]$上为正，并满足 $c \le f/g \le C$。存在一个全局双 *Lipschitz* 同胚，将 $\mathbb{R}^2$ 的宽度为 g 的闭截断尖点映到宽度为 f的闭截断尖点，且面积畸变有上下界。它保持$\mathscr{R}$ 与 D 之间的关系，以及限制面积的局部倍增性。

证明。 在垂直条带 $0 < t < a$上，令 $T(t,y) = (t, H(t,y))$，其中

$$H(t,y) = \begin{cases} yf(t)/g(t), & |y| \le g(t), \\ y + \operatorname{sgn}(y)(f(t) - g(t)), & |y| > g(t). \end{cases} \tag{2.10}$$

固定 t 时，这是一个递增的分段线性同胚，其斜率有正的上下界。在内部区域中，

$$|\partial_t H| \le |f'| + C|g'|,$$

而在其外部， $|\partial_t H| \le |f'| + |g'|$。这些界也控制了 t 在匹配曲线两侧的变化，因为两侧的公式在曲线上一致。例如，固定 $y \ne 0$，写成 $H = y + \operatorname{sgn}(y)(f-g)\min\{1, |y|/g\}$；在 $(0,a)$ 的每个紧子区间上，该函数均为利普希茨函数，且几乎处处满足所述导数界。积分后再取极限至 $t = 0$，即可得到整个区间上的一致界。令 $H(0,y) = y$。交换 f 和 g ，可得到逆映射的相同估计。因此， T 在尖端处也具有双 Lipschitz 性。

可以继续 T 在 $t < 0$ 上取恒等映射，并在 a 处采用其固定竖直公式 $t > a$，从而得到一个全局双利普希茨映射。在尖点内部，其竖直雅可比为 f/g ，而在外部为 1 。Fubini 定理或面积公式表明，面积的推前测度与所有博雷尔集上的面积可比较。引理2.2和引理 2.1中关于限制测度的恒等式完成了证明。

□

2.2 轴向投影与反射质量

引理 2.10. 设 f 在 $[0,1]$, 上为利普希茨函数，在 $(0,1]$, 上为正，并满足 $f(0) = 0$。若 $\mu \in D(E_f)$, 则轴向投影 $\lambda = \pi_\# \mu$, $\pi(t,y) = t$是 $[0,1]$, 上的全支撑倍增测度，其倍增常数由 D_μ 和 $\operatorname{Lip}(f)$控制。

证明. 写作 $I(t,r) = (t-r, t+r) \cap [0,1]$。若对固定的 $c > 0$有 $r \geq cf(t)$，则 $\pi^{-1}I(t,2r) \subset B_{E_f}((t,0), C_c r)$，因为 $f(s) \leq f(t) + 2\mathrm{Lip}(f)r$。此外，$B_{E_f}((t,0), r) \subset \pi^{-1}I(t,r)$，由倍增性可得所需不等式。

若 $r < cf(t)$，则沿着位于 t 的截面以与 r 相当的间距选取点 p_j。利普希茨正则性保证 $B_{E_f}(p_j, Cr)$ 覆盖 $\pi^{-1}I(t, 2r)$。对于固定的小 $b > 0$，球 $B_{E_f}(p_j, br)$ 两两不交，且包含于 $\pi^{-1}I(t, r)$ 中。对每一对应用倍增性并求和：

$$\lambda(I(t,2r)) \leq \sum_j \mu(B_{E_f}(p_j, Cr)) \leq C \sum_j \mu(B_{E_f}(p_j, br)) \leq C\lambda(I(t,r)).$$

在端点处截短这些区间；论证不变。 □

引理 2.11. 测度 η_λ 在 (1.16) 中在 E_f上是倍增的，且其轴向投影为 λ。在尖点附近，其球测度满足 (2.11)。

证明。 非退化区间上的全支撑倍增测度没有原子，这是由定义1.1之后边界论证中的分离球估计得出的，因此（1.16）中在 $t = 0$ 处未定义的密度值无关紧要。对各截面进行积分可得 $\pi_\# \eta_\lambda = \lambda$。

我们首先证明典范测度具有倍增性。缩小尖点邻域，使 $|f'|$充分小，并记 $p = (t, y) \in E_f$。若 $r \leq cf(t)$，则对于$|s-t| \leq r$，有 $f(s) \asymp f(t)$。利用内接矩形和外接矩形，以及 $|y| \leq f(t)$，可得

$$\eta_\lambda(B_{E_f}(p,r)) \asymp \frac{r}{f(t)} \lambda(I(t,r)).$$

若 $r \geq Cf(t)$，则一个内接矩形包含轴向区间上完整的截面，该区间长度与 r 可比。因此，球的质量与 $\lambda(I(t, r))$ 可比。中间范围可用相同的矩形估计控制。因此，在尖点附近一致地有，

$$\eta_\lambda(B_{E_f}(p,r)) \asymp \min\{1, r/f(t)\}\lambda(I(t,r)), \tag{2.11}$$

其中，当 $t = 0$ 时，最小值按 1 解释。将 r 倍增，右侧至多改变一个固定因子。在尖点之外，f 有正下界，局部密度与乘积测度 $d\lambda(t)dy$ 的密度可比。边界图像的矩形估计在此处同样适用。紧致性处理剩余的正尺度，从而证明 η_λ 具有倍增性。

□

引理 2.12。 设 $E = \Omega$ 有界，并满足一致内球条件：存在 κ、$r_* > 0$，使得每个 $x \in \partial E$ 和 $0 < r < r_*$ 都具有

$$B(a, \kappa r) \subset \Omega \cap B(x, r).$$

则 $D(E) \subseteq \mathscr{R}(E)$。对于每个 $\mu \in D(E)$，表示测度 $\nu \in D(\mathbb{R}^2)$ 可以选择为在 E之外绝对连续。

证明。 对 $\mathbb{R}^2 \setminus E$ 作 Whitney 分解，使正方形的边长与到 E 的距离相当。对于每个足够小的正方形，在最近的边界点处以及距离为 s_Q 的固定倍数处应用内球条件。将所得的球缩小一半，得到 $A_Q \subset \Omega$，使其半径、边界深度及到 Q 的距离都与s_Q 相当。因此，球 A_Q 在所有尺度上都有有界重叠： A_Q 中的一个点

到 ∂E 的距离与s_Q 相当，并且其附近至多只有有界多个固定尺度的正方形。

给这些正方形赋予 $m_Q = \mu(A_Q)$，并给所有距离足够远的正方形赋予 $m_Q = s_Q^2$，对有限多个中间正方形赋予任意正质量。令

$$\nu = \mu + \sum_Q \frac{m_Q}{s_Q^2} \mathcal{L}^2 \llcorner Q.$$

重叠估计保证了局部有限性。相邻的反射正方形因内部倍增而具有可比的质量，而其他界面仅涉及有限多个正质量。因此，相邻密度一致可比。

对于 $x \in E$ 和较小的 r，每个与 $B(x, r)$ 相交的正方形都满足 $s_Q \lesssim r$ 和 $A_Q \subset B_E(x, Cr)$。因此，

$$\mu(B_E(x,r)) \le \nu(B(x,r)) \le \mu(B_E(x,r)) + C\mu(B_E(x,Cr)) \lesssim \mu(B_E(x,r)).$$

这就证明了中心位于 E 中时的倍增性。对于 $z \notin E$，令 $d = \operatorname{dist}(z, E)$，并选取最近的$q \in E$。若 $d \ge 4r$，则局部惠特尼密度在整个 $B(z, 2r)$ 上可比。若 $d < r/2$，则与以 q 为中心的球进行比较。若 $r/2 \le d < 4r$，则与 $B(z, r/8)$ 相交的正方形，其边长与 r 可比，赋予的质量与 $\mu(B_E(q, r))$ 可比。在这个较小的球上积分，给出 $\nu(B(z, r))$ 的下界，而 $B(z, 2r) \subset B(q, 6r)$ 给出上界。

由此可得一致的小尺度倍增性。在中心点的紧集和远离零的半径区间上，局部有限性与有限球覆盖给出一致的上界和正下界。密度在某个固定大球之外等于 1，因此足够大的球的质量与其面积可比。这证明了全局倍增性，而该构造给出 $\nu \quad E = \mu$。

$\llcorner$ □

2.3 惠特尼替换原理

引理 2.13。令 $f \in C^1([0,1])$满足 $f(0) = f'(0) = 0$且 $f(t) > 0$，其中 $t > 0$，并令$E = E_f$。设 $\mu \in D(E)$ 且 $\lambda = \pi_\# \mu$。假设 $\sigma \in D(\mathbb{R}^2)$ 在充分小的尖点邻域内具有以下性质：

$$\sigma(B((t,0), f(t))) \asymp \lambda(I(t, f(t))), \tag{2.12}$$

$$\sigma(B(p,r)) \gtrsim \lambda(I(t,r)), \qquad p = (t,y) \in E, \quad r \ge f(t), \quad t + r < r_*. \tag{2.13}$$

在 $t = 0$ 处，只要求满足第二个条件。于是 $\mu \in \mathscr{R}(E)$，其表示测度为$\nu \in D(\mathbb{R}^2)$，并且在 $\mathbb{R}^2 \setminus E$ 上绝对连续。

证明。我们给出构造以及界面处所需的比较。投影估计表明，对于每个固定的 $c > 0$,

$$\mu(B_E(p,r)) \asymp \lambda(I(t,r)) \qquad (p = (t,y) \in E,\ r \ge cf(t),\ t + r < r_*). \tag{2.14}$$

事实上，$B_E(p, r)$ 位于 $I(t, r)$ 上方的全截面条带内，而该条带包含于$B_E(p, C_c r)$ 中，因为 $|y| \le f(t)$ 和 $f(s) \le f(t) + \|f'\|_\infty |s - t|$。由 μ 的倍增性可得此比较。因此，在 (2.12) 中移动中心并按固定因子改变半径，可得

$$\sigma(B(p,r)) \asymp \mu(B_E(p,r)) \asymp \lambda(I(t,r)) \quad \text{if } c_1 f(t) \le r \le c_2 f(t), \tag{2.15}$$

对任意固定的 $0 < c_1 < c_2 < \infty$。特别地，(2.13) 在 $r \ge cf(t)$ 为任意固定的$c > 0$时仍然成立。

质量分配。 取 $\mathbb{R}^2 \setminus E$ 的 Whitney 分解 $\mathcal{W}$，将其分解为内部互不相交的正方形。记 s_Q 为 Q 的边长，并记 (u_Q,v_Q) 为其中心。我们使用以下通常性质

$$s_Q \asymp \operatorname{dist}(Q,E), \qquad s_Q \asymp s_{Q'} \quad \text{if } \overline{Q} \cap \overline{Q'} \neq \varnothing.$$

首先固定 Whitney 性质中隐含的所有常数。取一个小数$b > 0$，然后缩小尖点图，直至其斜率界 L相对于这些常数和 b足够小。对于此图中的正方形，令 $T_Q = \max\{u_Q,s_Q\}$。若 $s_Q < bf(T_Q)$，则称正方形为细方块，否则称为粗方块。对于细方块 $T_Q = u_Q$ 和 $u_Q \gg s_Q$：由 $f(s) = o(s)$可排除另一种情况 $T_Q = s_Q$。若 $(\tau, \pm f(\tau))$ 是最近边界点，则 $|\tau - u_Q| \lesssim s_Q$ 且

$$f(\tau) \geq f(u_Q) - CLs_Q \gg s_Q.$$

因此，向内垂直位移一个固定倍数的 s_Q，即可得到一个内部球 A_Q，满足

$$\operatorname{rad}(A_Q) \asymp s_Q, \qquad \operatorname{dist}(A_Q,\partial E) \asymp s_Q, \qquad \operatorname{dist}(A_Q,Q) \lesssim s_Q. \tag{2.16}$$

对于紧边界其余部分附近足够小的正方形，也可以采用同样的构造，利用其有限图像和非零角图。

这些反射球有有界重叠，即使跨越不同尺度也是如此。若 $z \in A_Q$，则 (2.16) 给出 $s_Q \asymp$与$z, \partial E)$之间的距离及 $|z - (u_Q,v_Q)| \lesssim s_Q$。可能的二进尺度只有固定有限个；在每个这样的尺度上，Whitney 内部互不相交，因此可能的正方形数量有界。于是，对所有反射球都有 $\sum_Q \mathbf{1}_{A_Q} \leq C$。

在尖点图中，将 $m_Q = \mu(A_Q)$ 赋给细方块，将 $m_Q = \sigma(Q)$ 赋给粗方块。在尖点之外，将反射球质量赋给所有足够小的边界正方形。在所有离 E 足够远的正方形上，取 $m_Q = as_Q^2$，其中 $a > 0$ 固定；其余有限个中间正方形可赋予任意正质量。此赋值规则可在重叠图中保持一致：沿着远离 0 的紧界面，f 有正下界，因此所有足够小的正方形在界面两侧都会被反射。适用不同规则的界面正方形，其尺寸都有一个固定的正下限，而且这样的正方形只有有限个。定义

$$\nu = \mu + \sum_{Q \in \mathcal{W}} \frac{m_Q}{s_Q^2} \mathcal{L}^2 \llcorner Q. \tag{2.17}$$

正方形的边界约定不会影响面积项。有界重叠保证反射质量之和受 $C\mu(E)$ 控制。每个紧集中的粗方块质量受该集合某个固定扩张的 σ-质量控制。其余项局部有限。因此，ν 是一个满支撑拉东测度，并且 $\nu \quad E = \mu$ 恰好成立。

相邻正方形。 根据 μ 的倍增性以及（2.16），两个相邻细方块的赋予质量具有可比性；根据 σ 的倍增性，两个相邻粗方块的质量具有可比性。在混合对中，边长和 $|f(T_Q) - f(T_{Q'})| \leq L|T_Q - T_{Q'}| \lesssim Ls_Q$的可比性给出$s_Q \asymp f(T_Q)$，其中常数允许依赖于 b。方程（2.15）、条带比较以及相邻中心处的倍增性给出

$$\mu(A_Q) \asymp \lambda(I(T_Q, s_Q)) \asymp \sigma(Q').$$

因此，相邻的外部密度 m_Q/s_Q^2 具有一致的可比性。通常的反射规则在其他位置给出相同的比较；有限界面只会增大该常数。

以 E 为中心。固定 $p = (t, y) \in E$，并在 $t + r$ 小于固定子图表半径的尺度下进行研究。如果对于充分小的固定 $c > 0$，$r \leq cf(t)$，则每个相交的外部正方形

$B(p,\ r)$ 都可以，并且其反射球包含于 $B_E(p,\ Cr)$ 中。有界重叠性和倍增性给出

$$\mu(B_E(p,r)) \le \nu(B(p,r)) \le C\mu(B_E(p,r)). \tag{2.18}$$

第一个不等式也适用于完全位于 E内部的球。

对于 $r \ge cf(t)$，内部质量与细方块质量之和由$C\mu(B_E(p,Cr)) \asymp \lambda(I(t,r))$控制。每个与 $B(p,r)$相交的正方形，其边长至多为 Cr，且包含于$B(p,Cr)$中。因此，粗方块和至多为 $\sigma(B(p,Cr))$。利用（2.13）可得$\nu(B(p,r)) \lesssim \sigma(B(p,r))$。若 $r/f(t)$始终处于一个固定的有界区间内，则由 $\nu \ge \mu$ 和（2.15）可得反向不等式。否则，取一个球 $U \subset B(p,r)$，其半径为 $r/16$，且其在轴上方的高度约为 $r/2$。由于 $f(t) \ll r$ 且斜率较小，$\operatorname{dist}(U,E) \asymp r$。每个与 U 相交的惠特尼方块都是粗方块，其边长与 r可比。对于每个这样的方块，利用 σ 的倍增性可得 $\sigma(Q)/s_Q^2 \asymp \sigma(B(p,r))/r^2$。对 U 积分即得

$$\nu(B(p,r)) \asymp \sigma(B(p,r)), \qquad r \ge cf(t). \tag{2.19}$$

这个论证还包含 $p=0$，因为 $f(s) = o(s)$。方程 (2.18)–(2.19)，结合 (2.15) 在固定比例过渡区域内，证明了尖点附近 E 中各中心处的倍增性。远离尖点时，通过相同的有界重叠估计，反射构造在所有充分小的尺度上给出 (2.18)。

外部中心。令 $z \notin E$, $d = \operatorname{dist}(z,\ E)$，并取最近点 $q \in E$。若 $d \ge 4r$，则与 $B(z,\ 2r)$ 相交的惠特尼方块大小相当；通过一串长度有界的相邻方块，其密度也相当。与面积比较即可得到所需的倍增估计。若 $d < r/2$，则使用

$$B(q,r/2) \subset B(z,r) \subset B(z,2r) \subset B(q,3r)$$

以及中心 q 处的倍增性。

设 $r/2 \le d < 4r$。每个与 $B(z,r/8)$ 相交的正方形，其边长都与 r 相当，且距 q 不超过 Cr。对于细方块，(2.16) 给出 $m_Q \asymp \mu(B_E(q,r))$；其细尺度条件和小斜率估计推出 $r/f(t_q)$ 有一个固定的上界。因此，方程 (2.18)、(2.19) 和 (2.15) 表明，这个质量与 $\nu(B(q,r))$ 相当。对于粗方块，$r \gtrsim f(t_q)$，其中固定常数可以依赖于 b，因此 $m_Q = \sigma(Q) \asymp \sigma(B(q,r)) \asymp \nu(B(q,r))$。在 $t_q = 0$ 处，充分小的尺度下只能出现后一种情形。由此，$B(z,r/8)$ 中各处的密度都与 $\nu(B(q,r))/r^2$ 相当。因此

$$\nu(B(z,r)) \gtrsim \nu(B(q,r)), \qquad \nu(B(z,2r)) \le \nu(B(q,6r)) \lesssim \nu(B(q,r)).$$

使用反射球进行相同的推理，可处理普通边界附近的外部中心。

我们已在 E 的一个固定邻域内，证明了所有充分小尺度上的一致倍增。对于其余的紧致中心集和正半径紧区间，局部有限性提供了一致上界，而有限球覆盖与全支撑共同提供了一个正下界。最后，ν 在某个固定大球之外具有常密度 a。包含在该区域内的球直接满足倍增性；对于其他充分大的球，异常紧集的有限质量以及一个半径相当的外部子球给出 $\nu(B(z,\ r)) \asymp r^2$。这些观察证明了全局倍增性，并完成了构造。

□

2.4 正核提升

引理 2.14. 设 ρ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非零有限正博雷尔测度，且具有紧支撑，并设 $0 < \varepsilon < 1$ 和 $N \ge 2$。定义

$$M_\rho(x,h) = \int \left(\frac{h}{h+|x-s|}\right)^N d\rho(s), \qquad d\sigma(x,y) = |y|^{\varepsilon-2} M_\rho(x,|y|)\,dx\,dy \quad (y \ne 0),$$

并令轴上的测度为零。则 σ 是定义在$\mathbb{R}^2$上的倍增拉东测度，且具有全支撑，并且

$$\sigma\big((t-r,t+r)\times(-r,r)\big)\asymp r^{\varepsilon}M_\rho(t,r). \tag{2.20}$$

比较常数仅取决于 N 和 ε。

证明。 根据托内利定理，以轴为中心的正方形的质量等于

$$2\int d\rho(s)\int_0^r h^{\varepsilon-2}\int_{t-r}^{t+r}\left(\frac{h}{h+|x-s|}\right)^N dx\,dh.$$

如果 $|s-t|\le 2r$，则内层 x-积分至多为 $C_N h$，因此该部分由$Cr^{\varepsilon}\rho([t-2r,t+2r])$控制。如果 $R=|s-t|>2r$，则内层积分至多为 $Cr(h/R)^N$。由于 $N+\varepsilon>1$，其关于 h 的积分至多为 $Cr^{\varepsilon}(r/R)^N$。将两部分相加，即得到(2.20)中的上界。对于下界，限制在 $h\in[r/2,r]$上。每当 $|x-t|\le r$时，我们便有 $M_\rho(x,h)\asymp M_\rho(t,r)$，从而证明了下界。这也证明了局部有限性，包括 ρ 在轴上可能具有原子的点。

核的逐点比较给出 $M_\rho(t,\ 2r)\le 2^N M_\rho(t,\ r)$，因此以轴上点为中心的球满足一致倍增估计。对于半径不超过球心到轴的距离四分之一的球，密度与其在球心处的值一致可比，因而可直接推出倍增性。对于其余球，上界可利用一个以轴上点为中心且包含该球的球来估计；下界则利用一个远离轴、半径可比的内部球来估计。后者的质量与相同的量 $r^{\varepsilon}M_\rho(t,\ r)$ 可比，这也证明了此情形下的倍增性。核严格为正，因此 σ 具有全支撑。

□

3 定理的证明

3.1 每个零角尖点处的坏限制测度

定理 *1.2* 的证明。利用引理 2.2 拉直尖点，并保留记号 Ω 表示所得的域。令 $m=\mathcal{L}^2\ \ E$。若 m 不是倍增的，则环境面积本身即可给出结论。否则，令 D 为其倍增常数。

取 $t_k=8^{-k}$ 和 $r_k=t_k/8$，使它们位于尖点图中足够靠里的位置。选取一个固定的分段线性函数 $\psi\colon\mathbb{R}\to[0,1]$，其支撑位于 $[5/4,7/4]$ 上，在 $[11/8,13/8]$ 上等于 1，并且在每个过渡区间上为线性函数。定义

$$g(t)=\sum_{k\ge k_0}\frac{r_k}{8}\,\psi\left(\frac{t-t_k}{r_k}\right). \tag{3.1}$$

这些函数的支撑互不相交，且斜率一致有界。它们的高度趋于唯一的聚点处的零，因此 g 是全局利普希茨函数，且 $g(0)=0$。令

$$p_k=(t_k,0),\quad q_k=(t_k+3r_k/2,0),\quad a_k=\sup_{t\in[t_k-r_k,t_k+2r_k]}f(t).$$

条件 $f(t)=o(t)$ 给出 $a_k/r_k\to 0$。增大 k_0，使得 $a_k\le r_k/16$。

所有扰动在 $B(p_k,\ r_k)$ 上均消失。对于环境测度（2.8），

$$\nu_g(B(p_k,r_k)\cap E)\le a_k^2 m(B_E(p_k,r_k)). \tag{3.2}$$

球 $B(q_k,\ r_k/16)$ 位于 $B(p_k,\ 2r_k)$ 内，其水平坐标位于平台区间，其中$g = r_k/8$。在其与 E 的交集上，有 $|y-g(t)| \geq r_k/16$。此外，$B_E(p_k,\ r_k) \subset B_E(q_k,\ 3r_k)$。由于 $48 < 2^6$,

$$\begin{aligned}\nu_g(B(p_k, 2r_k) \cap E) &\geq \frac{r_k^2}{256} m(B_E(q_k, r_k/16)) \\ &\geq \frac{r_k^2}{256 D^6} m(B_E(p_k, r_k)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

结合（3.2）和（3.3）可得

$$\frac{\nu_g(B(p_k, 2r_k) \cap E)}{\nu_g(B(p_k, r_k) \cap E)} \geq \frac{1}{256 D^6} \left(\frac{r_k}{a_k}\right)^2 \longrightarrow \infty. \tag{3.4}$$

根据引理 2.7，环境测度具有倍增性，但其限制测度不具有倍增性。在原剪切下将其拉回后，仍保持倍增性和绝对连续性。最后应用（1.4）。 □

注记 3.1。当 f（t） $\asymp t^{\alpha}$时，（3.4）中的商至少以 $ct_k^{-2(\alpha-1)}$ 的速度增长。

3.2 无限平坦尖点

定理 *1.3* 的证明。设 $\nu\,\Omega$ 具有倍增性。将尖点拉直，并令 $\mu = \nu\ \ E$；根据（1.4），它具有倍增性。取充分小的 $R > 0$。引理 2.1 给出

$$\mu(B_E(0, r)) \geq c_0 r^s \qquad (0 < r < R), \quad s = \log_2 D_\mu > 0. \tag{3.5}$$

由于 $f = o(t)$，包络函数 $F(r) = \sup_{0\leq t\leq r} f(t)$ 满足 $F(r) = o(r)$。对于充分小的r,

$$E \cap B(0, r) \subset [-r, r]^2 \cap \{|y| \leq F(r)\}.$$

引理2.4 以及 ν 的局部有限性蕴含

$$\mu(B_E(0, r)) \leq C(F(r)/r)^{\eta} \nu([-r, r]^2) \leq C\nu([-R, R]^2)(F(r)/r)^{\eta}. \tag{3.6}$$

结合（3.5），可得 F（r） $\geq cr^{1+s/\eta}$ 并证明（1.11）。若 f 无限平坦，则F（r） $\leq C_M r^M$对每个 M都成立；当 $M > 1 + s/\eta$时，这与此下界矛盾。若 f非递减，则 F（r） $= f$（r）。 □

注记 3.2。对于非单调宽度，f 的孤立小值无法控制整个尖端邻域的宽度，因此需要包络函数 F。宽度 $f(t) = e^{-1/t^{\beta}}$, $\beta > 0$，是无限平坦的，并给出 $\mathscr{R}(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega) = \varnothing$。

3.3 有限对数阶反例

定理 *1.6* 的证明。固定 $\alpha > 1$。选取一个光滑的非递减函数 ψ： $\mathbb{R} \to [0, 1]$它在 $(-\infty, 0]$ 上为零，在 $[1, \infty)$ 上为一。令

$$t_k = 2^{-3^k}, \quad L_k = \log(1/t_k), \quad H_k = t_k^{\alpha} e^{\sqrt{L_k}}, \quad r_k = H_k L_k. \tag{3.7}$$

对于充分大的 k_0，在一个小区间 $[0, a]$ 上定义，且 $a < 1$,

$$f(t) = t^{\alpha} + \sum_{k \geq k_0} H_k \psi\left(\frac{t - t_k}{r_k}\right), \qquad f(0) = 0. \tag{3.8}$$

将用到以下几个初等极限：

$$\frac{r_k}{t_k} \longrightarrow 0, \qquad \frac{H_{k+1}}{H_k} \longrightarrow 0, \qquad \frac{H_{k+1}}{t_k^\alpha} \longrightarrow 0, \qquad \sum_k \frac{1}{L_k} < \infty. \tag{3.9}$$

事实上， $L_{k+1} = 3L_k$，因此第一个比值为 $L_k e^{-(\alpha-1)\sqrt{L_k}+\sqrt{L_k}}$；第二个和第三个的指数分别为 $-2\alpha L_k + (\sqrt{3}-1)\sqrt{L_k}$和 $-2\alpha L_k + \sqrt{3L_k}$增大 k_0 使得

$$r_k < t_k/16, \qquad \sum_{j>k} H_j \le 2H_{k+1}, \qquad \sum_{j\ge k} H_j \le 2H_k. \tag{3.10}$$

正则性与阶。(3.8) 式中的级数一致收敛。其导数级数也一致收敛，因为 k阶导数项的范数至多为 $\|\psi'\|_\infty/L_k$。每个导数项在零点处都为零。因此 $f \in C^1([0,a])$ 且 $f'(0) = 0$。在 $(0,a]$ 的任意紧子区间上，所有充分小的步长都是常数，且只剩有限个导数。因此 f 在每个正参数处都是光滑的。其导数在那里为正，因为 t^α 的导数为正，并且所有步函数的导数均非负。

函数 $G(t) = t^\alpha e^{\sqrt{\log(1/t)}}$在充分小的 t时递增。对于这样的 t，令 j 为满足 $t_j \le t$的第一个指标。所有指标更小的项都为零，因此由（3.10）可得

$$t^\alpha \le f(t) \le t^\alpha + 2H_j \le t^\alpha + 2G(t) \le 3G(t).$$

取 a 足够小，使其在整个 $(0,a)$内成立。这就证明了（1.12）。令 L =$\log(1/t)$，将对数界除以 $\log t = -L$ 可得

$$\alpha - L^{-1/2} - \frac{\log 3}{L} \le \frac{\log f(t)}{\log t} \le \alpha.$$

因此，对数阶恰为 α。

薄截面。令

$$p_k = (t_k - 2r_k, 0), \quad a_k = (t_k + 2r_k, 0), \quad b_k = 2t_k^\alpha, \quad \rho_k = H_k/4. \tag{3.11}$$

对于 $t \in [t_k - 3r_k, t_k - r_k]$，第 k 步及之前的所有步骤尚未开始。之后的步骤至多贡献 $2H_{k+1} = o(t_k^\alpha)$。由于 $t < t_k$，对于所有充分大的 k，

$$f(t) \le t_k^\alpha + 2H_{k+1} \le b_k.$$

因此 $E \cap B(p_k, r_k) \subset \{|y| \le b_k\}$。

邻近内部球。在 $B(a_k, \rho_k)$ 上，水平坐标大于 $t_k + r_k$，因为$\rho_k = H_k/4 < r_k$。第 k 步已完成，所以 $f(t) \ge H_k > \rho_k$ 在那里。因此

$$B(a_k, \rho_k) \subset \Omega_f, \qquad |a_k - p_k| = 4r_k.$$

对于较大的 k 有 $0 < b_k, \ \rho_k \le r_k$。引理 2.5 的所有假设均在 $A = 4$下成立。另一方面，

$$\frac{\log(r_k/b_k)}{1 + \log(r_k/\rho_k)} = \frac{\sqrt{L_k} + \log L_k - \log 2}{1 + \log(4L_k)} \longrightarrow \infty. \tag{3.12}$$

推论 2.6 排除了每个环境倍增限制。

域的构造。图像 $y = \pm f(t)$ 是延伸至 0 的正则 C^1 弧。在 0 的某个较小固定邻域之外，将宽度光滑地修改为正常数。用一个右半圆连接所得的水平上、下端。连接处的切线相匹配，因此所得的约当边界除 0 外处处正则 C^1 ，而 0 是其唯一的零角尖点。对于足够大的k，上述所有构形都位于未改变的邻域内。因此，所得的域满足 $\mathscr{R}(\Omega) \cap \mathrm{D}(\Omega) = \varnothing$。相比之下，对$f(t) = t^\alpha$ 应用正则封盖，根据定理 1.4 可得 $\mathrm{D}(\Omega) \subsetneq \mathscr{R}(\Omega)$。

□

注 3.3。 该例不具有阶为 α 的幂可比较性。在 $t = t_k + 2r_k$ 处，有$t/t_k \to 1$且 $f(t) \geq H_k$，因此沿这些点， $f(t)/t^\alpha \to \infty$。对于整数 α，它也不可能具有光滑端点分支：有限对数阶 α 的光滑正宽度，其首项会由泰勒定理给出为 bt^α ，这与该比值无界相矛盾。

3.4 非环境限制的内部倍增测度

推论的证明 *1.9*。 我们先将边界拉直；全局双利普希茨映射 T 保持倍增性以及属于限制测度这一性质。设 $\mu = \nu\,\Omega$，并对推前测度使用相同的符号。缩小 a，使得 $f(t) < a$ 在 $(0,a)$上成立。将引理 2.4的薄条带估计应用于固定正方形 $[-a,a]^2$，可得常数 $C > 0$ 和 $\eta > 0$ ，使得对 $0 < h < a$,

$$\lambda\{t : f(t) < h\} \leq \nu\big([-a,a]^2 \cap \{|y| < h\}\big) \leq Ch^\eta.$$

对于 $0 < \varepsilon < \eta$，托内利定理给出

$$\int_{(0,a)} f(t)^{-\varepsilon}\, d\lambda(t) = a^{-\varepsilon}\lambda((0,a)) + \varepsilon \int_0^a h^{-\varepsilon-1}\lambda\{t : f(t) < h\}\, dh < \infty.$$

□

注 3.4。 必要条件（1.17）并非充分条件。在定理 1.6中的每个域上，任意 $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$ 都满足该条件（对某个 $\varepsilon > 0$），但没有一个是平面倍增限制。

证明。 固定一个定理 1.6 中的 $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$。对其在闭包上的传递测度使用相同的记号，并令其边界质量为零。迭代（1.3）得到

$$\mu(B(0,r)) \leq Cr^\delta$$

对某个 $\delta > 0$ 以及所有充分小的 r。由于 $f(t) = o(t)$，当 r 足够小时，含有 $0 < t \leq r$ 的局部条带位于 $B(0,2r)$ 中。因此， $\lambda((0,r]) \leq Cr^\delta$。式（1.12）中的下界 $f(t) \geq t^\alpha$ 现在表明，只要 $0 < \varepsilon < \delta/\alpha$,

$$\int_{(0,a)} f(t)^{-\varepsilon}\, d\lambda(t) \leq \int_{(0,a)} t^{-\alpha\varepsilon}\, d\lambda(t) < \infty.$$

最后一个积分由层析公式可知是有限的。定理1.6 给出了这两类之间的不相交性。

□

3.5 势判据与轴向约化

定理 *1.7*的证明：必要性。 设 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\nu|_{E_f} = \mu$。直线周围的条带中的衰减给出一个指数 $\eta > 0$ ，使得只要 $0 < h \leq R$,

$$\nu\big((t-R, t+R) \times (-h,h)\big) \leq C(h/R)^\eta \nu(B((t,0),3R)).$$

取 $0 < \varepsilon < \min\{1,\eta\}$并写出 $d\rho = f^{-\varepsilon}\, d\lambda$。如果 $R \geq f(t)$，则 Lipschitz性质给出$f(s) \leq (1 + \mathrm{Lip}\ f)R$，其中 $s \in I(t,R)$。因此，层析公式得到

$$\begin{aligned}\rho(I(t,R)) &\leq R^{-\varepsilon}\lambda(I(t,R)) + \varepsilon \int_0^R h^{-\varepsilon-1}\lambda\{s \in I(t,R) : f(s) < h\}\, dh \\ &\leq CR^{-\varepsilon}\nu(B((t,0), C_f R)).\end{aligned}$$

第一项也可由右端进行界定，因为相应的截面位于球的某个固定膨胀中。选取一组固定的 t, R，使其区间覆盖整个轴线段，可得 $\rho([0,1]) < \infty$。

设 $r = f(t)$，其中 t 充分小。由于 $f(t) = o(t)$ 且斜率很小，$B((t,\ 0)\ cr) \subset E_f$，并且

$$\nu(B((t,0),r)) \le C\mu(B((t,0),cr)) \le C\lambda(I(t,r)).$$

记 $d_\nu = \log_2 D_\nu$，则对于 $R \ge r$，有

$$\rho(I(t,R)) \le CR^{-\varepsilon}(R/r)^{d_\nu}\lambda(I(t,r)).$$

将势积分分解为 $|s-t| < r$ 和环域 $2^k r \le |s-t| < 2^{k+1}r$。取 $N > \max\{2,\ d_\nu - \varepsilon\}$。则

$$\int \left(\frac{r}{r+|t-s|}\right)^N d\rho(s) \le Cr^{-\varepsilon}\lambda(I(t,r)) \sum_{k\ge 0} 2^{-k(N+\varepsilon-d_\nu)}.$$

这就证明了（1.15）。 □

定理 *1.7* 的充分性证明。设 $d\rho = f^{-\varepsilon}\, d\lambda$。在任意一个充分小的 $t > 0$ 处检验，便可推出 $\rho([0,1]) < \infty$，因为核在这个紧区间上有正下界。令 σ 为引理 2.14中的测度。记 $r = f(t)$。在尖端附近，小斜率估计给出 $f(s) \asymp f(t)$，只要 $|s-t| \le r$。因此，

$$M_\rho(t,r) \gtrsim r^{-\varepsilon}\lambda(I(t,r)).$$

结合 (1.15) 和 (2.20，可得

$$\sigma(B((t,0),f(t))) \asymp \lambda(I(t,f(t))). \tag{3.13}$$

对于 $r \ge f(t)$ 和 $s \in I(t,\ r)$，利普希茨估计给出 $f(s) \le (1 + \mathrm{Lip}\ f)r$。因此

$$r^\varepsilon M_\rho(t,r) \gtrsim r^\varepsilon \int_{I(t,r)} f(s)^{-\varepsilon}\, d\lambda(s) \gtrsim \lambda(I(t,r)).$$

正方形估计 (2.20)、正方形与球的可比性，以及倍增性（将中心移动 $|y| \le f(t) \le r$）表明

$$\sigma(B((t,y),r)) \gtrsim \lambda(I(t,r)).$$

这在 $t = 0$ 处也成立。引理 2.13 的两个假设均满足。该引理给出 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$，满足 $\nu\ \ E_f = \mu$，且在 E_f之外绝对连续。 □

推论的证明 *1.8*。引理 2.11 提供了具有投影的典范倍增测度λ。定理 1.7 仅检验该投影，从而得出等价性。如果 $c\lambda_1 \le \lambda_2 \le C\lambda_1$ 在博雷尔集上，两边的 (1.15) 都只相差固定因子。因此，相同的参数 ε，N 给出的检验彼此等价。

□

3.6 局部化到有限个尖点

推论 *3.5*。设 Ω 满足定义 *1.1*，设 $E=\Omega$，且设 $\mu \in \overline{D}(E)$。在每个零角尖点处，选取一个拉直的截断模型，并对变换后的局部测度作轴向投影 λ_i 。那么 $\mu \in \mathscr{R}(E)$ 当且仅当每一对 (f_i, λ_i) 都在相应的轴向区间上满足 *(1.15)*。若不存在零角尖点，则 $D(E) \subseteq \mathscr{R}(E)$。

证明。 在固定的正轴向参数处截断可保持内部倍增性。在新的截面附近，截断后的集合包含一个半径与测试半径可比的内部球；与该球比较，即可控制倍增球的限制质量。其他位置足够小的球继承原有估计，而紧致性则处理剩余尺度。全局双Lipschitz剪切保持倍增性，且与限制测度运算可交换。因此，每个局部测度都是其模型上的倍增测度。

若 $\mu = \nu$ E 对某个 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$成立，则其变换后的测度限制到每个局部测度上，因此定理 1.7 给出所有测试。反过来，每个测试都会产生一个参考测度 σ_i，它满足引理 2.13中的宽度比较和粗支配。选取互不相交的尖点邻域，并对 $\mathbb{R}^2 \setminus E$使用同一个 Whitney 分解。在每个尖点附近，对细方格使用反射的内部球的原测度，对粗方格使用 $\sigma_i(F_i(Q))$ ，其中 F_i是坐标变换。在其他位置使用普通的反射球，并在远处使用常密度。

正方形的双Lipschitz像内部互不相交，其直径和到边界的距离与s_Q可比，包含半径与s_Q可比的球，并满足相同的打包界。这些正是替换证明中用到的性质。反射球的拉回保留了可比的边界深度，因此其重叠仍有界。因此，该引理的证明给出了每个尖点图中的局部有限性、相邻比较和倍增性。

在远离尖端的固定界面处，宽度有正下界。那里每个足够小的正方形都在两侧使用反射，而内部倍增性可比较反射球的任意两种选择。只有有限个正尺寸的界面正方形需要考虑。对边界其余部分作有限覆盖，即可得到引理2.12中的估计。相同的紧致尺度和远场论证给出全局倍增性。所有新增的质量都放在 E之外，因此 ν $E = \mu$。若没有零角尖点，则可直接应用定义 1.1 后所述的内球条件以及引理2.12 。

□

3.7 倍增宽度与幂可比较尖点

命题 3.6. 设 $f \in C^1([0,a])$ 满足 $f(0) = f\prime(0) = 0$，且 $f(t) > 0$对 $t > 0$成立。假设在某个区间 $[0, a_0]$上，函数 f 是非递减的，且

$$f(2t) \le K f(t) \qquad (0 < t < a_0/2)$$

对于固定的 $K \ge 1$。每个定义在 λ 上的 $[0,a]$ 倍增测度都满足定理 *1.7*中的势检验。因此，$\mathcal{D}(E_f) \subseteq \mathscr{R}(E_f)$。

证明。 令 $D = D_\lambda$ ，并令 $d = \log_2 D$。存在常数 $q > 0$ 和 C_0 ，使得 t

$$\lambda([0,s]) \le C_0 (s/t)^q \lambda([0,t]), \qquad 0 < s \le t \le a_0. \tag{3.14}$$

事实上，区间 $I(3R/4,\ R/8)$ 包含于 $(R/2,\ R)$，而 $[0,R] \subset I(3R/4,\ 2R)$。四步倍增可得

$$\lambda([0,R/2]) \le (1 - D^{-4})\lambda([0,R]).$$

迭代即可证明 (3.14)，其中 $q = -$对数$_2(1 - D^{-4})$。特别地，$\lambda(\{0\}) = 0$。

设 $p = \max\{2, \log_2 K\}$。宽度倍增的单调性和迭代给出

$$f(s) \geq K^{-1}(s/t)^p f(t), \qquad 0 < s \leq t \leq a_0. \tag{3.15}$$

取 $0 < \varepsilon < \min\{1, q/p\}$ 以及整数 $N > \max\{1, d\}$。固定一个充分小的 $t > 0$，令 $u = f(t)$；于是 $u < t/4$。在二进区间 $[2^{-j-1}t, 2^{-j}t]$上，等式（3.14）和（3.15）给出

$$\begin{aligned}\int_{(0,t]} f(s)^{-\varepsilon}\, d\lambda(s) &\leq Cu^{-\varepsilon}\lambda([0,t]) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(q-p\varepsilon)} \\ &\leq C' u^{-\varepsilon}\lambda([0,t]).\end{aligned}$$

这也证明了 $f^{-\varepsilon}$ 在零点附近可积；远离零点时，f 在每个紧子区间上都有正下界。

为完整起见，普通的倍增核估计为

$$\int_{[0,a]} \left(\frac{u}{u + |t-s|}\right)^N d\lambda(s) \leq C\lambda(I(t,u)). \tag{3.16}$$

将其拆分为 $I(t,\ u)$ 和环域 $2^j u \leq |t-s| < 2^{j+1}u$，即可得到该结论：所得级数由 $C\sum_{j\geq 0} 2^{-j(N-d)}\lambda(I(t,\ u))$ 控制。

在 $0 < s < t/2$ 上，核至多为 $(2u/t)^N$。此外，倍增性给出

$$\lambda([0,t]) \leq C(t/u)^d \lambda(I(t,u)).$$

因此，前面的可积性估计蕴含

$$\begin{aligned}\int_{(0,t/2)} \left(\frac{u}{u + |t-s|}\right)^N f(s)^{-\varepsilon}\, d\lambda(s) &\leq C(u/t)^{N-d} u^{-\varepsilon}\lambda(I(t,u)) \\ &\leq Cu^{-\varepsilon}\lambda(I(t,u)).\end{aligned}$$

对于 $s \geq t/2$，局部单调性和宽度倍增性给出 $f(s) \geq f(t/2) \geq u/K$只要$s \leq a_0$。在 $[a_0, a]$上，正性和紧致性给出相同的估计，但常数可能不同；当 t充分小时，该估计一致成立。因此，(3.16) 给出

$$\int_{[t/2,a]} \left(\frac{u}{u + |t-s|}\right)^N f(s)^{-\varepsilon}\, d\lambda(s) \leq Cu^{-\varepsilon}\lambda(I(t,u)).$$

这些不等式合在一起，恰好就是所需的势检验。对于 $\mu \in \mathcal{D}(E_f)$，由引理2.10，其轴向投影具有倍增性；应用势判据即可完成证明。

□

定理1.4的证明。利用引理2.2中的保面积剪切，将两条弧的中点拉直。应用引理2.9，取 $g(t) = t^\alpha$。引理2.8 给出幂尖点域上限制面积的局部倍增性，而有界面积畸变将这一性质传递到宽度为 f的尖点域。远离0 处，边界及其非零角连接处满足螺旋条件，因此限制面积在这些位置也局部倍增。第 2 节开头的局部化观察给出全局倍增性；(1.4) 给出开域断言。

模型宽度 $g(t) = t^\alpha$ 满足命题 3.6。引理 2.9 中的可比宽度双 Lipschitz 映射将包含关系 $\mathcal{D}(E_g) \subseteq \mathscr{R}(E_g)$ 转化为 E_f。在远离零点处，比值f/g 由紧致性可知具有正的有限上下界，因此这种比较可用于整个截断模型。推论 3.5 的局部化论证给出 $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{R}(\Omega)$，适用于原域。严格包含关系由定理1.2得出。

□

3.8 受控变量幂

定理 3.7。 设 $a \in C^1((0,t_0])$，其中 $0<t_0<1$，满足

$$1 < a_- \le a(t) \le a_+ < \infty, \qquad |ta'(t)| \le M. \tag{3.17}$$

令 $f(0)=0$且 $f(t)=t^{a(t)}$，其中 $0<t\le t_0$。则 $D(E_f)\subseteq \mathscr{R}(E_f)$。对于每个 $\mu\in D(E_f)$，可选取一个测度 $\nu\in D(\mathbb{R}^2)$，使其 ν $E_f=\mu$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus E_f$上绝对连续。

证明。 估计式

$$|f'(t)| \le t^{a_- -1}\bigl(a_+ + M\log(1/t)\bigr) \longrightarrow 0$$

表明 $f\in C^1([0,t_0])$且 $f'(0)=0$。固定 $\mu\in\mathcal{D}(E_f)$并记 $\lambda=\pi_{\#}\mu$。由引理 2.10，λ 是在 $[0,t_0]$上的全支撑倍增测度。这种测度没有原子：在每个充分小的区间中，都有一个分离的子区间，其测度占较大区间测度的固定正比例，因此迭代后单点测度为零。特别地，存在 $\delta>0$ 使得

$$\lambda([0,u]) \le C(u/R)^{\delta}\lambda([0,R]), \qquad 0<u\le R\le t_0. \tag{3.18}$$

将 λ 关于两个端点反射，并以周期 $2t_0$重复，得到 $\lambda\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$。事实上，跨越反射点的区间可借助倍增性与单侧区间进行比较；长度小于一个周期的区间与有限个反射片段相交，而较长区间则由共同的周期质量控制。端点处没有原子质量需要重复计算。

选择

$$0<\kappa<\min\{1,a_- -1,\delta\}, \qquad \beta(t)=\frac{\kappa}{a(t)-1}.$$

于是 $0<\beta_-\le\beta(t)\le\beta_+<1$ 和 $|t\beta'(t)|\le C$。在原点附近定义

$$W(t,y)=\begin{cases} t^{-1-\kappa}\left(\dfrac{\max\{|y|,f(t)\}}{t}\right)^{\beta(t)-1}, & t>0,\ |y|<t,\\ |y|^{-1-\kappa}, & t>0,\ |y|\ge t,\\ \max\{|t|,|y|\}^{-1-\kappa}, & t\le 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

在 $(0,0)$ 处取任意值。将 W 延拓为一个正函数 w，使其在原点的一个小邻域之外等于 1。在中间的环带上，可以将该延拓选取得上下有界。令

$$d\sigma(t,y)=w(t,y)\,d\widetilde{\lambda}(t)\,dy. \tag{3.20}$$

我们验证其局部倍增估计，而不是假设与任意权函数的乘积仍保持倍增性。

由于 $(f(t)/t)^{\beta(t)}=t^{\kappa}$，可得

$$W(t,y)=f(t)^{-1} \qquad (|y|\le f(t)). \tag{3.21}$$

对于 $0<r\le t$，直接积分可得

$$\int_{-r}^{r} W(t,y)\,dy \asymp rW(t,r). \tag{3.22}$$

对于 $r\le f(t)$，这是显然的。否则，令 $H=t^{-\kappa}(r/t)^{\beta(t)}\ge 1$；积分为 $2\{1+(H-1)/\beta(t)\}$，且 $rW(t,r)=H$。

对于 $r \le t/4$ 和 $|s-t| \le r$，对数微分得

$$W(s,r) \asymp W(t,r). \tag{3.23}$$

在分支 $r < f(s)$ 上，$r|\partial_s \log W(s,r)| = r|f'(s)|/f(s) \le |f'(s)|$。在分支 $f(s) < r < s$ 上，

$$\partial_s \log W(s,r) = \frac{-\kappa - \beta(s)}{s} + \beta'(s)\log(r/s).$$

在长度至多为 $2r$ 的区间上积分，可得对数振荡的界 $C(r/t)(1+\log(t/r)) \le C$。各公式在分支界面处相符，因此比较关系跨越界面时同样成立。由此可得

$$\sigma\big((t-r,t+r)\times(-r,r)\big) \asymp rW(t,r)\lambda(I(t,r)), \qquad r \le t/4, \tag{3.24}$$

只要正方形位于满足 $w = W$ 的邻域内即可。对 r 作固定因子的改变，会使 $rW(t,r)$ 改变至多一个有界因子：当 $f(t)$ 以下时，它为 $r/f(t)$；当 $f(t)$ 以上时，它为 $t^{-\kappa}(r/t)^{\beta(t)}$。结合 λ 的倍增性，即可证明，对于半径相较于 t 足够小的轴心球，倍增性质成立。

对于半径相较于其到水平轴的距离足够小的球，相同的对数导数估计表明，w 在该球及其两倍扩张球上处处可比。若 $|y| \ll t$，所需的额外界为$(r/t)\log(t/|y|) \le C$，当 $r \le |y|/4$；若 $|y| \asymp t$ 或 $t \le 0$，则适用径向幂公式。由 $d\lambda(t)\,dy$ 的倍增性质，即可得到所需的比较关系。到轴的距离与半径相当的球，可由一个以轴为中心的正方形从上方控制，并由一个远离轴的固定比例子球从下方控制；前述估计及（3.24）适用。

还需考察原点。对（3.19）进行列积分，对 λ 取反射，并结合（3.18），可得

$$\sigma([-r,r]^2) \asymp \int_{(0,r]} t^{-\kappa}\, d\lambda(t) \asymp r^{-\kappa}\lambda([0,r]). \tag{3.25}$$

对于上界，将 $(0,r]$ 拆分为二进区间并对 $Cr^{-\kappa}\lambda([0,r])$ $\sum_{j\ge 0} 2^{-j(\delta-\kappa)}$ 求和；下界则显然成立。这证明了原点处的局部有限性和倍增性。如果某个中心到原点的距离不超过半径的固定倍数，则用一个包含它的、以原点为中心的正方形即可得到上界。对于下界，在一个内接矩形上使用 $W(t,y) \ge \max\{|t|,|y|\}^{-1-\kappa}$，并利用 λ 的倍增性，将其轴向区间与 $[0,r]$ 进行比较。这些论证涵盖了所有小球。原点之外的正有界延拓和乘积测度，完成了对 $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ 的证明。

现在验证引理 2.13 的假设。令 $p = (t,y) \in E_f$，其中 $t + r$ 充分小。对每个固定的 $0 < c_1 < c_2 < \infty$，

$$c_1 f(t) \le r \le c_2 f(t) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(B(p,r)) \asymp \lambda(I(t,r)) \asymp \mu(B_{E_f}(p,r)). \tag{3.26}$$

确实，$f(t) = o(t)$ 使得（3.24）适用，而 $rW(t,r)$ 在这个固定比率范围内有上下界。倍增性将中心从 p 移至,0)；最后一个比较正是引理2.10所依据的全截面条带估计。更一般地，对于每个固定的 $c > 0$,

$$r \ge cf(t) \quad \Longrightarrow \quad \mu(B_{E_f}(p,r)) \asymp \lambda(I(t,r)) \lesssim \sigma(B(p,r)). \tag{3.27}$$

当 $r \ll t$时，由 (3.24) 和 $rW(t,r)$ 可得此结论 $\gtrsim 1$；当 $t \lesssim r$时，由 (3.25) 和倍增性可得此结论。在 $t = 0$处，后一个估计可直接应用。因此，替换引理

给出了一个环境倍增测度，它在 μ 的每个博雷尔子集上都等于 E_f，而在其补集上具有面积密度。注意，单独的 (3.21) 只能给出一个参考测度，还不能推出 σ $E_f = \mu$；要保持原有的横向质量分布，必须进行替换步骤。

□

例 3.8。宽度

$$f(t) = t^{3+\sin\log(1/t)} \qquad (0 < t \le t_0)$$

满足定理 3.7，因为 $2 \le a(t)$ ≤ 4 以及 $|ta'(t)| \le 1$。因此 $\mathcal{D}(E_f)$ $\subseteq \mathscr{R}(E_f)$。然而，对于 $t_k = e^{-2\pi k}$，

$$\log \frac{f(2t_k)}{f(t_k)} = 2\pi k \sin(\log 2) + (3 - \sin(\log 2))\log 2 \longrightarrow \infty.$$

因此，宽度满足加倍条件并非 $\mathcal{D}(E_f)$ $\subseteq \mathscr{R}(E_f)$ 的必要条件。

3.9 交集非空且不存在相互包含关系

对于倍增测度，存在一个上盒维数小于一且具有正质量的紧集，以及下文所使用的对称三进伯努利构造，这些结果已为人所知；参见 Rossi–Shmerkin [12, 第 4]节。我们列出所需的特殊情形，以解释端点拼接。该引理本身并非声称为新的结果。

引理 3.9。 存在一个具有全支撑的有限加倍测度 τ，以及一个紧集 $K \subset (1/4, 3/4)$，使得

$$\tau(K) > 0, \qquad \overline{\dim}_{\mathrm{B}} K < 1, \qquad \tau([0,r]) \asymp r, \quad \tau([1-r,1]) \asymp r \quad (0 < r \le 1).$$

证明。 令 ω 为数字权重为 $(1/4, 1/2, 1/4)$ 的三进伯努利测度。同一代相邻三进区间的测度之比介于 $1/2$ 和 2 之间：进位中涉及的末尾数字 2 和 0 具有相同的权重，因此只有第一个发生变化的数字会对比值产生贡献。比较相邻区间和三进覆盖可知， ω 具有全支撑且为加倍测度。其香农熵为 $H = -2(1/4)\log(1/4) - (1/2)\log(1/2)$ $< \log 3$。

取 $H < q < \log 3$。根据数字频率的大数定律，当 n_0 充分大时，存在一个具有正 ω-测度的紧集 K_0，使得对每个 $n \ge n_0$， K_0 中出现的所有长度为 n 的前缀，其频率都充分接近 $(1/4, 1/2, 1/4)$。在第 n 代，可容许前缀的数量至多为 Ce^{qn}；任意多项式因子都可以通过略微增大 q 来吸收，同时仍保持 q $< \log 3$。因此，$\dim_{\mathrm{B}} K_0 \le q/\log 3 < 1$。通过限制在一个内部闭区间内，并在必要时增大 n_0，可以使该紧集位于给定的内部开区间内，同时保留正测度。具有两个三进展开的点构成一个可数的零测集。紧集可以直接定义为闭基本区间并集的递减交集。

设 $\alpha = \log 4/\log 3 > 1$。则 $\omega([0,r]) \asymp r^{\alpha}$，右端点处也有类似的估计。将 ω 仿射缩放至 $[1/3, 2/3]$，记所得概率测度为 σ_0，并设 $\tau = \mathcal{L}^1|_{[0,1]} + \sigma_0$。其总质量为 2。对于一个球及其包含在 $[1/3, 2/3]$ 内的两倍球，结合两个倍增估计即可推出倍增性。若两倍球跨越 σ_0 的支撑端点，而较小的球仍位于该支撑内，则球心到该端点的距离不超过半径的固定倍数。因此，两倍球的 σ_0-测度至多为 $Cr^{\alpha} \le Cr$，可由勒贝格部分控制。其他跨越支撑端点的情形也可由相同的端点估计得到。在支撑之外，仅

剩下勒贝格测度。因此， τ 是倍增的，并且在 0 和 1 的固定邻域内与勒贝格测度一致。对上文构造的紧典型集 K_0施加相同的仿射缩放。所得集合满足 $K \subset [1/3, 2/3] \subset (1/4,\ 3/4)$， $\tau(K) > 0$，且上盒维数小于一。无需进行拟对称坐标变换。

□

定理 *1.10* 的证明。 取 K， τ 如引理中所述，并选取 $d < 1$ 使得

$$|\{z \in [0,1] : \operatorname{dist}(z, K) < h\}| \le Ch^{1-d} \quad (0 < h < 1). \tag{3.28}$$

取 $a > 1$。令 $d_K(z) = \operatorname{dist}(z, K)$ 在整个实数轴上成立，并令 φ 为支撑于 $[-1, 1]$ 且积分为 1 的非负光滑磨光函数。记作 $q_\eta = d_K * \varphi_\eta$。 由于距离函数是 1- 利普希茨的，

$$|q_\eta - d_K| \le \eta, \qquad |q_\eta'| \le 1, \qquad (q_\eta^2 + \eta^2)^{1/2} \asymp d_K + \eta.$$

选取一个光滑截断函数 χ，使其在包含 K的内部闭区间上等于 1，并在端点附近等于 0，且在 $\chi \neq 1$成立处与 K 保持固定的正距离。对于 $0 < \eta \le 1$，令

$$G_\eta(z) = \chi(z)(q_\eta(z)^2 + \eta^2)^{a/2} + 1 - \chi(z).$$

于是 $G_\eta \in C^\infty([0,1])$，它在端点附近等于 1，并且

$$G_\eta(z) \asymp (\operatorname{dist}(z, K) + \eta)^a, \qquad \|G_\eta\|_\infty + \|G_\eta'\|_\infty \le C_a. \tag{3.29}$$

所有常数都与 η 无关。导数界由 $q_\eta(q_\eta^2 + \eta^2)^{a/2-1} \lesssim (q_\eta + \eta)^{a-1}$ 得出。此外，在 K 上有 $G_\eta \le C\eta^a$ 。

令 $t_k = 4^{-k}$、 $I_k = [t_k, 2t_k]$和 $\eta_k = e^{-1/t_k}$。 在 I_k 上，定义

$$f(t) = t^2 G_{\eta_k}\left(\frac{t - t_k}{t_k}\right),$$

令 $f(t) = t^2$在其他地方，并令 $f(0) = 0$。由于 $G_{\eta_k} = 1$在每个块的两端附近，因此 f在每个 $t > 0$处都光滑。此外， $|f\prime(t)| \le Ct_k$在 I_k上。因此， $f'(0) = 0$，且 f在 $(0, 1]$上为正。

一个定义在 $\mathcal{D}(E_f)\backslash\mathscr{R}(E_f)$ 的测度。 在每个 I_k 上，使用 τ 的仿射副本并乘以 t_k，在 $\bigcup_k I_k$ 之外则使用勒贝格测度。将所得测度记为 λ_b。每个完整的块的质量为 $2t_k$。等价地，$\lambda_b = \mathcal{L}^1 + \sum_k t_k(A_k)\#\sigma_0$，其中 $A_k(z) = t_k + t_k z$。该测度具有倍增性，且倍增常数与块的指标无关。事实上，包含在单个块内的相邻区间可利用 τ 的倍增性进行比较。与块端点相交的区间，其质量与长度可由 $\tau([0, r]) \asymp r$ 及其右端点对应情形比较。跨越多个块的区间可分解为完整的块以及至多两个端部片段，从而得到相同的比较。若一个小区间位于某个块内，但其固定倍数扩张超出该块，则先利用块内的倍增性，将其与端点处的区间比较，再应用端点估计。这些情形涵盖了每个球及其二倍球。

定义

$$d\mu_b(t, y) = \frac{1}{2f(t)}\, d\lambda_b(t)\, dy \qquad (|y| \le f(t)).$$

小斜率尖点的标准球估计给出

$$\mu_b(B_{E_f}((t, y), r)) \asymp \lambda_b(I(t, r)) \min\{1, r/f(t)\},$$

因此 μ_b具有倍增性。记 $K_k = t_k + t_k K$。则 $\lambda_b(K_k) = t_k\tau(K)$，且 $f(t) \le Ct_k^2\eta_k^a$于 K_k。对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$\int f(t)^{-\varepsilon}\, d\lambda_b(t) \ge c\sum_k t_k(t_k^2\eta_k^a)^{-\varepsilon} = c\sum_k t_k^{1-2\varepsilon}e^{a\varepsilon/t_k} = \infty.$$

推论 1.9 表明，$\mathcal{D}(E_f) \cap \mathscr{R}(E_f)$ 中每个测度的轴向投影都具有某个有限负宽度矩。因此 $\mu_b \in \mathcal{D}(E_f) \setminus \mathscr{R}(E_f)$。

取一个属于 $\mathcal{D}(E_f) \cap \mathscr{R}(E_f)$的测度。取 $\lambda_g = dt$ 以及 $0 < \varepsilon <$最小值$\{1/2, (1-d)/a\}$。将层析公式应用于（3.28）得

$$\sup_{0<\eta\le 1}\int_0^1 G_\eta(z)^{-\varepsilon}\, dz < \infty.$$

因此，$\rho = f^{-\varepsilon}dt$ 是有限的，因为 $\rho(I_k) \le Ct_k^{1-2\varepsilon}$且在块之外 $f = t^2$ 。我们验证势检验。取

$$N > \max\{2,\ a(1-\varepsilon)/(a-1)\}.$$

固定 $\theta > 0$ 足够小，使得 K 的 2θ-邻域紧包含于 $(0,1)$ 中。若$t \in I_k$ 且其归一化坐标与 K的距离小于 θ，令 $\delta = \mathrm{dist}((t-t_k)/t_k, K)+\eta_k$。则 $r = f(t) \asymp t_k^2\delta^a$。对于 $|s-t| < ct_k\delta$，我们有 $f(s) \asymp f(t)$，因此

$$\int_{|s-t|<ct_k\delta}\left(\frac{r}{r+|s-t|}\right)^N d\rho(s) \le Cf(t)^{-\varepsilon}r = Cr^{1-\varepsilon}.$$

在同一块的剩余部分上，界 $\rho(I_k) \le Ct_k^{1-2\varepsilon}$给出

$$\int_{I_k\setminus(t-ct_k\delta,t+ct_k\delta)}\left(\frac{r}{r+|s-t|}\right)^N d\rho(s) \le Ct_k^{N+1-2\varepsilon}\delta^{(a-1)N} \le Ct_k^{2-2\varepsilon}\delta^{a(1-\varepsilon)} \asymp Cr^{1-\varepsilon}.$$

这里我们用了 $N > 1$ 和 $(a-1)N \ge a(1-\varepsilon)$。在该块之外，到 t 的距离至少为 ct_k，因此其贡献至多为

$$C(r/t_k)^N\rho([0,1]) \le Ct_k^N\delta^{aN} \le Cr^{1-\varepsilon},$$

因为 $N \ge 2-2\varepsilon$ 且 $N \ge 1-\varepsilon$。

若 t 位于上述归一化的 θ邻域之外，则 $f(t) \asymp t^2$。存在一个一致的 $c > 0$，使得只要 $|s-t| < ct$，就有 $f(s) \asymp t^2$。在块内，取小于 θ 某个固定倍数的 c；在块端点附近，使用满足 $G_\eta = 1$的固定邻域带。块与块之间的间隙大小与相应的 t_k可比，因此同样的选取也适用于块外的点。近处的贡献由相同的核积分控制。对于远处的贡献，利用 $(r/t)^N\rho([0,1]) \lesssim r^{1-\varepsilon}$。因此，对于每个充分小的$t > 0$,

$$\int\left(\frac{f(t)}{f(t)+|t-s|}\right)^N f(s)^{-\varepsilon}\, ds \le Cf(t)^{1-\varepsilon} \asymp Cf(t)^{-\varepsilon}|I(t,f(t))|.$$

轴向势判据现在表明，$d\mu_g = (2f(t))^{-1}dt\, dy$属于$\mathcal{D}(E_f) \cap \mathscr{R}(E_f)$。

最后，图像 $y = \pm f(t)$ 是正则 C^1 弧。在 $t = 1$ 处用竖直线段将它们连接起来，得到由有限条正则 C^1 弧组成的约当边界。因此，该例满足定义 1.1。定理 1.2 还给出 $\mathscr{R}(E_f) \setminus \mathcal{D}(E_f) \ne \varnothing$。开闭对应在 Ωf 上得到相同的三个非空集合。

□

这一构造与光滑子类的二分性相一致。事实上，在间隙点 $t = 3t_k$ 处，我们有 $f(t)/t^2 = 1$；而对于固定的 $z \in K$，当 $t = t_k(1+z)$ 时，我们有 $f(t)/t^2 \le C\eta_k^a \to 0$。因此，$f(t)/t^2$在原点处没有极限，且 $f \notin C^2([0,1])$。由于图像的水平坐标导数非零，任何正则重参数化都无法将这条边界变成端点处的正则 C^∞ 弧。

3.10 光滑接触与有限个尖点

定理*1.5*的证明。若 $m < \infty$，由泰勒定理和正性可得 $f(t) = bt^m + o(t^m)$，其中 $b > 0$。定理1.4 适用。若 $m = \infty$，则在每个有限阶处应用泰勒定理可得（1.9），定理1.3 适用。

□

这里的光滑性包括尖点端点处的所有单侧导数。较弱的条件 $C^1([0,a]) \cap C^\infty((0,a])$ 对定理 1.6 和 1.10中的两个例子均成立。正则光滑坐标变换保持有限接触阶与无限接触阶的区别：图像间隙会乘上一个非零光滑因子，并进行一次可逆切向再参数化。

注记 3.10。 对于具有有限个零角尖点的分片 C^1 约当区域，不存在任何一个尖点使 $\mathscr{R}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$。如果至少存在一个尖点，且每个尖点宽度均幂可比较，则 $\mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathscr{R}(\Omega)$，并且限制面积具有倍增性。单个无穷平坦尖点，或具有定理 1.6中的阻碍几何的尖点，会导致 $\mathscr{R}(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega) = \varnothing$。

对于有限条端点处光滑的正则 C^∞ 弧，这是一个完整的几何分类：没有零角尖点时取等号；至少有一个尖点且所有尖点的接触阶均有限时，严格包含 $\mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathscr{R}(\Omega)$；存在无穷阶尖点时则不相交。事实上，在每个尖点处应用泰勒定理、推论 3.5 和定理 1.4 可得正向包含关系；其余结论则由定理 1.2、1.3和1.6 的局部构造得出。有限覆盖可处理限制面积。

推论3.11。 对于边界由有限条端点处光滑的正则 C^∞ 弧构成的乔丹域，以下条件等价：

$$\mathscr{R}(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega) \neq \varnothing, \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{R}(\Omega), \qquad \textit{all zero-angle cusps have finite contact order.}$$

特别地，如果边界由有限条实解析弧构成，且这些弧定义在其闭参数区间的邻域上，则 $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{R}(\Omega)$。

证明。 等价性由注 3.10 和 $\mathcal{D}(\Omega) \neq \varnothing$得出。不同相接图像之间正的解析间隙不可能以无穷阶消失，否则它会在端点附近恒等于零。

□

3.11 离散准则与有限证书

本节不对尖点宽度作任何单调性、加倍条件或泰勒主项假设。设 Ω 为分段 C^1 约当域，且 $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$。我们给出一个仅涉及网格质量的充要条件。该条件取决于给定的测度 μ；它并非仅依据边界几何对区域进行分类。

3.11.1 网格与有限测试

令 $\mathscr{G}$ 为平面中的标准半开二方形：

$$Q_{j,k} = 2^{-j}(k + [0,1)^2), \qquad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^2.$$

记 $j(Q) = j$。每个正方形有四个子方形。同一层级的两个正方形若其闭包共边，则称它们相邻。固定一个满足 $Q_0 \subset \Omega$ 的正方形，并记 $M_0 = \mu(\overline{Q_0}) > 0$。

对于 $C \geq 1$，设定 $A_C = 4C^2$。对于每个 Q，令 $j_* = \min\{j(Q)\ j(Q_0)\}$，并令 P，P_0 分别为 Q，Q_0 在第 j_* 层的祖先。令 d_Q 为 P 与 P_0的整数网格索引之间的曼哈顿距离，并设

$$a_Q(C) = C^{-d_Q} A_C^{-(j(Q)-j_*)}, \qquad b_Q(C) = C^{d_Q} A_C^{j(Q_0)-j_*}. \tag{3.30}$$

这些量由网格和 C 明确确定，并满足 $0 < a_Q(C) \le b_Q(C) < \infty$。

引入实数未知量 m_Q、 $Q \in \mathscr{G}$，并考虑以下可数线性系统 $\mathcal{L}_C(\mu)$:

$$m_Q = \sum_{Q' \text{ a child of } Q} m_{Q'}, \qquad Q \in \mathscr{G}, \tag{3.31}$$

$$C^{-1} m_{Q'} \le m_Q \le C m_{Q'}, \qquad Q, Q' \text{ adjacent at the same level}, \tag{3.32}$$

$$m_Q = \mu(Q), \qquad \overline{Q} \subset \Omega, \tag{3.33}$$

$$a_Q(C) M_0 \le m_Q \le b_Q(C) M_0, \qquad Q \in \mathscr{G}. \tag{3.34}$$

如果所显示的方程和不等式的每个有限选取都有实数解，我们就称每个有限子系统都是可行的。对于固定的 C，这是一个普通的有限维线性可行性问题。不同有限子系统的解不必预先保持一致。

定理 3.12。 对于 $\mu \in D(\Omega)$，以下陈述等价：

1. $\mu \in \mathscr{R}$（Ω）。*2.* 存在一个常数 $C \ge 1$，使得整个系统 L_C（μ）是可行的。*3.* 存在一个常数 $C \ge 1$，使得 L_C（μ）的每个有限子系统都是可行的。对于必要性，可取 $C = D_\nu^4$。对于充分性，所得平面测度的倍增常数受 C 和绝对常数控制。

3.11.2 必要性与紧致性

定理 *3.12*的证明： （1） ⇒（2）。取 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$，满足 $\nu\Omega = \mu$，并令 $m_Q = \nu(Q)$。环境倍增测度对直线赋予零测度，因此半开约定不会影响正方形质量。有限可加性给出（3.31），而 $\nu\Omega = \mu$ 给出（3.33）。对共享一条边的两个正方形，取其内接球，再结合一个包含这两个正方形的固定倍缩集，由倍增性得到（3.32）；例如， $C = D_\nu^4$ 即可。

我们必须验证（3.34）不会施加额外限制。同一父正方形的任意两个子方形之间，最多只需经过两步边相邻。因此，每个子方形的测度至少为A_C^{-1}乘以父正方形的测度，且至多等于父正方形的测度。此外， P_0 和 P 之间有一条包含 d_Q 步边相邻的路径，因此它们的测度比介于 C^{-d_Q} 与 C^{d_Q}之间。沿祖先链综合这些比较，并利用$m_{Q_0} = M_0$，恰好得到（3.34）。□

命题（2）显然蕴含（3）。反过来，考虑紧致乘积空间

$$\mathcal{K}_C = \prod_{Q \in \mathscr{G}} [a_Q(C) M_0, b_Q(C) M_0].$$

每个守恒方程、邻接比较或内部数据约束都定义了该空间的一个闭子集，且仅涉及有限个坐标。命题（3）与相关坐标的区间界共同保证了有限交性质。因此，总交集非空，从而证明（3） ⇒ （2）。由于指标集可数，也可以用对角子列给出同样的论证。

必须先固定相同的 C，然后测试所有有限子系统。允许 C 随测试规模增长，并不意味着 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$。

3.11.3 构造平面测度

定理的证明 *3.12*: (2) ⇒ (1)。 固定一个解 (m_Q)。在每个单位正方形中，利用其四分支树上的守恒构造一个概率测度，再乘以该

单位正方形的质量。更明确地说，选择一个子方形的条件概率为 $m_{Q'}/m_Q$。一列无限嵌套的闭集正方形的直径趋于零，并且其交集是唯一的点。将树测度推前到该点。

我们必须排除二进边界上的重复质量。在任意正方形 Q内，每个子方形的质量至少为 $A_C^{-1}m_Q$。保留沿一条边的两个子方形至少会舍弃两个子方形，因此保留的质量至多为$(1-2/A_C)m_Q$。经过 k次重复后，沿该边宽度为 $2^{-k}\ell(Q)$的条带的编码质量至多为

$$(1-2/A_C)^k m_Q \longrightarrow 0.$$

因此，正方形边界以及所有二进网格线都是零测集。该构造给出一个满足 $\nu(Q)=m_Q$的博雷尔测度。对单位正方形求和，便得到整个平面上的一个测度。反复运用守恒还给出负层级上正方形的指定质量。

每个紧集只与有限多个单位正方形相交，因此 ν 是局部有限的。欧几里得空间上的局部有限博雷尔测度是拉东测度。每个开球都包含一个二进正方形，其质量为正；因此 ν 具有全支撑。

为验证倍增性，固定 $B(x,\ r)$，并选取一个满足 $r/8 \le \ell(Q) < r/4$ 的层级。令 Q_x 为该层级中包含 x 的正方形。那么 $Q_x \subset B(x,\ r)$。至多有 N_0 个该层级的正方形覆盖$B(x,\ 2r)$，且每个正方形都可以通过至多 N_1 个边相邻步数与 Q_x 相连，其中 $N_0,\ N_1$是绝对常数。因此

$$\nu(B(x,2r)) \le N_0 C^{N_1} m_{Q_x} \le N_0 C^{N_1}\nu(B(x,r)).$$

由此可得 $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$。

最后，我们验证 $\nu\llcorner\Omega = \mu$。测度 μ 在 Ω 内部紧包含的小球中，对直线也赋予零测度：直线的相对孔隙性与 μ 的倍增性结合微分定理，可推出其测度为零。内部二进正方形满足（3.33）；它们的细分生成 Ω 中的博雷尔集，而省略的网格直线对两种测度而言都是零测集。因此 $\nu\llcorner\Omega = \mu$，如所需。定义1.1 之后的边界论证给出相同结论，只需以$E=\Omega$ 替代 Ω。

□

推论 3.13. 对于 $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$，当且仅当对每个整数 $C \ge 1$，系统 $L_C(\mu)$ 都存在一个有限不可行子系统，才有 $\mu \notin \mathscr{R}(\Omega)$ 。

证明. 定理 3.12对所有实数 $C \ge 1$都给出了该断言。若 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$，则选取一个平面倍增测度，使其限制测度为 μ。任何充分大的整数都是可容许的相邻性比较常数，而必要性论证会给出该整数对应的可行系统。这就证明了所述版本。

□

对于某个固定的 C，有限测试未通过只能排除该相邻性比较常数；这并不能证明 $\mu \notin \mathscr{R}(\Omega)$。同样，通过有限级别以内的所有测试，也不能替代通过每个有限子系统。要判定 $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{R}(\Omega)$ 是否成立，仍需将判据应用于每个 $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$。该判据本身并不能仅依据边界几何给出分类。

对于任意正的 C^1 宽度，势条件和有限系统判据决定了每个给定的内部测度是否属于 $\mathscr{R}(\Omega)$。它们并不能消去测度量词，从而给出所有具有 $\mathscr{R}(\Omega)\cap\mathcal{D}(\Omega) = \varnothing$、具有$\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{R}(\Omega)$，或具有非空交集且彼此均不包含的区域的纯几何刻画。特别地，局部条件（2.6）和负矩条件（1.17）仅是必要条件。

参考文献

[1] Buckley S M、Hanson B、MacManus P。一般集合的倍增性。《斯堪的纳维亚数学杂志》，2001，88(2)：229–245。doi:10.7146/math.scand.a-14324。[2] Csörnyei M、Suomala V。关于康托尔集和倍增测度。《数学分析与应用杂志》，2012，393(2)：680–691。doi:10.1016/j.jmaa.2012.04.035。[3] Dai Y、Wen F、Xing Y、Zhan K。关于 φ-一致约当区域的两个结果。《算子理论进展》，2023，8：19。doi:10.1007/s43036-023-00247-z。[4] García-Bravo M、Ikonen T、Zhu Z。关于无穷厚拟凸性及其应用。arXiv:2509.01194v2，2026。https://arxiv.org/abs/2509.01194v2。[5] Heinonen J。《度量空间分析讲义》。纽约：施普林格，2001。doi:10.1007/978-1-4613-0131-8。[6] Hytönen T、Kairema A。倍增度量空间中的二进立方体系统。《数学讨论》，2012，126(1)：1–33。doi:10.4064/cm126-1-1。[7] Käenmäki A、Rajala T、Suomala V。通过广义嵌套立方体存在倍增测度。《美国数学会会刊》，2012，140(9)：3275–3281。doi:10.1090/S0002-9939-2012-11161-X。[8] Kaufman R、Wu J-M。关于倍增测度的两个问题。《伊比利亚美洲数学杂志》，1995，11(3)：527–545。doi:10.4171/RMI/183。[9] Luukkainen J、Saksman E。每个完备倍增度量空间都带有一个倍增测度。《美国数学会会刊》，1998，126(2)：531–534。doi:10.1090/S0002-9939-98-04201-4。[10] Murugan M。反射扩散的热核与一致区域上的延拓性质。《概率论及相关领域》，2024，190：543–599。doi:10.1007/s00440-024-01266-4。[11] Ojala T、Rajala T、Suomala V。度量空间中倍增测度的薄集与厚集。《数学研究》，2012，208(3)：195–211。doi:10.4064/sm208-3-1。[12] Rossi E、Shmerkin P。小维数集的赫尔德覆盖。《分形几何杂志》，2019，6(3)：285–299。doi:10.4171/JFG/78。[13] Saksman E。关于倍增测度的不存在性之注记。《芬兰科学院数学年刊》，1999，24：155–163。https://www.acadsci.fi/mathematica/Vol24/saksman.pdf。[14] Vol'berg A L、Konyagin S V。关于满足加倍条件的测度。《苏联数学通报》，1988，30(3)：629–638。doi:10.1070/IM1988v030n03ABEH001034。[15] Wang W、Wen S、Wen Z-Y。欧几里得空间中倍增测度的厚集与薄集。《芬兰科学院数学年刊》，2013，38(2)：535–546。doi:10.5186/aasfm.2013.3827。[16] Wang X、Wen S。康托尔集上的倍增测度及其延拓。《匈牙利数学学报》，2012，134(4)：431–438。doi:10.1007/s10474-011-0186-z。[17] Wang X、Wen S、Wen Z。Whitney 修改集上的倍增测度。《数学分析与应用杂志》，2008，342(2)：761–765。doi:10.1016/j.jmaa.2007.12.054。[18] Wang X、Wen S、Wen Z。欧几里得空间中 Whitney 修改集上的倍增测度与非拟对称映射。《伊利诺伊数学杂志》，2008，52(4)：1291–1300。doi:10.1215/ijm/1258554363。[19] Wei C、Wen S、Wen Z。 一致康托尔集上的倍增测度。《数学分析与应用杂志》，2015，430(1)：500–516。doi:10.1016/j.jmaa.2015.05.002。[20] Wu J-M。倍增测度和二进倍增测度的零测集。《芬兰科学院数学年刊 A I 辑》，1993，18(1)：77–91。https://www.acadsci.fi/mathematica/Vol18/wu.pdf。