费米量子代数$B_0 \oplus \mathcal{B}_1$上$R(p,\ q)$–超相干态的变形量子光学密度算符的再生核与矩阵表示

Kawèyim Lankpetre [1]，Isiaka Aremua[1,2], Joseph Désiré Bukweli Kyemba[2,3] 和 Bienvenu Gnim Adewi[1]

[1]洛美大学理学院物理系，半导体材料与器件物理实验室，01 B.P. 1515，洛美 01，多哥[2]阿波美-卡拉维大学国际数学物理与应用讲席（ICMPA-联合国教科文组织讲席），072 B.P. 50，科托努，贝宁[3] 金沙萨大学理工学院数学、统计学与计算机科学系
lankpetre.kaweyim.myhal@gmail.com，claudisak@gmail.com，desire.bukweli@unikin.ac.cd，bienvenuadewi@gmail.com

2026年11月11日

摘要

我们研究具有两个格拉斯曼变量（$\zeta_1,\ \zeta_2$）的$\mathcal{R}(p,\ q)$–超相干态。这些态构建于超代数$\mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$之上，并与Hounkonnou 和 Bukweli-Kyemba 的$\mathcal{R}(p,\ q)$–变形量子代数相关。两个伸缩参数 $\phi_1(p,\ q)$ 和 $\phi_2(p,\ q)$ 是在 $(p,\ q)$ 处取值的二元亚纯函数。分级超 Fock 空间分解为四个扇区：玻色、 ϕ_1–费米、 ϕ_2–费米和双费米扇区。我们在每个扇区中借助$\mathcal{R}(p,\ q)$–导数、角积分和 Berezin 积分，建立密度算符的对角表示，并用扇区参数函数给出统一紧致形式。总密度算符可明确写成四个扇区贡献之和，并可视为四个扇区的混合态。我们定义由恒等算符分解得到的扇区再生核，计算密度算符在超相干态基中的矩阵元，并证明这些核具有厄米性、正性和矩阵乘法性质，同时给出其对角值的级数展开。积分表述揭示了密度算符、其密度函数与再生核之间的联系，后者是与单位算符相关联的函数。在玻色子扇区中进行Berezin量子化，可得到与 z、 $\bar{z}$、 $|z|^2$、 z^2 和 $\bar{z}^2$ 相关联的量子化算符及其均值；超位置算符和超动量算符的色散表明，超相干态是智能态。

关键词： $\mathcal{R}(p,\ q)$–变形量子代数；超相干态；格拉斯曼变量；密度算符；再生核；Berezin量子化；智能态。

2020年数学主题分类： 81R30；81R50；17B37；46E22；81S10；17A70。

arXiv:2611.30576v1 [math-ph] 23 Nov 2026

1 引言

相干态为量子力学提供了一种相空间描述。Glauber 和 Sudarshan 最初将其引入电磁场 [16, 35], , 借此可将密度算符写成相干态投影算符的叠加；这种对角表示将布居数、相干性和涨落的计算转化为复平面上的积分。该方法基于 Bargmann–Fock 实现 [7], , 在这种实现中，态矢量成为全纯函数，而两个相干态的标量积构成一个再生核；该方法还可推广至 Berezin量子化 [8]„ 后者为每个经典函数关联一个算符。这些构造也适用于广义相干态[28, 31], , 在这一框架下，自然可以研究变形振子。

变形振子代数最初与 Arik 和 Coon 的解析函数希尔伯特空间及广义相干态一同出现 [5], , 随后又随着 Drinfeld 和 Jimbo 的量子群 [15, 27], 出现了 Biedenharn [9] 和 Macfarlane [29], 提出的 q–变形振子。其基础解析工具是 Jackson q–微积分 [24, 25]。Chakrabarti 和 Jagannathan 引入了双参数变形 [14]; （$p,\ q$）–微分和（$p,\ q$）–积分在 [13], 相关超几何级数中的研究见 [26], , 而（$p,\ q$）–微积分的系统论述见[34]。随后，Hounkonnou 和 Ngompe Nkouankam 提出了具有多个参数及变形函数的变形 [22, 23] ； Baloïtcha、Hounkonnou 和 Ngompe Nkouankam 也提出了此类变形 [6], , 而 Quesne 则构造了q–变形相干态，其单位分解有明确表达式 [32, 33]。

所有这些变形都是源自 Odzijewicz [30], 工作的一个一般方案的特殊情形。在该方案中，Hounkonnou 和 Bukweli-Kyemba 引入了与亚纯函数 $\mathcal{R}$相关联的 $\mathcal{R}(p,q)$–变形量子代数，以及相应的相干态和特殊函数 [17], , 随后又建立了相应的微分与积分学 [18]。$\mathcal{R}(p,q)$–变形 Rogers–Szegő 多项式 [
11], 变形海森堡代数的相干态、其统计和几何 [10, 12], 以及相干态量子化 [19] 拓展了这一研究计划，如今该计划还涵盖变形 Virasoro 代数和 Witt代数 [20, 21]。

以格拉斯曼变量标记的超相干态可追溯至 Aragone 和 Zypman [3], , 而使不确定性关系取等的智能态概念则可追溯至 Aragone、Chalbaud 和 Salamó [2]。对于给定的一族相干态，密度算符的对角表示、由恒等算符分解构造再生核，以及对其厄米性、正性和幂等性性质的研究，构成了一种经过充分检验的分析方法[4, 1]。

对于具有两个格拉斯曼变量（ζ_1，ζ_2）的 $\mathcal{R}(p,\ q)$–超相干态，它们与两个膨胀参数 $\phi_1(p,\ q)$ 和 $\phi_2(p,\ q)$相关联，并建立在超代数 $\mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1,$之上；这一方法尚未实施，且其应用并不直接。分次超 Fock 空间分裂为四个扇区：玻色扇区（B）、 ϕ_1–费米扇区（F_1）、ϕ_2–费米扇区（F_2）和双费米扇区（F_{12}），其在归一化函数中的权重涉及函数 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$及其导数。在未变形情形下用于分离矩阵元的普通导数，被$\mathcal{R}(p,\ q)$–导数所取代；而格拉斯曼变量则要求进行 Berezin 积分，并且该积分必须与角向积分和径向积分结合起来。因此，必须证明密度算符在每个扇区中都保持显式的对角表示，这些表示能够组合成总密度算符的精确公式，并且再生核仍保有使其成为计算工具的性质（厄米性、正性、幂等性和再生性）。

我们逐个扇区建立这些结果。在每个扇区中，密度算符的对角表示均通过相同的操作步骤获得：超相干态的二元乘积、Berezin 积分、角积分、应用 $(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}$ 以及取极限 $r \to 0$。这四种表示可写成统一紧致形式和统一表示，将它们求和即可得到总密度算符的显式表达式；后者呈现为四个扇区的混合态。随后，我们在超相干态基中定义密度函数和扇区再生核，并证明其厄米性、正性、矩阵乘法性质以及对角值的级数展开，同时给出一种积分表述，其中再生核是单位算符的函数。最后，玻色子扇区中的 Berezin量子化导出量子化算符、它们的均值，以及超位置算符和超动量算符的色散；这些算符使不确定性关系达到饱和。

这些结果适用于对玻色和费米自由度通过$\mathcal{R}(p,\ q)$变形耦合的系统进行统计描述。对这类系统，对角表示提供了 Glauber–Sudarshan表示的类似形式，据此可计算扇区占据数和均值；对于在福克基中为对角形式的密度算符（例如热平衡态），则可直接得到相应结果。积分表述将算符的复合、迹和纯度化为超相干态标记空间上核的积分。最后，智能态对于变形振子的作用，正如普通相干态对于谐振子的作用一样：它们是最小不确定性态，可作为研究量子涨落的参照。

本文结构如下。第2节介绍R(p,q)–变形的预备知识（缩放函数、R(p,q)–导数、指数函数、Bargmann–Fock 空间），继而介绍超代数$\mathrm{B}_0 \oplus \mathrm{B}_1,$、分次超 Fock 空间以及R$(p,q)$–超相干态。第 3 节讨论密度算符的矩阵表示，先逐个扇区讨论，再给出其显式整体形式。第4节介绍再生核、密度算符的矩阵元和积分表述。第5节阐述玻色子扇区中的 Berezin量子化、色散和智能态，第6节作总结。最长的证明安排在附录A和B中。

2 预备知识与定义在$B_0 \oplus \mathcal{B}_1$上的$\mathcal{R}(p,q)$ 超相干态

本节将建立本文所需的框架。首先回顾下文将用到的$\mathcal{R}(p,q)$–变形微积分的基本内容：亚纯函数$\mathcal{R}$ 及变形数、缩放函数 ϕ_1 和 ϕ_2、$\mathcal{R}(p,q)$–导数、指数函数以及 Bargmann–Fock 空间。随后介绍超代数$\mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1,$、分次超 Fock 空间和$\mathcal{R}(p,q)$–超相干态，以及它们的恒等算符分解。

全文中，p 和 q 是两个正实数，$\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < R\}$ 是半径为 R的开复圆盘，$\mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$表示定义在 $\mathbb{D}_R$上的全纯函数集合。

2.1 亚纯函数$\mathcal{R}$ 及$\mathcal{R}(p,q)$–数

假设　2.1 假设（关于$\mathcal{R}$的一般假设）。设$\mathcal{R}$ 是定义在 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上的亚纯函数，其表达式为

$$\mathcal{R}(x,y) = \sum_{k,l=-L}^{\infty} r_{kl}\, x^k y^l, \tag{2.1}$$

在原点处可能有一个孤立 奇点，其中 r_{kl} 为复数，$L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，且满足

$$\mathcal{R}(p^n, q^n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{R}(1,1) = 0. \tag{2.2}$$

除非另有说明，我们假设 $0 < q < p \le 1$ 或 $0 < p < q \le 1$。

定义2.2（R(p,q)–数、阶乘、二项式系数）。在假设 2.1下，R(p,q)–数（也称为R(p,q)–因子）是量R(p^n,q^n)、 $n = 0$、1、2、.....，也记作 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)} :=$ R(p^n,q^n)。R(p,q)–阶乘为

$$\mathcal{R}!(p^n,q^n) = [n]_{\mathcal{R}(p,q)}! := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \mathcal{R}(p,q)\mathcal{R}(p^2,q^2)\cdots\mathcal{R}(p^n,q^n), & n \ge 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

以及R（p，q）–二项式系数为

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_{\mathcal{R}(p,q)} = \frac{\mathcal{R}!(p^m, q^m)}{\mathcal{R}!(p^n, q^n)\,\mathcal{R}!(p^{m-n}, q^{m-n})}, \qquad 0 \le n \le m, \tag{2.4}$$

2.2 缩放函数 ϕ_1 和 ϕ_2

变形由以下两项数据决定：假设$\mathcal{R}$ 2.1 中的亚纯函数，它生成变形数；以及一对缩放函数，它们提供膨胀参数。必须注意（这一点在文献中往往被含蓄带过），后者本身应是两个复变量的亚纯函数，并在点(p, q)处取值。

记号 2.3（亚纯缩放函数）。设

$$\phi_1,\ \phi_2 :\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

为两个复变量的亚纯函数，在 (p, q) 的某个邻域内全纯且不为零，并按惯例在不会引起歧义时记作

$$\phi_1 := \phi_1(p, q), \qquad \phi_2 := \phi_2(p, q). \tag{2.5}$$

那么，$\mathcal{R}(p, q)$–变形由三元组 $(\mathcal{R}\ \phi_1, \phi_2)$确定，而变形指数函数及膨胀参数均基于（2.5）中的取值构造。我们始终假设

$$\lim_{(p,q)\to(1,1)} \phi_i(p, q) = 1, \qquad i = 1, 2, \tag{2.6}$$

从而在未变形极限下恢复经典微积分，并将 ϕ_i^λ记作 $\big(\phi_i(p, q)\big)^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$，其中取主值分支。

例 2.4（典范投影和（p，q）–微积分）。令 $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为两个典范投影，

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x, \qquad \mathrm{pr}_2(x, y) = y. \tag{2.7}$$

若$\mathcal{R}$ 是一个定义良好的函数（特别是全纯且非退化），并且选取

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mathrm{pr}_1, \\ \phi_2 &= \mathrm{pr}_2, \\ \text{i.e.} \qquad \phi_1(p, q) &= p, \\ \phi_2(p, q) &= q, \end{aligned} \tag{2.8}$$

那么 $\mathcal{R}$（p，q）–导数就变为 （p，q）–导数，且下文的整个理论都归结为 （p，q）–微积分[14, 26, 34]。从这个意义上说，（2.8）是典范 选择，而任何其他可容许的数对 （ϕ_1，ϕ_2）都会产生一种真正新颖的变形微积分。

例 2.5（非投影缩放函数）。文献中出现了以下数对：

（a） ϕ_1（x，y）$= x^{-1}$，ϕ_2（x，y）$= y$，即 $\phi_1 = p^{-1}$，$\phi_2 = q$：Chakrabarti-Jagannathan 变形 [14]；（b） ϕ_1（x，y）$= x$；(c) $\phi_1(x, y) = y^\nu x^{1-\mu}$, $\phi_2(x, y) = y^{\nu-1} x^{1-\mu}$, 即 $\phi_1 = p$, $\phi_2 = q^{-1}$：广义 q–Quesne 变形 [32, 33]

$$\phi_1 = \frac{q^\nu}{p^{\mu-1}}, \qquad \phi_2 = \frac{q^{\nu-1}}{p^\mu},$$

这正是 Hounkonnou 和 Ngompe Nkouankam 的（p，q，μ，ν，ϕ_1，ϕ_2)–广义振子代数中出现的一对变形函数 [22, 23]。

在每种情况下，ϕ_1 和 ϕ_2 在两个变量中都是真正的亚纯函数，并且满足（2.6） d.

2.3 Hounkonnou 和 Bukweli-Kyemba 的 $\mathcal{R}(p,\ q)$–导数

设 $0 < q < p \le 1$，并设$\mathcal{R}$： $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是亚纯函数，且对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有$\mathcal{R}(p^n,\ q^n) > 0$，$\mathcal{R}(1,\ 1) = 0$。我们记作$\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < R_0\}$，且 $\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}) = \mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})$（定义在 $\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 上的全纯函数）。

以下 [17, 11], 定义在 $\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})$ 上的基本线性算子：

定义 2.6 (膨胀与 (p,q)–差分算子 [11])。

$$\mathbf{P}:\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})\to\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}),\quad \mathbf{P}f(z):=f(pz), \tag{2.9}$$

$$\mathbf{Q}:\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})\to\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}),\quad \mathbf{Q}f(z):=f(qz), \tag{2.10}$$

$$\partial_{p,q}:\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})\to\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}),\quad \partial_{p,q}f(z):=\frac{f(pz)-f(qz)}{z(p-q)}. \tag{2.11}$$

其在单项式上的作用为：$\mathbf{P}z^n=p^nz^n$、$\mathbf{Q}z^n=q^nz^n$，$\partial_{p,q}z^n=[n]_{p,q}z^{n-1}$。

以下也记作 $P:=\mathbf{P}$、$Q:=\mathbf{Q}$ 以及 $\partial_{p,q}:=\partial_{p,q}$。

定义 2.7 （$\mathcal{R}(p,q)$–导数 [17]）。在假设 2.1 下，$\mathcal{R}(p,q)$–导数是算子

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}:=\partial_{p,q}\frac{p-q}{P-Q}\,\mathcal{R}(P,Q)=\frac{p-q}{p^P-q^Q}\,\mathcal{R}(p^P,q^Q)\,\partial_{p,q}. \tag{2.12}$$

定义 2.8 （$\mathcal{R}(p,q)$–在 $\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})$ 上的导数 [17, 11]）。在 $\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})$ 上，$\mathcal{R}(p,q)$–导数 是算子：

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}:=\partial_{p,q}\frac{p-q}{\mathbf{P}-\mathbf{Q}}\,\mathcal{R}(\mathbf{P},\mathbf{Q})=\frac{p-q}{p\mathbf{P}-q\mathbf{Q}}\,\mathcal{R}(p\mathbf{P},q\mathbf{Q})\,\partial_{p,q}. \tag{2.13}$$

其在单项式上的作用为：

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}z^n=\mathcal{R}(p^n,q^n)\,z^{n-1}=[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\,z^{n-1}. \tag{2.14}$$

命题 2.9 (单项式上的作用。 对于每个整数 $n\ge 0$，

$$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}z^n=\begin{cases}0, & n=0,\\ \mathcal{R}(p^n,q^n)\,z^{n-1}, & n\ge 1.\end{cases} \tag{2.15}$$

因此，函数 $nE^{\mathcal{R}(p,q)}(z):=\sum_{n\ge0}z^n/[n]!^{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ 下保持不变：$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}E^{\mathcal{R}(p,q)}(z)=E^{\mathcal{R}(p,q)}(z)$。

定义 2.10 ($\mathcal{R}(p,q)$–微分)。我们在由$\{1,z,z\partial_z,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\}$生成的代数 $\mathcal{A}^{\mathcal{R}(p,q)}$ 上定义 $d_{\mathcal{R}(p,q)}:=(dz)\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$。

引理 2.11 ($\mathcal{R}(p,q)$–导数的迭代)。对于所有整数 $N\ge0$ 和 $0\le s\le N$，

$$(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^s\,z^N=\frac{\mathcal{R}!(p^N,q^N)}{\mathcal{R}!(p^{N-s},q^{N-s})}\,z^{N-s},\qquad (\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^N\,z^N=[N]!_{\mathcal{R}(p,q)}, \tag{2.16}$$

并且$(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^sz^N=0$对于 $s>N$。特别地 $\left[(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^s\,r^N\right]_{r=0}=\delta_{s,N}\mathcal{R}!(p^N,q^N)$。我们还记作 $\mathcal{R}(p^N,q^N)!:=\mathcal{R}!(p^N,q^N)$。

证明。 根据（2.14）$\partial_{\mathcal{R}(p,q)}z^k=[k]_{\mathcal{R}(p,q)}z^{k-1}$ $k\ge1$ s $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}{}^sz^N=[N]_{\mathcal{R}(p,q)}[N-$。），对于。应用该关系 次可得（）$\cdots$，根据（。）中阶乘的定义，这就是（。）。对于，将其应用于常数 z^0，得到 0（命题 2.9）。在 $r=0$处求值只保留项 $s=N$。 $1]_{\mathcal{R}(p,q)}$ $[N-s+1]_{\mathcal{R}(p,q)}z^{N-s}$ (2.16) (2.3) $s>N$ $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ □

注 2.12。$\mathcal{R}(p,q)$–变形量子代数由$\{\mathbf{1},A,A^\dagger,N\}$生成，并且

$$\begin{aligned}[N,A]&=-A,\\ [N,A^\dagger]&=A^\dagger,\\ AA^\dagger&=\mathcal{R}(p^{N+1},q^{N+1}),\\ A^\dagger A&=\mathcal{R}(p^N,q^N),\end{aligned}$$

在$\mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$上具有如下实现：$A^\dagger:=z$，$A:=\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$，$N:=z\partial_z$，以及 $P=p^{z\partial_z}$、$Q=q^{z\partial_z}$ 和

$$\begin{aligned}z\,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}&=\mathcal{R}(P,Q),\\ \partial_{\mathcal{R}(p,q)}\,z&=\mathcal{R}(pP,qQ),\\ [z\partial_z,z]&=z,\\ [z\partial_z,\partial_{\mathcal{R}(p,q)}]&=-\partial_{\mathcal{R}(p,q)}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

这是下文所述构造所依托的代数骨架；参见 [17, 18, 21]。

2.4 $\mathcal{R}(p,q)$–指数函数

我们使用两种 Jackson 型$\mathcal{R}(p,\ q)$–指数函数

$$\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2^{\binom{n}{2}} z^n}{\mathcal{R}!(p^n,q^n)}, \tag{2.18}$$

$$\exp_{\mathcal{R}(p,q)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_1^{\binom{n}{2}} z^n}{\mathcal{R}!(p^n,q^n)}, \tag{2.19}$$

它们彼此的区别在于权重 $\phi(\binom{n}{2})_i$ 的交换 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$。在典范选择 (2.8) 下，它们化为 [34] 的两个 (p,q)–指数函数 $E_{p,q}$ 和 $e_{p,q}$。全文中，我们记 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(z) := \mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(z)$ 和 $\exp^{\mathcal{R}(p,q)}(z) :=\exp^{\mathcal{R}(p,q)}(z)$；$\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$ 的连续导数记为 $\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}$、$\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}$ 和 $\mathrm{Exp}^{(k)}$ R(p,q)；对于 $\alpha \in \mathbb{C}$，我们使用广义二项式符号

$$\binom{\alpha}{2} := \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \tag{2.20}$$

当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 时，它化为通常的符号。

2.5 $\mathcal{R}(p,q)$ Bargmann–Fock 空间

定义 2.13 （$\mathcal{A}_{\mathcal{R}(p,q)}$ [17] 的 Bargmann–Fock 实现）。量子代数 $\mathcal{A}^{\mathcal{R}(p,q)}$ 在$\mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})$ 上的实现如下：

$$A^\dagger \equiv z \quad \text{(multiplication by } z), \quad A \equiv \partial_{\mathcal{R}(p,q)}, \quad N \equiv z\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{(Euler operator)}, \tag{2.21}$$

满足 $AA^\dagger = [N+1]_{\mathcal{R}(p,q)}$, $A^\dagger A = [N]_{\mathcal{R}(p,q)}$, $[N,A] = -A$, $[N,A^\dagger] = A^\dagger$。标准正交 Fock 基为：

$$e_n(z) := \frac{\phi_2^{\binom{n}{2}/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} z^n = \frac{1}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} H_n(z;\mathcal{R}(p,q)), \tag{2.22}$$

其中，$H_n(z;\mathcal{R}(p,q)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$ 是 $\mathcal{R}(p,q)$–变形 Rogers–Szegő 多项式 [11]。

定义 2.14 ($\mathcal{R}(p,q)$ Bargmann–Fock 空间)。

$$\mathcal{F}_{\mathcal{R}(p,q)} := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}) : \|f\|^2_{\mathcal{R}(p,q)} := \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \overline{f(z)}\, f(z)\, d\mu_{\mathcal{R}(p,q)} < \infty \right\}, \tag{2.23}$$

赋予标量积 $\langle f,g\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} f(z)g(z)\ d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}$ 以及 $\mathcal{R}(p,q)$–测度 $d\mu_{\mathcal{R}(p,q)} = \omega_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)|z|\, d|z|\, d\theta$，满足矩条件：

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} |z|^{2n}\, d\mu_{\mathcal{R}(p,q)} = \frac{\phi_2^{\binom{n}{2}}[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{2\pi}, \quad n \geq 0. \tag{2.24}$$

命题 2.15 (正交归一性$\mathcal{F}_{\mathcal{R}(p,q)}$中)。基 (2.22) 满足：

$$\begin{aligned}
\langle e_m, e_n\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} &= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \overline{e_m(z)}\, e_n(z)\, d\mu_{\mathcal{R}(p,q)} \\
&= \frac{\phi_2^{(\binom{m}{2}+\binom{n}{2})/2}}{\sqrt{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} |z|^{m+n} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} |z|\, d|z|\, \omega_{\mathcal{R}(p,q)} \\
&= \frac{\phi_2^{\binom{n}{2}}[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\, \delta_{m,n} = \delta_{m,n}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

定义 2.16 ($\mathcal{R}(p,\ q)$–积分)。$f \in \mathcal{O}(\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)})$ 的 $\mathcal{R}(p,\ q)$–积分定义如下：

$$\int_0^{R_0} f(r)\, d_{\mathcal{R}(p,q)} r := R_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(R_0 p)^n - (R_0 q)^n}{p^n - q^n} \frac{1}{[n]_{\mathcal{R}(p,q)}} f(R_0 r_n), \tag{2.26}$$

其中， r_n 是$\mathcal{R}(p,\ q)$–节点，它推广了 Jackson 的 q–积分 [25]。在极坐标 $z = re^{i\theta}$中，完整测度为：

$$d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\bar{z}) = \omega_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\, r\, dr\, d\theta := \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2 \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(r^2)}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)}\right] dr\, d\theta, \tag{2.27}$$

根据构造，其满足（2.24）。

命题2.17（伴随 的 $\partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $F^{\mathcal{R}(p,q)}$ ）。 $A = \partial_{\mathcal{R}(p,q)}$ 在 $F^{\mathcal{R}(p,q)}$ 中的伴随为 $A^\dagger = z$ （乘以 z） ：

$$\langle \partial_{\mathcal{R}(p,q)} f, g\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \langle f, z\cdot g\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}(p,q)}. \tag{2.28}$$

证明。 利用分部积分、 [17, 11] 的变形Leibniz法则以及边界条件 f（z） $\to 0$ 当$|z| \to R_0$时：

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \overline{(\partial_{\mathcal{R}(p,q)} f)(z)}\, g(z)\, d\mu_{\mathcal{R}(p,q)} &= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \overline{f(z)}\, \partial^*_{\mathcal{R}(p,q)}[g(z) d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}] \\ &= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \overline{f(z)}\, (z\cdot g(z))\, d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

这里， $\partial^*_{\mathcal{R}(p,q)}$ 是相对于 $d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}$的形式伴随算子，而关键恒等式 $\partial^*_{\mathcal{R}(p,q)}(z^n d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}) = z^{n+1} d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}$ 由矩条件得出。 □

2.6 超代数 $B_0 \oplus \mathcal{B}_1$

以格拉斯曼变量为标记的超相干态理论可追溯至 Aragone 和 Zypman [3]。在变形代数的框架下，每个费米自由度都对应一个格拉斯曼变量。这里，我们引入与两个膨胀参数 $\phi_1(p,q)$ 和 $\phi_2(p,q)$ 相关联的两个格拉斯曼变量（ζ_1, ζ_2）所对应的对象。

定义 2.1 8 （超代数 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$）。 设 θ_1, θ_2 为满足以下条件的两个相互独立的格拉斯曼变量 ng

$$\theta_i^2 = 0, \qquad \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1 = 0, \qquad \theta_i z = z\theta_i, \qquad i = 1, 2. \tag{2.30}$$

该超代数为

$$\mathcal{B} := \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_2(\theta_1, \theta_2) = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1, \tag{2.31}$$

其中偶部分和奇部分分别为

$$\mathcal{B}_0 := \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \theta_1\theta_2\, \mathbb{C}[z, z^{-1}], \qquad \mathcal{B}_1 := \theta_1\, \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \theta_2\, \mathbb{C}[z, z^{-1}]. \tag{2.32}$$

超代数 $\mathcal{B}$的两个伸缩端同态 σ_1, σ_2 定义为 $\sigma_i(z^n) = \phi_i(p,q)^n z^n$、 $\sigma_i(\theta_j) = \phi_i(p,q)^{\delta_{ij}}\theta_j$ 以及 $\sigma_i(fg) = \sigma_i(f)\sigma_i(g)$， $i, j = 1, 2$。

2.7 分次超-Fock空间

定义 2.19 （分次超 Fock 空间）。超 Fock 空间为

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{R}(p,q)} := \bigoplus_{(k_1,k_2)\in\{0,1\}^2} \mathcal{H}^{(k_1,k_2)}_{\mathcal{R}(p,q)}, \tag{2.33}$$

每个扇区 $\mathrm{H}^{(k_1,k_2)}$ $\mathrm{R}(p,q)$ 都具有正交归一基 $\{|n, k_1, k_2\rangle :\ n \geq 0\}$，其中 $\langle m, j_1, j_2 | n, k_1, k_2\rangle = \delta_{mn}\delta_{j_1 k_1}\delta_{j_2 k_2}$。四个扇区分别是玻色子扇区 B $(k_1 = k_2 = 0)$、 ϕ_1-费米子扇区 F_1 $(k_1 = 1,\ k_2 = 0)$、 ϕ_2-费米子扇区 F_2 $(k_1 = 0,\ k_2 = 1)$ 和双费米子扇区 F_{12} $(k_1 = k_2 = 1)$。玻色子算子作用为 $A|n, k_1, k_2\rangle = \sqrt{[n]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n-1, k_1, k_2\rangle$ 和 $A^\dagger|n, k_1, k_2\rangle = \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n+1, k_1, k_2\rangle$。

2.8 超归一化函数与超相干态

The $R(p,q)$–超指数

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{\mathcal{R},p,q}(u, v_1, v_2) :=\ & \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(u) + \phi_1(p,q)\, v_1\, \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(u) \\ & + \phi_2(p,q)\, v_2\, \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(u) + \phi_1(p,q)\phi_2(p,q)\, v_1 v_2\, \mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(u)\end{aligned} \tag{2.34}$$

具有如下级数展开：

$$\mathfrak{E}_{\mathcal{R},p,q}(u, v_1, v_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n} \frac{\phi_2(p,q)^{n(n-1)/2}\, \phi_1(p,q)^{k_1}\, \phi_2(p,q)^{k_2}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\, u^n\, v_1^{k_1}\, v_2^{k_2}. \tag{2.35}$$

定义2.20 （超归一化函数）。 对于 $x=|z|^2$ 和 $s_i=|\zeta_i|^2$, $i=1,2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(x,s_1,s_2) &:= \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(x)+\phi_1(p,q)^2 s_1\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(x)+\phi_2(p,q)^2 s_2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(x)\\ &\quad+\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2 s_1 s_2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(x).\end{aligned} \tag{2.36}$$

D定义 2.21 ($\mathcal{R}(p,q)$–超相干态)。 对于 $(z,\zeta_1,\zeta_2)\in\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_2$, $\mathcal{R}(p,q)$–超相干态为

$$\begin{aligned}|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} &:= \big(\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)\big)^{-1/2}\\ &\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1,k_2\in\{0,1\}}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2}\,z^n\,(\phi_1(p,q)\zeta_1)^{k_1}(\phi_2(p,q)\zeta_2)^{k_2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,|n,k_1,k_2\rangle,\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2| &:= \big(\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)\big)^{-1/2}\\ &\quad\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j_1,j_2\in\{0,1\}}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{m}{2}/2}\,\bar z^m\,(\phi_1(p,q)\bar\zeta_1)^{j_1}(\phi_2(p,q)\bar\zeta_2)^{j_2}}{\sqrt{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,\langle m,j_1,j_2|.\end{aligned} \tag{2.38}$$

将相应的格拉斯曼变量置零，即可得到各扇区分量：玻色态$|z,\,0,\,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$ 对应于 $\zeta_1=\zeta_2=0$，其归一化为 $\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,\,0,\,0)=\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)$，而扇区 F_1, F_2, F_{12} 中的态将在第 3 节中给出。

命题 2.22 (基本性质)。 态 $|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$ 同时满足：

$$A\,|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = z\,|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}, \tag{2.39}$$

$$\partial_{\theta_1}\,|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_1(p,q)\,\zeta_1\,|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}, \tag{2.40}$$

$$\partial_{\theta_2}\,|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \phi_2(p,q)\,\zeta_2\,|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}. \tag{2.41}$$

恒等算符分解 为：

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_1^2}\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)\;|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\;{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|\;d\mu^{(12)}_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\zeta_1,\zeta_2)=\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\mathcal{R},p,q}}, \tag{2.42}$$

其中 $d\mu^{(12)}{}_{\mathcal{R}(p,q)}=d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\bar z)\,d\bar\zeta_1 d\zeta_1\,d\bar\zeta_2 d\zeta_2$, $\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}}|z|^{2n}\,d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}=\phi_2(p,q)^{n(n-1)/2}[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}/(2\pi)$。

超 Fock 空间是以下正交直和：

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{R},p,q}=\mathcal{H}^{B}_{\mathcal{R},p,q}\oplus\mathcal{H}^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}\oplus\mathcal{H}^{F_2}_{\mathcal{R},p,q}\oplus\mathcal{H}^{F_{12}}_{\mathcal{R},p,q}, \tag{2.43}$$

其中扇区基、权重和超相干态投影算符列于表 1。

表 1：分次超 Fock 空间的扇区结构 $\mathfrak{H}_{\mathcal{R},\,p,\,q}$ （2.43）：格拉斯曼指标 $(k_1,\;k_2)$、正交归一基、超归一化函数（2.36）中各扇区的权重，以及恒等算符分解（2.42）中所用的超相干态投影算符。

扇区	$(k_1,\;k_2)$	基底[a]	自然数集中的权重[s] [b]	CS 投影算符[c]
$\mathcal{H}^{B}_{\mathcal{R},\,p,\,q}$ (玻色)	$(0,\;0)$	$\lvert n,0,0\rangle$	$\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(x)$	$\lvert z,0,0\rangle_{\mathcal{R},\,p,\,q\mathcal{R},\,p,\,q}\langle z,0,0\rvert$
$\mathcal{H}^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}$ (ϕ_1-费米的)	$(1,\;0)$	$\lvert n,1,0\rangle$	$\phi_1(p,\;q)^2 s_1\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}\,p,q}(x)$	$\lvert z,\zeta_1,0\rangle_{\mathcal{R}\,p,q\mathcal{R}\,p,q}\langle z,\zeta_1,0\rvert$
$\mathcal{H}^{F_2}_{\mathcal{R},p,q}$ (ϕ_2-费米的)	$(0,\;1)$	$\lvert n,0,1\rangle$	$\phi_2(p,\;q)^2 s_2\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}\,p,q}(x)$	$\lvert z,0,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}\,p,q\mathcal{R}\,p,q}\langle z,0,\zeta_2\rvert$
$\mathcal{H}^{F_{12}}_{\mathcal{R}\,p,q}$ (双费米)	$(1,\;1)$	$\lvert n,1,1\rangle$	$\phi_1(p,\;q)^2\phi_2(p,\;q)^2 s_1 s_2\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}\,p,q}(x)$	$\lvert z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}\,p,q\mathcal{R}\,p,q}\langle z,\zeta_1,\zeta_2\rvert$

[a] $n\in\mathbb{N}$；定义 2.19 的正交归一基。[b] $x=|z|^2$, $s_i=|\zeta_i|^2$ $(i=1,2)$；$\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}$ 和 $\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}$ 分别是 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$的一阶和二阶导数；四个权重之和为 $\mathrm{N}^{\mathrm{s}}\mathrm{R}_{(p,q)}(x,s_1,s_2)$。[c]CS：超相干态（2.37）；不属于该扇区的 Grassmann 分量设为零。

2.9 超测度与单位分解

定义 2.23 (超测度)。 超测度为

$$d\mu^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\zeta_1,\zeta_2):=d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar z,z)\,d\bar\zeta_1\,d\zeta_1\,d\bar\zeta_2\,d\zeta_2, \tag{2.44}$$

其中 $d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}$ 是定义 $\mathcal{R}(p,q)$–中的测度，定义 2.14，Berezin 积分满足 $\int d\zeta_i\, d\zeta_i{\cdot}1 = 0$ 且 $\int d\zeta_i\, d\zeta_i{\cdot}\zeta_i\zeta_i = 1$。在极坐标 $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < L$ 中，其中 $L = R_0$ 是 $\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的半径，我们将 $d\lambda(r)$ 所对应的径向测度记为，因此矩条件可写为

$$2\pi \int_0^L r^{2n}\, d\lambda(r) = \phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}\, [n]!_{\mathcal{R}(p,q)}, \qquad n \ge 0. \tag{2.45}$$

命题2.24 （恒等算符分解）。

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_2} \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)\, |z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\ {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|\, d\mu^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\zeta_1,\zeta_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\mathcal{R}(p,q)}}. \tag{2.46}$$

变形由三元组 (R ϕ_1,ϕ_2) 确定。R(p,q)–超相干态 (2.37) 是算子 A 和 Grassmann导数的本征态，它们分解到超福克空间 (2.43) 的四个扇区 B、F_1、F_2 和 F_{12} 上，并且相对于超测度 (2.44) 满足恒等算符分解。这些性质连同 R(p,q)–导数、引理 2.11 以及矩条件 (2.45)，构成了以下各节所用的工具。

3 密度算符的矩阵表示

本节将在分次Fock基中建立密度算符的表示。我们首先定义密度算符及其在四个扇区上的限制。在每个扇区中，对角表示都通过相同的一系列操作得到：超相干态的二元乘积、Berezin 积分、角积分、应用 $(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}$ 以及取极限 $r \to 0$。随后将这四个结果写成统一紧致形式，并汇总为总密度算符的显式公式。

3.1 分次Fock基中的密度算符

定义3.1。 在分次Fock基 $\{|n,k_1,k_2\rangle\}$ 中，密度算符 ρ^{s} 具有如下表示

$$\rho^{\mathrm{s}} := \sum_{\substack{n,m=0\\ k_1,k_2,j_1,j_2\in\{0,1\}}}^{\infty} \rho^{\mathrm{s}}(n,k_1,k_2;\,m,j_1,j_2)\, |n,k_1,k_2\rangle\langle m,j_1,j_2|. \tag{3.1}$$

定义3.2。 我们定义对应于 $\mathfrak{H}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的四个子空间的四个扇区密度算符 ：

$$\rho^{B} := \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{B}(n,m)\, |n,0,0\rangle\langle m,0,0|, \tag{3.2}$$

$$\rho^{F_1} := \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{F_1}(n,m)\, |n,1,0\rangle\langle m,1,0|, \tag{3.3}$$

$$\rho^{F_2} := \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{F_2}(n,m)\, |n,0,1\rangle\langle m,0,1|, \tag{3.4}$$

$$\rho^{F_{12}} := \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{F_{12}}(n,m)\, |n,1,1\rangle\langle m,1,1|. \tag{3.5}$$

3.2 玻色子扇区 ρ^B 的对角表示

命题 3.3。 在*Fock*基 $\{|n,0,0\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ 中，从玻色子扇区的恒等算符分解出发，密度算符 ρ^B 具有如下表示：

$$\begin{aligned}\rho^{B} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \rho^{B}(n,m)\, &\sqrt{\frac{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}}\, \sqrt{\frac{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\phi_2(p,q)^{\binom{m}{2}}}}\, \frac{1}{\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}\\ &\times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\, \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\, |re^{i\theta},0,0\rangle\langle re^{i\theta},0,0|\right\}_{r=0}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

证明。
我们从玻色子扇区的相干态（$\zeta_1=\zeta_2=0$）开始：

$$|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, z^n\, |n,0,0\rangle, \tag{3.7}$$

$$
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0| \;=\; \big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{m}{2}/2}}{\sqrt{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \bar{z}^m \,\langle m,0,0|. \tag{3.8}
$$

二元乘积给出：

$$
\begin{aligned}
&|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0| \\
&= \big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{m}{2}/2}}{\sqrt{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, z^n \bar{z}^m \,|n,0,0\rangle\langle m,0,0|.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

我们令 $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$：

$$
\begin{aligned}
&|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \\
&= \big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\big)^{-1} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, r^{n+m}\, e^{i(n-m)\theta} \,|n,0,0\rangle\langle m,0,0|.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

乘以 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)$ 和 by $e^{il\theta}$：

$$
\begin{aligned}
&e^{il\theta}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, r^{n+m}\, e^{i(l+n-m)\theta} \,|n,0,0\rangle\langle m,0,0|.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

我们对 $\theta \in [0,2\pi]$ 积分。由于 $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(l+n-m)\theta} = 2\pi\,\delta(l+n-m)$，得到：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{il\theta}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, r^{n+m}\cdot 2\pi\,\delta(l+n-m) \,|n,0,0\rangle\langle m,0,0|.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

我们应用算子 $(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^s$。利用 (2.16)：$(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^s\, r^{n+m} = \mathcal{R}(p^{n+m}, \underline{q^{n+m}})!\;\mathcal{R}(p^{n+m-s}, \underline{q^{n+m-s}})!\, r^{n+m-s}$，得到：

$$
\begin{aligned}
&(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^s \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{il\theta}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \right\} \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \frac{\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}{\mathcal{R}(p^{n+m-s},q^{n+m-s})!}\, r^{n+m-s}\cdot 2\pi\,\delta(l+n-m) \,|n,0,0\rangle\langle m,0,0|.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

对于 $r \to 0$：条件 $n+m-s=0$ 迫使 $s=n+m$，而 $\delta(l+n-m)$ 迫使 $l=m-n$。因此：

$$
\begin{aligned}
&\big(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\big)^{n+m} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \right\}_{r=0} \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})! \,|n,0,0\rangle\langle m,0,0|.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

我们将该关系反解，以表示 $|n,\,0,\,0\rangle\langle m,\,0,\,0|$：

$$
\begin{aligned}
|n,0,0\rangle\langle m,0,0| \;=\; &\frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \\
&\times \big(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\big)^{n+m} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \right\}_{r=0}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

代入定义（3.2）后，我们确定系数：

$$
\begin{aligned}
\rho^B(n,m) \;=\; &\frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \\
&\times \big(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\big)^{n+m} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \right\}_{r=0},
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

从而得到表示式（3.6）。 □

我们引入玻色参数函数：

$$\varrho^{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(n) := \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}, \tag{3.17}$$

由此可将其改写为：

命题 3.4。

$$\begin{aligned}\rho^{B} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{B}(n,m)\, \frac{\sqrt{\varrho^{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(n)^{-1}\, \varrho^{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(m)^{-1}}}{\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \\ \times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\, \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\, |re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\,\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0|\right\}_{r=0}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.3 ϕ_1-费米的扇区 ρ^{F_1}的对角表示

命题 3.5。在福克基 $\{|n,1,0\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ 中，密度算符 ρ^{F_1} 从 ϕ_1-费米的扇区中的恒等算符分解出发，具有如下表示：

$$\begin{aligned}\rho^{F_1} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{F_1}(n,m)\, \frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \\ \times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\int d\bar{\zeta_1}\, d\zeta_1\, \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\right. \\ \left.\times\, |re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\,\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0|\right\}_{r=0}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

证明。证明见附录A.1。 □

3.4 ϕ_2-费米的扇区 ρ^{F_2}的对角表示

命题 3.6。根据对称性 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$、$\zeta_1 \leftrightarrow \zeta_2$，$\phi_2$-费米的扇区表示为：

$$\begin{aligned}\rho^{F_2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{F_2}(n,m)\, \frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_2(p,q)^2\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \\ \times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\int d\bar{\zeta_2}\, d\zeta_2\, \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\right. \\ \left.\times\, |re^{i\theta},0,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\,\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,\zeta_2|\right\}_{r=0},\end{aligned} \tag{3.20}$$

with

$$\begin{aligned}\rho^{F_2}(n,m) = \frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_2(p,q)^2\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \\ \times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\int d\bar{\zeta_2}d\zeta_2\,\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\right. \\ \left.\times\, |re^{i\theta},0,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\,\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,\zeta_2|\right\}_{r=0}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

证明。证明与命题 3.5 的证明完全类似，只需交换 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$、$\zeta_1 \leftrightarrow \zeta_2$、$k_1 \leftrightarrow k_2$，以及$\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)} \to \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}$（$\phi_2$ （2.36）中的该项）。 □

3.5 双费米扇区 $\rho^{F_{12}}$的对角表示

命题 3.7。在福克基 $\{|n,1,1\rangle\}_{n=0}^{\infty}$中，密度算符 $\rho^{F_{12}}$ 的表示为：

$$\begin{aligned}\rho^{F_{12}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{F_{12}}(n,m)\, \frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \\ \times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\int d\bar{\zeta_1}d\zeta_1\, d\bar{\zeta_2}d\zeta_2\, \mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\right.\end{aligned}$$

$$\times\, |re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2|\Big\}_{r=0}\,, \tag{3.22}$$

with

$$\begin{aligned}\rho^{F_{12}}(n,m) \;=\; & \frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{m}{2}))/2}\,\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}\\ & \times\big(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\big)^{n+m}\Big\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{i(m-n)\theta}\int d\bar{\zeta}_1 d\zeta_1\,d\bar{\zeta}_2 d\zeta_2\\ & \quad\times\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\\ & \quad\times|re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2|\Big\}_{r=0}\,.\end{aligned} \tag{3.23}$$

证明。 证明见附录 A.2。 □

3.6 统一紧致形式与参数函数

我们引入扇区参数函数:

$$\varrho^{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(n) \;:=\; \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}, \tag{3.24}$$

$$\varrho^{F_1}_{\mathcal{R}(p,q)}(n) \;:=\; \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}\,\phi_1(p,q)^2}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}, \tag{3.25}$$

$$\varrho^{F_2}_{\mathcal{R}(p,q)}(n) \;:=\; \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}\,\phi_2(p,q)^2}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}, \tag{3.26}$$

$$\varrho^{F_{12}}_{\mathcal{R}(p,q)}(n) \;:=\; \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}\,\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}. \tag{3.27}$$

命题 3.8 (统一紧致形式)。四个扇区密度算符可以统一写成以下形式，其中$\varepsilon\in\{B,F_1,F_2,F_{12}\}$:

$$\begin{aligned}\rho^{\varepsilon} \;=\; & \sum_{n,m=0}^{\infty}\rho^{\varepsilon}(n,m)\,\frac{\sqrt{(\varrho^{\varepsilon}_{\mathcal{R}(p,q)}(n))^{-1}\,(\varrho^{\varepsilon}_{\mathcal{R}(p,q)}(m))^{-1}}}{\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}\\ & \times\big(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\big)^{n+m}\Big\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{i(m-n)\theta}\int_{\Lambda^{\varepsilon}}d\mu^{\varepsilon}(\zeta)\;\mathcal{G}^{\varepsilon}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\\ & \quad\times|re^{i\theta},\zeta^{\varepsilon}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta^{\varepsilon}|\Big\}_{r=0}\,,\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中我们设:

$$\mathcal{G}^{B}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \;=\; \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2),\quad \Lambda^B=\emptyset,\quad d\mu^B=1, \tag{3.29}$$

$$\mathcal{G}^{F_1}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \;=\; \phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2),\quad d\mu^{F_1}=d\bar{\zeta}_1 d\zeta_1, \tag{3.30}$$

$$\mathcal{G}^{F_2}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \;=\; \phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2),\quad d\mu^{F_2}=d\bar{\zeta}_2 d\zeta_2, \tag{3.31}$$

$$\mathcal{G}^{F_{12}}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \;=\; \phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2),\quad d\mu^{F_{12}}=d\bar{\zeta}_1 d\zeta_1\,d\bar{\zeta}_2 d\zeta_2. \tag{3.32}$$

注 3.9。统一形式（3.28）表明，可以通过以下方式从一个扇区转到另一个扇区:

(i) 替换生成函数 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}\to\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}\to\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}$ （关于 r^2 的连续导数）；

(ii) 逐步加入格拉斯曼因子 $\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2$ (对于 F_1)， $\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2$ (对于 F_2)， $\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2$(对于 F_{12})；

(iii) 参数函数 ϱ^{ε} 吸收相应的膨胀参数。

四种表示（3.28）可合并为一个统一表述，其中已完成 Berezin 积分。对于每个扇区 σ，令 d_σ 为费米子激发的数量（$d_B=0$、 $d_{F_1}=d_{F_2}=1$、 $d_{F_{12}}=2$）， c_σ 为相应的膨胀因子（$c_B=1$、 $c_{F_1}=\phi_1(p,q)^2$、 $c_{F_2}=\phi_2(p,q)^2$、 $c_{F_{12}}=\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2$），则 $\varrho^{\sigma}_{\mathcal{R}(p,q)}=c_\sigma\,\varrho^{B}_{\mathcal{R}(p,q)}$。

定理 *3.10*（统一扇区表示）。假设密度算符在分解 *(2.43)* 下为分块对角形式， $\rho^s=\rho^B\oplus\rho^{F_1}\oplus\rho^{F_2}\oplus\rho^{F_{12}}$，其各块由 *(3.2)–(3.5)* 给出。对于 $\sigma\in\{B,F_1,F_2,F_{12}\}$，令 $|n,\sigma\rangle$ 表示向量 $|n,k_1,k_2\rangle$，其中 (k_1,k_2) 是扇区 σ 的指标，并令

$$W^{\sigma}(n,m) \;:=\; \frac{\sqrt{(\varrho^{\sigma}_{\mathcal{R}(p,q)}(n))^{-1}\,(\varrho^{\sigma}_{\mathcal{R}(p,q)}(m))^{-1}}}{\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{G}^{\sigma}(r^2) := \int_{\Lambda^{\sigma}} d\mu^{\sigma}(\zeta)\, \mathcal{G}^{\sigma}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \;=\; c_{\sigma}\, \mathrm{Exp}^{(d_{\sigma})}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2), \tag{3.34}$$

$$|\Psi^{\sigma}_{r}\rangle := \big(\mathrm{Exp}^{(d_{\sigma})}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\big)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2}\,(re^{i\theta})^n}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, |n,\sigma\rangle, \tag{3.35}$$

也就是说，根据 *(3.29)–(3.32)*，$G^{B}=Exp^{\mathcal{R}(p,q)}$、$G^{F_1}=\phi_1(p,q)^2\,Exp'_{\mathcal{R},p,q}$、$G^{F_2}=\phi_2(p,q)^2\,Exp'_{\mathcal{R},p,q}$ 以及 $G^{F_{12}}=\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,Exp''_{\mathcal{R},p,q}$（默认 $|\Psi^{\sigma}_{r}\rangle$ 对 θ 的依赖关系）。于是，$\rho^{s}=\sum_{\sigma}\rho^{\sigma}$ 及每个块都可以按扇区写成统一形式：

$$\rho^{\sigma} \;=\; \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{\sigma}(n,m)\cdot W^{\sigma}(n,m)\cdot (\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}\Big[\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\, \mathcal{G}^{\sigma}(r^2)\, |\Psi^{\sigma}_{r}\rangle\langle\Psi^{\sigma}_{r}|\Big]_{r=0}. \tag{3.36}$$

证明。 在每个扇区中，权重 $\mathcal{G}^{\sigma}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 补偿该扇区态的二元乘积的归一化；该乘积取为扇区权重，如 (A.4) 中所示，而该乘积的格拉斯曼因子的 Berezin 积分 ($\phi_1(p,\ q)^2|\zeta_1|^2$，如 (A.3) 中所示，$\phi_1(p,\ q)^2\phi_2(p,\ q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2$，如 (A.11) 中所示，等于 $c_{\sigma^{\circ}}$ 因此

$$\begin{aligned}
&\int_{\Lambda^{\sigma}} d\mu^{\sigma}(\zeta)\, \mathcal{G}^{\sigma}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\, |re^{i\theta},\zeta^{\sigma}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\, {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta^{\sigma}| \\
&= c_{\sigma}\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, r^{n+m}\, e^{i(n-m)\theta}\, |n,\sigma\rangle\langle m,\sigma| \;=\; \mathcal{G}^{\sigma}(r^2)\, |\Psi^{\sigma}_{r}\rangle\langle\Psi^{\sigma}_{r}|,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

最后一个等式由 (3.34) 和 (3.35) 得出。由于 (3.28) 的前置因子为 $W^{\sigma}(n,\ m)$，我们得到 (3.36)。块对角性给出 $\rho^{s}=\sum_{\sigma}\rho^{\sigma}$。 □

注 3.11。在计算 (A.4) 中，来自 (A.3) 中因子 $\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2$ 的 Berezin 积分的因子 $\phi_1(p,q)^2$ 在最后一个等式中消失了，而关系式 (A.5)–(A.8) 中并未包含它；然而，它确实出现在 (A.9) 中，并通过 $\varrho^{F_1}\mathrm{R}(p,q)$ 出现在陈述 (3.19) 中。(A.12) 和 (3.22) 中的因子 $\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2$ 也同样如此。定理 3.10 和第 3.7 节的公式保留了这一因子，这与命题 3.5、3.6 和 3.7 的陈述一致。

注 3.12。由（3.33）和（3.34），（3.36）中的标量权重之积等于

$$W^{\sigma}(n,m)\,\mathcal{G}^{\sigma}(r^2) \;=\; W^{B}(n,m)\,\mathrm{Exp}^{(d_{\sigma})}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2), \qquad W^{B}(n,m)=\frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}\,: \tag{3.38}$$

因子 c_{σ} 在此处相消，只有导数 $\mathrm{Exp}^{(d_{\sigma})}$ 在这一层次上区分各个扇区。这使得注3.9 中的第（iii）项更加明确。

3.7 总密度算子

现在我们将四个块汇集为作用于 $\mathfrak{H}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 上的一个算子。设 Π_{σ} 为（2.43）中扇区 σ 上的正交投影算子，使得 $\Pi_B+\Pi_{F_1}+\Pi_{F_2}+\Pi_{F_{12}}=\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\mathcal{R},\ p,\ q}}$ 和 $\Pi_{\sigma}\Pi_{\sigma'}=\delta_{\sigma\sigma'}\Pi_{\sigma}$，并对 $w\in\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}$引入扇区生成向量

$$|\Phi^{\sigma}(w)\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{k}{2}/2}\, w^k}{\sqrt{[k]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, |k,\sigma\rangle, \qquad \big\||\Phi^{\sigma}(w)\rangle\big\|^2 = \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|w|^2), \tag{3.39}$$

它们满足 $|\Phi^{\sigma}\ (re^{i\theta})\ \rangle = \big(\mathrm{Exp}^{(d_{\sigma})}\ _{\mathcal{R}\ (p,\ q)}\ (r^2)\ \big)^{1/2}|\Psi^{\sigma}_{r}\rangle$。命题 3.3 的计算建立在以下恒等式之上，该恒等式在每个扇区中均成立。

引理 3.13 (初等算符的表示)。对于任意扇区 σ 以及所有整数 $n,\ m\geq 0$,

$$|n,\sigma\rangle\langle m,\sigma| \;=\; W^{B}(n,m)\,(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}\Big[\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta}\, |\Phi^{\sigma}(re^{i\theta})\rangle\langle\Phi^{\sigma}(re^{i\theta})|\Big]_{r=0}. \tag{3.40}$$

证明。由 (3.39)，$|\Phi^{\sigma}(re^{i\theta})\Phi^{\sigma}(re^{i\theta})| = \sum_{k,j}\phi_2(p,q)^{\binom{k}{2}+\binom{j}{2})/2}([k]!_{\mathcal{R}(p,q)}[j]!_{\mathcal{R}(p,q)})^{-1/2}r^{k+j}e^{i(k-j)\theta}|k,\sigma j,\sigma|$。角积分强制得到 $j=k+m-n$，并留下 r^{2k+m-n}。由引理 2.11，应用 $(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}$，然后在 $r=0$ 处求值，只保留项 $2k+m-n=n+m$，即 $k=n$ 和 $j=m$，其系数为 $\mathrm{R}(p^{n+m},q^{n+m})!\ \phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}([n]!_{\mathcal{R}(p,q)}[m]!^{\mathcal{R}(p,q)})^{-1/2}=W^{B}(n,m)^{-1}$。 □

命题 *3.14*（总密度算符）。假设 ρ^{s} 是分块对角的，即当且仅当 $(k_1,k_2)\neq(j_1,j_2)$ 时，$\rho^{s}(n,k_1,k_2;\ m,j_1,j_2)=0$，并将 $(k_1,k_2)=(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 和 $(1,1)$ 时的系数 $\rho^{s}(n,k_1,k_2;\ m,k_1,k_2)$ 分别记为 $\rho^{B}(n,m)$、$\rho^{F_1}(n,m)$、$\rho^{F_2}(n,m)$、$\rho^{F_{12}}(n,m)$。则：

(i) 在分次*Fock*基中， ρ^s 是四个块的显式求和：

$$\rho^s \;=\; \sum_{n,m=0}^{\infty}\Big[\rho^B(n,m)\,|n,0,0\rangle\langle m,0,0| + \rho^{F_1}(n,m)\,|n,1,0\rangle\langle m,1,0| \\ + \rho^{F_2}(n,m)\,|n,0,1\rangle\langle m,0,1| + \rho^{F_{12}}(n,m)\,|n,1,1\rangle\langle m,1,1|\Big] \;=\; \begin{pmatrix} \rho^B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{F_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{F_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{F_{12}} \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

矩阵在分解 $H^B_{\mathcal{R},p,q}\oplus H^{F_1}{}_{\mathcal{R}\;p,q}\oplus H^{F_2}{}_{\mathcal{R}\;p,q}\oplus H^{F_{12}}{}_{\mathcal{R}\;p,q}$; 中表示为

(ii) 其显式　对角表示，表示 (3.6)、(3.19)、(3.20) 和 (3.22)之和为

$$\rho^s \;=\; \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{m}{2}}\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}\,(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}\Bigg\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{i(m-n)\theta} \\ \times\Bigg[\rho^B(n,m)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\;\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,0| \\ + \frac{\rho^{F_1}(n,m)}{\phi_1(p,q)^2}\int d\bar\zeta_1\,d\zeta_1\;\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\;\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0| \\ + \frac{\rho^{F_2}(n,m)}{\phi_2(p,q)^2}\int d\bar\zeta_2\,d\zeta_2\;\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},0,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\;\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},0,\zeta_2| \\ + \frac{\rho^{F_{12}}(n,m)}{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2}\int d\bar\zeta_1\,d\zeta_1\,d\bar\zeta_2\,d\zeta_2\;\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \\ \times|re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)\;\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2|\Bigg]\Bigg\}_{r=0}; \tag{3.42}$$

(iii) 经 *Berezin* 积分后，它化为简化形式

$$\rho^s \;=\; \sum_{n,m=0}^{\infty}W^B(n,m)\,(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}\Big[\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{i(m-n)\theta}\,\mathfrak{D}_{n,m}(re^{i\theta})\Big]_{r=0}, \\ \mathfrak{D}_{n,m}(w) \;:=\; \rho^B(n,m)\,|\Phi^B(w)\rangle\langle\Phi^B(w)| + \rho^{F_1}(n,m)\,|\Phi^{F_1}(w)\rangle\langle\Phi^{F_1}(w)| \\ + \rho^{F_2}(n,m)\,|\Phi^{F_2}(w)\rangle\langle\Phi^{F_2}(w)| + \rho^{F_{12}}(n,m)\,|\Phi^{F_{12}}(w)\rangle\langle\Phi^{F_{12}}(w)|; \tag{3.43}$$

(iv) 其矩阵元及其迹为

$$\langle n,\sigma|\rho^s|m,\sigma'\rangle \;=\; \delta_{\sigma\sigma'}\,\rho^\sigma(n,m), \\ \mathrm{Tr}(\rho^s) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\rho^B(n,n)+\rho^{F_1}(n,n)+\rho^{F_2}(n,n)+\rho^{F_{12}}(n,n)\Big]; \tag{3.44}$$

(v) 此外，若 ρ^s 是密度算符（厄米、正且迹为 1），则每个块 ρ^σ 都是厄米且正的，$\rho^\sigma(n,m)=\rho^\sigma(m,n)$，权重 $p_\sigma := \mathrm{Tr}(\rho^\sigma)=\sum_n\rho^\sigma(n,n)$ 满足 $p_\sigma\ge 0$ 和 $p_B+p_{F_1}+p_{F_2}+p_{F_{12}}=1$，并且

$$\rho^s = p_B\,\hat\rho^{\,B}+p_{F_1}\,\hat\rho^{\,F_1}+p_{F_2}\,\hat\rho^{\,F_2}+p_{F_{12}}\,\hat\rho^{\,F_{12}},\qquad \hat\rho^{\,\sigma}:=\frac{\rho^\sigma}{p_\sigma}, \tag{3.45}$$

其中，每个 $\hat{}\rho^\sigma$ 都是扇区 σ上的密度算符，权重为零的项省略。

证明. (i) 块对角性意味着 $\rho^s=\sum_\sigma\Pi_\sigma\rho^s\Pi_\sigma$，而 $\Pi_\sigma\rho^s\Pi_\sigma$ 是相应的块 (3.2)–(3.5)，由此得到 (3.41)。(iii) 我们将引理 3.13 应用于 (3.41) 中的每个算符 $|n,\sigma m,\sigma|$；由于导数 $(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{n+m}$、角积分以及在 $r=0$ 处的取值都是线性的，四项合并为 $\mathfrak{D}_{n,m}$。(ii) 由 (3.37)，$|\Phi^\sigma(re^{i\theta})\Phi^\sigma(re^{i\theta})| = c_\sigma^{-1}\int_{\Lambda^\sigma}d\mu^\sigma(\zeta)\,\mathrm{G}^\sigma_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},\zeta^\sigma{}_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathrm{R}(p,q)re^{i\theta},\zeta^\sigma|$；将其代入 (3.43) 即得 (3.42)。该表达式与 (3.6)、(3.19)、(3.20) 和 (3.22) 之和一致，因为 $\sqrt{(\varrho^\sigma_{\mathcal{R}(p,q)}(n))^{-1}(\varrho^\sigma_{\mathcal{R}(p,q)}(m))^{-1}}=c_\sigma^{-1}\sqrt{(\varrho^B_{\mathcal{R}(p,q)}(n))^{-1}(\varrho^B_{\mathcal{R}(p,q)}(m))^{-1}}$，从而可以提出公因子 $W^B(n,m)$。(iv) 由基 $\{|n,k_1,k_2\}$ 的标准正交性得出（定义 2.19）。(v) 对每个 $|\psi,\ \psi|\rho^\sigma|\psi=\Pi_\sigma\psi|\rho^s|\Pi_\sigma\psi\ge 0$，且 ρ^σ 是厄米的，因为 ρ^s 是；因此 $p_\sigma\ge 0$，并且由 (3.44)，$\sum_\sigma p_\sigma=\mathrm{Tr}(\rho^s)=1$。迹为零的正算符必为零，因此权重为 $p_\sigma=0$ 的扇区没有贡献，而 $\hat{}\rho^\sigma$ 为正，且迹为 1。

□

(3.42) 中出现的四个权重 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$，$\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}$，$\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}$ 和$\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}$，正是超归一化函数 (2.36) 的四项：在总算符中，$\mathrm{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}$ 的每一项都对相应扇区的相干投影算符赋予权重。由引理 3.13，公式 (3.42) 和 (3.43) 逐项还原出 (3.41)。在福克基中为对角形式的密度算符是一个特例，例如在该基中为对角形式的哈密顿量的热平衡态。

推论 3.15 (对角密度算符)。 此外，若对于每个扇区都有 $\rho^\sigma(n,m) = \delta_{nm}\,P_\sigma(n)$，则

$$\begin{aligned}\rho^s &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}\,\mathcal{R}(p^{2n},q^{2n})!}\,(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{2n}\left[\sum_\sigma P_\sigma(n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{k}{2}}\,r^{2k}}{[k]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,|k,\sigma\rangle\langle k,\sigma|\right]_{r=0}\\ &= \sum_\sigma\sum_{n=0}^{\infty} P_\sigma(n)\,|n,\sigma\rangle\langle n,\sigma|,\end{aligned} \tag{3.46}$$

各扇区的权重为 $p_\sigma = \sum_n P_\sigma(n)$。

证明。 对于 $m=n$，对 $|\Phi^\sigma(re^{i\theta})\rangle\langle\Phi^\sigma(re^{i\theta})|$ 进行角积分后，只保留对角项 $k=j$，这给出了（3.46）中的内层求和；第二个等式由引理 3.13得出，而 p_σ 的表达式来自（3.44）。 □

因此，四个扇区密度算符具有相同结构的对角表示，紧凑形式（3.28）和统一表示（3.36）仅以各扇区数据表达了这一结构。在分块对角假设下，它们的和给出总密度算符的精确公式（3.42），可将其视为各扇区的混合态，其权重为 $p_\sigma = \mathrm{Tr}(\rho^\sigma)$。下一节将用超相干态基表示这些对象。

4 再生核、矩阵元与积分表述

本节在超相干态的过完备基下表示密度算符。我们引入密度函数，并给出其显式表达式、迹公式和再生性质；显式计算超再生核后，将其分解为扇区核，并证明这些扇区核的厄米性、正性、乘法性质，以及对角值的级数展开。扇区矩阵元和总密度算符的积分表述构成本节的收尾。关于扇区核性质、正性、矩阵乘法和对角级数的证明见附录 B。

4.1 一般矩阵元

定义 4.1 （ρ^s 在相干态基中的表示）。 令 $\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_1^2$ 为超相干态的标记域。相干态基中的密度函数为：

$$\rho(z',\zeta_1',\zeta_2';\,z,\zeta_1,\zeta_2) := {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|(z',\zeta_1',\zeta_2')\;\rho^s\;|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\zeta_1,\zeta_2). \tag{4.1}$$

命题 4.2 （密度函数的显式表达式）。 密度函数（4.1）的显式形式为：

$$\begin{aligned}\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) = {}& \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\zeta_1'|^2,|\zeta_2'|^2)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)}}\\ &\times\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{k_1,k_2=0}^{1}\rho(n,k_1,k_2;\,m,k_1,k_2)\\ &\times\frac{\phi_2(p,q)^{(n(n-1)+m(m-1))/4}\,(\phi_1(p,q)^2|\zeta_1'||\zeta_1|)^{k_1}(\phi_2(p,q)^2|\zeta_2'||\zeta_2|)^{k_2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\;\bar{z}'^n z^m,\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中假设 ρ^s 在扇区基下为对角形式。

证明。
代入表达式（2.37）和（2.38）以及密度算符（3.1）：

$$\begin{aligned}\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) = {}& \left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R},p,q}{}'}}\sum_{m,j_1,j_2}\frac{\phi_2(p,q)^{m(m-1)/4}\,\bar{z}'^m(\phi_1(p,q)\bar{\zeta}_1')^{j_1}(\phi_2(p,q)\bar{\zeta}_2')^{j_2}}{\sqrt{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\langle m,j_1,j_2|\right]\\ &\times\left[\sum_{n',k_1',k_2',m',j_1',j_2'}\rho(n',k_1',k_2';\,m',j_1',j_2')|n',k_1',k_2'\rangle\langle m',j_1',j_2'|\right]\end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}} \sum_{n,k_1,k_2} \frac{\phi_2(p,q)^{n(n-1)/4}\, z^n (\phi_1(p,q)\zeta_1)^{k_1} (\phi_2(p,q)\zeta_2)^{k_2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} |n,k_1,k_2\rangle \right]. \tag{4.3}$$

利用$\langle m,\ j_1,\ j_2||n',\ k_1',\ k_2'\rangle = \delta_{mn'}\delta_{j_1k_1'}\delta_{j_2k_2'}$和$\langle m',\ j_1',\ j_2'||n,\ k_1,\ k_2\rangle = \delta_{m'n}\delta_{j_1'k_1}\delta_{j_2'k_2}$:

$$\begin{aligned}\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\, z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R},p,q}{}'\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k_1,k_2=0}^{1} \rho(n,k_1,k_2;\, m,k_1,k_2) \\ & \times \frac{\phi_2(p,q)^{(n(n-1)+m(m-1))/4}\, (\phi_1(p,q)\bar{\zeta}_1')^{k_1} (\phi_2(p,q)\bar{\zeta}_2')^{k_2}\, (\phi_1(p,q)\zeta_1)^{k_1} (\phi_2(p,q)\zeta_2)^{k_2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \bar{z}'^n\, z^m, \end{aligned} \tag{4.4}$$

这给出（4.2）。 □

注 4.3。 密度函数 $\rho(z',\ \boldsymbol{\zeta}';\ z,\ \boldsymbol{\zeta})$ 推广了经典振子的密度矩阵的 Bargmann表示 [28]。在纯玻色情形（$\zeta_i = \zeta_i' = 0$）下，它化为:

$$\rho(z';\, z)\big|_{bos} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(n(n-1)+m(m-1))/4}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \rho^B(n,m)\, \bar{z}'^n\, z^m. \tag{4.5}$$

命题 4.4 （ ρ^s的迹）。 如果 ρ^s 的迹为 *1*，则:

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_1^2} \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)\ \rho(z,\boldsymbol{\zeta};\, z,\boldsymbol{\zeta})\ d\mu^{(12)}_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\zeta_1,\zeta_2) \;=\; 1. \tag{4.6}$$

证明。
通过恒等算符分解（2.42）计算迹:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho^s) \;=\; & \mathrm{Tr}\big[\rho^s\ \mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\mathcal{R},p,q}}\big] = \mathrm{Tr}\left[\rho^s \int \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\ |z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\ {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|\ d\mu^{(12)}\right] \\ = & \int \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\ \langle|\ {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|\rho^s|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}|\rangle\ d\mu^{(12)} \\ = & \int \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\ \rho(z,\boldsymbol{\zeta};\, z,\boldsymbol{\zeta})\ d\mu^{(12)} \;=\; 1. \qquad \square \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2 归一化扇区核

命题 4.5 （ ρ的再生性质）。密度函数 $\rho(z',\ \boldsymbol{\zeta}';\ z,\ \boldsymbol{\zeta})$ 满足再生性质:

$$\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\, z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_1^2} K_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};\, z,\boldsymbol{\zeta})\ \rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\, \xi,\boldsymbol{\varrho})\ d^2\xi\ d^2\boldsymbol{\varrho}, \tag{4.8}$$

其中，超再生核为:

$$K_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};\, z,\boldsymbol{\zeta}) \;:=\; \frac{{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \xi,\varrho_1,\varrho_2|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi\ \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2,|\varrho_1|^2,|\varrho_2|^2)}. \tag{4.9}$$

证明。
根据恒等算符分解（2.42）:

$$\begin{aligned}\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\, z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; & {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|(z',\boldsymbol{\zeta}')\ \rho^s\ |z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\boldsymbol{\zeta}) \\ = \; & {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|(z',\boldsymbol{\zeta}')\ \rho^s \\ & \times \left[\int \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\boldsymbol{\varrho})\ |z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\boldsymbol{\varrho})\ {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2|(\xi,\boldsymbol{\varrho})\ d\mu^{(12)}_{\mathcal{R}(p,q)}\right]\ |z,\zeta_1,\zeta_2\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\boldsymbol{\zeta}) \\ = \; & \int d\mu^{(12)}_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\boldsymbol{\varrho})\ \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2,|\boldsymbol{\varrho}|^2)\ \rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\, \xi,\boldsymbol{\varrho})\ {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \xi,\boldsymbol{\varrho}|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

现在， $d\mu^{(12)}{}_{\mathrm{R}(p,q)} = d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}\, d\bar{\varrho}_1 d\varrho_1\, d\bar{\varrho}_2 d\varrho_2$， 且 $d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(z,\bar{z}) = (1/\pi) d^2z{\cdot}\pi(1/\mathrm{N\ sR}(p,q))$（确切地说：对于 Berg man类的测度， $d\mu_{\mathcal{R}(p,q)} = d^2\xi/(\pi \mathrm{N\ sR}(p,q))$）。我们识别出核 (4.9)，并得出 (4.8)。□

定理 4.6 ($R(p,q)$ 超再生核。 超再生核为：

$$K_{\mathcal{R},p,q}(z',\zeta_1',\zeta_2';\,z,\zeta_1,\zeta_2) \;=\; \frac{\mathfrak{E}_{\mathcal{R},p,q}\big(\bar z' z \;+\; \phi_1(p,q)^2\bar\zeta_1'\zeta_1 \;+\; \phi_2(p,q)^2\bar\zeta_2'\zeta_2 \;+\; \phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\bar\zeta_1'\bar\zeta_2'\zeta_1\zeta_2\big)}{\pi\,\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\zeta_1'|^2,|\zeta_2'|^2)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)}}, \tag{4.11}$$

可改写为紧凑形式：

$$K_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; \frac{1}{\pi}\cdot\frac{{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\boldsymbol{\zeta}'|^2)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)}}\cdot\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\boldsymbol{\zeta}'|^2)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)}$$
$$\cdot\frac{1}{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\boldsymbol{\zeta}'|^2)}. \tag{4.12}$$

证明。
我们利用级数 ${}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle^{\mathcal{R}(p,q)}$ （2.37）和（2.38）计算内积：

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\boldsymbol{\zeta}'|^2)\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)}}\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{k_1,k_2=0}^{1}\frac{\phi_2(p,q)^{(n(n-1)+m(m-1))/4}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\\
&\times\,\bar z'^n z^m\,(\phi_1(p,q)\bar\zeta_1')^{k_1}(\phi_2(p,q)\bar\zeta_2')^{k_2}\,(\phi_1(p,q)\zeta_1)^{k_1}(\phi_2(p,q)\zeta_2)^{k_2}\,\langle n,k_1,k_2||m,k_1,k_2\rangle\\
&=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R},p,q}{}'}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1,k_2=0}^{1}\frac{\phi_2(p,q)^{n(n-1)/2}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,(\bar z' z)^n\,(\phi_1(p,q)^2\bar\zeta_1'\zeta_1)^{k_1}(\phi_2(p,q)^2\bar\zeta_2'\zeta_2)^{k_2}\\
&=\frac{\mathfrak{E}_{\mathcal{R},p,q}(\bar z' z,\phi_1(p,q)^2\bar\zeta_1'\zeta_1,\phi_2(p,q)^2\bar\zeta_2'\zeta_2)}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R},p,q}{}'}},
\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中使用了 $\mathfrak{E}_{\mathcal{R},p,q}$ 的级数（2.35）。代入（4.9）得到（4.11）。 □

注 4.7。在（4.13）中计算得到的标量积为 $\mathrm{R}(p,q)z',\boldsymbol{\zeta}'|z,\boldsymbol{\zeta}_{\mathcal{R}(p,q)}=\mathfrak{E}_{\mathcal{R},p,q}/\sqrt{\text{自然数集}^{s}_{\mathcal{R},p,q}{}'\ \text{自然数集}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}$，因此（4.11）可写为 $K_{\mathcal{R},p,q}=\pi^{-1}\mathrm{R}(p,q)z',\boldsymbol{\zeta}'|z,\boldsymbol{\zeta}^{\mathcal{R}(p,q)}$，这与命题 4.5 的证明中所使用的恒等对应关系自然数集 ${}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\,d\mu^{(12)}_{p}\,\mathrm{R}(\,,q)=\pi^{-1}d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}$ 一致。定义（4.9）和形式（4.12）还包含因子自然数集 ${}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2,|\varrho_1|^2,|\varrho_2|^2)^{-1}$。下文中我们使用形式（4.11）。

4.3 扇区核

类似地，扇区核如下：

$$K^{B}_{\mathcal{R},p,q}(z',z)\;:=\;\frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar z' z)}{\pi\,\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\;\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}, \tag{4.14}$$

$$K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z',\zeta_1';\,z,\zeta_1)\;:=\;\frac{\phi_1(p,q)^2\bar\zeta_1'\zeta_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar z' z)}{\pi\,\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\zeta_1'|^2,0)\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}}, \tag{4.15}$$

$$K^{F_2}_{\mathcal{R},p,q}(z',\zeta_2';\,z,\zeta_2)\;:=\;\frac{\phi_2(p,q)^2\bar\zeta_2'\zeta_2\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar z' z)}{\pi\,\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,0,|\zeta_2'|^2)\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,0,|\zeta_2|^2)}}, \tag{4.16}$$

$$K^{F_{12}}_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta})\;:=\;\frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\bar\zeta_1'\bar\zeta_2'\zeta_1\zeta_2\;\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(\bar z' z)}{\pi\,\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\boldsymbol{\zeta}'|^2)\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)}}. \tag{4.17}$$

可验证：$K_{\mathcal{R},p,q}=K^{B}_{\mathcal{R},p,q}+K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\;p,q}+K^{F_2}{}_{\mathcal{R}\;p,q}+K^{F_{12}}{}_{\mathcal{R}\;p,q}$。

定义 4.8 **.** 超相干态 $|z,\ \zeta_1,\ \zeta_2\rangle^{\mathcal{R}(p,q)}$ 的扇区再生核定义如下 by:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^{B}(z,z')\;&:=\;{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0\,|\,z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\\
&=\;\frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar z')}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}},
\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\mathcal{K}^{F_1}(z,z') := {}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\zeta_1,0\,|\,z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}$$
$$= \frac{\phi_1(p,q)^2\,\bar{\zeta}_1\zeta_1\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{z}')}{\sqrt{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\cdot\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}, \tag{4.19}$$

$$\mathcal{K}^{F_2}(z,z') := \frac{\phi_2(p,q)^2\,\bar{\zeta}_2\zeta_2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{z}')}{\sqrt{\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\cdot\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}, \tag{4.20}$$

$$\mathcal{K}^{F_{12}}(z,z') := \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\bar{\zeta}_1\zeta_1\,\bar{\zeta}_2\zeta_2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{z}')}{\sqrt{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\cdot\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}. \tag{4.21}$$

命题 4.9（再生核的性质）。扇区再生核 $K^{\varepsilon}(z,z')$ $(\varepsilon\in\{B,F_1,F_2,F_{12}\})$ 满足以下性质：

(1) 厄米性：

$$\mathcal{K}^{\varepsilon}(z,z') = \overline{\mathcal{K}^{\varepsilon}(z',z)}; \tag{4.22}$$

(2) 正性：

$$\mathcal{K}^{\varepsilon}(z,z) = 1 > 0; \tag{4.23}$$

(3) 幂等性：

$$\int_{\mathcal{D}} d\mu^{\varepsilon}(\zeta,\bar{\zeta})\,\mathcal{K}^{\varepsilon}(z,\zeta)\,\mathcal{K}^{\varepsilon}(\zeta,z') = \mathcal{K}^{\varepsilon}(z,z'). \tag{4.24}$$

证明。
(1)厄米性。例如，对于玻色子扇区，对（4.18）取共轭：

$$\overline{\mathcal{K}^{B}(z,z')} = \frac{\overline{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{z}')}}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}} = \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}z')}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}} = \mathcal{K}^{B}(z',z), \tag{4.25}$$

因为 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$ 的系数为实数。对于 F_1、F_2、F_{12}，论证完全相同。

(2) 正性。对于 $z'=z$：

$$\mathcal{K}^{B}(z,z) = \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)} = 1 > 0. \tag{4.26}$$

同样，$\mathcal{K}^{F_i}(z,z)=1$ 以及$\mathcal{K}^{F_{12}}(z,z)=1$。

(3) 幂等性。对于玻色子扇区（$d\mu^{B}=1$，在$\mathcal{D}$上积分）：

$$\int_{\mathcal{D}} d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\zeta,\bar{\zeta})\,\mathcal{K}^{B}(z,\zeta)\,\mathcal{K}^{B}(\zeta,z')$$
$$= \int_{\mathcal{D}} d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\zeta,\bar{\zeta})\,\frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{\zeta})\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\zeta\bar{z}')}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)}\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)}}$$
$$= \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{z}')}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)}}\int_{\mathcal{D}} d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\zeta,\bar{\zeta})\,\frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)}$$
$$= \mathcal{K}^{B}(z,z')\cdot 1 = \mathcal{K}^{B}(z,z'), \tag{4.27}$$

其中我们用到了再生性质 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{\zeta})\,\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(\zeta\bar{z}') = \mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\,\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(z\bar{z}')$（由级数结构得出）以及归一化 $\int d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}=1$。扇区 F_1、F_2、F_{12} 的处理方式相同。 □

扇区核（4.14）–（4.17）分别满足幂等性、厄米性、正性和级数展开性质。

命题 4.10 (关于$K^{B}_{\mathcal{R}、p、q}$的性质)。玻色核 (4.14) 满足：

(i) Idempotence: $\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} K^B_{\mathcal{R},p,q}(z',\xi)\,K^B_{\mathcal{R},p,q}(\xi,z)\,\dfrac{d^2\xi}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)} = K^B_{\mathcal{R},p,q}(z',z)$;

(ii) 厄米性：$K^B_{\mathcal{R}、p、q}(z'、z)^* = K^B_{\mathcal{R}、p、q}(z、z')$; (iii) 正性：$K^B_{\mathcal{R}、p、q}(z、z) = 1/\pi$; (iv) 级数表示：$K^B_{\mathcal{R}、p、q}(z、z) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} {}^{\phi_2(p\ q\ {}^{n(n-1)/2}、)!_{\mathcal{R}(p,q)}}_{[n]} |z|^{2n}/\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2) = \frac{1}{\pi}$

– ———————— –.

证明。 证明见附录 B.1。 □

命题 4.11 ($K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}$**的性质)。** 该 ϕ_1-费米子核 (4.15) 满足：

(i) 幂等性：$\int d^2\xi\, d\bar{\varrho}_1 d\varrho_1\, K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(z',\ \zeta_1';\ \xi,\ \varrho_1)\ K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(\xi,\ \varrho_1;\ z,\ \zeta_1) = K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(z',\ \zeta_1';\ z,\ \zeta_1)$;

(ii) 厄米性：$K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(z',\ \zeta_1';\ z,\ \zeta_1)^* = K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(z,\ \zeta_1;\ z',\ \zeta_1')$;

(iii) 正性：$K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(z,\ \zeta_1;\ z,\ \zeta_1) = \dfrac{\phi_1(p,\ q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},\ p,\ q}(|z|^2)}{\pi\ \text{自然数集}\ {}^{s}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,\ |\zeta_1|^2,\ 0) > 0}$;

(iv) $|z|^2$中的级数：$K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(z,\ \zeta_1;\ z,\ \zeta_1) = \dfrac{\phi_1(\ \ \ \ p\ q\ {}^2|\zeta_1|^2,\ )\text{自然数集}\ {}^{s}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,\ |\zeta_1|^2,\ 0)}{|z|^{2(n-1)}\ \pi\ \sum_{n=1}^{\infty} n\,\phi_2(p\ q\ {}^{n(n-1)/2},\ )!_{\mathcal{R}(p,q)}}$。

证明。 证明见附录 B.2。 □

注 4.12。 与 $K^B_{\mathcal{R},\ p,\ q}(z,\ z) = 1/\pi$（一个常数值）不同，费米子核 $K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}(z,\ \zeta_1;\ z,\ \zeta_1)$ 取决于 $|z|^2$ 和 $|\zeta_1|^2$。这种依赖反映了超相干态流形的 ϕ_1-费米的扇区的非平坦几何。

命题 4.13（$\mathcal{R}\ p,\ q$的性质）。 ϕ_2-费米子核 （4.16）满足与 $K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}$ 相同的四个性质，只需作替换 $\phi_1(p,q) \leftrightarrow \phi_2(p,q)$，$\zeta_1 \leftrightarrow \zeta_2$。特别是：

$$K^{F_2}_{\mathcal{R},p,q}(z,\zeta_2;\,z,\zeta_2) = \frac{\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\ \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\,\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,0,|\zeta_2|^2)} > 0. \tag{4.28}$$

证明与命题 4.11 的证明相同，其中 $(\zeta_1,\ \phi_1(p,\ q)) \leftrightarrow (\zeta_2,\ \phi_2(p,\ q))$。 □

注 4.14（费米子核的比较）。 两个核 $K^{F_1}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}$和 $K^{F_2}{}_{\mathcal{R}\ p,\ q}$通过对称性交换 $(z',\ \zeta_1',\ \phi_1(p,\ q)) \leftrightarrow (z',\ \zeta_2',\ \phi_2(p,\ q))$ 联系起来。在一般情形下，$\phi_1(p,\ q) \neq \phi_2(p,\ q)$:

$$\frac{K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z,\zeta_1;\,z,\zeta_1)}{K^{F_2}_{\mathcal{R},p,q}(z,\zeta_2;\,z,\zeta_2)} = \frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,0,|\zeta_2|^2)}{\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\,\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}. \tag{4.29}$$

只要 s oon as $\phi_1(p,\ q) \neq \phi_2(p,\ q)$ 或 $|\zeta_1| \neq |\zeta_2|$，该比值就不同于 1，这直接表明了 $\mathcal{R}(p,\ q)$–变形 .

命题 4.15（R $_{p,\ q}$的性质）。 混合核 (4.17) 满足：

(i) 幂等性：通过二重 *Berezin* 积分以及$\mathcal{H}^{F_1}{}_R$中的恒等算符分解， ${}^{2}_{p,q}$;

(ii) 厄米性：$K^{F_{12}}\mathrm{R}_{\,p,q}(z',\zeta';\ z,\zeta)^* = K^{F_{12}}\mathrm{R}_{\,p,q}(z,\zeta;\ z',\zeta')$; (iii) 正性：$K^{F_{12}}\mathrm{R}_{\,p,q}(z,\zeta;\ z,\zeta) = \dfrac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)\ \pi\ \text{自然数集}\ {}^{s}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta|^2)}{|z|^{2(n-2)},\ n \geq 2\ \text{中的级数}} > 0$; (iv) 级数：

证明。 证明见附录 B.3。 □

4.4 玻色子扇区中的矩阵元

我们计算 $\langle B\rangle\ \mathrm{R}(p,q)z'|\rho^B|z^{\langle B\rangle}\ \mathrm{R}(p,q)\rangle$，其中 $\rho^B=\sum_{n,m}\rho^B(n,m)|n,\ 0,\ 0m,\ 0,\ 0|$。利用 (2.37)–(2.38) 及 $\zeta_1=\zeta_2=0$:

$$
\begin{aligned}
&{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\rho^B|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\\
&=\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{p}{2}/2}\bar{z}'^p}{\sqrt{[p]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\langle p,0,0|\right]\\
&\quad\times\left[\sum_{n,m}\rho^B(n,m)|n,0,0\rangle\langle m,0,0|\right]\\
&\quad\times\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{q}{2}/2}z^q}{\sqrt{[q]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}|q,0,0\rangle\right]\\
&=\sum_{p,n=0}^{\infty}\sum_{q,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{p}{2}+\binom{q}{2})/2}\,\bar{z}'^p\,z^q}{\sqrt{[p]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[q]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}\\
&\quad\times\rho^B(n,m)\,\underbrace{\langle p,0,0|n,0,0\rangle}_{\delta_{p,n}}\underbrace{\langle m,0,0|q,0,0\rangle}_{\delta_{m,q}}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\rho^B|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}=\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho^B(n,m)\,\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\bar{z}'^n\,z^m}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}. \tag{4.30}
$$

定义 4.16. 我们定义玻色矩阵函数 $\rho^B:\ \mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\to\mathbb{C}$ 如下:

$$
\begin{aligned}
\rho^B(z',z)&:={}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\rho^B|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\\
&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho^B(n,m)\,\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,\frac{\bar{z}'^n\,z^m}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}.
\end{aligned}\tag{4.31}
$$

4.5 ϕ_1-费米扇区中的矩阵元

对于 $\rho^{F_1}=\sum_{n,\ m}\rho^{F_1}(n,\ m)|n,\ 1,\ 0\rangle\langle m,\ 1,\ 0|$ 以及扇区 F_1 的态（其中 $k_1=1$、$k_2=0$）：

$$
\begin{aligned}
&{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\zeta_1,0|\rho^{F_1}|z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\\
&=\left[\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{p}{2}/2}\,\bar{z}'^p\,\phi_1(p,q)\bar{\zeta}_1}{\sqrt{[p]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\zeta_1|^2,0)}}\sum_p\langle p,1,0|\right]\left[\sum_{n,m}\rho^{F_1}(n,m)|n,1,0\rangle\langle m,1,0|\right]\\
&\quad\times\left[\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{q}{2}/2}\,z^q\,\phi_1(p,q)\zeta_1}{\sqrt{[q]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}}\sum_q|q,1,0\rangle\right]\\
&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho^{F_1}(n,m)\,\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\bar{z}'^n\,z^m}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\zeta_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}}.
\end{aligned}\tag{4.32}
$$

定义 4.17. 该 ϕ_1-费米矩阵函数为:

$$
\begin{aligned}
\rho^{F_1}(z',z;\zeta_1):=&\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho^{F_1}(n,m)\,\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\\
&\times\frac{\bar{z}'^n\,z^m}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\zeta_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}}.
\end{aligned}\tag{4.33}
$$

根据对称性 $\phi_1\leftrightarrow\phi_2,\ \zeta_1\leftrightarrow\zeta_2$，可得:

定义 4.18。

$$
\rho^{F_2}(z',z;\zeta_2):=\sum_{n,m=0}^{\infty}\rho^{F_2}(n,m)\,\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}
$$

$$\times \frac{\bar{z}'^n\, z^m}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,0,|\zeta_2|^2)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,0,|\zeta_2|^2)}}. \tag{4.34}$$

定义 4.19。 该双费米子矩阵函数为：

$$\rho^{F_{12}}(z',z;\zeta_1,\zeta_2) := \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{F_{12}}(n,m)\, \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{m}{2}}/2\;\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \frac{\bar{z}'^n\, z^m}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R},p,q'}}}. \tag{4.35}$$

4.6 通过恒等算符分解得到扇区再生核 y

将每个扇区的恒等算符分解代入前面的矩阵函数，即可得到扇区核。

命题 4.20. 函数 $\rho^B(z',z)$ 在 (4.31) 中定义，可改写如下：

$$\rho^B(z',z) \;=\; \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, K^B(z,\zeta)\,\rho^B(z',\zeta), \tag{4.36}$$

其中，玻色子再生核为

$$K^B(z,\zeta) := \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)} = \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\zeta}z)}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}. \tag{4.37}$$

证明：
我们有 $\rho^B(z',z) = {}_{(B)}\mathrm{R}(p,q)z',0,0|\rho^B|z,0,0{}^{(B)}\mathrm{R}(p,q)$。代入玻色子恒等分解$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}}|\zeta,0,0{}^{\mathcal{R}(p,q)}{}_{(B)}\mathrm{R}(p,q)\zeta,0,0|\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\;d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\zeta},\zeta)\;=\mathbf{1}_{\mathcal{H}^B}$：

$$\begin{aligned}
\rho^B(z',z) \;&=\; {}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\rho^B \\
&\quad\times\left[\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} |\zeta,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,0,0|\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\,d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\zeta},\zeta)\right]|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)} \\
\rho^B(z',z) \;&=\; \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\,d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\zeta},\zeta)\;\underbrace{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\rho^B|\zeta,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}_{\rho^B(z',\zeta)} \\
&\quad\cdot{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

玻色子测度为 $d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\zeta},\ \zeta) =\ \omega_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\ |\zeta|\,d|\zeta|\,d\theta/\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)$（使得 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\ d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}\ =\ \omega_{\mathcal{R}(p,q)}\,|\zeta|\,d|\zeta|\,d\theta$ 其中 $\int|\zeta|^{2n}\omega_{\mathcal{R}(p,q)}\,|\zeta|\,d|\zeta|\,d\theta = \phi_2(p,\ q)\binom{n}{2}[n]!^{\mathcal{R}(p,q))}$ 。记 $d^2\zeta = |\zeta|\,d|\zeta|\,d\theta/\pi$：

$$\begin{aligned}
\rho^B(z',z) \;&=\; \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\;\frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi}\,\rho^B(z',\zeta) \\
\rho^B(z',z) \;&=\; \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, K^B(z,\zeta)\,\rho^B(z',\zeta),
\end{aligned} \tag{4.39}$$

其中我们已将.....视为.....

$$K^B(z,\zeta) \;=\; \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} = \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\zeta}z)}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}. \quad \square \tag{4.40}$$

注 4.21. 等式 (4.36) 只不过是 再生性质，其对应的对象是 $\rho^B(z',\ z)$，其中 $K^B(z,\ \zeta)$ 是玻色子再生核。

命题 4.22. 函数 $\rho^{F_1}(z',z;\zeta_1)$ 可改写为：

$$\rho^{F_1}(z',z;\zeta_1) \;=\; \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta \int d\bar{\eta}_1 d\eta_1\; K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1)\,\rho^{F_1}(z',\zeta;\eta_1), \tag{4.41}$$

其中 ϕ_1-费米的再生核为：

$$K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1) := \frac{{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,\eta_1,0|z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} = \frac{\phi_1(p,q)^2\,\bar{\eta}_1\zeta_1\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{\zeta}z)}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}}. \tag{4.42}$$

同样，ϕ_2-费米子核和双费米子核为：

$$K^{F_2}(z,\zeta;\zeta_2,\eta_2) = \frac{\phi_2(p,q)^2\,\bar\eta_2\zeta_2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar\zeta z)}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,0,|\eta_2|^2)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,0,|\zeta_2|^2)}}, \tag{4.43}$$

$$K^{F_{12}}(z,\zeta;\zeta_1,\zeta_2,\eta_1,\eta_2) = \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\bar\eta_1\zeta_1\,\bar\eta_2\zeta_2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(\bar\zeta z)}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathcal{N}^{s}_{\mathcal{R},p,q'}}}. \tag{4.44}$$

F_1扇区的证明。
我们有 $\rho^{F_1}(z',\ z;\zeta_1) = {}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,\ q)}\langle z',\ \zeta_1,\ 0|\rho^{F_1}|z,\ \zeta_1,\ 0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,\ q)}$。我们在 F_1 扇区中插入恒等算符分解：

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_1} |\zeta,\eta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,\eta_1,0|\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)\,d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar\zeta,\zeta)\,d\bar\eta_1 d\eta_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{F_1}}. \tag{4.45}$$

我们得到：

$$\begin{aligned}\rho^{F_1}(z',z;\zeta_1) &= {}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\zeta_1,0|\rho^{F_1}\\ &\quad\times\left[\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_1}|\zeta,\eta_1,0\rangle\,\langle\zeta,\eta_1,0|\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)\,d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}\,d\bar\eta_1 d\eta_1\right]|z,\zeta_1,0\rangle\\ &= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\times\Lambda_1}\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)\,d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar\zeta,\zeta)\,d\bar\eta_1 d\eta_1\\ &\quad\times\underbrace{{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\zeta_1,0|\rho^{F_1}|\zeta,\eta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}}_{\rho^{F_1}(z',\zeta;\eta_1)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,\eta_1,0|z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}.\end{aligned} \tag{4.46}$$

项 自然数集 ${}^{\mathrm{s}}\mathcal{R}(p,\ q)(|\zeta|^2,\ |\eta_1|^2,\ 0)\ d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}$ 给出 π^{-1}自然数集 ${}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,\ |\eta_1|^2,\ 0)$/自然数集 ${}^{\mathrm{s}}\mathcal{R}(p,\ q)(|\zeta|^2,\ |\eta_1|^2,\ 0)$ $d^2\zeta = d^2\zeta/\pi$（角积分后），而对 η_1 的 Berezin 积分给出 $d\bar\eta_1 d\eta_1$。因此：

$$\rho^{F_1}(z',z;\zeta_1) = \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\int d\bar\eta_1 d\eta_1\,\underbrace{\frac{{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,\eta_1,0|z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi}}_{K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1)}\rho^{F_1}(z',\zeta;\eta_1), \tag{4.47}$$

由此得到（4.41），并确定（4.42）。 □

4.7 再生核的性质

我们按照 $\varepsilon\in\{B,F_1,F_2,F_{12}\}$的方法，建立每个扇区的基本性质 [4, 1]。

命题4.23 (厄米性)。对于每个扇区 ε：

$$K^{\varepsilon}(z,\zeta)^* = K^{\varepsilon}(\zeta,z). \tag{4.48}$$

证明。
扇区 B：

$$\begin{aligned}K^{B}(z,\zeta)^* &= \left[\frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi}\right]^* = \frac{\overline{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\pi}\\ &= \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\zeta,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} = K^{B}(\zeta,z).\end{aligned} \tag{4.49}$$

~~$\mathcal{R}(p,q)\langle\zeta|z\rangle\mathcal{R}(p,q)$ $=\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(\bar\zeta z)/\sqrt{\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}$~~ 事实上，$\overline{\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(\bar\zeta z)}/\sqrt{\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)} = \mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(\bar z\zeta)/\sqrt{\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2)} = {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z|\zeta\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$，因为 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$ 的系数为实数。

扇区 F_1：

$$K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1)^* = \frac{\overline{\phi_1(p,q)^2\bar\eta_1\zeta_1\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar\zeta z)}}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}}$$

$$= \frac{\phi_1(p,q)^2 \eta_1 \bar{\zeta}_1 \operatorname{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}\zeta)}{\pi \sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)}}$$

$$K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1)^* = K^{F_1}(\zeta,z;\eta_1,\zeta_1). \tag{4.50}$$

扇区 F_2 和 F_{12}： 根据对称性 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2, \zeta_1 \leftrightarrow \zeta_2$，论证完全相同：

$$K^{F_2}(z,\zeta;\zeta_2,\eta_2)^* = K^{F_2}(\zeta,z;\eta_2,\zeta_2), \tag{4.51}$$

$$K^{F_{12}}(z,\zeta;\zeta_1,\zeta_2,\eta_1,\eta_2)^* = K^{F_{12}}(\zeta,z;\eta_1,\eta_2,\zeta_1,\zeta_2). \tag{4.52}$$

因此，对于所有 ε，性质（4.48）成立。 □

命题 4.24（正性）。对于每个扇区 ε：

$$K^{\varepsilon}(z,z) > 0. \tag{4.53}$$

证明。 证明见附录 B.4。 □

命题 4.25（矩阵乘法）。对于每个扇区 ε，再生核满足：

$$\int d\mu^{\varepsilon}(\zeta)\, K^{\varepsilon}(z,\zeta)\, K^{\varepsilon}(\zeta,z') = K^{\varepsilon}(z,z'). \tag{4.54}$$

证明。 证明见附录 B.5。 □

命题 4.26（$K^{\varepsilon}(z,z)$ 的级数表达式）。对角核具有以下级数展开。扇区 B：令：

$$K^{B}(z,z) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}t^n/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\sum_{n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}t^n/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,t^n\cdot[\operatorname{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(t)]^{-1}. \tag{4.55}$$

扇区 F_1：设置 $t=|z|^2$ 和 $s_1=|\zeta_1|^2$：

$$\begin{aligned} K^{F_1}(z,z;\zeta_1,\zeta_1) &= \frac{\phi_1(p,q)^2 s_1 \operatorname{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(t,s_1,0)} \\ &= \frac{\phi_1(p,q)^2 s_1}{\pi}\cdot\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\,\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}t^{n-1}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\operatorname{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(t)+\phi_1(p,q)^2 s_1\operatorname{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t)}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

扇区 F_2：设置 $s_2=|\zeta_2|^2$：

$$\begin{aligned} K^{F_2}(z,z;\zeta_2,\zeta_2) &= \frac{\phi_2(p,q)^2 s_2 \operatorname{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(t,0,s_2)} \\ &= \frac{\phi_2(p,q)^2 s_2}{\pi}\cdot\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\,\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}t^{n-1}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\operatorname{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(t)+\phi_2(p,q)^2 s_2\operatorname{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t)}. \end{aligned} \tag{4.57}$$

扇区 F_{12}：

$$\begin{aligned} K^{F_{12}}(z,z;\zeta_1,\zeta_2,\zeta_1,\zeta_2) &= \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2 s_1 s_2 \operatorname{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(t)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(t,s_1,s_2)} \\ &= \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2 s_1 s_2}{\pi} \\ &\quad\cdot\frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}t^{n-2}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\operatorname{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(t)+\phi_1(p,q)^2 s_1\operatorname{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t)+\phi_2(p,q)^2 s_2\operatorname{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t)} \\ &\qquad +\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2 s_1 s_2\operatorname{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(t)}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

证明。 证明见附录 B.6。 □

4.8 密度算符的积分表述

现在，我们将总密度算符、其密度函数和再生核汇总为一个积分表述。令

$$d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho}) := \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2,|\varrho_1|^2,|\varrho_2|^2)\; d\mu^{(12)}_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\varrho_1,\varrho_2) \tag{4.59}$$

设其为恒等算符分解 (2.42) 的测度，使得 $\int d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho})\;|\xi,\boldsymbol{\varrho}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\,\mathrm{R}(p,q)\langle\xi,\boldsymbol{\varrho}| = \mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\mathcal{R},p,q_0}}$ 与命题 4.5、4.20 和 4.22 的证明中一样，我们采用恒等 $d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho}) = \pi^{-1}\,d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}$，此时再生核写为$K_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};\;z,\boldsymbol{\zeta}) = \pi^{-1}\,\mathrm{R}(p,q)\langle\xi,\boldsymbol{\varrho}|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$，与 (4.11) 一致。对于作用于 $\mathfrak{H}_{\mathcal{R},p,q}$ 上的每个算符 A，我们将其关联到函数 $A(z',\boldsymbol{\zeta}';\;z,\boldsymbol{\zeta}) := \mathrm{R}(p,q)\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|A|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$；当 $A=\rho^s$ 时，该函数就是密度函数 (4.1)，而对于恒等算符

$$\mathbf{1}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} \;=\; \pi\,K_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}). \tag{4.60}$$

由于涉及的函数关于格拉斯曼变量均为偶函数，因此下列被积函数中各因子的顺序无关紧要。

命题 4.27 (积分表述)。 在命题 *3.14*的假设下：

(i) 总密度算符可由其密度函数恢复：

$$\rho^s \;=\; \iint d\nu(\xi',\boldsymbol{\varrho}')\,d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho})\;\rho(\xi',\boldsymbol{\varrho}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho})\;|\xi',\boldsymbol{\varrho}'\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle\xi,\boldsymbol{\varrho}|; \tag{4.61}$$

(ii) 它作为积分算子作用：对于 $|\psi\rangle\in\mathfrak{H}_{\mathcal{R},\;p,\;q}$和 $\psi(z,\boldsymbol{\zeta}) :=\mathcal{R}(p,\;q)\langle z,\boldsymbol{\zeta}|\psi\rangle$，

$$\mathcal{R}(p,q)\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|\rho^s|\psi\rangle \;=\; \int d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho})\;\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho})\;\psi(\xi,\boldsymbol{\varrho}); \tag{4.62}$$

(iii) 对于作用在 $\mathfrak{H}_{\mathcal{R},\;p,\;q}$ 上的两个算符 A 和 B，

$$(AB)(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; \int d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho})\;A(z',\boldsymbol{\zeta}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho})\;B(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,z,\boldsymbol{\zeta}); \tag{4.63}$$

(iv) 密度函数由核复现，可在右侧、左侧以及两侧同时复现：

$$\begin{aligned}\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) \;&=\; \int d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}\;K_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,z,\boldsymbol{\zeta})\;\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho})\\ &=\; \int d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}\;K_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho})\;\rho(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,z,\boldsymbol{\zeta})\\ &=\; \iint d^2\xi'\,d^2\boldsymbol{\varrho}'\,d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}\;K_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,\xi',\boldsymbol{\varrho}')\;\rho(\xi',\boldsymbol{\varrho}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho})\;K_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,z,\boldsymbol{\zeta}),\end{aligned} \tag{4.64}$$

并且核具有再生性：

$$K_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; \int d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}\;K_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho})\;K_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,z,\boldsymbol{\zeta}); \tag{4.65}$$

(v) 迹和纯度为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho^s) \;&=\; \int d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho})\;\rho(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,\xi,\boldsymbol{\varrho}) \;=\; 1,\\ \mathrm{Tr}\big((\rho^s)^2\big) \;&=\; \iint d\nu(\xi',\boldsymbol{\varrho}')\,d\nu(\xi,\boldsymbol{\varrho})\;\rho(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,\xi',\boldsymbol{\varrho}')\;\rho(\xi',\boldsymbol{\varrho}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho}).\end{aligned} \tag{4.66}$$

证明。(i) 我们在 ρ^s 两侧代入 (2.42)： $\rho^s=\mathbf{1}\,\rho^s\,\mathbf{1}$ and $\mathrm{R}(p,q)\langle\xi',\boldsymbol{\varrho}'|\rho^s|\xi,\boldsymbol{\varrho}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \rho(\xi',\boldsymbol{\varrho}';\;\xi,\boldsymbol{\varrho})$。(ii) 和 (iii) 以同样的方式，通过写出 $\rho^s=\rho^s\,\mathbf{1}$ and $AB=A\,\mathbf{1}\,B$ 得到。(iv) 我们将 (4.63) 应用于 $\rho^s\,\mathbf{1}$, $\mathbf{1}\,\rho^s$, $\mathbf{1}\,\rho^s\,\mathbf{1}$ and $\mathbf{1}\;\mathbf{1}$，并结合 (4.60) 和 $d\nu=\pi^{-1}d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}$：例如 $\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\;z,\boldsymbol{\zeta}) = \int\pi^{-1}d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}\;\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\;\xi,\boldsymbol{\varrho})\,\pi K_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};z,\boldsymbol{\zeta})$，即 (4.8)。(v) 第一个等式来自命题 4.4；第二个等式通过对 $A=B=\rho^s$ 取 (4.63) 的迹得到。 □

因此，再生核除去因子 π后，就是单位算符的函数，而再生性质（4.8）不过是将复合规则（4.63）应用于 $\rho^s\,\mathbf{1}$的结果。命题 3.14 的分扇区分解同样适用于这一层次。

推论 4.28 (总密度函数与分扇区分解)。 在命题 *3.14*的假设下，对每个扇区 σ，定义

$$F^{\sigma}(\bar{z}',z) := \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho^{\sigma}(n,m)\,\frac{\phi_2(p,q)^{(n(n-1)+m(m-1))/4}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,\bar{z}'^{n} z^{m}. \tag{4.67}$$

总算子的密度函数可明确写为

$$\begin{aligned}\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) \;=\; &\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\boldsymbol{\zeta}'|^2)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)}}\Big[F^{B}(\bar{z}',z)+\phi_1(p,q)^2\,\bar{\zeta}'_1\zeta_1\,F^{F_1}(\bar{z}',z)\\ &+\phi_2(p,q)^2\,\bar{\zeta}'_2\zeta_2\,F^{F_2}(\bar{z}',z)+\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\bar{\zeta}'_1\bar{\zeta}'_2\zeta_1\zeta_2\,F^{F_{12}}(\bar{z}',z)\Big],\end{aligned} \tag{4.68}$$

每一项都是

$$\rho_{\sigma}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) := {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|\rho^{\sigma}|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$$

相应块的函数。对于 $K^{(\sigma)}R_{p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}) := \pi^{-1}R(p,q)\langle z',\boldsymbol{\zeta}'|\Pi_{\sigma}|z,\boldsymbol{\zeta}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$，有 $K_{\mathcal{R},p,q}=K^{(B)}R_{p,q}+K^{(F_1)})R_{p,q}+{}_{K^{(F_2)}}R_{p,q}+K^{(F_{12}}_{p})R_{,q}$，且每个扇区都由其自身的核再生：

$$\int d^2\xi\,d^2\boldsymbol{\varrho}\;K^{(\sigma')}_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\boldsymbol{\varrho};\,z,\boldsymbol{\zeta})\;\rho_{\sigma}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,\xi,\boldsymbol{\varrho}) \;=\; \delta_{\sigma\sigma'}\,\rho_{\sigma}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta}). \tag{4.69}$$

最后，将 $\bar{z}'$ 和 z 视为　　独立变量，分扇区系数可通过引理 F^{σ} 从 *2.1* 中读出　　*1:*

$$\rho^{\sigma}(n,m) \;=\; \frac{\Big[(\partial_{\mathcal{R}(p,q);\bar{z}'})^{n}(\partial_{\mathcal{R}(p,q);z})^{m}F^{\sigma}(\bar{z}',z)\Big]_{\bar{z}'=z=0}}{\phi_2(p,q)^{(n(n-1)+m(m-1))/4}\,\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}. \tag{4.70}$$

证明。关系 (4.68) 是通过在 (4.4) 中收集指标 (k_1,k_2) 固定的项得到的；此时 Grass- mann 因子 $(\phi_1(p,q)\bar{\zeta}'_1)^{k_1}(\phi_2(p,q)\bar{\zeta}'_2)^{k_2}$ $(\phi_1(p,q)\zeta_1)^{k_1}(\phi_2(p,q)\zeta_2)^{k_2}$ 等于 1、 $\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}'_1\zeta_1$、 $\phi_2(p,q)^2\bar{\zeta}'_2\zeta_2$ 和 $\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\bar{\zeta}'_1\bar{\zeta}'_2\zeta_1\zeta_2$。核的分解来自 $\sum_{\sigma}\Pi_{\sigma}=\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\mathcal{R}}}$, $_{p,q_0}$ 根据 (4.63)，(4.69) 的左端是 $\rho^{\sigma}\Pi_{\sigma'}$ 的函数，等于 $\delta_{\sigma\sigma'}\rho^{\sigma}$。最后，引理 2.11 给出 $\left[(\partial_{\mathcal{R}(p,q);w})^{n}w^{k}\right]_{w=0}=\delta_{nk}\,[n]!$ $_{\mathcal{R}(p,q)}$，从而在 (4.67) 中分离出指标为 (n,m) 的项。 □

核的分解源自 $\sum_{\sigma}\Pi_{\sigma}=\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\mathcal{R},\ p,\ q}}$，其中涉及总归一化 $\mathcal{N}_{\mathrm{s}\mathcal{R}(p,q)}$，而核（4.14）–（4.17）采用分扇区归一化表示。对于 $\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\zeta}'=0$，在（ F^{B} ）中只有这一项 F^{B} 保留下来，进而还原出（4.5）。

密度函数 $\rho(z',\boldsymbol{\zeta}';z,\boldsymbol{\zeta})$ 包含了关于 ρ^{s} 的全部信息：通过二重积分（4.61）可以恢复该算符；该算符的作用形式为积分算子（4.62），并由核 $K_{\mathcal{R},p,q}$（恒等算符的函数）重现。扇区核满足厄米性、正性和乘法性质，密度函数与核的分扇区分解遵循总密度算符的分扇区分解。下一节将采用 Berezin量子化的玻色子恒等分解。

5 Berezin-Klaud　er-Toeplitz 量子化、色散与智能态 s

本节利用玻色子扇区的恒等算符分解，将每个经典函数与一个算符相关联（Berezin 量子化）。我们计算与 z、 $\bar{z}$、 $|z|^2$、 z^2 和 $\bar{z}^2$ 相关联的算符、它们在玻色子超相干态中的均值，以及 $\mathcal{A}^{B}_{z}$ 与 $\mathcal{A}^{B}_{\bar{z}}$ 的反对易子。我们推导超位置算符和超动量算符的色散，以及不确定性关系的饱和情形。

5.1 量子化算符、超位置与超动量

定义 5.1（玻色子扇区中的量子化）。 对于每个经典函数 $f:\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}\to\mathbb{C}$，玻色子扇区中的量子化算符 $\mathcal{A}^{B}_{f}$ 定义为

$$\mathcal{A}^{B}_{f} := \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} f(z)\,|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\,d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z},z). \tag{5.1}$$

经典相空间坐标与 z 之间的关系为 $q=(z+\bar{z})/\sqrt{2}$, $p=(z-\bar{z})/(i\sqrt{2})$，即 $\bar{z}=(q+ip)/\sqrt{2}$。我们定义超位置算符和超动量算符：

$$\mathcal{Q}^{B} := \mathcal{A}^{B}_{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{A}^{B}_{z}+\mathcal{A}^{B}_{\bar{z}}), \tag{5.2}$$

$$\mathcal{P}^{B} := \mathcal{A}^{B}_{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\mathcal{A}^{B}_{z}-\mathcal{A}^{B}_{\bar{z}}). \tag{5.3}$$

5.2 量子化算符的计算

命题 5.2。

$$\mathcal{A}_z^B = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n,0,0\rangle\langle n+1,0,0|. \tag{5.4}$$

证明。
根据定义（5.1），结合 $f(z) = z$ 和极坐标参数化 $z = re^{i\theta}$，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_z^B &= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} z\, |z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\, {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\, \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\, d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar z, z) \\
&= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} z \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, z^n\, |n,0,0\rangle\right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{m}{2}/2}}{\sqrt{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, \bar z^m\, \langle m,0,0|\right] d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar z, z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(n-m+1)\theta} \int_0^L r^{n+m+1}\, d\lambda(r)\, |n,0,0\rangle\langle m,0,0|.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

由于 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(n-m+1)\theta} = \delta_{n,\,m-1}$，只有项 $m = n+1$ 有贡献：

$$\mathcal{A}_z^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[n+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} \left[2\pi \int_0^L r^{2n+2}\, d\lambda(r)\right] |n,0,0\rangle\langle n+1,0,0|. \tag{5.6}$$

我们将矩条件（2.45）应用于 $n \to n+1$：$2\pi \int_0^L r^{2(n+1)}\, d\lambda(r) = \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\, [n+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}$，因此：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_z^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2})/2} \cdot \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\, [n+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[n+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} |n,0,0\rangle\langle n+1,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+3\binom{n+1}{2})/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}} |n,0,0\rangle\langle n+1,0,0|.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

利用 $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$，我们得到 $\left(\binom{n}{2} + 3\binom{n+1}{2}\right)/2 = 2\binom{n}{2} + 3n/2 + \binom{n+1}{2}/2$，重新编号后，我们确定全局因子 $\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}/2}$，从而得到（5.4）。□

命题 5.3.

$$\mathcal{A}_{\bar z}^B = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n+1,0,0\rangle\langle n,0,0|. \tag{5.8}$$

证明.
同理，$f(z) = \bar z$：

$$\mathcal{A}_{\bar z}^B = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(n-m-1)\theta} \int_0^L r^{n+m+1}\, d\lambda(r)\, |n,0,0\rangle\langle m,0,0| \tag{5.9}$$

角积分给出 $\delta_{n,\,m+1}$，因此 $n = m+1$，并且：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\bar z}^B &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{(\binom{m+1}{2}+\binom{m}{2})/2}\, \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{m+1}{2}}\, [m+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\sqrt{[m+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} |m+1,0,0\rangle\langle m,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n+1,0,0\rangle\langle n,0,0|. \quad \square
\end{aligned} \tag{5.10}$$

注 5.4。算符 $\mathcal{A}_z^B$ 和 $\mathcal{A}_{\bar z}^B$ 互为伴随算符：$(\mathcal{A}_z^B)^\dagger = \mathcal{A}_{\bar z}^B$。在 $\phi_2(p,q) \to 1$ 和 $[n]_{\mathcal{R}(p,q)} \to n$ 的极限下，它们化为标准的玻色湮灭与产生算符。

命题 5.5.

$$\mathcal{A}_{|z|^2}^B = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\, [n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}\, |n,0,0\rangle\langle n,0,0|, \tag{5.11}$$

$$\mathcal{A}^B_{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{n+2}{2})/2+\binom{n+2}{2}} \sqrt{[n+2]_{\mathcal{R}(p,q)}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n,0,0\rangle\langle n+2,0,0|, \tag{5.12}$$

$$\mathcal{A}^B_{\bar{z}^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{n+2}{2})/2+\binom{n+2}{2}} \sqrt{[n+2]_{\mathcal{R}(p,q)}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n+2,0,0\rangle\langle n,0,0|. \tag{5.13}$$

对 $\mathcal{A}^B$的证明$_{|z|^2}$.
对于 $f(z) = |z|^2 = r^2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^B_{|z|^2} &= \sum_{n,m} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \left[2\pi \int_0^L r^{n+m+2}\, d\lambda(r)\right] |n,0,0\rangle\langle m,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}} \cdot \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\, [n+1]!_{\mathcal{R}(p,q)} \cdot \frac{1}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}} \cdot [n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\, |n,0,0\rangle\langle n,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\, [n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}\, |n,0,0\rangle\langle n,0,0|.\square
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$\mathcal{A}^B_{z^2}$的证明。
对于 $f(z) = z^2$，角积分给出 $\delta_{n,m-2}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^B_{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{n+2}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[n+2]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} \left[2\pi \int_0^L r^{2n+4}\, d\lambda(r)\right] |n,0,0\rangle\langle n+2,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{n+2}{2})/2} \cdot \phi_2(p,q)^{\binom{n+2}{2}}\, [n+2]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[n+2]!_{\mathcal{R}(p,q)}}} |n,0,0\rangle\langle n+2,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+3\binom{n+2}{2})/2} \sqrt{[n+2]_{\mathcal{R}(p,q)}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n,0,0\rangle\langle n+2,0,0|.\square
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$\mathcal{A}^B_{\bar{z}^2} = (\mathcal{A}^B_{z^2})^\dagger$ 的证明完全类似。 □

5.3 均值和反对易子

命题 5.6 （均值）。 在 $R(p,q)$ –超相干态 $|z,\ 0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$中:

$$\mathcal{R}_{(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}^B_z|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = z, \tag{5.16}$$

$$\mathcal{R}_{(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}^B_{\bar{z}}|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \bar{z}, \tag{5.17}$$

$$\mathcal{R}_{(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}^B_{z^2}|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = z^2, \tag{5.18}$$

$$\mathcal{R}_{(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}^B_{\bar{z}^2}|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \bar{z}^2. \tag{5.19}$$

证明(5.16).
我们首先计算 $\mathcal{A}^B_z|z,\ 0,\ 0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^B_z|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n,0,0\rangle\langle n+1,0,0|\right] \\
&\quad \times \left[\left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\right)^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{j}{2})/2}}{\sqrt{[j]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, z^j\, |j,0,0\rangle\right] \\
&= \left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\right)^{-1/2} \sum_{n,j=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2})/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, \phi_2(p,q)^{\binom{j}{2})/2}}{\sqrt{[j]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, z^j \\
&\quad \times \underbrace{\langle n+1,0,0|j,0,0\rangle}_{\delta_{n+1,j}} |n,0,0\rangle \\
&= \left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2})/2+\binom{n+1}{2})/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\sqrt{[n+1]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, z^{n+1}\, |n,0,0\rangle \\
&= \left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2})}\, z^{n+1}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\, |n,0,0\rangle.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

因此：

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}_z^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} &= \big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\sum_{j,n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{j}{2}/2}\bar{z}^j}{\sqrt{[j]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\cdot\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}z^{n+1}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\\
&\quad\times\underbrace{\langle j,0,0|n,0,0\rangle}_{\delta_{j,n}}\\
&= z\cdot\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2+\binom{n+1}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\\
&= z\cdot\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}=z.\quad\square
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

（5.18）的证明。

$$
\mathcal{A}_{z^2}^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}\big)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+3\binom{n+2}{2})/2}\sqrt{[n+2]_{\mathcal{R}(p,q)}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,z^{n+2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}|n,0,0\rangle. \tag{5.22}
$$

于是：

$$
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}_{z^2}^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = z^2\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}=z^2.\quad\square \tag{5.23}
$$

（5.17）和（5.19）的证明完全类似。

命题 5.7。反对易子 $\{A_z^B, A_{\bar{z}}^B\} = A_z^BA_{\bar{z}}^B + A_{\bar{z}}^BA_z^B$等于：

$$
\{\mathcal{A}_z^B,\mathcal{A}_{\bar{z}}^B\} = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\big([n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}+[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}-\binom{n}{2}}\big)|n,0,0\rangle\langle n,0,0|. \tag{5.24}
$$

它在 $|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$ 中的平均值为：

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\{\mathcal{A}_z^B,\mathcal{A}_{\bar{z}}^B\}|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\\
&= \big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\\
&\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\big([n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}+[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_2(p,q)^n\big)\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

证明。
我们首先计算 $\mathcal{A}_z^B\mathcal{A}_{\bar{z}}^B$：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_z^B\mathcal{A}_{\bar{z}}^B &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}/2}\sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,|n,0,0\rangle\langle n+1,0,0|\right]\\
&\quad\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{m+1}{2}/2}\sqrt{[m+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,|m+1,0,0\rangle\langle m,0,0|\right]\\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{(\binom{n+1}{2}+\binom{m+1}{2})/2}\sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}[m+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\\
&\quad\times\underbrace{\langle n+1,0,0|m+1,0,0\rangle}_{\delta_{n,m}}|n,0,0\rangle\langle m,0,0|\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}|n,0,0\rangle\langle n,0,0|.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

同样，我们计算$\mathcal{A}_{\bar{z}}^B\mathcal{A}_z^B$：

$$
\mathcal{A}_{\bar{z}}^B\mathcal{A}_z^B = \left[\sum_{m=0}^{\infty}\phi_2(p,q)^{\binom{m+1}{2}/2}\sqrt{[m+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\,|m+1,0,0\rangle\langle m,0,0|\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}/2} \sqrt{[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}}\, |n,0,0\rangle\langle n+1,0,0|\right] \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{(\binom{m+1}{2}+\binom{n+1}{2})/2} \sqrt{[m+1]_{\mathcal{R}(p,q)}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}} \\
&\quad \times \underbrace{\langle m,0,0|n,0,0\rangle}_{\delta_{m,n}} |m+1,0,0\rangle\langle n+1,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}} [n+1]_{\mathcal{R}(p,q)} |n+1,0,0\rangle\langle n+1,0,0| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}} [n]_{\mathcal{R}(p,q)} |n,0,0\rangle\langle n,0,0|. \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

结合式（5.26）和（5.27）：

$$
\{\mathcal{A}_z^B, \mathcal{A}_{\bar{z}}^B\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}} [n+1]_{\mathcal{R}(p,q)} + \phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}} [n]_{\mathcal{R}(p,q)}\right) |n,0,0\rangle\langle n,0,0|. \qquad (5.28)
$$

平均值通过计算得出$_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\{\mathcal{A}_z^B, \mathcal{A}_{\bar{z}}^B\}|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$ 通过代入（3.7）。 □

5.4 超位置算符与超动量算符的色散

我们使用超位置算符与超动量算符 $\mathcal{Q}^B$ 与$\mathcal{P}^B$，其定义见（5.2）–（5.3）。

命题 5.8 （$\mathcal{Q}^B$ 与$\mathcal{P}^B$的均值）。

$$
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{Q}^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}} = q, \qquad (5.29)
$$

$$
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{P}^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \frac{z-\bar{z}}{i\sqrt{2}} = p. \qquad (5.30)
$$

证明。
由（5.16）与（5.17）：

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{Q}^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}_z^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} + {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\mathcal{A}_{\bar{z}}^B|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\right] \\
&= \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}} = q. \square \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

命题 5.9 （$(\mathcal{Q}^B)^2$ 和 $(\mathcal{P}^B)^2$的均值）。

$$
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|(\mathcal{Q}^B)^2|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = \frac{1}{2}(q^2-p^2) + \frac{1}{2}\, {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\{\mathcal{A}_z^B, \mathcal{A}_{\bar{z}}^B\}|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}, \qquad (5.32)
$$

$$
{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|(\mathcal{P}^B)^2|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)} = -\frac{1}{2}(q^2-p^2) + \frac{1}{2}\, {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|\{\mathcal{A}_z^B, \mathcal{A}_{\bar{z}}^B\}|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}. \qquad (5.33)
$$

证明。$(\mathcal{Q}^B)^2 = \frac{1}{2}\left((\mathcal{A}_z^B)^2 + (\mathcal{A}_{\bar{z}}^B)^2 + \{\mathcal{A}_z^B, \mathcal{A}_{\bar{z}}^B\}\right)$。因此，利用（5.18）和（5.19）：

$$
\langle(\mathcal{Q}^B)^2\rangle = \frac{1}{2}\left(z^2+\bar{z}^2 + \langle\{\mathcal{A}_z^B, \mathcal{A}_{\bar{z}}^B\}\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(q^2-p^2 + \langle\{\mathcal{A}_z^B, \mathcal{A}_{\bar{z}}^B\}\rangle\right). \square \qquad (5.34)
$$

命题 5.10 （色散）。 算子 Q^B 和 P^B 在态 $|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$ 中的色散相等，并且为：

$$
\left(\Delta\mathcal{Q}^B\right)^2 = \left(\Delta\mathcal{P}^B\right)^2 = -\frac{|z|^2}{2} + \mathcal{G}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2), \qquad (5.35)
$$

其中

$$
\mathcal{G}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}\, [n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}\, \phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}} |z|^{2n}. \qquad (5.36)
$$

证明。 $(\Delta\mathcal{Q}^B)^2=\langle(\mathcal{Q}^B)^2\rangle-\langle\mathcal{Q}^B\rangle^2$。由（5.29）和（5.32）可得：

$$\begin{aligned}(\Delta\mathcal{Q}^B)^2 &= \frac{1}{2}\big(q^2-p^2+\langle\{\mathcal{A}_z^B,\mathcal{A}_{\bar z}^B\}\rangle\big)-\frac{(z+\bar z)^2}{2}\\ &= \frac{1}{2}\langle\{\mathcal{A}_z^B,\mathcal{A}_{\bar z}^B\}\rangle-|z|^2.\end{aligned}\tag{5.37}$$

利用（5.25）：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle\{\mathcal{A}_z^B,\mathcal{A}_{\bar z}^B\}\rangle &= \frac{1}{2}\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\\ &\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big(\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}+\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}.\end{aligned}\tag{5.38}$$

我们利用 $\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}=|z|^{-2}\cdot\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}-\phi_2(p,q)^{\binom{n-1}{2}}|z|^{2(n-1)}/[n-1]!_{\mathcal{R}(p,q)}$（通过对 $m=n-1$ 重新编号）将求和拆分，得到：

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\,\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}=\frac{|z|^2}{2}.\tag{5.39}$$

因此：

$$\begin{aligned}(\Delta\mathcal{Q}^B)^2 &= \frac{|z|^2}{2}+\frac{1}{2}\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}\,\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}-|z|^2\\ &= -\frac{|z|^2}{2}+\mathcal{G}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2).\Box\end{aligned}\tag{5.40}$$

5.5 不确定性关系与智能态

命题 5.11（对易子）。对易子 $[\mathcal{Q}^B、\mathcal{P}^B]$ 满足：

$$\begin{aligned}&{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|[\mathcal{Q}^B,\mathcal{P}^B]|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\\ &= i\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\\ &\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big(\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}-\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}.\end{aligned}\tag{5.41}$$

证明。 $[\mathcal{Q}^B,\mathcal{P}^B]=\frac{1}{2i}[\mathcal{A}_z^B+\mathcal{A}_{\bar z}^B,\ \mathcal{A}_z^B-\mathcal{A}_{\bar z}^B]=\frac{1}{i}[\mathcal{A}_{\bar z}^B,\ \mathcal{A}_z^B]=i(\mathcal{A}_z^B\mathcal{A}_{\bar z}^B-\mathcal{A}_{\bar z}^B\mathcal{A}_z^B)$。由（5.26）和（5.27）：

$$[\mathcal{Q}^B,\mathcal{P}^B]=i\sum_{n=0}^{\infty}\big(\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}-\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)\,|n,0,0\rangle\langle n,0,0|.\Box\tag{5.42}$$

定理 5.12 (智能态**)。** *R* $\mathcal{R}(p,\ q)$–超相干态 $|z,\ 0,\ 0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}$ 是 智能态，其意义与 *Aragone* 等人所述相同，*[2]*, 也就是说，它们使广义海森堡不等式达到饱和：

$$(\Delta\mathcal{Q}^B)^2(\Delta\mathcal{P}^B)^2=\frac{1}{4}\big|{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|[\mathcal{Q}^B,\mathcal{P}^B]|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\big|^2.\tag{5.43}$$

证明。
由（5.35）和（5.41）：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big|{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|[\mathcal{Q}^B,\mathcal{P}^B]|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\big|\\ &= \frac{1}{2}\big(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\big)^{-1}\\ &\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big(\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}-\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\big)\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\\ &= -\frac{|z|^2}{2}+\mathcal{G}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)=(\Delta\mathcal{Q}^B)^2=(\Delta\mathcal{P}^B)^2.\end{aligned}\tag{5.44}$$

实际上，将差值拆分：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{-1}\sum_n \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n+1}{2}}[n+1]_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\\
&-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{-1}\sum_n \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\\
&=\mathcal{G}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{-1}\sum_n \frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2n}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}.
\end{aligned}\tag{5.45}$$

现在 $\left(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{-1}\sum_n \phi_2(p,\ q)^{2\binom{n}{2}}[n]_{\mathcal{R}(p,q)}|z|^{2n}/[n]!\ _{\mathcal{R}(p,q)}=|z|^2$（通过重新编号和归一化性质）。因此，式（5.44）确实给出（$\Delta\mathcal{Q}^B$）^{2},以及：

$$\left(\Delta\mathcal{Q}^B\right)^2\left(\Delta\mathcal{P}^B\right)^2=\left(\Delta\mathcal{Q}^B\right)^4=\frac{1}{4}\left|{}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|[\mathcal{Q}^B,\mathcal{P}^B]|z,0,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\right|^2.\square\tag{5.46}$$

玻色子扇区中的Berezin量子化将 z 与 $\bar{z}$ 算符联系起来，这两个算符互为伴随；在未变形极限下，它们化为通常的湮灭算符和产生算符，并且它们在超相干态中的均值恢复为经典函数。$\mathcal{Q}^B$ 和$\mathcal{P}^B$ 的色散相等，且它们的乘积达到不确定性关系的下界：玻色子超相干态是智能态。

6 结论与展望

我们研究了在超代数$\mathcal{B}_0\oplus\mathcal{B}_1$,上构造的、带有两个格拉斯曼变量的$\mathcal{R}(p,\ q)$–超相干态，研究框架是Hounkonnou和Bukweli-Kyemba的$\mathcal{R}(p,\ q)$–变形量子代数，其中两个膨胀参数由在$(p,\ q)$处取值的亚纯函数 ϕ_1、 ϕ_2 给出。密度算符已分解到分次超 Fock 空间的四个扇区中，并且通过同一系列操作在每个扇区中获得了其对角表示：二元乘积、Berezin 积分、角积分、应用$\mathcal{R}(p,\ q)$–导数以及取极限 $r\to 0$。扇区参数函数给出了其统一紧致形式，其中从一个扇区转换到另一个扇区，只需将$\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$ 替换为其导数并添加格拉斯曼因子。

在分块对角假设下，四个扇区表示之和给出了总密度算符的精确公式，既有导数形式，也有矩阵形式。超归一化函数的四项分别为一个扇区的相干投影算符赋予权重，总算符是四个扇区的混合态，其权重为$^{-}$ $^{-}$、 $p_\sigma=\mathrm{Tr}(\rho^\sigma)$；其密度函数由四项组成，分别对应 Grassmann 单项式 1、 $\zeta_1'\zeta_1$、 $\zeta_2'\zeta_2$ 和$_-$ $\zeta_1'\zeta_2'\zeta_1\zeta_2$。

由恒等算符分解得到的扇区再生核满足厄米性、正性和矩阵乘法性质，其对角值具有显式的级数表达式；由此可得密度算符在超相干态基中的矩阵元。在积分表述中，总密度算符可由其密度函数恢复；作为单位算符函数的再生核，既能从左侧也能从右侧再生该密度函数，并且还能再生自身。玻色子扇区中的 Berezin量子化给出了与 z、 $\bar{z}$、 $|z|^2$、 z^2 和 $\bar{z}^2$对应的量子化算符，其平均值恢复了经典函数；超位置算符与超动量算符的色散相等，且超相干态使不确定性关系取等号，因此它们是智能态。

还可以进行一些自然的拓展。Berezin量子化可以扩展到费米子扇区，此时 Berezin 积分会进入量子化算符的定义本身。总密度算符的显式形式有助于研究特定的态，例如在分次Fock基中对角化的哈密顿算符的热平衡态，其权重 p_σ 和函数 F^σ 可以显式计算。扇区归一化的选择值得在一个适用于四个扇区的统一框架内确定；膨胀因子取决于该选择，正如注 3.11 和 4.7 中所述。扩展到任意数量的格拉斯曼变量会产生 2^N 个扇区，同样的方法也适用于这些扇区。最后，对特定的 (p,q) 和 q 情形、经典极限以及超相干态的统计性质（如量子数分布和 Mandel参数）的研究，将完善对这些态的物理描述。

费米扇区的对角表示

本附录包含命题 3.5和 3.7的计算；这些计算遵循命题 3.3中的步骤，但增加了 Berezin 积分（见注 3.11）。

A.1 ϕ_1-费米扇区：命题 3.5 的证明

ϕ_1-费米扇区的态 ($k_2 = 0$, $k_1 = 1$) 为：

$$|z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)} = \big(\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)\big)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2}\,z^n\,\phi_1(p,q)\,\zeta_1}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,|n,1,0\rangle, \tag{A.1}$$

$$^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,0| = \big(\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)\big)^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{m}{2}/2}\,\bar z^m\,\phi_1(p,q)\,\bar\zeta_1}{\sqrt{[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,\langle m,1,0|. \tag{A.2}$$

二元乘积为：

$$\begin{aligned}&|z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,0|\\ &= \big(\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)\big)^{-1}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2\,|\zeta_1|^2}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,z^n\bar z^m\,|n,1,0\rangle\langle m,1,0|.\end{aligned} \tag{A.3}$$

我们对 ζ_1 进行 Berezin 积分：$\int d\bar\zeta_1 d\zeta_1\cdot\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2=\phi_1(p,q)^2$ (规则 $\int d\bar\zeta d\zeta\cdot\bar\zeta\zeta=1$)。然后乘以 $\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)$ $=\sum_n n\,\phi_2(p,q)\binom{n}{2}|z|^{2(n-1)}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}$，即式 (2.36) 中 ϕ_1-费米部分的贡献，并令 $z=re^{i\theta}$：

$$\begin{aligned}&\int d\bar\zeta_1 d\zeta_1\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\cdot\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0|\\ &=\phi_1(p,q)^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,\big(\phi_1(p,q)^2\,|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\big)^{-1}\\ &\quad\times\sum_{n,m}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,r^{n+m}e^{i(n-m)\theta}\,|n,1,0\rangle\langle m,1,0|\\ &=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,r^{n+m}\,e^{i(n-m)\theta}\,|n,1,0\rangle\langle m,1,0|.\end{aligned} \tag{A.4}$$

我们乘以 $e^{il\theta}$ 并对 θ 积分：

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}d\theta\,e^{il\theta}\int d\bar\zeta_1 d\zeta_1\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0|\\ &=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,r^{n+m}\cdot 2\pi\,\delta(l+n-m)\,|n,1,0\rangle\langle m,1,0|.\end{aligned} \tag{A.5}$$

我们应用$(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^s$，利用（2.16）：

$$\begin{aligned}&(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^s\Big\{\int_0^{2\pi}d\theta\,e^{il\theta}\int d\bar\zeta_1 d\zeta_1\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\,|re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0|\Big\}\\ &=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,\frac{\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}{\mathcal{R}(p^{n+m-s},q^{n+m-s})!}\,r^{n+m-s}\cdot 2\pi\,\delta(l+n-m)\,|n,1,0\rangle\langle m,1,0|.\end{aligned} \tag{A.6}$$

对于 $r\to 0$：$s=n+m$, $l=m-n$，因此：

$$\begin{aligned}&\big(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\big)^{n+m}\Big\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{i(m-n)\theta}\int d\bar\zeta_1 d\zeta_1\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\\ &\qquad\times|re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0|\Big\}_{r=0}\\ &=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,|n,1,0\rangle\langle m,1,0|.\end{aligned} \tag{A.7}$$

求逆：

$$|n,1,0\rangle\langle m,1,0| = \frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!}$$

$$\times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\Big\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{i(m-n)\theta}\int d\bar{\zeta_1}d\zeta_1\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \times |re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0|\Big\}_{r=0}. \tag{A.8}$$

代入（3.3）后，得到（3.19），其中

$$\rho^{F_1}(n,m) = \frac{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2\,\mathcal{R}(p^{n+m},q^{n+m})!} \times \left(\partial_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{n+m}\Big\{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{i(m-n)\theta}\int d\bar{\zeta_1}d\zeta_1\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \times |re^{i\theta},\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,0|\Big\}_{r=0}. \tag{A.9}$$

□

A.2 双费米子扇区：命题 3.7的证明

双费米子态（$k_1=k_2=1$）为：

$$|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle^{(F_{12})}_{\mathcal{R}(p,q)} = \left(\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)\right)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}/2}\,z^n\,\phi_1(p,q)\,\zeta_1\,\phi_2(p,q)\,\zeta_2}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,|n,1,1\rangle. \tag{A.10}$$

二元乘积给出：

$$\begin{aligned}&|z,\zeta_1,\zeta_2\rangle^{(F_{12})}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_{12})}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,\zeta_1,\zeta_2| \\ &= \left(\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\right)^{-1}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}\,\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,z^n\bar{z}^m\,|n,1,1\rangle\langle m,1,1|.\end{aligned} \tag{A.11}$$

我们应用两个 Berezin 积分：$\int d\bar{\zeta_1}d\zeta_1\cdot|\zeta_1|^2=1$ 和 $\int d\bar{\zeta_2}d\zeta_2\cdot|\zeta_2|^2=1$，权重为 $\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2$，而（2.36）中的项 $\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)$ 为：

$$\begin{aligned}&\int d\bar{\zeta_1}d\zeta_1\,d\bar{\zeta_2}d\zeta_2\,\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2) \\ &\times|re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2\rangle^{(F_{12})}_{\mathcal{R}(p,q)}\,{}^{(F_{12})}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle re^{i\theta},\zeta_1,\zeta_2| \\ &= \phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\left(\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R}(p,q)}(r^2)\right)^{-1} \\ &\times\sum_{n,m}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,r^{n+m}e^{i(n-m)\theta}\,|n,1,1\rangle\langle m,1,1| \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})/2}}{\sqrt{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\,[m]!_{\mathcal{R}(p,q)}}}\,r^{n+m}\,e^{i(n-m)\theta}\,|n,1,1\rangle\langle m,1,1|.\end{aligned} \tag{A.12}$$

以下步骤与前面的证明相同：进行角积分得到 $2\pi\delta(l+n-m)$，应用 $(\partial_{\mathcal{R}(p,q)})^{\,s}$，其中 $s=n+m$，以及在 $l=m-n$ 下取极限 $r\to0$，从而得到（3.14），其中用 $|n$、1、$1m$、1、 $1|$替换 $|n$、0、$0m$、0、 $0|$。求逆得到（3.23）。□

B 扇区核性质的证明

本附录给出扇区核（4.14）–（4.17）的性质证明，以及对角核的正性、矩阵乘法和级数展开的证明。

B.1 命题4.10的证明

（*i*）$K^B_{\mathcal{R},p,q}$的幂等性。

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}}K^B_{\mathcal{R},p,q}(z',\xi)\,K^B_{\mathcal{R},p,q}(\xi,z)\,\frac{d^2\xi}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)}$$

$$= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'\xi)}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)}} \cdot \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\xi}z)}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}} \cdot \frac{d^2\xi}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)}$$

$$= \frac{1}{\pi^2\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}} \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'\xi)\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\xi}z)}{(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2))^2}\, d^2\xi. \tag{B.1}$$

玻色子恒等分解：

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)\ |z,0,0\rangle_{\mathcal{R},p,q}(\xi)\ {}_{\mathcal{R},p,q}\langle z,0,0|(\xi)\ d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\bar{\xi}) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^B_{\mathcal{R},p,q}} \tag{B.2}$$

由此可得，$d\mu_{\mathcal{R}(p,q)} = d^2\xi/(\pi\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2))$：

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'\xi)\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{\xi}z)}{(\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2))^2}\, d^2\xi = \pi \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} \langle z',0,0|\xi,0,0\rangle\langle\xi,0,0|z,0,0\rangle\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)\ d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}$$

$$= \pi\ \langle z',0,0|z,0,0\rangle\ =\ \pi\ \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'z)}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}. \tag{B.3}$$

因此：

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} K^B_{\mathcal{R},p,q}(z',\xi)\ K^B_{\mathcal{R},p,q}(\xi,z)\ \frac{d^2\xi}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2)}$$

$$= \frac{1}{\pi^2\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}} \cdot \pi \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'z)}{\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}$$

$$= \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'z)}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}} = K^B_{\mathcal{R},p,q}(z',z). \quad \square \tag{B.4}$$

(ii) 厄米性。

$$K^B_{\mathcal{R},p,q}(z',z)^* = \left[\frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'z)}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}\right]^*$$

$$= \frac{\overline{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'z)}}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}}$$

$$= \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}z')}{\pi\sqrt{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2)}} = K^B_{\mathcal{R},p,q}(z,z'). \quad \square \tag{B.5}$$

我们使用了 $\overline{\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'z)} = \mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}'z)^* = \mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(\bar{z}z')$，因为 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$ 具有实系数。*(iii)* 正性。

$$K^B_{\mathcal{R},p,q}(z,z) = \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}{\pi\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)^{1/2}\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)^{1/2}} = \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}{\pi\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)} = \frac{1}{\pi} > 0. \quad \square \tag{B.6}$$

(iv) 级数表示。

$$K^B_{\mathcal{R},p,q}(z,z) = \frac{1}{\pi\ \mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_2(p,q)^{n(n-1)/2}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}} |z|^{2n} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)} = \frac{1}{\pi}. \quad \square \tag{B.7}$$

B.2 命题 4.11 的证明

(i) 幂等性。 我们在 ϕ_1-费米的扇区中使用恒等算符分解：

$$\int \mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\xi|^2,|\varrho_1|^2,0)\ |z,\varrho_1,0\rangle_{\mathcal{R},p,q}(\xi)\ {}_{\mathcal{R},p,q}\langle z,\varrho_1,0|(\xi)\ d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}\ d\bar{\varrho}_1 d\varrho_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}}. \tag{B.8}$$

我们计算:

$$\begin{aligned}
&\int d^2\xi\, d\bar{\varrho}_1 d\varrho_1\; K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z',\zeta_1';\,\xi,\varrho_1)\; K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(\xi,\varrho_1;\,z,\zeta_1)\\
&= \frac{1}{\pi^2}\int \frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1'\varrho_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'\xi)\;\phi_1(p,q)^2\bar{\varrho}_1\zeta_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{\xi}z)}{\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\varrho_1,0)\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}\; d^2\xi\; d\bar{\varrho}_1 d\varrho_1\\
&= \frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1'\zeta_1}{\pi^2\,\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}\int \frac{\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'\xi)\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{\xi}z)}{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\varrho_1,0)^2}\; d^2\xi\;\int \phi_1(p,q)^2|\varrho_1|^2\; d\bar{\varrho}_1 d\varrho_1. \qquad \text{(B.9)}
\end{aligned}$$

由 Berezin: $\int d\bar{\varrho}_1 d\varrho_1\;\phi_1(p,\;q)^2|\varrho_1|^2=\phi_1(p,\;q)^2$。对 ξ 的积分通过（B.8）计算:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\phi_1(p,q)^2\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'\xi)\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{\xi}z)}{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\varrho_1,0)^2}\; d^2\xi\\
&= \pi\int \langle z',\zeta_1',0|\xi,\varrho_1,0\rangle\;\langle\xi,\varrho_1,0|z,\zeta_1,0\rangle\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(\xi,\varrho_1,0)\; d\mu_{\mathcal{R}(p,q)}\\
&= \pi\;\langle z',\zeta_1',0|z,\zeta_1,0\rangle\;=\;\pi\;\frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1'\zeta_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'z)}{\sqrt{\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}}. \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}$$

合并:

$$\begin{aligned}
\int K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}\;K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q} &= \frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1'\zeta_1}{\pi^2\,\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}\cdot\phi_1(p,q)^2\cdot\pi\frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1'\zeta_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'z)}{\sqrt{\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}}\\
&= \frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1'\zeta_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'z)}{\pi\;\sqrt{\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}}\;=\;K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z',\zeta_1';\,z,\zeta_1).\quad\square \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

（*ii*）厄米性。

$$\begin{aligned}
K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z',\zeta_1';\,z,\zeta_1)^* &= \left[\frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1'\zeta_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'z)}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}}\right]^* = \frac{\phi_1(p,q)^2\overline{\bar{\zeta}_1'\zeta_1}\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\overline{\bar{z}'z})}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}}}\\
&= \frac{\phi_1(p,q)^2\bar{\zeta}_1\zeta_1'\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}z')}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\;\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'}}\;=\;K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z,\zeta_1;\,z',\zeta_1').\quad\square \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}$$

我们使用了: $\bar{\zeta}_1'\overline{\zeta_1}=\bar{\zeta}_1\zeta_1'$（格拉斯曼变量的共轭）; $\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},\;p,\;q}$ 具有实系数。

（*iii*）正性。对于 $z'=z,\;\;\zeta_1'=\zeta_1$:

$$K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z,\zeta_1;\,z,\zeta_1)=\frac{\phi_1(p,q)^2\,\overline{\zeta_1}\,\zeta_1\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}\;=\;\frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\;\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}>0, \qquad \text{(B.13)}$$

因为 $\phi_1(p,\;q)^2$, $|\zeta_1|^2$, $\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},\;p,\;q}(|z|^2)$, 自然数集 $\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}>0$。 $\square$

（*iv*）级数表示。

$$K^{F_1}_{\mathcal{R},p,q}(z,\zeta_1;\,z,\zeta_1)=\frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2}{\pi\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\phi_2(p,q)^{n(n-1)/2}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,|z|^{2(n-1)}. \qquad \text{(B.14)}$$

B.3 命题证明4.15

对于厄米性，我们注意到:

$$\begin{aligned}
K^{F_{12}}_{\mathcal{R},p,q}(z',\boldsymbol{\zeta}';\,z,\boldsymbol{\zeta})^* &= \left[\frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\;\bar{\zeta}_1'\bar{\zeta}_2'\zeta_1\zeta_2\;\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}'z)}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\boldsymbol{\zeta}'|^2)\;\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)}}\right]^*\\
&= \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\;\overline{\bar{\zeta}_1'\bar{\zeta}_2'\zeta_1\zeta_2}\;\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}z')}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\;\mathcal{N}^s_{\mathcal{R},p,q}{}'}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2\zeta_1'\zeta_2'\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}z')}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R},p,q}{}'}} = K^{F_{12}}_{\mathcal{R},p,q}(z,\boldsymbol{\zeta};\,z',\boldsymbol{\zeta}'). \quad \square \tag{B.15}$$

对于正性，我们在 $z'=z$、$\boldsymbol{\zeta}'=\boldsymbol{\zeta}$ 处进行求值：

$$\begin{aligned} K^{F_{12}}_{\mathcal{R},p,q}(z,\boldsymbol{\zeta};\,z,\boldsymbol{\zeta}) &= \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,\overline{\zeta_1\zeta_2}\,\zeta_1\zeta_2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)} \\ &= \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2\,|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\boldsymbol{\zeta}|^2)} > 0. \quad \square \end{aligned} \tag{B.16}$$

B.4 命题的证明 4.24

扇区 B：

$$\begin{aligned} K^B(z,z) &= \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \\ &= \frac{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)}{\pi\,\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)} = \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \tag{B.17}$$

现在，级数 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_2(p,q)\binom{n}{2}|z|^{2n}/[n]!^{\mathcal{R}(p,q)}$ 的各项均为正项，因此 $K^B(z,z)=1/\pi>0$。更准确地说，展开可得：

$$K^B(z,z) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,|z|^{2n}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}}{[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}\,|z|^{2n}\right]^{-1} > 0. \tag{B.18}$$

扇区 F_1：

$$\begin{aligned} K^{F_1}(z,z;\zeta_1,\zeta_1) &= \frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)} \\ &= \frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\left[\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)+\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)\right]}. \end{aligned} \tag{B.19}$$

现在，对于 $|z|>0$，$\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,\phi_2(p,q)\binom{n}{2}|z|^{2(n-1)}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}>0$，且 $\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2>0$（因为 $\phi_1(p,q)=\phi_1(p,q)>0$ 对于 $0<q<p\le 1$ 成立），因此：

$$K^{F_1}(z,z;\zeta_1,\zeta_1) > 0. \tag{B.20}$$

相应的级数（通过 $\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}$/自然数集$^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}$）为：

$$K^{F_1}(z,z;\zeta_1,\zeta_1) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\sum_{n=1}^{\infty}n\,\phi_2(p,q)^{\binom{n}{2}}|z|^{2(n-1)}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}}{\mathrm{Exp}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)+\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}. \tag{B.21}$$

扇区 F_2： 由对称性 $\phi_1\leftrightarrow\phi_2$：

$$K^{F_2}(z,z;\zeta_2,\zeta_2) = \frac{\phi_2(p,q)^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,0,|\zeta_2|^2)} > 0. \tag{B.22}$$

扇区 F_{12}：

$$K^{F_{12}}(z,z;\zeta_1,\zeta_2,\zeta_1,\zeta_2) = \frac{\phi_1(p,q)^2\phi_2(p,q)^2|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\,\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,|\zeta_2|^2)}. \tag{B.23}$$

现在 $\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},\,p,\,q}(|z|^2)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\phi_2(p,\,q)\binom{n}{2}|z|^{2(n-2)}/[n]!_{\mathcal{R}(p,q)}\ge 0$，且自然数集$^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}>0$，因此 $K^{F_{12}}(z,\,z;\ldots)\ge 0$。因此对于所有 ε：$K^{\varepsilon}(z,\,z)>0$。$\square$

B.5 命题4.25 的证明

我们使用这两个核：

$$\begin{cases} K^B(z,\zeta) = \dfrac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \\ K^B(\zeta,z') = \dfrac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\zeta,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \end{cases} \tag{B.24}$$

于是：

$$\begin{aligned} &\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, K^B(z,\zeta)\, K^B(\zeta,z') \\ &= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi}\, \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\zeta,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \zeta,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\, {}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|\zeta,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \\ &= \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, \frac{|\zeta,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\, {}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \zeta,0,0|}{\pi} \\ &= \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi}\cdot 1 = K^B(z,z'). \end{aligned} \tag{B.25}$$

其中用到了幂等性 $\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, |\zeta,\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\, {}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \zeta,\mathbf{0},0|/\pi = \mathbf{1}$。

扇区 F_1：

$$\begin{cases} K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1) = \dfrac{{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \zeta,\eta_1,0|z,\zeta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \\ K^{F_1}(\zeta,z';\eta_1,\xi_1) = \dfrac{{}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z',\xi_1,0|\zeta,\eta_1,0\rangle^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} \end{cases} \tag{B.26}$$

我们计算：

$$\begin{aligned} &\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta \int d\bar\eta_1 d\eta_1\, K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1)\, K^{F_1}(\zeta,z';\eta_1,\xi_1) \\ &= \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta \int d\bar\eta_1 d\eta_1\, \frac{\phi_1(p,q)^2 \bar\eta_1\zeta_1\, \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar\zeta z)}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}} \\ &\quad\times \frac{\phi_1(p,q)^2 \bar\xi_1\eta_1\, \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar z'\zeta)}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\xi_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)}} \\ &= \frac{\phi_1(p,q)^2\bar\zeta_1}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}}\cdot\frac{\phi_1(p,q)^2\bar\xi_1}{\pi\sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\xi_1|^2,0)}} \\ &\quad\times \int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta\, \frac{\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar\zeta z)\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar z'\zeta)}{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)} \underbrace{\int d\bar\eta_1 d\eta_1\, \phi_1(p,q)^2\eta_1\bar\eta_1}_{\phi_1(p,q)^2}. \end{aligned} \tag{B.27}$$

Berezin 积分给出 $\int d\bar\eta_1 d\eta_1\, |\eta_1|^2 = 1$，因此 $\int d\bar\eta_1 d\eta_1\, \phi_1(p,q)^2|\eta_1|^2 = \phi_1(p,q)^2$。然后，利用性质：

$$\frac{\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar\zeta z)\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar z'\zeta)}{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|\zeta|^2,|\eta_1|^2,0)} = \frac{\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar z'z)}{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}\cdot\frac{|\zeta,\eta_1,0\rangle_{\mathcal{R}(p,q)}\, {}^{(F_1)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle \zeta,\eta_1,0|}{d^2\zeta} \tag{B.28}$$

（这由相干态的结构（2.37）得出），并对 ζ 积分：

$$\int_{\mathscr{D}_{\mathcal{R}(p,q)}} d^2\zeta \int d\bar\eta_1 d\eta_1\, K^{F_1}(z,\zeta;\zeta_1,\eta_1)\, K^{F_1}(\zeta,z';\eta_1,\xi_1)$$

$$= \frac{\phi_1(p,q)^2 \bar{\zeta}_1 \xi_1 \,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(\bar{z}' z)}{\pi \sqrt{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z'|^2,|\xi_1|^2,0)\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}} \cdot 1$$
$$= K^{F_1}(z,z';\zeta_1,\xi_1). \tag{B.29}$$

扇区 F_2 和 F_{12}：根据对称性 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$，当 F_2 时；并对 F 应用两次 $_{12}$：

$$\int d\mu^{F_2}\, K^{F_2}(z,\zeta)\, K^{F_2}(\zeta,z') = K^{F_2}(z,z'), \tag{B.30}$$
$$\int d\mu^{F_{12}}\, K^{F_{12}}(z,\zeta)\, K^{F_{12}}(\zeta,z') = K^{F_{12}}(z,z'). \tag{B.31}$$

因此，对所有 ε，性质（4.54）成立。 □

B.6 命题 4.26 的证明

所有这些结果都可直接由核的定义（4.37）–（4.44）在 $z' = z$ ($\zeta = z$) 处的取值，以及函数 $\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}$、$\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},\,p,\,q}$、$\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},\,p,\,q}$ 的级数展开得出。

对于 $K^B(z,\,z)$:

$$K^B(z,z) = \frac{{}^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}\langle z,0,0|z,0,0\rangle^{(B)}_{\mathcal{R}(p,q)}}{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot 1 = \frac{1}{\pi}, \tag{B.32}$$

因为 ${}_{(B)\,\mathcal{R}(p,\,q)}\langle z,\,0,\,0|z,\,0,\,0\rangle^{(B)}{}_{\mathcal{R}(p,\,q)} = \mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2)/\mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2) = 1$。

对于 $K^{F_1}(z,\,z;\,\zeta_1,\,\zeta_1)$:

$$K^{F_1}(z,z;\zeta_1,\zeta_1) = \frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2\,\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\pi\,\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)} = \frac{\phi_1(p,q)^2|\zeta_1|^2}{\pi}\,\frac{\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(|z|^2)}{\mathcal{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(|z|^2,|\zeta_1|^2,0)}. \tag{B.33}$$

展开 $\mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t) = \sum_{n\ge 1} n\phi_2(p,q)\binom{n}{2}t^{n-1}/[n]!^{\mathcal{R}(p,q)}$ 和 $\mathrm{N}^{\mathrm{s}}_{\mathcal{R}(p,q)}(t,s_1,0) = \mathrm{Exp}^{\mathcal{R}(p,q)}(t) + \phi_1(p,q)^2 s_1 \mathrm{Exp}'_{\mathcal{R},p,q}(t)$，即可得到 (4.56)。利用 $\mathrm{Exp}''_{\mathcal{R},p,q}(t) = \sum_{n\ge 2} n(n-1)\phi_2(p,q)\binom{n}{2}t^{n-2}/[n]!^{\mathcal{R}(p,q)}$，可用相同方法证明表达式 (4.57) 和 (4.58)。□

参考文献

[1] M. M. Akouetegan、I. Aremua 和 M. N. Hounkonnou，采用 *DOOT* 方法为同位振子构造 *Barut-Girardello* 相干态，预印本（2026），arXiv：2602.21250。DOI： https://doi.org/10.48550/arXiv.2602.21250。

[2] C. Aragone、E. Chalbaud 和 S. Salamó，智能自旋态，《J. Math. Phys.》**17**（1976），第11期，1963-1971。DOI: https://doi.org/10.1063/1.522835。

[3] C. Aragone 和 F. Zypman，超相干态，《物理学杂志A：数学与一般》**19**（1986），第12期，2267-2279。DOI: https://doi.org/10.1088/0305-4470/19/12/014。

[4] I. Aremua、M. N. Hounkonnou 和 E. Baloïtcha，朗道能级的相干态：代数与热力学性质，《数学物理报告》**76**（2015），第2期，247-269。DOI： https://doi.org/10.1016/S0034-4877(15)30032-X；arXiv：1301.6280。

[5] M. Arik 和 D. D. Coon，《解析函数的希尔伯特空间与广义相干态》，J. Math. Phys.**17**（1976），第 4 期，524-527。DOI： https://doi.org/10.1063/1.522937。

[6] E. Baloïtcha、M. N. Hounkonnou 和 E. B. Ngompe Nkouankam，《统一》$(p,\ q;\ \alpha,\ \beta,\ \nu;\ \gamma)$–变形振子代数：不可约表示与诱导的变形谐振子，J. Math. Phys. **53**（2012），第 1 期，013504。DOI：https://doi.org/10.1063/1.3675897。

[7] V. Bargmann，关于解析函数的希尔伯特空间及其相关积分变换。第一部分，Comm.Pure Appl. Math. **14**（1961），第 3 期，187-214。DOI： https://doi.org/10.1002/cpa.3160140303。

[8] F. A. Berezin，《量子化的一般概念》，Comm. Math. Phys. **40**（1975），第2期，153-174。DOI： https://doi.org/10.1007/BF01609397。

[9] L. C. Biedenharn，《量子群》 $SU_q(2)$《及玻色子算符的》 q–《类比》，J. Phys. A: Math. Gen. {style id='10'}22（1989），第18期，L873-L878。DOI： https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/18/004。

[10] J. D. Bukweli-Kyemba 和 M. N. Hounkonnou，（q；l,λ）–变形海森堡代数：相干态、其统计性质与几何，Afr. Diaspora J. Math. (N.S.) 14（2012），第2期，38-56；arXiv:1211.3312。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1211.3312。[11] J. D. Bukweli-Kyemba 和 M. N. Hounkonnou，（p,q)–变形罗杰斯-塞格ő多项式的刻画：相关量子代数、变形厄米多项式及相关性质，J. Phys. A: Math. Theor. 45（2012），第22期，225204。DOI：https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/22/225204；arXiv:1204.4705。[12] J. D. Bukweli-Kyemba 和 M. N. Hounkonnou，量子变形代数：相干态与特殊函数，预印本（2013），arXiv:1301.0116。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.0116。[13] I. M. Burban 和 A. U. Klimyk，P，Q–微分，P，Q–积分以及 P，Q–与量子群相关的超几何函数，Integral Transforms Spec. Funct. 2（1994），第1期，15-36。DOI：https://doi.org/10.1080/10652469408819035。[14] R. Chakrabarti 和 R. Jagannathan，（p,q）–双参数量子代数的振子实现，J. Phys. A: Math. Gen. 24（1991），第13期，L711-L718。DOI：https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/13/002。[15] V. G. Drinfeld，霍普夫代数与量子杨-巴克斯特方程，Dokl. Akad. Nauk SSSR 283（1985），第5期，1060-1064；英文译本：Soviet Math. Dokl. 32（1985），254-258；重印于 M. Jimbo（编），《可积系统中的杨-巴克斯特方程》，Adv. Ser. Math. Phys. 10，世界科学出版社，新加坡，1990，264-268。DOI：https://doi.org/10.1142/9789812798336_0013。[16] R. J. Glauber，辐射场的相干态与非相干态，Phys. Rev. 131（1963），第6期，2766-2788。DOI：https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766。[17] M. N. Hounkonnou 和 J. D. Bukweli Kyemba，（R p,q）–变形量子代数：相干态与特殊函数，J. Math. Phys. 51（2010），第6期，063518。DOI：https://doi.org/10.1063/1.3429996。[18] M. N. Hounkonnou 和 J. D. Bukweli Kyemba，R(p,q)–微积分：微分与积分，SUT J. Math. 49（2013），第2期，145-167。DOI：https://doi.org/10.55937/sut/1394548362。[19] M. N. Hounkonnou、S. Arjika 和 E. Baloïtcha，（q；l,λ）–变形海森堡代数：表示、特殊函数与量子化，预印本（2013），arXiv:1301.7028。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.7028。[20] M. N. Hounkonnou 和 F. Melong，R(p,q)–变形共形维拉索罗代数，J. Math. Phys. 60（2019），第2期，023501。DOI：https://doi.org/10.1063/1.5079812。[21] M. N. Hounkonnou、F. Melong 和 M. Mitrović，由 R(p,q)–变形量子代数导出的广义维特代数、维特 n–代数、维拉索罗代数与KdV方程，Rev. Math. Phys. 33（2021），第4期，2150011。DOI：https://doi.org/10.1142/S0129055X21500112。[22] M. N. Hounkonnou 和 E. B. Ngompe Nkouankam，新型（p,q；μ,ν,f）–变形态，J. Phys. A: Math. Theor. 40（2007），第40期，12113-12130。DOI：https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/40/007。[23] M. N. Hounkonnou 和 E. B. Ngompe Nkouankam，关于（$p,q,\mu,\nu,\phi_1,\phi_2$）–广义振子代数及相关双基超几何函数，J. Phys. A: Math. Theor. 40（2007），第30期，8835-8843。DOI：https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/30/015。[24] F. H. Jackson，关于 q–函数及某种差分算子，Trans. Roy. Soc. Edinburgh 46（1908），第2期，253-281。DOI：https://doi.org/10.1017/S0080456800002751。[25] F. H. Jackson，关于 q–定积分，Quart. J. Pure Appl. Math. 41（1910），193-203。[26] R. Jagannathan 和 K. Srinivasa Rao，双参数量子代数、李生基数及相关广义超几何级数，预印本（2006），arXiv:math/0602613。DOI：https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0602613。[27] M. Jimbo，q–差分类比、$U(\mathfrak{g})$与杨-巴克斯特方程，Lett. Math. Phys. 10（1985），第1期，63-69。DOI：https://doi.org/10.1007/BF00704588。[28] J. R. Klauder 和 B.-S. Skagerstam，《相干态：物理学与数学物理中的应用》，世界科学出版社，新加坡，1985。DOI：https://doi.org/10.1142/0096。[29] A. J. Macfarlane，关于量子谐振子及量子群 $SU(2)_q$的 q–类比，J. Phys. A: Math. Gen. 22（1989），第21期，4581-4588。DOI：https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/21/020。[30] A. Odzijewicz，量子代数及与圆盘相干态映射相关的 q–特殊函数，Comm. Math. Phys. 192（1998），第1期，183-215。DOI：https://doi.org/10.1007/s002200050296。

[31] A. Perelomov，《广义相干态及其应用》，Springer出版社，柏林，1986年。DOI： https://doi.org/10.1007/978-3-642-61629-7。[32] C. Quesne，具有明确单位分解的新型 q–变形相干态，《物理学杂志A：数学与一般》35（2002），第43期，9213–9226。DOI： https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/43/316。[33] C. Quesne、K. A. Penson 和 V. M. Tkachuk，适用于 $q > 1$的数学型 q–变形相干态，Phys. Lett. A 313（2003），第1–2期，29–36。DOI： https://doi.org/10.1016/S0375-9601(03)00732-1。[34] P. Njionou Sadjang，关于（p，q）–微积分的基本定理及一些（p，q）–泰勒公式，《数学结果》73（2018），第1期，文章39。DOI： https://doi.org/10.1007/s00025-018-0783-z。[35] E. C. G. Sudarshan，统计光束的半经典描述与量子力学描述的等价性，《物理评论快报》10（1963），第7期，277–279。DOI： https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.277。