arXiv:2611.30595v1 [econ.EM] 23 Nov 2026

基于观察性数据的自适应实验：针对长期处理效应的高效实验设计与渐近时间一致推断*

Kentaro Kawato†

东京大学经济学研究生院

摘要

在实验中估计长期处理效应，需要等待结果变得可观测，这可能延迟对干预措施的评估和后续决策。近期的计量经济学研究发展了识别方法，将实验数据与包含长期结果的观察性数据结合起来。本文提出，利用实验开始前已有的观察性数据，不仅可以进行识别，还可以用于设计自适应实验，在这类实验中，实验数据是按序收集的。为尽可能精确地估计长期平均处理效应，我们将其半参数效率界表示为协变量抽样规则和处理分配规则的函数，并针对这些规则最小化该效率界，从而刻画出最优固定实验设计。该实验设计取决于观察性预测中处理特定的长期结果条件方差，而这些方差只能通过实验参与者的数据来学习。因此，我们构建了一种序贯程序，随着实验数据不断积累来学习实验设计，并证明该程序的估计量能够达到在最优固定实验设计下实施的预言者估计量所具有的相同极限方差。我们还构建了一个渐近置信序列，其覆盖率在预先指定的起始轮次之后对所有轮次同时成立，因此实验者可以在每位参与者加入后查看区间，并在区间不再包含零时停止实验。蒙特卡洛模拟表明，与基线抽样和等概率分配相比，学习得到的实验设计能够提高精度并缩短检测时间。巴基斯坦毕业实验的示例说明，估计得到的条件方差异质性如何为抽样和处理分配提供依据。

关键词：自适应实验设计、奈曼分配、长期处理效应、替代指标、数据结合、渐近时间一致推断

*日期：2026年11月24日。感谢 Ryo Okui 一直以来的指导与支持。文中所有错误均由我负责。

†东京大学经济学研究生院，日本东京都文京区本乡 7-3-1，邮编 113-0033。
电子邮箱地址：kawato-kentaro380@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1 引言

在实验中观测长期结果所需的时间，可能会延迟对干预措施的评估和后续决策。设想一位营销人员向新客户提供优惠券。营销人员关心的或许不仅是优惠券能否立即增加购买，还关心优惠券是否能让购买行为在一段时间内持续增加（Huang andAscarza，2024年）。直接估计这些长期效应，需要对实验参与者进行跟踪，其时间远长于观测他们初始购买所需的时间。相比之下，购买频率、支出以及干预措施实施后不久的购买构成等短期结果，可以相对快速地观测到。如果历史客户记录等观察性数据将这些早期行为与后续购买行为联系起来，那么新实验中的短期信息或许能帮助我们了解其长期效应。这种数据结合的思路不仅适用于营销，也适用于教育、劳动力和发展领域；在这些领域，中间结果能够提供有关干预措施最终后果的信息。

本文探讨在实验开始前已有观察性数据时，应如何设计生成短期数据的实验。每当计划开展一项新实验以了解长期效应时，都会产生这一问题，因为招募哪些参与者以及如何分配处理，决定了能否利用短期数据精确估计该效应。Athey 等人Athey 等人(2026年提出的代理指标方法为我们的分析奠定了基础。在适当的识别假设下，该方法将实验数据中处理对短期结果变量的影响，与观察性数据中短期结果和长期结果之间的关系结合起来。沿用Athey 等人(2026年的定义，我们将观察性总体中给定短期替代指标和处理前协变量时长期结果的条件均值称为代理指标。越来越多的文献研究此类数据结合情境中的识别与估计问题（Chen 和 Ritzwoller，2023；Athey 等人，2025年；Ghassami 等人，2025年；Imbens 等人，2025年；Kallus 和 Mao，2025年；Park 和 Sasaki，2024年，2026年）。这些研究的识别与效率结果构成了我们分析的基础；我们利用这些结果来设计实验本身。

学习并实施这种实验设计是一个序贯问题。正如我们下文所示，高效的实验设计取决于在给定协变量的条件下，替代指标在各处理组内的变异程度。由于观察性数据没有记录处理信息，这些条件方差只能通过实验参与者的数据来学习。因此，实验设计会同时利用这两种数据来源。实验开始前即可获得的观察性样本用于估计目标协变量分布和

替代指标，而条件方差则通过较早参与实验的参与者来学习。同时，这类实验的参与者通常会随着时间推移陆续招募，且其短期结果能够很快观测到。因此，较早参与者的数据可用于决定接下来抽取哪些人以及如何分配处理；实验进行期间，也可以更新并检查长期效应的估计值。我们的三项贡献依次针对这一问题展开。我们刻画需要学习的实验设计，构造一种在实验设计会根据早期数据作出调整时仍然有效的估计量，并构造一种置信序列，使其在每轮结束后接受检查并用于停止实验时仍然有效。

我们的首项贡献是提出一种最优实验设计，用于估计观察性总体中的长期平均处理效应。实验设计包括抽取实验参与者所依据的协变量分布，以及依赖于协变量的处理分配概率；我们的目标是找到一种实验设计，使该效应能够以最小方差估计。我们采用半参数效率界作为实验设计准则，即正则估计量所能达到的最小渐近方差。 Chen 和 Ritzwoller (2023) 在上述数据合并情境中推导了这一界，并将两个样本合并处理。我们将其写成给定实验样本量和观察性样本量时、关于实验设计的函数，使其分解为依赖实验设计的实验部分，以及不依赖实验设计的观察性部分，并针对实验设计最小化实验部分。使该界达到最小值的实验设计，结合能够达到此界的估计量，在所有固定实验设计和正则估计量中实现最小渐近方差；而我们在下文构造的序贯估计量能够在学习实验设计的同时达到最小化后的界。由此得到的最优实验设计取决于目标总体中的协变量分布，以及替代指标在处理组和对照组中的条件标准差。最优实验设计会从目标总体中较常见、且替代指标在处理臂内变异较大的协变量区域招募更多参与者。在给定协变量的条件下，最优分配规则会将更大比例的参与者分配到条件标准差较大的处理组。该分配规则是应用于替代指标的条件内曼分配（Neyman，1934年；Hahn 等人，2011；Kato 等人，2024年，2025年）。

围绕替代指标而非单个短期结果进行设计，具有直接的实践意义。大量营销文献将临时价格促销带来的即时反应（如提前购买和囤货）与消费者购买行为的长期变化区分开来

（参见Anderson 和 Fox，2019，近期综述）。在优惠券示例中，假设对于既往使用量较高的顾客，优惠券使即时购买量的变异性高于不使用优惠券时的情况，而后续购买行为的变异性则更低；对于既往使用量较低的顾客，情况正好相反：使用优惠券时，他们的初始购买更为一致，而按常规价格重复购买的差异则更大。再假设，长期购买行为的替代指标主要取决于后续购买行为。那么，以即时购买的条件方差为目标的实验设计会将较高比例的高使用量客户分配至优惠券组；而以替代指标的条件方差为目标的实验设计则会分配较低比例，低使用量顾客的分配情况则恰好相反。两种实验设计招募这两类顾客的比例通常也不同。因此，直接优化一个便于测量的短期终点，并不一定能为估计长期效应提供高效的实验设计。

我们的第二项贡献是一种序贯估计量，能够在实验进行期间学习并实施这一实验设计。实验开始前，我们利用观察性样本估计目标协变量分布和替代指标，并在每一轮中始终使用这些固定的拟合结果。每轮实验开始前，我们利用累积的实验数据估计拟合替代指标的处理特异性条件均值和方差，将方差估计值代入最优抽样和处理分配规则，并且仅使用新实验观测收集前已确定的量来计算其得分。我们将这些可预测实验得分与在观察性样本上计算的增广校正项相结合，从而在每轮结束后得到一个估计值。这种可预测性使主要实验误差成为鞅平均，因此即使实验设计逐轮变化，鞅中心极限定理仍然适用；与此同时，主要观察误差则是对观察性样本取平均。然而，同一观察性样本还用于实验设计和计算每个实验得分，因此这两项误差并非由独立数据计算得出。由于观察性样本在第一轮开始前已完整收集，我们将其记录置于历史信息的起点，并对两项误差统一应用鞅中心极限定理。在极限下，两项方差贡献相加，这是因为给定所有观察性记录后，实验增量的条件均值为零，且其可预测方差收敛于一个常数。当观察性样本量和实验样本量以相近速度增长时，该估计量渐近正态，且其极限方差与预先知晓最优固定实验设计的预言机程序相同。

我们的第三项贡献是针对这一自适应程序下长期处理效应的渐近时间一致推断。额外招募参与者、实施干预以及测量结果变量都需要成本，因此实验者可能希望在现有证据足够充分时停止实验。然而，反复查看针对固定时点设计的置信区间，通常无法保证整个监测期内的覆盖率。我们借鉴任意时刻有效推断和渐近时间一致置信序列的相关文献（Johari 等人，2022年；Ramdas 等人，2023；Ramdas 和 Wang，2025年；Waudby-Smith 等人，2024年），构造一个渐近时间一致置信序列，用于估计长期平均处理效应，并适用于这一数据合并情境下的自适应抽样和处理分配。

在我们的设定中，一个关键难点是：观察性样本在实验开始前收集，并在每个监测时点重复使用。因此，序列中各个估计值的主要估计误差是共享的，而随着新观测数据到来，实验部分的不确定性则会不断变化。然而，从渐近角度看，监测期内的估计误差各自除以其方差后，其表现如同在这些方差倒数处取值的同一个布朗运动。因此，我们的区间会将估计标准误放大一个因子。该标准误结合了实验方差与观察性方差，而放大因子则根据 Ville' 关于非负超鞅的不等式推导而来（Ville，1939年；Howard 等人，2020年，2021年）。在监测起始时间选定的调节变量决定了该因子最小的轮次；对于所有满足我们条件的调节变量，覆盖保证均成立。随着观察样本量和监测起始时间增加，我们的渐近分析保留了这两种不确定性来源。在所述条件下，从规定的起始时间开始，在每个监测时点区间都包含真实效应的概率，其渐近下限至少为名义置信水平。该保证也适用于数据依赖的停止时刻，包括在区间首次排除预先指定基准时停止的规则。

我们通过一项根据优惠券示例校准的蒙特卡洛研究，补充理论分析。校准区分了即时购买、随后发生的短期重复购买以及长期累计购买；其构造方式使得在相同的先前使用分层内，即时购买准则和替代指标准则会朝相反方向调整处理分配。在这一校准中，同时根据替代指标调整抽样和处理分配的实验设计，相较于从估计的目标协变量分布中抽样并以概率

1/2 分配处理的基准实验设计，使长期效应估计量的蒙特卡洛方差降低了 13.1%；而基于即时购买的相应实验设计则使其增加了 9.8%，尽管即时购买仍是用于估计效应的代理向量的一部分。采用 90% 时间一致区间时，替代指标实验设计还将检出率从 95.4% 提高到 98.2%，并将平均停止样本量从 2,062.4 名参与者降至 1,846.1 名。

我们还利用巴基斯坦 Graduation 项目的随机评估数据，提供了一项回顾性实验设计示例。该项目是针对极端贫困家庭的多维干预，由 Banerjee 等人 (2015年) 报告。按照 Chen 和 Ritzwoller (2023) 的数据构建方法，我们将两年后测得的结果变量视为替代指标，并将三年后的人均月消费作为长期结果。由于该实验已经完成，我们反复将实际获得的实验样本划分为两个互不重叠的处理分层样本，并对变量进行屏蔽，以重现我们框架中的观察性和实验性数据结构。在每次共 1,000 次的此类划分中，我们针对 20 个处理前变量中的每一个，估计一种实验设计：其分配概率和抽样密度比在该协变量的五分位分层内均为常数。对各次划分取平均后，家庭资产指数使估计的实验方差准则减少幅度最大；与从目标协变量分布中抽样并采用等概率处理分配相比，减少了 8.23%。针对该协变量估计的实验设计与此基准方案的主要差异在于抽样方式：它从该指数的最高层招募了更多家庭；而针对人均月非食品消费估计的实验设计，主要差异在于处理分配。

1.1 相关文献

本文涉及三类文献。第一类关注结合实验数据与观察性数据进行因果推断。短期终点在统计学中有着悠久的历史，例如 Prentice (1989年) 和 Frangakis and Rubin (2002). 我们直接以 Athey 等人(2026年)提出的替代指标以及Chen 和 Ritzwoller(2023)的半参数效率分析为出发点。我们在这些识别与效率文献的基础上，将分析扩展至实验设计和序贯估计。

第二个方向涉及自适应实验设计。 Neyman （1934年）的分配原则近年来在计量经济学研究中受到关注。 Hahn 等人 （2011）在双阶段设定中采用奈曼分配，并改进了用于平均处理效应估计的处理分配。 Kato 等人 （2025年）和Cook 等人 （2024年）研究了多阶段自适应实验中的高效估计。

在实验设计领域，与之最接近的是 Kato 等人 （2024年），他们在实验中可以直接观察到所关注的结果时，联合选择抽样分布和处理分配概率。我们采用了这种联合优化结构，但将观察性数据与实验数据结合起来，并置于实验中无法观察长期结果的情境下。因此，用于实验设计和估计的观察性数据中的不确定性也被纳入分析。

相关研究也将替代指标纳入自适应实验（Anderer 等人，2022年；Shi 等人，2024年；Fan 等人，2025年）。在这些情形中，替代指标补充了有关主要结果的信息，而这些结果可能已被观察到，也可能延迟获得。在我们的设定中，实验中无法观察到长期结果，因此需要借助替代指标来识别长期处理效应。

第三条研究脉络关注时间一致推断。Howard 等人（2020年、2021年）基于非负超鞅，构造了时间一致的集中界和置信序列。Waudby-Smith 等人（2024年）建立了时间一致中心极限定理和渐近置信序列（Waudby-Smith 等人，2024年），其中包括采用估计所得干扰函数的应用。因果推断方面的应用包括Cook 等人（2024年）和Dalal 等人（2024年）。我们的贡献在于处理一种结合观察性数据与实验数据的自适应估计量。该渐近置信序列根据实验变异和共享的观察性变异各自不同的结构，对其累积量进行控制。

1.2 论文结构

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍统计替代模型及其识别结果。第3节将效率界表示为实验设计的函数，并推导最优实验设计。第 4 节确立自适应实验设计下的识别结果，第5节构造序贯估计量。第 6 节确立渐近正态性并达到最优固定设计界，第 7 节发展渐近时间一致推断。第 8 节和第 9 节分别介绍模拟，以及使用 Graduation 实验的实验设计示例。第 10 节作总结。附录包含证明和其他结果，附录 D 介绍补充材料。

2 设定与识别

本节介绍统计替代模型，并展示该模型如何利用两个数据源识别目标参数。这是第 3 节中效率界，以及第 4 节和第 5 节中自适应实验设计和估计量的起点。本节

2.1 节描述数据、目标参数和模型，第 2.2 节陈述识别假设以及由此得到的目标参数表示。

2.1 统计替代模型与目标参数

本小节介绍两个样本、目标参数，以及将二者联系起来的统计替代模型。令 $G_i \in \{\mathrm{E},\mathrm{O}\}$ 表示数据源指标，其中 E 和 O 分别对应实验样本和观察性样本。 X_i 表示基线协变量向量， $W_i \in \{0,1\}$表示处理， $S_i(w)$表示在处理分配为 w 时的潜在短期替代指标， $Y_i(w)$表示相应的潜在长期结果。已实现变量记为 S_i和 Y_i。观察性数据包含 (X, S, Y)，实验数据包含 (X, W, S)，如表 2.1所示。

这是Chen 和 Ritzwoller(2023) 和Athey 等人(2026年统计替代模型的数据结构。两个样本都没有同时记录处理、替代指标和长期结果。观察性数据揭示了长期结果如何随替代指标和基线协变量而变化，而实验则揭示了处理如何改变替代指标的条件分布。该模型假设，在给定替代指标和基线协变量的条件下，长期结果在实验总体中独立于处理，并且在两个总体中的分布相同。这些条件使得长期处理效应可以用处理特定的替代指标分布和观察性结果回归来表示。第 2.2 节将正式陈述这些条件，并说明它们能够识别下文定义的目标参数。

目标参数为

$$\tau := \mathbb{E}\big[Y_i(1) - Y_i(0) \mid G_i = \mathrm{O}\big].$$

这是观察性总体中的长期平均处理效应。在许多应用中，这一总体是一个自然的目标。在优惠券示例中，观察性数据是营销人员的历史客户记录，而营销人员希望了解这些记录所代表的广泛客户总体中的处理效应。相比之下，参与实验的人群可能具有选择性。只要相应的可迁移性和支持条件成立，并且目标协变量分布已知，或能够以理论部分假设所要求的速率进行估计，以下分析也适用于观察性总体并非目标总体的情况。

	协变量 X	处理 W	替代变量 S	长期结果 Y
观察性样本 (G =O)	✓	—	✓	✓
实验样本 (G =E)	✓	✓	✓	—

表2.1。 两个数据来源中的观测变量。勾号表示该变量在样本中可观测，短横线表示该变量不可观测。

2.2 识别

本小节说明，目标参数可以根据表2.1中的两种数据结构识别。我们首先陈述识别假设，这些假设将 Chen 和 Ritzwoller(2023) 和 Athey 等人 (2026年) 的统计替代模型形式化；然后介绍识别结果中出现的干扰函数，最后陈述定理 2.1中的结果。

假设 2.1 （一致性）。 几乎必然，

$$S_i = W_i S_i(1) + (1 - W_i) S_i(0), \qquad Y_i = W_i Y_i(1) + (1 - W_i) Y_i(0).$$

一致性将观测变量与分配的处理下的潜在变量联系起来。潜在变量是在单位间不存在干扰的情况下定义的。因此，单位i的潜在变量不取决于其他单位的处理分配。

假设 2.2（条件处理随机化）。

$$W_i \perp\!\!\!\perp \big(Y_i(0), Y_i(1), S_i(0), S_i(1)\big) \mid X_i, G_i = \mathrm{E}.$$

Wit在实验中，处理是在给定基线协变量的条件下随机分配的 .

假设 2.3 （统计替代性）。

$$W_i \perp\!\!\!\perp Y_i \mid S_i, X_i, G_i = \mathrm{E}.$$

在给定替代变量和基线协变量的条件下，实验总体中长期结果的条件分布不依赖于处理分配。该限制使得每种处理分配下的长期结果均值，从而长期处理效应，可以使用替代变量的相应分布来表示。

假设 2.4（条件外部效度）。

$$G_i \perp\!\!\!\perp \big(Y_i(0), Y_i(1), S_i(0), S_i(1)\big) \mid X_i.$$

给定基线协变量，观察性总体与实验总体共享相同的潜在结果分布。该假设排除了会改变潜在变量的未观测样本选择。

假设 2.5（样本间条件结果可比性）。

$$G_i \perp\!\!\!\perp Y_i \mid S_i, X_i.$$

该假设排除了两个总体在给定 S，X 时 Y 的条件分布存在差异。因此，利用观察性结果学习到的回归模型可以应用于实验代理变量。

为陈述识别结果，我们接下来介绍其中涉及的条件分布和干扰函数。下文所用的条件分布相对于固定参考测度 λ_X、λ_S 和 λ_Y 具有密度。协变量、替代变量和结果变量的取值属于欧几里得空间。用 $f_{X|G=\mathrm{O}}(x)$ 和 $f_{X|G=\mathrm{E}}(x)$ 表示两个总体中的协变量密度，用 $f_{S|X,\ G=\mathrm{O}}(\cdot \mid x)$ 表示观察性替代变量密度，用 $f_{S|W=w,\ X,\ G=\mathrm{E}}(\cdot \mid x)$ 表示实验总体中处理分配为 w 时的条件替代变量密度，并用 $f_{Y|S,\ X,\ G=\mathrm{O}}(\cdot \mid s,\ x)$ 表示观察性结果密度。定义

$$\mu(s,x) := \mathbb{E}[Y \mid S = s, X = x, G = \mathrm{O}].$$

遵循Athey 等人（2026年）的做法，我们将这一条件均值称为替代指标。将该函数与从实验数据中学习到的条件替代变量分布进行积分，我们定义

$$\mu_w(x) := \int \mu(s,x) f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) d\lambda_S(s).$$

我们将处理组和对照组之间的差定义为

$$\tau(X) = \mu_1(X) - \mu_0(X).$$

我们还将处理分配概率定义为

$$p(x) := \mathbb{P}(W = 1 \mid X = x, G = \mathrm{E}).$$

最后，我们将替代表示元定义为

$$\alpha(S, X) := \frac{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(S \mid X) - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(S \mid X)}{f_{S|X,G=\mathrm{O}}(S \mid X)}.$$

在下述假设 2.6 的支持集和正性条件下，这些函数在其使用的定义域上是可识别的。

假设 *2.6*（协变量重叠、处理正值性和替代指标支持集）。目标支持集中的每个协变量取值也都属于实验支持集。因此，$f_{X|G=\mathrm{O}}(x) > 0$意味着 $f_{X|G=\mathrm{E}}(x) > 0$。存在一个常数 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，使得 $\varepsilon \le p(x) \le 1 - \varepsilon$ 在目标支持集上成立。对于 $w \in \{0, 1\}$以及目标支持集中的每个 x，$f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) > 0$ 意味着$f_{S|X,G=\mathrm{O}}(s \mid x) > 0$ 对于 λ_S-几乎处处的 s成立，因此给定 $W = w$ 和 $X = x$ 时的实验性替代指标分布相对于给定 $X = x$时的观察性替代指标分布绝对连续。

目标支持集确保实验中可以对每个目标协变量取值进行抽样，处理正值性确保两种处理分配均可观察，而替代指标支持集确保观察性总体中的替代指标仅在其可识别的范围内进行评估。

在这些假设下，长期处理效应可识别如下。

定理 2.1（统计替代模型下的识别）。

$$\tau = \mathbb{E}\left[\mu_1(X) - \mu_0(X) \mid G = \mathrm{O}\right] \tag{2.1}$$

$$\tau = \mathbb{E}[\alpha(S, X)Y \mid G = \mathrm{O}] \tag{2.2}$$

$$\tau = \mathbb{E}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\left\{\frac{W\mu(S, X)}{p(X)} - \frac{(1 - W)\mu(S, X)}{1 - p(X)}\right\}\middle| G = \mathrm{E}\right] \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\tau = {} & \mathbb{E}\left[\mu_1(X) - \mu_0(X) + \alpha(S, X)\{Y - \mu(S, X)\}\middle| G = \mathrm{O}\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\left\{\frac{W\{\mu(S, X) - \mu_1(X)\}}{p(X)} - \frac{(1 - W)\{\mu(S, X) - \mu_0(X)\}}{1 - p(X)}\right\} \middle| G = \mathrm{E}\right].\end{aligned} \tag{2.4}$$

在方程（2.1）中，观察性数据可识别 $\mu(s, x)$，而随机实验可识别两个条件替代变量分布。将替代指标对处理组或对照组中短期结果的条件分布积分，可识别相应的条件长期均值。再对目标协变量分布取平均，可识别目标效应。方程（2.2）将同一目标改写为 Y 的加权表示。方程（2.3）则将该目标表示为逆概率加权形式

，该形式适用于实验样本，并将其迁移至观察性目标总体。结合这些表示可得方程（2.4）。增广恒等式将条件效应和观察性残差校正合并为在 $G = O$下的同一个期望，随后加上实验加权校正。我们以下文开发的估计量以方程（2.4）为基础。

定理 2.1 重述了文献中已有的识别结果。Athey 等人（2026年）给出了实验总体中平均处理效应的类似表示；Chen 和 Ritzwoller（2023）等人则给出了观察性总体中相应的表示。我们在此重述这些结果，因为本文其余部分均以此为基础。第3节中的效率界和最优实验设计，是针对第 3.1 节定义的固定设计乘积模型中方程（2.1）所定义的泛函推导的；第5节中的估计量则基于方程（2.4）中的增广表示。增广得分具有正交乘积余项结构。将其中的干扰函数替换为估计值后，引理 6.2 的估计量分解中的偏差项是两个估计误差的乘积。关于采用各自干扰函数设定的相关稳健性结果，见 Athey 等人（2026年）的注 6，以及 Chen 和 Ritzwoller（2023）的定理 3.1(2) 和注 3.2。完整证明见附录 A.1。

3 固定设计效率与最优实验设计

本节分两步推导最优实验设计。第 3.1 节将目标参数的半参数效率界表示为给定实验设计的函数；该效率界是在该实验设计下，正则估计量能够达到的最小渐近方差。第3.2节则针对实验协变量密度和处理分配概率，将这一效率界最小化。

3.1 固定设计效率界

本小节将效率界表示为给定实验设计的函数。该界本身已由 Chen 和 Ritzwoller(2023) 给出，正如定理 3.1 后的说明所述；实验设计问题需要在给定实验样本量和观察性样本量时确定其形式，其中实验设计仅通过实验部分起作用。回顾一下，$f_{X|G=E}(x)$是实验协变量密度，而 $p(x)$ 是给定 $X = x$时的处理分配概率。我们将实验设计定义为一对 $(f_{X|G=E}(\cdot),\ p(\cdot))$。因此，实验设计决定实验参与者的协变量分布以及处理分配概率。在表示该界时，实验设计$(f_{X|G=E}(\cdot),\ p(\cdot))$ 视为已知。

设实验样本量和观察性样本量分别为 N_{E} 和 N_{O}。从第 4 节开始，每轮招募一名实验参与者，因此 N_{E} 也就是轮次数。对于实验样本，记为 $D_s^{\mathrm{E}}:=(X_s,\ W_s,\ W_sS_s(1),\ (1-W_s)S_s(0))$，$1 \le s \le N_{\mathrm{E}}$，其中仅观察到由$W_s$ 选出的潜在替代指标。对于观察性样本，记为 $D_i^{\mathrm{O}}:=(X_i,\ S_i,\ Y_i)$，$1 \le i \le N_{\mathrm{O}}$。

在该固定设计基准中，每个样本内的各组数据均为独立同分布。令 P^{exp} 和 P^{obs} 分别表示实验数据与观察性数据的概率分布。于是，完整数据集具有乘积概率分布 $(P^{\mathrm{exp}})^{\otimes N_{\mathrm{E}}} \otimes (P^{\mathrm{obs}})^{\otimes N_{\mathrm{O}}}$；对于这类乘积概率分布所构成的模型，在实验设计保持固定的情况下，我们称之为固定设计乘积模型。实验总体中 (X, W, S) 的联合密度为 $f_{X|G=\mathrm{E}}(x)p(x)^w\{1-p(x)\}^{1-w} f_{S(1)|X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)^w f_{S(0)|X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)^{1-w}$，而观察性总体中 (X, S, Y) 的联合密度为 $f_{X|G=\mathrm{O}}(x)\, f_{S|X,G=\mathrm{O}}(s \mid x) f_{Y|S,X,G=\mathrm{O}}(y \mid s, x)$。

效率界通过一个实验方差分量和一个观察性方差分量表示，我们首先对其进行定义。对于 $w \in \{0,1\}$，定义

$$v_w(x) := \mathbb{E}[(\mu(S,x) - \mu_w(x))^2 \mid W = w, X = x, G = \mathrm{E}],$$
$$\sigma^2(s,x) := \mathbb{E}[(Y - \mu(S,X))^2 \mid S = s, X = x, G = \mathrm{O}].$$

实验性方差分量和观察性方差分量定义如下。

$$V^{\mathrm{exp}}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot), p(\cdot)) := \mathbb{E}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\left\{\frac{v_1(X)}{p(X)} + \frac{v_0(X)}{1-p(X)}\right\}\middle| G = \mathrm{O}\right]$$
$$V^{\mathrm{obs}} := \mathbb{E}[(\mu_1(X) - \mu_0(X) - \tau)^2 \mid G = \mathrm{O}]$$
$$+ \mathbb{E}[(\alpha(S,X))^2 \sigma^2(S,X) \mid G = \mathrm{O}].$$

$v_w(x)$是在处理组或对照组中，以 $X = x$ 为条件时，替代指标 $\mu(S, X)$的方差。长期结果在以(S, X)为条件化后产生的残差变异，则通过 $\sigma^2(S, X)$ V^{obs} 体现。利用这些量，半参数效率界可表述如下。

定理 3.1 (固定设计效率界)。 假设假设 *2.1–2.6* 和适当的矩条件（附录*A.2*）成立，且 N_{E} 与 $N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}} \to \kappa \in (0,\ \infty)$。对于固定实验设计 （$f_{X|G=\mathrm{E}}$（·），$p$（·））， 固定设计乘积模型中 τ 在 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 尺度上的半参数效率界为 ——

$$V^{\mathrm{exp}}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot), p(\cdot)) + \kappa V^{\mathrm{obs}}.$$

量 $V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot),\ p(\cdot))$ 和 V^{obs} 分别是实验性有效影响函数和观测有效影响函数的二阶矩，

$$\phi^{\exp}(S,W,X)=\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\left[\frac{W}{p(X)}\{\mu(S,X)-\mu_1(X)\}-\frac{1-W}{1-p(X)}\{\mu(S,X)-\mu_0(X)\}\right].$$

and

$$\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)=\tau(X)-\tau+\alpha(S,X)\{Y-\mu(S,X)\}.$$

将相应的未中心化观测得分定义为

$$\psi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y):=\tau(X)+\alpha(S,X)\{Y-\mu(S,X)\}.$$

那么 $\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)=\psi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)-\tau$。它们在各自总体分布下的二阶矩满足 $\mathbb{E}[\phi^{\exp}(S,W,X)^2\mid G=\mathrm{E}]=V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot),\ p(\cdot))$ 以及 $\mathbb{E}[\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)^2\mid G=\mathrm{O}]=V^{\mathrm{obs}}$。

界限中只有实验部分取决于实验者选择的实验设计。项 $V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot),\ p(\cdot))$ 会随参与者抽样所依据的协变量分布以及处理分配概率而变化，而 V^{obs} 是固定观测分布的方差贡献，并不取决于实验设计。因此，实验者可以通过选择实验设计来降低该界限；第3.2节推导了使$V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot),\ p(\cdot))$最小的实验设计。有效影响函数不仅用于推导并写出该界限，也提供了构建第5节估计量所依据的得分。

该证明适用于固定设计乘积模型，不会跨样本配对观测值。影响函数对表示未缩放的路径导数。在 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$尺度的极限坐标中，该影响函数对为 $(\phi^{\exp}(S,\ W,\ X),\ \sqrt{\kappa}\,\phi^{\mathrm{obs}}(X,\ S,\ Y))$，其平方范数给出了所示方差。对 G进行条件化后，这两个有效影响函数与 Chen 和 Ritzwoller（2023）中有效影响函数的实验部分和观察性部分一致，差别仅在于合并表示为两个样本附加的常数因子；将 Chen 和 Ritzwoller（2023）的合并样本界重新缩放至 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 尺度后，便与定理 3.1 中的界一致。附录A.2验证了这些有效影响函数并陈述了形式化的卷积结果，补充材料 2 推导了两个效率界之间的关系。

3.2 最优协变量抽样与处理分配

本小节推导最优实验设计。根据定理 3.1，固定实验设计仅通过 $V^{\exp}(f_{X|G=E}(\cdot),\ p(\cdot))$ 影响该界，因此，最优实验设计是在实验协变量密度和分配概率范围内最小化这一部分。接下来的结果给出了最小化该部分的取值。

定理 3.2（最优固定实验设计）。假设附录 *A.3* 中的正则性条件成立。特别是，处理组和对照组中的方差均为正且有限，标准化期望为正且有限，并且下文给出的分配概率属于 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$。在覆盖目标支持集的实验协变量密度以及该区间内的分配概率中，唯一的最优分配概率为

$$p^{\star}(x) = \frac{\sqrt{v_1(x)}}{\sqrt{v_1(x)} + \sqrt{v_0(x)}},$$

唯一的最优实验协变量密度为

$$f^{\star}_{X|G=E}(x) = \frac{f_{X|G=O}(x)\{\sqrt{v_1(x)} + \sqrt{v_0(x)}\}}{\mathbb{E}[\sqrt{v_1(X)} + \sqrt{v_0(X)} \mid G = O]},$$

因此，抽样密度比为 $f^{\star}_{X|G=E}(x) / f_{X|G=O}(x) = \{\sqrt{v_1(x)} + \sqrt{v_0(x)}\} / \mathbb{E}[\sqrt{v_1(X)} + \sqrt{v_0(X)} \mid G = O]$，且最小实验方差为 $V^{\exp,\star} = \left\{\mathbb{E}[\sqrt{v_1(X)} + \sqrt{v_0(X)} \mid G = O]\right\}^2$。

分配概率是处理组中替代指标的条件标准差，除以处理组和对照组中该指标的条件标准差之和。给定 x，该规则会将更多参与者分配到条件方差较大的组，以便使用更多观测值来估计其均值。这就是奈曼分配，源自分层抽样 Neyman (1934年)。

协变量抽样决定实验样本中哪些协变量取值会得到更多代表。最优规则会对替代指标变异性较大的协变量区域进行过度抽样，该变异性以处理组和对照组各自的条件标准差之和衡量，$\sqrt{v_1(x)} + \sqrt{v_0(x)}$。直观而言，这些区域中增加实验观测最有助于降低长期效应估计量的方差。由于这种做法会改变实验相对于目标总体的协变量分布，估计量会根据目标总体到实验总体的密度比对实验观测重新加权。实验设计中的直接对应研究是 Kato 等人 (2024年)，他们优化

实验协变量密度，并在实验中观测结果时联合优化处理分配。附录 A.3 给出了完整证明。

4 自适应实验设计下的识别

本节介绍自适应实验，并说明第 2 节的识别结果在该实验下仍然成立。在自适应实验中，实验者按轮次逐一招募参与者 $t = 1, 2, \ldots\ldots$，且在第一轮开始前即可获得完整的观察性样本。每轮开始前，实验者利用观察性样本和先前参与者的实验记录，选择抽取下一位参与者所依据的协变量密度以及处理分配概率。随后观测该参与者的协变量，按照选定的概率随机分配处理，并记录短期结果，而实验中始终不会观测该参与者的长期结果。由于实验设计会根据累积数据作出调整，因此可能随轮次变化，不同轮次的观测值彼此相关。

为陈述该实验设计下的识别问题，我们使用以观察样本量 N_{O} 为索引的三角阵记号，且实验时域 N_{E} 可能依赖于N_{O}。令 $\mathcal{D}_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} = \{(X_i,\ S_i,\ Y_i)\colon\ 1 \le i \le N_{\mathrm{O}}\}$ 为来自观测分布的独立同分布样本。定义 $\mathbb{F}_{0,\ N_{\mathrm{O}}} := \sigma(\mathcal{D}_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}})$，$\mathbb{F}_{t,\ N_{\mathrm{O}}} := \mathbb{F}_{0,\ N_{\mathrm{O}}} \vee \sigma\{(X_s,\ W_s,\ S_s)\colon\ 1 \le s \le t\}$。因此，$\mathbb{F}_{t-1,\ N_{\mathrm{O}}}$ 包含观察性样本以及第 t 轮开始前可获得的所有实验记录。

对于每一轮 t，条件实验协变量分布存在密度 $f_{X|G=\mathrm{E},\ t,\ N_{\mathrm{O}}}(x)$，且对每个可测集 B，

$$\mathbb{P}(X_t \in B \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}) = \int_B f_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(x)\,d\lambda_X(x).$$

分配概率为

$$p_{t,N_{\mathrm{O}}}(x) := \mathbb{P}(W_t = 1 \mid X_t = x, \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}).$$

这两个函数均根据在观察到第 t 轮的参与者之前可获得的观察性数据和实验记录来选择。我们对自适应实验施加以下条件。

假设 4.1（协变量重叠与处理正值性）。对于每一轮 t，几乎必然，$f_{X|G=\mathrm{O}}(x) > 0$ 蕴含 $f_{X|G=\mathrm{E},\ t,\ N_{\mathrm{O}}}(x) > 0$ 对于 λ_X-几乎处处的 x成立。此外，对于假设 *2.6* 中的常数 ε，几乎必然有 $\varepsilon \le p_{t,\ N_{\mathrm{O}}}(x) \le 1 - \varepsilon$ 对于密度为 $f_{X|G=\mathrm{E},\ t,\ N_{\mathrm{O}}}(x)$的分布下几乎处处的 x 成立。

该假设要求实验协变量密度在目标总体的支持集上处处为正，并确保每一轮都有处理组和对照组可供选择。

对于自适应实验的每一轮，我们施加以下实验性处理随机化的对应条件。

假设 4.2（序贯处理随机化）。对于每一轮 t，

$$W_t \perp\!\!\!\perp (S_t(0), S_t(1), Y_t(0), Y_t(1)) \mid X_t, \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}.$$

在抽取 X_t 之前，记录的过去信息决定实验协变量密度和分配概率。观察到 X_t 后，将评估分配概率，并根据当前协变量和记录的过去信息对 W_t 进行随机分配。我们进一步假设，条件替代变量分布不依赖于记录的历史信息。

假设 4.3（历史不变的条件替代变量分布）。对于每个可测集B、每一轮 t、每个 $w \in \{0,1\}$，以及在密度为 $f_{X|G=\mathrm{O}}(x)$的分布下几乎处处的 x，几乎必然有：

$$\mathbb{P}\{S_t(w) \in B \mid X_t = x, \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}\} = \mathbb{P}\{S \in B \mid W = w, X = x, G = \mathrm{E}\}.$$

只要干扰、延续效应或其他历史依赖性会改变所展示的 $S_t(w)$ 的条件分布，这一条件就排除了这些因素。可预测随机化和替代变量的条件分布等价性，将每个自适应轮次与第 2 节中使用的固定实验条件分布联系起来。结合识别假设，它们在实现的自适应实验设计下给出一种增广表示。这里，第 2 节中的固定实验是参考实验；根据假设 2.1、2.2 和 2.4，其处理特异性替代变量分布就是给定 X时 $S(w)$ 的条件分布，而不同总体共享这些条件分布。

命题 4.1（自适应实验设计下的增广表示）。在假设 *2.1–2.6* 和假设 *4.1–4.3* 下，只要所示各项绝对可积，对于每一轮 t，以下结论几乎必然成立：

$$\begin{aligned}\tau = {} & \mathbb{E}\left[\mu_1(X) - \mu_0(X) + \alpha(S,X)\{Y - \mu(S,X)\}\middle| G = \mathrm{O}\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X_t)}{f_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)}\left\{\frac{W_t\{\mu(S_t,X_t) - \mu_1(X_t)\}}{p_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)} - \frac{(1-W_t)\{\mu(S_t,X_t) - \mu_0(X_t)\}}{1 - p_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)}\right\} \middle| \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}\right].\end{aligned}$$

该命题是定理 2.1 在自适应实验设计下的对应版本。第5节将总体干扰函数替换为估计值，并使用第 t 轮所用的实验协变量密度和处理分配概率。附录 A.4 证明了该表示。

5 自适应实验设计与序贯估计

本节构造了一个目标参数的序贯估计量 τ，该估计量会在实验进行期间学习第3节中的最优实验设计。算法 5.1按照计算顺序定义了拟合干扰函数、插件实验设计、估计得分分量和时间一致 t 估计量；备注 5.1 和 5.2 讨论了如何估计条件矩和替代表示元。

观察性样本 $\mathcal{D}_{N_O}^{\text{obs}} = \{(X_i, S_i, Y_i) : 1 \le i \le N_O\}$ 在实验开始前即可获得。该样本用于估计目标协变量密度 $f_{X|G=O,\ N_O}(x)$ 和替代指标 $\widehat{\mu}_{N_O}(s, x)$，并且在整个实验过程中，这两项拟合结果保持不变。随后，实验轮次会估计拟合后的替代指标的处理特异性条件均值和方差。为说明其总体目标，我们采用以下记号。给定初始观测样本，定义对于 $w \in \{0,1\}$，

$$\widetilde{\mu}_{w,N_O}(x) := \int \widehat{\mu}_{N_O}(s,x) f_{S|W=w,X,G=E}(s \mid x)\, d\lambda_S(s),$$

and

$$\widetilde{v}_{w,N_O}(x) := \int \left\{\widehat{\mu}_{N_O}(s,x) - \widetilde{\mu}_{w,N_O}(x)\right\}^2 f_{S|W=w,X,G=E}(s \mid x)\, d\lambda_S(s).$$

因此，$\widetilde{\mu}_{w,\ N_O}(x)$ 和$\widetilde{v}_{w,\ N_O}(x)$ 分别是在处理组 w 中、总体替代变量分布下固定观察性预测 $\widehat{\mu}_{N_O}(S,\ x)$ 的条件均值和方差。以下算法将估计程序及相应的序贯估计量形式化。

算法 5.1 自适应实验设计与序贯估计

初始化。在第一个实验轮次之前，使用 $\mathcal{D}_{N_O}^{\text{obs}}$ 估计 $\widehat{f}_{X|G=O,\ N_O}(x)$ 和$\widehat{\mu}_{N_O}(s,\ x)$，并在整个实验过程中保持这两个拟合结果固定。对于 $t = 1, \ldots, N_E$，按以下步骤进行。

1. **轮前估计**。 利用截至第 $t-1$ 轮的实验历史信息，构造 $\mathrm{F}_{t-1,\ N_O}$-可测估计量 $\widehat{\mu}_{w,\ t,\ N_O}($ $x)$ of $\widetilde{\mu}_{w,\ N_O}(x)$ and$\widehat{v}_{w,\ t,\ N_O}(x)$ of $\widetilde{v}_{w,\ N_O}(x)$ for $w =$

算法 5.1

0，1. 在 $t = 1$ 处，使用实验前指定的初始拟合。定义并记录轮前条件效应函数$\widehat{\tau}_{t,\ N_{\mathrm{O}}}(x) := \widehat{\mu}_{1,\ t,\ N_{\mathrm{O}}}(x) - \widehat{\mu}_{0,\ t,\ N_{\mathrm{O}}}(x)$。

2. **插件实验设计**。 使用轮前条件方差估计，定义

$$\widehat{p}^{\star}_{t,N_{\mathrm{O}}}(x) := \frac{\sqrt{\widehat{v}_{1,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}}{\sqrt{\widehat{v}_{1,t,N_{\mathrm{O}}}(x)} + \sqrt{\widehat{v}_{0,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}},$$

and

$$\widehat{f}^{\star}_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(x) := \frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(x)\left\{\sqrt{\widehat{v}_{1,t,N_{\mathrm{O}}}(x)} + \sqrt{\widehat{v}_{0,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}\right\}}{\displaystyle\int \widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(u)\left\{\sqrt{\widehat{v}_{1,t,N_{\mathrm{O}}}(u)} + \sqrt{\widehat{v}_{0,t,N_{\mathrm{O}}}(u)}\right\} d\lambda_X(u)}.$$

分母和归一化积分必须为正且有限。假设由此得到的实验设计满足假设 **4.1**。将实际的第 t 轮实验设计设定并记录为

$$f_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) = \widehat{f}^{\star}_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot),$$
$$p_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) = \widehat{p}^{\star}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot).$$

3. **数据收集**。 在给定 $\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}$ 的条件下，从密度为$f_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(x)$的分布中抽取 X_t。以分配概率 $p_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)$随机分配 W_t，并观察 $S_t = S_t(W_t)$。

4. **实验评分评估**。 仅使用固定的观察数据拟合、步骤 1 中轮前的处理特异性均值和方差估计值，以及步骤 2 中记录的实验设计，计算

$$\widehat{\phi}^{\mathrm{exp}}_{t,N_{\mathrm{O}}}(S_t, W_t, X_t) := \frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(X_t)}{\widehat{f}^{\star}_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)}\left[\frac{W_t\left\{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(S_t, X_t) - \widehat{\mu}_{1,t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)\right\}}{\widehat{p}^{\star}_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)}\right.$$
$$\left. - \frac{(1 - W_t)\left\{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(S_t, X_t) - \widehat{\mu}_{0,t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)\right\}}{1 - \widehat{p}^{\star}_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)}\right].$$

永久记录此得分。后续更新干扰函数后，不会重新计算此前轮次记录的实验得分。

算法 5.1

5. **轮次后表示元更新**。 将 $(X_t,\ W_t,\ S_t)$ 纳入实验历史。利用初始观测样本和截至第 t 轮的实验数据，构造第 2 节中定义的替代表示元 $\alpha(s,\ x)$ 的 $\mathrm{F}_{t,\ N_\mathrm{O}}$-可测估计量 $\widehat{\alpha}_{t,\ N_\mathrm{O}}(s,\ x)$。

6. **估计量更新**。 计算各轮次之前记录的条件效应函数的历史平均值，$\tau_{t,\ N_\mathrm{O}}(x)$: $= t^{-1}\sum_{s=1}^{t}\widehat{\tau}_{s,\ N_\mathrm{O}}(x)$。定义拟合的未中心化观测得分如下:

$$\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_\mathrm{O}}(X,S,Y) := \overline{\tau}_{t,N_\mathrm{O}}(X) + \widehat{\alpha}_{t,N_\mathrm{O}}(S,X)\left\{Y - \widehat{\mu}_{N_\mathrm{O}}(S,X)\right\}.$$

时刻 t 的估计量为

$$\widehat{\tau}_{t,N_\mathrm{O}} := \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widehat{\phi}^{\mathrm{exp}}_{s,N_\mathrm{O}}(S_s,W_s,X_s) + \frac{1}{N_\mathrm{O}}\sum_{i=1}^{N_\mathrm{O}}\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_\mathrm{O}}(X_i,S_i,Y_i).$$

在 $t = N_\mathrm{E}$ 时，报告$\widehat{\tau}_{N_\mathrm{E},\ N_\mathrm{O}}$。因此，每个实验轮次结束后都可以获得一个估计值。

将实验得分中的拟合量替换为其总体对应量，即可得到在记录的实验设计下计算的实验有效影响函数。根据定理 3.1，观测有效影响函数满足 $\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y) = \psi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y) - \tau$，因此，$\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t},_{N_\mathrm{O}}$ 估计相应的未中心化观测得分。第 t 轮实验得分中使用的干扰函数和实验设计量在观测到 X_t 之前就已确定，因此是 $\mathrm{F}_{t-1,N_\mathrm{O}}$-可测的。这种可预测性对于在下一节的引理 6.1 中确立鞅结构至关重要。相比之下，$\widehat{\alpha}_{t,N_\mathrm{O}}$ 以及更新后的观测得分可能会使用第 t 轮的观测，因此是 $\mathrm{F}_{t,N_\mathrm{O}}$-可测的。此外，时间平均值 $\tau_{t,N_\mathrm{O}}(x) := t^{-1}\sum_{s=1}^{t}\widehat{\tau}_{s,N_\mathrm{O}}(x)$ 用于$\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t}$ $,N_\mathrm{O}(X,S,Y)$，以得到下一节引理 6.2 中确立的分解。第6节和第7节总结了各估计量所需满足的条件。

–

注 5.1 (轮次开始前的条件矩估计)。 算法 5.1 第 1 步中的条件矩可以直接根据实验历史进行估计。具体而言，在每个处理组内，可以使用先前的实验观测 $\widehat{\mu}_{N_\mathrm{O}}(S_s,\ X_s)$ 和 $\widehat{\mu}_{N_\mathrm{O}}(S_s,\ X_s)^2$ 对 X_s 进行回归。或者，也可以在估计的处理特异性条件替代密度下对 $\widehat{\mu}_{N_\mathrm{O}}(s,\ x)$ 积分，以计算相同的条件矩。不过，这

后一种方法需要估计 S 的条件密度，因此当代理向量 S 的维度较高时，可能会变得困难。

备注 5.2（替代表示元的估计）。观测得分涉及第 2.2 节中引入的替代表示元，$\alpha(s,x) = \{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\}/f_{S|X,G=\mathrm{O}}(s \mid x)$。表示元可以通过条件密度估计或条件概率估计来估计。

1. 基于密度的估计。在实验开始之前，使用观察性样本估计 $f_{S|X,G=\mathrm{O},N_\mathrm{O}}(s \mid x)$，并固定该估计。观察到第 t 轮后，使用截至该轮的实验数据，估计处理组和对照组臂的条件代理密度，记为 $f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E},t}(s \mid x)$，其中 $w = 0$、1 和集合 $\widehat{\alpha}_{t,N_\mathrm{O}}(s,x) = \{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E},t}(s \mid x) - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E},t}(s \mid x)\}/f_{S|X,G=\mathrm{O},N_\mathrm{O}}(s \mid x)$。然而，当 S 为多维时，直接进行条件密度估计通常较为困难。

2. **基于二元分类的估计**。表示元无需直接估计条件代理密度，而是可以根据条件处理概率和数据来源概率构造。为此，将观察性总体分布和一个保留治疗特异性条件代理分布 $f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}$ 的参考实验分布嵌入到共同参考分布 Q 中，该分布包含 G。附录 A.5 给出了这一参考分布的具体构造。在相同的参考分布 Q 下，定义

$$
\begin{aligned}
p_Q(x) &:= Q(W = 1 \mid X = x, G = \mathrm{E}),\\
p_Q(s,x) &:= Q(W = 1 \mid S = s, X = x, G = \mathrm{E}),\\
\gamma_Q(x) &:= Q(G = \mathrm{O} \mid X = x),\\
\gamma_Q(s,x) &:= Q(G = \mathrm{O} \mid S = s, X = x).
\end{aligned}
$$

根据贝叶斯定理，

$$
\alpha(s,x) = \frac{\gamma_Q(x)}{\gamma_Q(s,x)} \frac{1-\gamma_Q(s,x)}{1-\gamma_Q(x)} \frac{p_Q(s,x) - p_Q(x)}{p_Q(x)\{1-p_Q(x)\}}.
$$

观察完第 t 轮后，使用 $\widehat{p}_Q(s, x)$、$\widehat{p}_Q(x)$、$\widehat{\gamma}_Q(s, x)$ 和 $\widehat{\gamma}_Q(x)$ 估计该表达式中的各个分量；这些估计量均以同一参考分布 Q 为目标构造，并用这些估计量替换相应的总体量，从而得到 $\widehat{\alpha}_{t,N_\mathrm{O}}(s, x)$。这种基于分类的构造避免了在构造表示元时直接估计条件代理密度。

6 渐近正态性与最优固定设计界的达成

本节表明，第 5 节的序贯估计量渐近正态，并且当 $N_{\mathrm{O}},\ N_{\mathrm{E}} \to \infty$ 时达到第3节的最优固定设计界。第 6.1 节对实验得分进行中心化以得到鞅差，并将估计量分解为实验鞅平均、观测独立同分布经验平均和余项；第 6.2 节则说明余项可忽略且估计量渐近正态、方差等于最优固定设计界的方差所需满足的条件。

6.1 鞅中心化与估计量分解

本小节对实验得分进行中心化，并对估计量进行分解。本节中我们将始终使用以下记号。对于函数 g of X，记 $P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O}},N_{\mathrm{O}}}g := \int g(x)\,\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O}},N_{\mathrm{O}}(x)d\lambda_X(x)$ and $P_{f_{X\mid G=\mathrm{O}}}g := \int g(x)\,f_{X\mid G=\mathrm{O}}(x)d\lambda_X(x)$。对于函数 $g$of (X,S,Y)，记 $P^{\mathrm{obs}}g := \mathbb{E}[g(X,S,Y)\mid G=\mathrm{O}]$and $\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}}g := N^{-1}\mathrm{O}\ \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}} g(X_i,S_i,Y_i)$。相应的范数为$\|g\|_{2,\mathrm{obs}} := \{P^{\mathrm{obs}}(g^2)\}^{1/2}$ and $\|a\|_{2,X\mid G=\mathrm{O}} := \{\mathbb{E}[a(X)^2\mid G=\mathrm{O}]\}^{1/2}$。

算法 5.1 中的估计顺序使得实验得分除新的第t 轮观测外是可预测的。具体而言，在评估第 t 轮得分时，$\widehat{\mu}_{w、\ t、\ N_{\mathrm{O}}}(\cdot)$、$\widehat{\tau}_{t、\ N_{\mathrm{O}}}(\cdot)$ 以及所记录的实验设计（$f_{X\mid G=\mathrm{E}、\ t、\ N_{\mathrm{O}}、\ p_{t、\ N_{\mathrm{O}}}}$）均为 $\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}$-可测。先在以 X_t 为条件的情况下对（W_t、 S_t）积分，再对实验协变量密度积分，便得到恒等式 $\mathbb{E}[\widehat{\phi}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}(S_t,W_t,X_t)\ \mid \mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] = P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O}},N_{\mathrm{O}}}\{\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)-\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\}$，其中 $\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(x) := \widetilde{\mu}_{1,N_{\mathrm{O}}}(x)\ -\widetilde{\mu}_{0,N_{\mathrm{O}}}(x)$。据此，定义

$$\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}} := \widehat{\phi}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}(S_t,W_t,X_t) + P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}\{\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)-\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\}.$$

下面的引理记录了由此得到的鞅差性质。

引理 6.1（鞅中心化）。在假设 *2.1*、假设 *4.1–4.3* 以及假设 *A.6.1* 中的常见正则性条件下，对于每个适用的 N_{O} 和 t，使得 $\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}}] < \infty$, $\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}$是$\mathrm{F}_{t,N_{\mathrm{O}}}$-可测的，且 $\mathbb{E}[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}\mid \mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] = 0$。

引理 6.1 使自适应收集的实验数据在数学上易于处理。由于实验设计和干扰参数估计会逐轮变化，并且取决于更早的观测，因此实验得分既不独立，也不同分布。不过，经过中心化后，给定过去信息，其均值为零，因此其均值适用鞅中心极限定理；这与固定实验设计且观测相互独立时适用普通中心极限定理的情形相同。此性质要求第 t 轮得分中的每个量都必须在观测第 t 位参与者之前确定，这

也是算法 5.1 使用轮次开始前的估计值计算每个得分，并且不会在后续更新后重新计算的原因。证明见附录 A.6.2。

接下来我们给出建立渐近正态性所需的分解，这是本节的主要结果。

引理 6.2（估计量分解）。在假设 *2.1–2.6* 下，对于每个适用的 N_{O} 以及每个 $t \geq 1$，特别是 $1 \leq t \leq N_{\mathrm{E}}$，只要所显示的各项可积，

$$\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \tau = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} + L^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} + R^{\mathrm{i}}_{t,N_{\mathrm{O}}} + R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}} + R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}},$$

其中

$$\begin{aligned}
L^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} &:= (\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} - P^{\mathrm{obs}})\psi^{\mathrm{obs}}(\cdot),\\
R^{\mathrm{i}}_{t,N_{\mathrm{O}}} &:= (\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} - P^{\mathrm{obs}}) \left\{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \psi^{\mathrm{obs}}(\cdot)\right\},\\
R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}} &:= \left(P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}} - P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\right) \left\{\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \overline{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\right\},\\
R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}} &:= P^{\mathrm{obs}} \left[\left\{\widehat{\alpha}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \alpha(\cdot)\right\} \left\{\mu(\cdot) - \widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\right\}\right].
\end{aligned}$$

根据引理 6.1，首项实验项是一个鞅平均，而 $L^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}}$ 是基于观察性样本的独立同分布经验平均。第一项余项是将总体观察性评分替换为其拟合对应项所产生的经验过程误差。第二项是目标密度误差与固定拟合总体条件效应和其历史估计之间差异的乘积。第三项是由替代指标和替代表示元的估计所产生的乘积余项。第 6.2 节给出了相关条件，在这些条件下，三个余项在 $N_{\mathrm{E}}^{-1/2}$ 尺度下均可忽略，且实验鞅平均的条件方差收敛于预言机固定设计基准。

6.2 极限分布与最优固定设计界的实现

在以下假设以及附录 A.6 中的正则性条件下，我们证明时刻 N_{E} 的渐近正态性。这些正则性条件要求实际实验设计与插件实验设计一致，目标与实验协变量分布具有共同支撑集，并且真实方差以及轮次 1、……、N_{E} 中的拟合方差量以趋于 1 的概率有界且远离零。

Ass假设 6.1 (联合样本增长)。当 $N_{\mathrm{O}} \to \infty$，$N_{\mathrm{E}} \to \infty$ 且 $N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}} \to \kappa \in (0, \infty)$.

这一机制使实验性和观察性部分保持在相同的 $N_{\mathrm{E}}^{-1/2}$ 尺度上。因此，在这种归一化下，两种方差贡献都会进入极限分布。

假设 6.2（处理特异性均值和方差估计值的时间平均一致性）。 对于 $w = 0,\ 1$，上确界取遍目标支持集，

$$\frac{1}{N_{\mathrm{E}}} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \sup_{x} |\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x) - \widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)|^2 \xrightarrow{p} 0, \qquad w = 0, 1,$$

$$\frac{1}{N_{\mathrm{E}}} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \sup_{x} \left|\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x) - \widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)\right| \xrightarrow{p} 0, \qquad w = 0, 1.$$

假设 6.2 允许干扰参数估计在实验初期不准确，但要求其估计误差在整个实验期间的平均值趋于零，从而通过学习实验设计产生的误差不会持续影响渐近方差。对于方差论证而言，一致性已足够；假设 6.6 则单独要求满足控制偏差所需的乘积收敛率。

假设 6.3（鞅矩条件）。对于每个 N_{O} 和 $1 \le t \le N_{\mathrm{E}}$，$\mathbb{E}[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}^2] < \infty$。对于某个 $r > 2$，$N_{\mathrm{E}}^{-r/2} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \mathbb{E}[|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|^r \mid \mathrm{F}_{t-1,\ N_{\mathrm{O}}}] \xrightarrow{p} 0$。

施加这些条件是为了将鞅中心极限定理应用于实验部分。第二个条件是条件李雅普诺夫条件，它蕴含 Hall 和 Heyde（1980年）的推论 3.1 中所用的条件林德伯格条件。它能防止少数极端加权观测主导标准化估计量。

假设 6.4（目标密度与替代指标一致性）。假设 $\|\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\|_\infty = O_p(1)$。此外，对于 $w = 0,\ 1$，

$$\mathbb{E}_{X|G=\mathrm{O}} \left[\left| \frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)} - 1 \right|^2 \right] = o_p(1),$$

$$\mathbb{E}_{X|G=\mathrm{O}} \mathbb{E}_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}[\{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(S, X) - \mu(S, X)\}^2 \mid X] = o_p(1).$$

这些条件要求，由观察性数据估计得到的密度和替代指标的总体 L_2-风险以概率收敛到零。

假设 6.5（终止时间的观察性得分正则性）。在 $t = N_{\mathrm{E}}$，

$$\|\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \psi^{\mathrm{obs}}(\cdot)\|_{2,\mathrm{obs}} = o_p(1), \qquad \sqrt{N_{\mathrm{O}}}(\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} - P^{\mathrm{obs}})(\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \psi^{\mathrm{obs}}(\cdot)) = o_p(1).$$

观测得分满足 $P^{\text{obs}}\psi^{\text{obs}}(\cdot) = \tau$ 且 $\mathbb{E}^{\text{obs}}[(\psi^{\text{obs}}(X, S, Y) - \tau)^2] = V^{\text{obs}} < \infty$.

第一个条件要求拟合的观测得分在总体 L_2范数下具有一致性。第二个条件使相应的经验过程误差在渐近意义下可忽略。Donsker 条件（例如参见 van der Vaart (1998年)）是充分的。

假设 6.6 （终止时间的乘积速率条件）。

$$\sqrt{N_{\text{O}}}\left\|\frac{\widehat{f}_{X|G=\text{O},N_{\text{O}}}(\cdot)}{f_{X|G=\text{O}}(\cdot)} - 1\right\|_{2,X|G=\text{O}} \|\widetilde{\tau}_{N_{\text{O}}}(\cdot) - \overline{\tau}_{N_{\text{E}},N_{\text{O}}}(\cdot)\|_{2,X|G=\text{O}} = o_p(1).$$

$$\sqrt{N_{\text{O}}}\|\widehat{\mu}_{N_{\text{O}}}(\cdot) - \mu(\cdot)\|_{2,\text{obs}}\|\widehat{\alpha}_{N_{\text{E}},N_{\text{O}}}(\cdot) - \alpha(\cdot)\|_{2,\text{obs}} = o_p(1).$$

第一个乘积使拟合目标分布与目标分布之间的差在 $N^{-1/2}$ E 尺度下可忽略。第二个乘积避免观察性总体中的拟合替代表示元和替代指标在时间 N_{E} 产生一阶偏差。两个干扰函数无需以相同速率估计。一个函数估计得更快，可以允许另一个以较慢速率估计。这类乘积速率条件出现在 Chernozhukov 等人 (2018)提出的典型去偏机器学习框架中。在上述假设下，该估计量具有以下极限分布。

定理 6.1 （渐近正态性及达到最优固定设计界）。在假设 *2.1–2.6*、假设 *4.1–4.3*、假设 *6.1–6.6*，以及附录假设 *A.6.1(i)–(ix)*中的第 *6* 节条件下，

$$\sqrt{N_{\text{E}}}(\widehat{\tau}_{N_{\text{E}},N_{\text{O}}} - \tau) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, V^{\text{exp},\star} + \kappa V^{\text{obs}}).$$

定理 6.1 表明，在实验过程中学习实验设计不会增加极限方差。极限方差是将定理 3.1 的界代入定理 3.2 中的最优实验设计所得的结果，也就是预先知晓该实验设计的预言机程序能够达到的方差。根据假设 6.5 和 6.6 以及 $N_{\text{E}}/N_{\text{O}} \to \kappa$，引理 6.2 的分解中三个余项在 $N^{-1/2}$ E 尺度下均可忽略不计。附录 A.6 通过对观测项和实验项之和应用单变量鞅三角阵中心极限定理证明了这一结果，其中观测记录排在前面。

补充材料 2 给出了在模型设定正确且为有限维的情况下，假设 6.2、6.4 和 6.6 成立的充分条件。

7 渐近时间一致推断

本节为目标效应的序贯监测构建渐近置信序列，并证明从预先设定的监测时间起具有渐近同时覆盖率。第 7.1 节构建该置信序列，第 7.2 节陈述其覆盖率成立的条件，第7.3节则证明时间一致覆盖，并说明其对依赖数据的停止的意义。

7.1 监测框架与置信序列的构造

本小节构造置信序列。在本节中，算法 5.1 的轮次持续进行，不设终止轮次， $t = 1, 2, \ldots$因此，以下估计量和方差估计量在每一轮次都有定义。我们先介绍决定其宽度的方差量。

对于 $t \geq 1$，实验鞅增量的平均条件方差定义为 $V_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\exp} := t^{-1} \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}[\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}^2 \mid \mathrm{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}]$。其可行估计量为

$$\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\exp} := \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \left[\widehat{\phi}_{s,N_{\mathrm{O}}}^{\exp}(S_s, W_s, X_s) + P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}} \widehat{\tau}_{s,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^{t} \left\{ \widehat{\phi}_{\ell,N_{\mathrm{O}}}^{\exp}(S_\ell, W_\ell, X_\ell) + P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}} \widehat{\tau}_{\ell,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) \right\} \right]^2,$$

观测方差估计量为

$$\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} := \frac{1}{N_{\mathrm{O}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}} \left[\widehat{\psi}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \frac{1}{N_{\mathrm{O}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{O}}} \widehat{\psi}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}(X_j, S_j, Y_j) \right]^2.$$

这两个方差估计量分别反映实验数据和观察性数据带来的不确定性。由于 $\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}$ 在给定 $\mathrm{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}$, $\mathbb{E}[\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}^2 \mid$ 的条件下均值为零，$\mathrm{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}] = \mathrm{Var}(\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathrm{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}})$。因此，$V_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\exp}$ 是前 t 轮次条件方差的平均值。实验估计量 $\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\exp}$ 旨在估计这一平均条件方差。观测估计量 $\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}$ 是时刻 t 计算得到的拟合观测得分的经验方差，用于估计真实观测得分的方差 V^{obs}。附录 A.7 证明，在监测起始时间 $t_{0,N_{\mathrm{O}}}$（见下文）之后的各轮次 $t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}$中，$\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\exp}$ 对 $V_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\exp}$ 以及 $\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}$ 对 V^{obs} 均具有一致相合性。

接下来，我们介绍用于构造置信序列的两个调节量。监测起始时间 $t_{0,N_{\mathrm{O}}}$ 是一个预先指定的确定性正整数序列，它给出了开始报告区间的轮次。以下定义的区间边界的调节变量 $\omega_{N_{\mathrm{O}}} > 0$

在轮次 $t_{0,\,N_O}$ 根据该轮次可用的数据选定一次，其目标是使边界相对于逐点标准误最窄的轮次。

假设7.1（监测起始时间和调节变量）。对于固定常数 $c_\omega \in (0,\ \infty)$，以下条件成立。*(1)* $t_{0,\,N_O} \to \infty$且 $t_{0,\,N_O}/N_O \to 0$。*(2)* $N_O\omega_{N_O} \xrightarrow{p} c_\omega$。

条件（1）涉及监测起始时间，条件（2）涉及调节变量。条件（1）允许监测起始时间发散，使得在报告第一个区间时，干扰项拟合和方差估计量基于许多轮次，同时使其相对于 N_O 仍可忽略。特别地，条件（1）将 Waudby-Smith 等人（2024年）的定义2.7中的渐近框架调整到了当前情形。

条件（2）要求 N_O 乘以调节变量后依概率收敛于一个正的常数。在该条件以及方差估计量一致性的作用下，$\sqrt{N_O}$ 乘以下文定义的半宽度，作为归一化时间 t/N_O的函数收敛于一个正的有限极限；对于给定的 V^{obs} 和 V^{exp}，$\star$ 常数 c_ω 决定了这一极限。注7.1给出了一个满足条件（2）的调节变量选择，注 7.2讨论了监测起始时间的选择。条件（2）发挥了定理2.8中调节参数选择的作用，该定理见Waudby-Smith 等人（2024年）。

利用这些量，我们按如下方式构造置信序列。固定 $\alpha \in (0,\ 1)$。两个方差估计量共同构成第 t 轮估计量的估计方差，$\widehat{\sigma}^2_{t\,,\,N_O} := \widehat{V}^{\mathrm{exp}}_{t\,N_O,}/t + \widehat{V}^{\mathrm{obs}}_{t\,,\,N_O}/N_O$，其中第一项反映了经过 t 轮的实验平均值，第二项反映了观察性样本。在每一轮 $t \geq t_{0,\,N_O}$，所提出的渐近时间一致置信序列给出的区间为

$$C_{t,N_O}(\alpha) := \left[\widehat{\tau}_{t,N_O} \pm \overline{B}_{t,N_O}\right], \qquad \overline{B}_{t,N_O} := \widehat{\sigma}_{t,N_O}\, h_\alpha\left(\frac{\omega_{N_O}}{\widehat{\sigma}^2_{t,N_O}}\right),$$

其中 $h_\alpha(x) := [\{(x+1)/x\}\log\{(x+1)/\alpha^2\}]^{1/2}$，当 $x > 0$ 时。如果 $\widehat{\sigma}^2_{t\,,\,N_O} = 0$，则令 $B_{t,\,N_O} := \infty$，且$C_{t,\,N_O}(\alpha) := \mathbb{R}$。

每个区间都以当前估计值为中心，其半宽度为逐点标准误$\widehat{\sigma}_{t,\,N_O}$ 乘以因子$h_\alpha(\omega_{N_O}/\widehat{\sigma}^2_{t\,,\,N_O})$，该因子用于实现时间一致监测。这个因子来自 Howard 等人（2021年）提出的双侧正态混合边界，见附录 A.7.3。该边界由 Ville 不等式推出：根据该不等式，初始值为一的非负鞅在某个时刻达到 $1/\alpha$ 的概率至多为 α。渐近地，在各监测轮次中，估计误差$\widehat{\tau}_{t,\,N_O} - \tau$ 除以其方差后，其表现类似于在该方差倒数处取值的标准布朗运动。对于

布朗运动，将其指数鞅按混合方差ω_{N_O}进行高斯混合，得到的也是一个鞅。对其应用 Ville 不等式可知，以至少 $1-\alpha$ 的概率，布朗运动除以时间在任意时刻都不超过其标准差乘以h_α，其中该函数在 ω_{N_O} 与时间的乘积处取值。在时刻 $1/\widehat{\sigma}^2_{t,\,N_O}$，这个界等于 $\widehat{\sigma}_{t,\,N_O} h_\alpha(\omega_{N_O}/\widehat{\sigma}^2_{t,\,N_O}) = B_{t,\,N_O}$。下文的注7.1解释了调节变量如何影响该因子在监测期内的变化，附录 A.7.3.1 则给出了详细推导。

—

这个置信序列允许依赖数据的停止。实验者可以从 $t_{0,\,N_O}$ 起在每一轮后查看区间，而定理 7.1 表明，这些区间在所有这些轮次同时包含 τ 的渐近概率至少为 $1-\alpha$。推论 7.1 进一步表明，如果实验者在某一轮停止，且该轮次根据累积数据选定、不早于 $t_{0,\,N_O}$，并且几乎必然有限，例如在区间首次排除零的轮次与预先指定的最大轮次数中较早者停止，那么该轮报告的区间包含 τ 的渐近概率至少为 $1-\alpha$。

注7.1（根据目标轮次选择调节变量）。 本注说明如何选择调节变量。对于任何根据监测起始时间之前的数据计算且满足假设 7.1(2) 的调节变量，定理 7.1 均成立，因此无论选择哪一个这样的调节变量，其覆盖保证都成立。选择只决定调节变量要使哪个轮次的半宽度最小。

固定目标轮次后，即可确定使该轮次半宽度最小的调节变量。半宽度 $B_{t,\,N_O}$ 是逐点标准误 $\widehat{\sigma}_{t,\,N_O}$ 与时间一致监测对应的膨胀因子 $h_\alpha(\omega_{N_O}/\widehat{\sigma}^2_{t,\,N_O})$ 的乘积，且只有膨胀因子取决于调节变量。函数 h_α 在 $(0,\ \infty)$ 上仅在 $x^\star$ 处达到最小值；$x^\star$ 是 $x^\star = \log\{(1+x^\star)/\alpha^2\}$ 的唯一正解，且仅取决于 α。

固定一个预先指定的确定性目标轮次 $t^\star_{N_O}$，使得 $t^\star_{N_O}/N_O$ 收敛到一个正的常数。由于 $h_\alpha(\omega_{N_O}/\widehat{\sigma}^2_{t,\,N_O})$ 作为 $\omega_{N_O} > 0$ 的函数，仅在 $\omega_{N_O} = x^\star \widehat{\sigma}^2_{t,\,N_O}$ 处达到最小值，因此，在轮次 $t = t^\star_{N_O}$ 时，使半宽度最小的调节变量唯一取值为 $x^\star \widehat{\sigma}^2_{t^\star_N\mathrm{O},\,N_O}$。在监测起始时间无法获得估计方差 $\widehat{\sigma}^2_{t^\star_N\mathrm{O},\,N_O}$，因此我们用预测值代替它。令 $V \in (0,\ \infty)$ 为 $V^{\mathrm{exp},\,\star}$ 的规划值，该值根据截至监测起始时间的数据计算，并设

$$\omega_{N_O} := x^\star\left(\frac{V}{t^\star_{N_O}} + \frac{\widehat{V}^{\mathrm{obs}}_{t_{0,N_O},N_O}}{N_O}\right).$$

一个自然的规划值是监测起始时间的实验方差估计值，$V = \widehat{V}^{\mathrm{exp}}_{t_0\ ,\,N_O,\,N_O}$，第 8.4 节使用了该值。只要规划值依概率收敛于正的常数 $V =$，该调节变量就满足假设 7.1(2)。

对于 $V = \widehat{V}^{\mathrm{exp}}_{t_0,\,N_{\mathrm{O}},\,N_{\mathrm{O}}}$，这要求监测起始时间的实验方差估计值依概率收敛于正的常数。在此条件下，规划值只影响调节变量在目标轮次使半宽度最小的准确程度。将方差估计替换为其极限后，$\omega_{N_{\mathrm{O}}}$ 等于 $x^\star$ 乘以轮次 $t = t^\star_{N_{\mathrm{O}}}$ $V^{\mathrm{exp}}_{,\,\star}/V$ 时估计量的方差 $V^{\mathrm{exp}}_{,\,\star}/t + V^{\mathrm{obs}}/N_{\mathrm{O}}$，因此调节变量会使该轮次的半宽度最小。如果 V 超过 $V^{\mathrm{exp}}_{,\,\star}$，则该轮次早于目标轮次；如果 V 低于 $V^{\mathrm{exp}}_{,\,\star}$，则该轮次晚于目标轮次。因此，当规划值根据监测起始时间之前的数据计算，并依概率收敛于正的常数时，其极限与 $V^{\mathrm{exp}}_{,\,\star}$ 的任何偏离都会使该轮次偏离目标轮次，但不会改变定理 7.1 的覆盖保证。第 8.4 节以及附录 B.2 和 B.3 报告了若干目标轮次和规划值下的结果。

—

7.2 时间一致覆盖的条件

本小节给出剩余条件，在这些条件下，第 7.1 节的置信序列具有渐近时间一致覆盖率。相应的正则性条件见假设 A.6.1。这些条件保留了插件抽样律和共同支撑集，包括拟合目标分布的支撑集。

假设 7.2（一致鞅矩条件）。对于某个 $r > 4$ 和有限的确定性常数 C，$\mathbb{E}[|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|^r \mid \mathrm{F}_{t-1,\,N_{\mathrm{O}}}] \le C$ 几乎必然地，对每个 N_{O} 和 $t \ge 1$ 均成立。

假设 7.2 足以应用 Hall 和 Heyde（1980年）的推论 2.1 中的鞅极大不等式，附录将其用于实验得分的部分和，以及由其平方构成的方差估计量。对 N_{O} 和 t 的一致性控制了平方可积性、三角鞅过程的跳跃、可行方差误差以及无限监测尾部。此外，由于 $N^{-r/2}_{\mathrm{E}}$ $\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \mathbb{E}[|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|^r \mid \mathrm{F}_{t-1,\,N_{\mathrm{O}}}] \le C N^{1-r/2}_{\mathrm{E}} \longrightarrow 0$，它还蕴含假设 6.3 中时间 N_{E} 处的 Lyapunov 条件。

假设 7.3（处理特异性均值和方差估计的一致相合性）。施加假设 *6.4* 中有界的拟合替代指标条件以及两项初始风险条件。对于 $w = 0,\ 1$，处理特异性均值和方差估计满足

$$\sup_{t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \sup_{x} |\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x) - \widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)| = o_p(1)$$

$$\sup_{t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \sup_{x} |\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x) - \widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)| = o_p(1).$$

假设 6.2 和 7.3 中的收敛要求针对不同的时间范围；若无额外限制，两者并不互相蕴含。假设 6.2 通过 N_{E} 控制平均误差，而假设 7.3 控制监测开始后所有轮次中的最大误差。因此，假设 7.3 是针对使用自适应收集的数据拟合的干扰参数估计的一致收敛要求。

假设 7.4（一致观察性得分正则性）。当 $N_{\mathrm{O}} \to \infty$，

$$\sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \|\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \psi^{\mathrm{obs}}(\cdot)\|_{2,\mathrm{obs}} = o_p(1),$$

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \left| (\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} - P^{\mathrm{obs}}) \{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \psi^{\mathrm{obs}}(\cdot)\} \right| = o_p(1),$$

$$\sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \left| (\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} - P^{\mathrm{obs}}) \left[\{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \psi^{\mathrm{obs}}(\cdot)\}^2 \right] \right| = o_p(1).$$

一组充分条件是：第一个显示的收敛成立，并且随着概率趋于一，真实的观测得分和整个拟合评分路径 $\{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,\,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) : t \geq t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}\}$ 均包含在一个固定的 P^{obs}-Donsker 类 $\mathcal{G}$ 中，且该类具有平方可积包络。进一步假设函数类 $\{(g - \psi^{\mathrm{obs}})^2 : g \in \mathcal{G}\}$ 是 P^{obs}-格利文科–坎特利类。于是，经验过程的渐近等度连续性给出第二个显示的收敛，而平方差函数类的一致大数定律给出第三个收敛。

假设 7.5（一致乘积速率条件）。目标密度余项满足

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \left\| \frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(\cdot)}{f_{X|G=\mathrm{O}}(\cdot)} - 1 \right\|_{2,X|G=\mathrm{O}} \sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \|\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \overline{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\|_{2,X|G=\mathrm{O}} = o_p(1).$$

表示元误差和结果回归误差满足

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \|\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \mu(\cdot)\|_{2,\mathrm{obs}} \sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \|\widehat{\alpha}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \alpha(\cdot)\|_{2,\mathrm{obs}} = o_p(1).$$

根据柯西–施瓦茨不等式，第一个乘积速率控制 $R^{\mathrm{ii}}_{t\,,\,N_{\mathrm{O}}}$，第二个则控制 $R^{\mathrm{iii}}_{t\,,\,N_{\mathrm{O}}}$。假设 7.5 要求在整个监测期内，一致地满足与假设 6.6 相同的 $\sqrt{N_{\mathrm{O}}}$ 乘积速率尺度。

补充材料 2 给出了在模型设定正确的有限维模型下，假设 7.3 和 7.5 的充分条件。

注 7.2（监测起始时间与干扰参数速率权衡）。 除假设 7.5 中的第二个乘积速率条件外，保持定理 7.1 的所有条件不变。假设对于某些常数$a,\ b > 0, \left\|\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \mu(\cdot)\right\|_{2,\ \mathrm{obs}} = O_p(N^{-a}{}_{\mathrm{O}})$，且 $\sup_{t \geq t_{0,\ N_{\mathrm{O}}}} \left\|\widehat{\alpha}_{t,\ N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \alpha(\cdot)\right\|_{2,\ \mathrm{obs}} = O_p(t_0^{-b}{}_{,\ N_{\mathrm{O}}})$。 进一步假设

对于某个固定的 $\gamma \in (0,1)$，$t_{0,N_O} \asymp N^{\gamma}$ O。若 $a + \gamma b > 1/2$，则定理 7.1 的结论成立。这明确说明了监测起始时间如何与干扰参数估计精度相互作用。在这些分别成立的多项式速率界下，监测必须足够晚才开始，以便表示函数估计量达到余项界所要求的精度。较大的 γ 会降低对 b的要求。一种实际可行的选择是 $t_{0,N_O} = \lceil N^{3/4} \text{ O} \rceil$，对应于 $\gamma = 3/4$；当 $N_O = 5000$时，其值为 595，接近 Waudby-Smith 等（2024）第 4 节中随机实验模拟计算区间宽度和未覆盖率的起始时间 500。

7.3 时间一致覆盖与依赖数据的停止

这些假设保证了整个监测期内的同时覆盖率。

定理 7.1（渐近时间一致覆盖）。固定 $\alpha \in (0, 1)$。按照第 *7.1* 节，使用确定性序列 $C_{t,\ N_O}(\alpha)$ 构造 $t_{0,\ N_O}$，以及满足假设*7.1* 的、$\mathrm{F}_{t_{0,\ N_O},\ N_O}$-可测调节变量 ω_{N_O}。假设第 *2–4* 节的识别和实验设计假设、假设*7.1–7.5*，以及假设 *A.6.1* 中的共同正则性条件和第 *7* 节正则性条件沿该序列成立。则

$$\liminf_{N_O \to \infty} \Pr\left\{\tau \in C_{t,N_O}(\alpha) \text{ for all } t \geq t_{0,N_O}\right\} \geq 1 - \alpha.$$

定理 7.1 控制了监测开始后至少有一个区间未包含 τ 的概率。即使每轮之后都检查该区间，且未指定有限的监测界限，其渐近上限仍至多为 α。这比在每个固定时间分别保证覆盖率更强，并允许实验者利用实验期间累积的数据选择何时停止。构造渐近同时覆盖率恰好等于名义水平的区间留待未来研究。附录 A.7 给出了完整证明。

推论 7.1（依赖数据的停止时刻下的覆盖率）。在定理 *7.1* 的假设下，设$(T_{\mathrm{stop},N_O})_{N_O \geq 1}$ 为关于 $(\mathrm{F}_{t,N_O})_{t \geq 0}$ 的任意整数值停止时刻序列，满足$t_{0,N_O} \leq T_{\mathrm{stop},N_O} < \infty$ 对每个 N_O 几乎必然成立。那么极限下确界$_{N_O \to \infty}$ 概率$\left\{\tau \in C_{T_{\mathrm{stop}},N_O,N_O}(\alpha)\right\} \geq 1 - \alpha$。

这一结果允许在开始监测后，一旦累积了足够的证据便停止，同时仍保留所述的渐近覆盖保证。例如，令基准值为零，并设定一个确定性的整数上限 $N_E \geq t_{0,\ N_O}$。定义$T_{\mathrm{stop},\ N_O} := \min\{\inf\{t \geq t_{0,N_O} : 0 \notin C_{t,\ N_O}(\alpha)\},\ N_E\}$，其中下确界取遍整数时刻，且 $\inf \varnothing = \infty$。该规则会在区间首次排除零时停止，或在达到最大实验样本量时停止

。由于它几乎必然有限，推论 7.1 适用于该时刻报告的区间。附录 A.7.2 证明了推论 7.1。

8 蒙特卡洛模拟

本节通过一个模拟的优惠券实验，考察与围绕短期结果设计实验相比，围绕长期替代指标设计实验是否能改善对长期平均处理效应的估计与推断。第 8.1 节介绍数据生成过程，第 8.2 节介绍比较的实验设计及其实施，第 8.3 节介绍学习得到的实验设计以及长期效应估计量的精度，第 8.4 节介绍序贯监测和依赖数据的停止。补充材料 1 详述计算过程，附录 B 报告其他结果。

8.1 数据生成过程

本小节说明数据生成过程，这是一个受优惠券实验启发的简化基准。协变量 X 是既往使用情况的标准化得分，结果变量 $S^{(1)}$、$S^{(2)}$ 和 Y 分别代表即时购买、后续短期重复购买和长期累计购买。观察性样本记录了 $N_{\mathrm{O}} = 5,000$ 位顾客的 $(X,\ S^{(1)},\ S^{(2)},\ Y)$，其结果由一个潜在处理标签生成；该标签独立于潜在结果和 X，且以 1/2 的概率取每种处理状态。实验在每种实验设计选定的协变量密度和分配概率下，记录最多 $N_{\mathrm{E}} = 5,000$ 位参与者的 $(X,\ W,\ S^{(1)}(W),\ S^{(2)}(W))$，并且所有实验设计都使用相同的长期效应估计量。我们进行了 2,000 次蒙特卡洛重复试验，并报告 $t = 1,000,\ 2,500,\ 5,000$ 时的固定时间表现。

在目标总体中，$X \mid G = \mathrm{O} \sim N(0,1)$。对于每种处理状态 $w \in \{0,1\}$，令 $S^{(1)}(w)$ 和 $S^{(2)}(w)$ 分别表示即时购买和短期重复购买的潜在结果，并令 $v_j^S{}_{,w}(x)$ 表示给定 $X = x$ 时 $S^{(j)}(w)$ 的条件方差。条件方差函数为

$$
\begin{aligned}
v_{1,0}^S(x) &= v_{2,0}^S(x) = 1 + 3x^2, \\
v_{1,1}^S(x) &= 1 + 3x^2 + 3x, \\
v_{2,1}^S(x) &= 1 + 3x^2 - 3x.
\end{aligned}
$$

对照组方差 $1 + 3x^2$ 呈 U 形，因此既往使用情况特别低或特别高的顾客之间差异更大。处理会在两个结果变量之间重新分配短期变异，使 $S^{(1)}$ 的方差增加 $3x$，而 $S^{(2)}$的方差减少 $3x$。对于高使用量客户，优惠券会使即时购买的变异更大，并使后续

重复购买的变异更小；而对于低使用量顾客，情况则相反。由于$\mathbb{E}[X \mid G = 0] = 0$且$\mathbb{E}[X^2 \mid G = 0] = 1$，$\mathbb{E}[v_{j,w}^S(X) \mid G = 0] = 4$适用于$j = 1$，$2$和$w = 0$，$1$，因此这种构造会改变条件方差在各协变量之间的分配，却不会使某个短期结果或处理组的平均噪声变大。

给定X后，短期潜在结果条件独立；它们与长期结果的生成方式如下：

$$
\begin{aligned}
S^{(1)}(w) \mid X = x &\sim N\big(x + w,\ v_{1,w}^S(x)\big), \\
S^{(2)}(w) \mid X = x &\sim N\big(x,\ v_{2,w}^S(x)\big), \\
Y(w) &= S^{(1)}(w) + 4S^{(2)}(w) + X + \nu_w,
\end{aligned}
$$

其中，$\nu_w \sim N(0,\ 64)$与X以及短期潜在结果相互独立。其方差意味着，对于每个w，替代指标$S^{(1)}(w)$和$S^{(2)}(w)$以及协变量X能解释目标总体中$Y(w)$方差的61.9%，而ν_w则解释其余38.1%。处理使即时购买的均值增加1，而重复购买的均值保持不变。因此，对于每个x，$\mathbb{E}[Y(1) - Y(0) \mid X = x] = 1$，长期平均处理效应为$\tau = 1$。

长期效应相对于结果变量的变异性而言较小，这在许多营销现场实验中都很常见。目标总体中两种长期潜在结果的方差均为168，因此该效应约为0.08个标准差。在此类实验中，个人购买额的差异很大；Lewis 和 Rao (2015年报告称，大型零售广告实验中个人销售额的标准差通常约为其均值的十倍。换算为相同单位后，关于优惠券和折扣的现场实验所体现的效应大小也相近。在 Huang 和 Ascarza(2024年) 中，额外优惠券使十周内的购买量提高约0.10个标准差；在 Gopalakrishnan 和 Park (2021年) 中，一张7美元优惠券使一周促销活动期间的每位顾客收入提高约0.09个标准差；在 Sahni 等人 (2017年) 中，电子邮件折扣优惠在有效期内使支出提高约0.03个标准差。经校准的效应处于这一范围内。

从观察性数据中学习到的长期替代指标是

$$
\mu(s, x) = s^{(1)} + 4s^{(2)} + x.
$$

长期替代指标对应的条件方差为 $v_w^{\mathrm{LT}}(x) = \mathrm{Var}\{\mu(S(w), X) \mid X = x\}$。在数据生成过程中，这些条件方差为

$$v_0^{\mathrm{LT}}(x) = v_{1,0}^S(x) + 16v_{2,0}^S(x) = 17 + 51x^2,$$
$$v_1^{\mathrm{LT}}(x) = v_{1,1}^S(x) + 16v_{2,1}^S(x) = 17 + 51x^2 - 45x.$$

这些表达式明确展示了短期与长期设计准则之间的差异。对于 $x > 0$, $v_{1,1}^S(x) > v_{1,0}^S(x)$, 而 $v_{2,1}^S(x) < v_{2,0}^S(x)$，且 $v_1^{\mathrm{LT}}(x) < v_0^{\mathrm{LT}}(x)$。对于 $x < 0$，这些不等式则反向成立。因此，$S^{(1)}$ 和替代指标准则会在相同的协变量分层内，推动分配概率朝相反方向变化。由于 $S^{(2)}$ 在长期替代指标中所占权重较大，$S^{(2)}$ 准则与替代指标准则更为接近。图 8.1 绘出了下文比较的四种准则所用的条件方差。

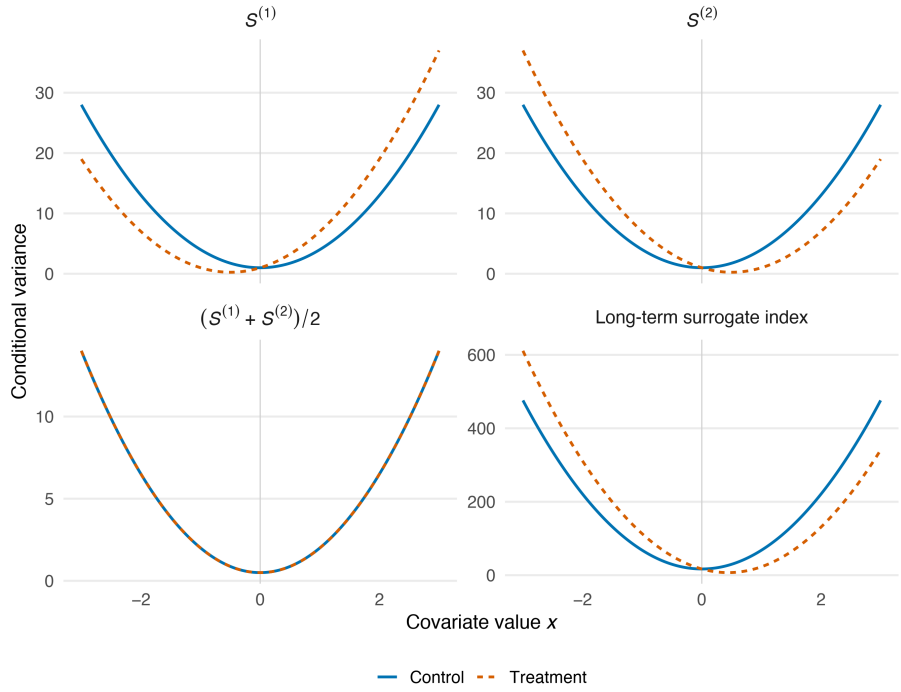


图 8.1。 对照组和处理组中两个短期结果、它们的平均值以及长期替代指标的条件方差。各面板分别展示了每个处理组中 $S^{(1)}$、
$S^{(2)}$ $S^{(1)} + S^{(2)}$ 2, $X = x$ 、( )/
和长期替代指标的条件方差，每个面板均使用独立的纵轴刻度。这些是数据生成过程下的总体量。对于 $x > 0$,
处理组中第一个短期结果的方差较大，而第二个短期结果和长期替代指标的方差排序则相反。等权平均值在两个处理组中的方差相同。

8.2 实验设计与实施

本小节介绍我们比较的实验设计。所有实验设计采用相同的估计目标、相同的长期效应估计量和相同的观察性数据，彼此仅在用于抽取协变量和分配处理的准则上有所不同。因此，性能差异源于实验数据的收集位置。各准则在用于构建设计准则的结果变量上有所不同，也在于是否将自适应方法应用于处理分配、抽样或两者。我们用 SI 作为替代指标的缩写。表 8.1 总结了八种实验设计。

模拟遵循算法 5.1 ，并通过简单方法估计其中的各个组成部分。目标协变量密度 $f_{X|G=O}$ 通过对观察性协变量进行高斯核密度估计来估计。按照Hahn 等人(2011) 的协变量离散化方法，可行实验设计基于该估计划分出的 15 个等概率层进行。替代指标 μ 通过在观察性样本中，对标准化协变量和替代指标的二阶多项式进行最小二乘法拟合来估计；条件均值 μ_w 则通过在每个处理组中，对标准化协变量的二阶多项式进行最小二乘法拟合来估计，

实验设计	设计准则	处理分配	协变量抽样
基准设计	—	等概率 (1/2)	估计的目标分布
$S^{(1)}$ 联合设计	$S^{(1)}$	自适应	自适应
$S^{(2)}$ 联合设计	$S^{(2)}$	自适应	自适应
代理平均联合设计	$(S^{(1)} + S^{(2)})/2$	自适应	自适应
仅 SI 分配设计	长期替代指标	自适应	估计的目标分布
SI 仅采样设计	长期替代指标	等概率 (1/2)	自适应
SI 联合设计	长期替代指标	自适应	自适应
分层预言机 SI 联合设计	长期替代指标（真实方差）	自适应	自适应

表 8.1. 实验设计。基准设计采用等概率处理分配和参考协变量分布。 $S^{(1)}$、 $S^{(2)}$ 和替代指标平均联合设计分别根据各自的短期准则，调整处理分配和协变量抽样。三种可行替代指标设计采用长期替代指标，并分别考察处理分配、抽样及二者结合的作用。分层预言机 SI 联合设计将可行实验设计所用的 15 个协变量层内的长期替代指标真实条件方差均值，代替学习得到的条件方差，并为学习设计准则提供基准。

并将四种准则所用的条件方差替换为各层内残差平方的平均值。替代表示元 α 采用备注 5.2 中基于二元分类的构造进行估计，其中四个条件概率均通过对相同多项式进行一次逻辑回归来估计。所有实验设计均从一个初始时期开始，在此期间以 1/2 的概率分配处理，并从估计的目标分布中抽取协变量；该时期至少持续到有 200 名参与者，且每个层中的每个臂都至少有 10 名参与者。因此，当各估计量有足够数据、能够达到合理稳定后，便开始自适应；在 2,000 次重复试验中，SI 联合设计的第一个自适应轮次的中位数为 518。

8.3 估计实验设计和长期效应

本小节比较学习得到的实验设计以及由此产生的长期效应估计量的精度。图 8.2 和图 8.3 展示了 $S^{(1)}$ 联合设计和 SI 联合设计根据截至 t =1、000 和 t = 5、000 时的历史信息学习得到的分配概率与抽样密度比，以及它们在 2,000 次重复试验中的均值和第 10 至第 90 百分位数。这两种实验设计按照既往使用情况以相反方向分配处理；随着历史信息增多，两种学习得到的实验设计都趋近于各自的总体预言机。

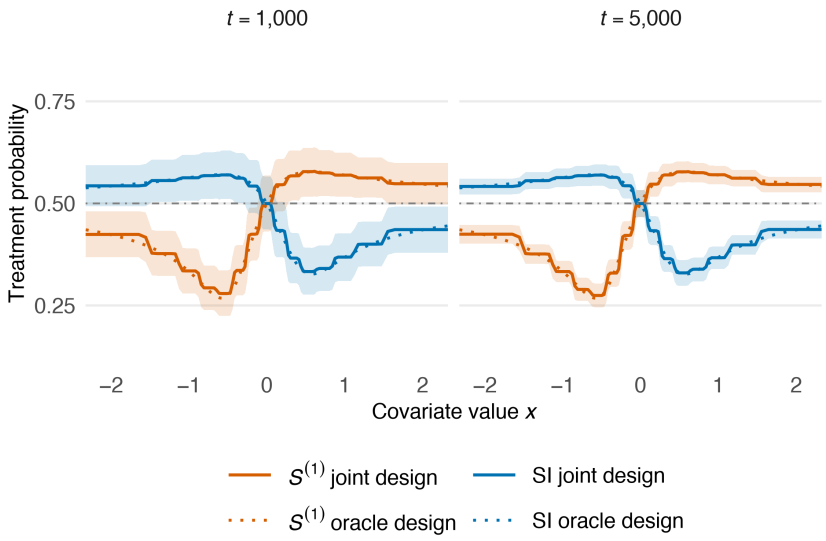


图8.2. $S^{(1)}$ 联合设计和 SI 联合设计下的分配概率。点划线表示分配概率 1/2。点线表示两种准则的总体最优设计。横轴涵盖目标协变量分布第 1 至第 99 百分位数。

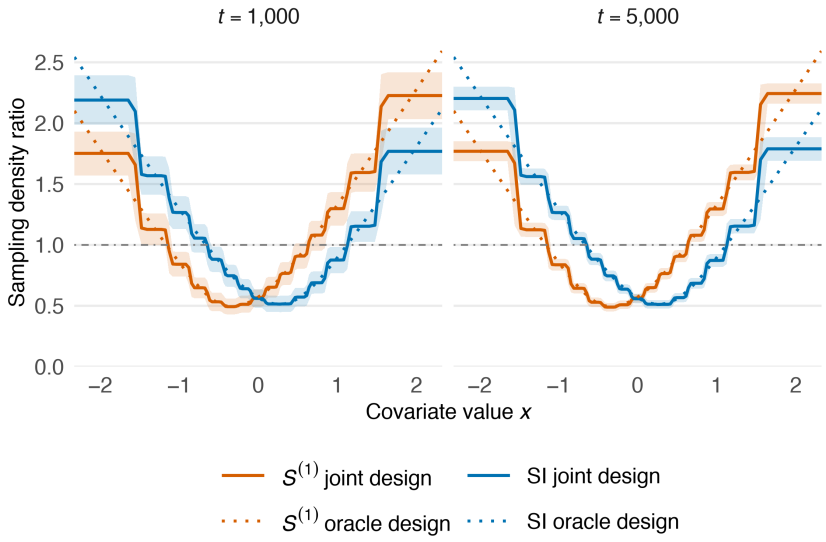


图8.3. $S^{(1)}$ 联合设计和 SI 联合设计下的抽样密度比。纵轴显示实验协变量密度与参考协变量密度之比，而非密度本身。位于 1 处的点划线是等密度参考，表示保留估计的参考协变量分布。点线表示两种准则的总体最优设计。学习得到的比率是相对于估计的参考协变量密度而言的，最优比率则是相对于目标密度而言的。横轴涵盖目标协变量分布第 1 至第 99 百分位数。

表 8.2 报告了八种实验设计在拥有 5,000 名实验参与者后的偏差、常规 95% 区间的覆盖率以及完整过程的蒙特卡洛方差。完整过程包括观测回归和目标协变量密度的估计、初始时期、实验设计与替代表示元的序贯学习，以及长期效应的估计。

表 8.2 还报告了根据数据生成过程计算的总体基准。每个基准为 $(V^{\text{exp}} + V^{\text{obs}})/5{,}000$，即定理 3.1 的效率界所给出的长期效应估计量在有 5,000 名实验参与者及 $N_{\text{O}} = 5{,}000$ 时的方差，其中 V^{exp} 是在实验设计的总体版本处评估的，该版本使用其设计准则的真实条件方差。观察性部分 V^{obs} 与实验设计无关，在此数据生成过程中等于 61.868。

由于替代指标的回归模型以及短期结果条件均值的回归模型均设定正确，因此所有实验设计的偏差都接近于零，且各设计之间差异很小；常规 95% 区间的覆盖率同样接近 95%，介于 95.1% 和 96.4% 之间。与基准设计相比，$S^{(1)}$ 联合设计使蒙特卡洛方差增加了 9.8%，而 $S^{(2)}$ 和替代平均联合设计则分别使其降低了 12.7% 和 11.2%。这些结果保留了总体基准的主要对比。以第一个短期结果为目标会增加长期效应估计量的蒙特卡洛方差，

实验设计	Bias	覆盖率	蒙特卡罗方差	蒙特卡罗方差减少	总体方差减少
基准设计	-0.004	96.3%	0.054	—	—
$S^{(1)}$ 联合设计	-0.005	95.4%	0.059	-9.8%	-4.1%
$S^{(2)}$ 联合设计	-0.005	95.5%	0.047	12.7%	17.7%
代理平均联合设计	-0.005	95.1%	0.048	11.2%	14.6%
SI 仅分配设计	-0.005	96.4%	0.054	-1.1%	1.8%
SI 仅采样设计	-0.004	95.1%	0.046	13.2%	16.1%
SI 联合设计	-0.006	95.8%	0.047	13.1%	17.9%
分层预言机 SI 联合设计	-0.004	95.5%	0.046	13.1%	17.9%

表 8.2。 包含 5,000 名实验参与者的长期平均处理效应估计值及总体基准。偏差是相对于真实值 1 衡量的，覆盖率是普通固定时间 95% 区间的覆盖率。蒙特卡罗方差是 2,000 个估计值的样本方差。蒙特卡洛方差降幅是相对于基准设计的蒙特卡罗方差百分比降幅；总体方差降幅是总体基准 $(V^{\text{exp}} + V^{\text{obs}})/5{,}000$ 相对于基准设计的百分比降幅，因此正值表示有所减少。SI 联合设计和分层预言机 SI 联合设计具有相同的总体基准，因为它们评估的是同一总体预言机规则。

而与长期替代指标更为一致的准则则会降低该方差。SI 联合设计的蒙特卡洛方差比 $S^{(1)}$ 联合设计低 20.8%。

在替代指标准则下，仅处理分配使蒙特卡洛方差几乎保持不变，增加了 1.1%；仅抽样使其减少了 13.2%；二者结合使其减少了 13.1%。因此，抽样是方差减少的主要来源，这与总体基准中的结果一致：仅处理分配、仅抽样以及二者结合分别使方差减少了 1.8%、16.1% 和 17.9%。分层预言机 SI 联合设计使方差减少了 13.1%。

8.4 序贯监测与数据依赖的停止

本小节报告了第 7 节中 90% 渐近时间一致区间在监测期 $t = 595, \ldots, 5{,}000$ 内的同时覆盖率和检测结果。该监测期始于$t_{0,N_O} = \lceil N^{3/4} \rceil$。调节变量的选择遵循注7.1，其中目标轮次为 $t^{\star}_{N_O} = 2{,}500$，规划值设为监测起始时间受监测实验的实验方差估计 $\widehat{V}^{\exp}_{t_0,N_O,N_O}$。当下端点首次超过零时，判定为检测到；未检测到的重复试验，其停止值设为 5,000。附录 B 报告了 95%区间以及两个置信水平下的其他结果。

在表 8.3 中，各实验设计的同时覆盖率均在 95.2% 至 96.4% 之间，高于名义 90% 水平。SI 联合设计将检出率从 95.4%

实验性设计	同时覆盖率	检测	平均停止样本量	中位停止样本量	停止样本量四分位距
基准设计	95.9%	95.4%	2,062.4	1,727.0	1,036.2–2,802.2
$S^{(1)}$ 联合设计	95.7%	94.6%	2,090.1	1,792.5	1,032.0–2,875.5
$S^{(2)}$ 联合设计	95.2%	97.7%	1,855.4	1,561.0	976.2–2,511.5
替代变量-平均联合设计	95.6%	97.5%	1,905.5	1,620.0	998.0–2,572.0
SI 仅分配设计	96.4%	95.8%	2,059.7	1,722.5	1,014.8–2,830.5
SI 仅采样设计	95.8%	97.6%	1,873.2	1,607.0	989.0–2,506.0
SI 联合设计	95.6%	98.2%	1,846.1	1,564.5	984.0–2,461.5
分层预言机 SI 联合设计	95.2%	98.0%	1,821.4	1,530.5	971.5–2,415.2

表 8.3. 90%时间一致区间的同时覆盖率和检测。同时覆盖率要求从参与者 595 到参与者 5,000 的每个 90%时间一致区间都包含真实值 1。检测包括在界限处的交叉。平均停止样本量和中位停止样本量是停止样本量；未检测到的重复试验按 5,000 记录。停止样本量四分位距报告这些停止样本量的第25和第75百分位数。报告的比率以 0.05 个百分点为增量变化，并保留一位小数。

（基准设计下）提高至 98.2%，并将平均停止样本量从 2,062.4 降至 1,846.1，中位数从 1,727.0 降至 1,564.5。 $S^{(1)}$ 联合设计的检出率较低，为 94.6%，平均停止样本量也较大，为 2,090.1，均逊于基准设计；而 $S^{(2)}$ 和替代平均联合设计的停止表现与 SI 联合设计相近。

使用其他调参选项在保存的路径上重新计算区间后，同时覆盖率仍高于名义水平。对于目标轮次为 1,250、3,750 和 5,000 名参与者的情况，不同实验设计下 90% 区间的覆盖率介于 95.0% 和 97.1% 之间（表 B.3）。采用附录 B.3 中的规划值——即各实验设计在第 200 和第 595 轮的实验方差估计值，以及 $V^{\exp}$ 的总体值——时，90% 区间的覆盖率介于 95.2% 和 96.4% 之间，95% 区间的覆盖率则介于 97.8% 和 98.4% 之间。这些结果与定理 7.1 一致；该定理给出了渐近同时覆盖率的下界。正如第7.3节所述，精确达到名义水平的区间留待未来研究。

9 使用 Graduation 实验进行实验设计示例

本节使用从已完成的 Graduation 实验中估计的方差结构，说明最优处理分配和抽样如何不同于基准实验设计。该示例站在计划在同一总体中开展新实验的研究者立场上，并利用已完成的实验估计条件方差；定理 3.2 的最优规则取决于这些条件方差。第 9.1 节介绍数据以及两个样本的构建，第 9.2 节定义估计的实验设计和方差准则，第 9.3 节报告针对衡量资产的协变量和衡量消费的协变量所得到的估计实验设计。补充材料 1 详细说明了计算过程。

9.1 Graduation 实验

我们使用 Banerjee 等人 （2015年）对巴基斯坦 Graduation 项目进行随机评估的数据。 （2023）对该实验的数据进行了清理和整理，并通过其 R 软件包 `longterm`分发清理后的数据。原始数据可从 哈佛Dataverse获取，清理后的数据包含在该软件包的 公共代码库中。

在巴基斯坦，针对极端贫困家庭的脱贫项目将一次性生产性资产赠款与技术培训、第一年期间的现金消费支持、约两年的定期入户访问和辅导、储蓄支持以及基本医疗服务相结合，而本次随机评估中的处理分配是整个项目包。

在清理前巴基斯坦样本的 1,299 个家庭中，Chen 和 Ritzwoller （2023）排除了在进行任何处理后结果测量之前就已流失的 399 个家庭，以及在任一处理后时间点所有消费变量均缺失的 46 个家庭。这样得到的分析样本包括 854 个家庭，其中 446 个属于处理组，408 个属于对照组，并且报告称所有家庭均完全遵从处理分配。Chen 和 Ritzwoller （2023）的补充附录 D.1 描述了对其余缺失值的插补。

调查在处理前以及处理后约两年和三年进行。20 个处理前变量构成 X，21 个两年后的变量构成 S。遵循 Chen 和 Ritzwoller (2023) 的做法，长期结果 Y 是处理后三年的人均月总消费水平，以 2014年购买力平价美元计。

为重现我们框架的数据结构，我们按处理组对 854 户家庭分层，并将其平均分为两个不重叠样本；这一划分重复 1,000 次，以概括样本划分带来的敏感性。在每次划分中，我们对观察性样本中的处理分配和实验样本中的长期结果进行遮蔽。表 9.1 报告了由此得到的样本量（每次划分均相同），以及每个样本中可用的信息。

估计目标是观察性研究总体中的长期平均处理效应，$\tau = \mathbb{E}[Y(1) - Y(0) \mid G = 0]$,；每次划分中，427 户观察性研究家庭的经验分布 $\mathbb{P}^{\text{obs}}_{N_0}$ 是目标分布 P^{obs} 的代入估计。

样本	总样本 size	处理组样本 size	对照组样本量	变量
观察性	427	223	204	X, S, Y
实验性	427	223	204	X, W, S

表 9.1. 样本构建。每次 1,000次划分都将分析样本中的 854 个家庭按处理组划分为两个不重叠样本，因此每次划分中的样本量都相同。处理组和对照组样本量按分配的处理统计家庭数。变量列出了各样本中使用的变量。观察性样本中的处理分配W 被屏蔽，而实验样本中的长期结果 Y 被屏蔽。

9.2 估计方法与插件准则

本小节定义了我们用于比较的实验设计以及比较它们所采用的标准。我们将分配概率和抽样密度比限制为在单个处理前协变量 X_j 的各层内保持常数。与模拟中一样，这些层将 X_j 划分为观察性样本中等概率的五个区间，$k(x_j)$表示包含 x_j的层。具有相同 X_j 值的家庭属于同一层，因此，取值相同的情况较多的协变量所对应的层数少于五个，而二元协变量则对应两个层。我们采用五个层，因为在各层质量相等时，这是能够确保实验样本的每个臂在每层中至少有 40 个家庭的最大层数；对照组有 204 个家庭。

实验设计使用替代指标在各臂中的条件方差，并在每个层内取平均，再用残差平方的平均值进行估计。令 $\widehat{\mu}_{N_O}(s,\ x)$ 表示根据观察性样本得到的最小二乘替代指标，$\widehat{\mu}_{w,\ N_O}(x)$ 表示在实验样本的第 w 臂中，以协变量对其进行最小二乘拟合的结果，I_w 表示满足 $W_i = w$ 条件的实验家庭，$n_{w,\ k}$ 表示其中位于第 k 层的家庭数量，

$$\widehat{v}_{w,j}(x_j) := \frac{1}{n_{w,k(x_j)}} \sum_{i \in \mathcal{I}_w:\, k(X_{ij}) = k(x_j)} \{\widehat{\mu}_{N_O}(S_i, X_i) - \widehat{\mu}_{w,N_O}(X_i)\}^2.$$

估计得到的实验设计将这些方差代入定理 3.2 的最优规则，从而得到估计的奈曼分配和最优抽样密度比，其中分配概率保持在 $[0。1，\ 0。9]$，且比率位于 $[1/5, 5]$。准则是第 3.1 节中定义的实验方差分量 $V^{\exp}$ 的插件值。

我们使用方差估计 $\widehat{V}_j(p(\cdot),\ r(\cdot))$ 比较实验设计，其定义如下：

$$\widehat{V}_j(p(\cdot), r(\cdot)) = \mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_O}\left[\frac{1}{r(X_j)}\left\{\frac{\widehat{v}_{1,j}(X_j)}{p(X_j)} + \frac{\widehat{v}_{0,j}(X_j)}{1 - p(X_j)}\right\}\right].$$

这里，$p(\cdot)$ 和 $r(\cdot)$ 分别是所比较实验设计的分配概率和抽样密度比。由于 $p(\cdot)$、$r(\cdot)$ 和$\widehat{v}_{w,\ j}$ 在各层内均为常数，因此准则是对各层求和。我们比较四种实验设计。基准设计以 1/2 的概率分配处理，并从目标协变量分布中抽样，因此 $r(x_j) = 1$。仅分配设计采用估计的奈曼分配，其中 $r(x_j) = 1$。仅抽样设计以 1/2 的概率分配处理，并使用在该分配概率下使准则最小化的抽样密度比。联合设计则结合估计的奈曼分配和最优抽样密度比。

9.3 基于家庭资产指数和人均月非食品消费的实验设计

对于 20 个处理前变量中的每一个，我们计算 1,000次划分中联合设计相对于基准设计的插件准则减少量，并按平均降幅对变量进行排名。附录 C.1 报告了完整排名。在排名靠前的变量中，我们选择家庭资产指数和人均月非食品消费，它们分别描述参与家庭的不同特征：资产和消费。

图 9.1 展示了两个协变量的各层中，替代指标在两组中的估计条件标准差、估计奈曼分配，以及联合设计的抽样密度比。两种实验设计在不同方面有别于基准设计。对于家庭资产指数，实验设计与基准设计的主要差异在于抽样密度比。它对最高层的抽样比重更大；该层包含基线时拥有最多家庭耐用品的家庭，其中位抽样密度比为 1.24，在 98% 的划分中高于 1。对于人均月非食品消费，实验设计与基准设计的主要差异在于处理分配。在第二层中，它以 0.61 的中位概率分配处理，这一概率在 97% 的划分中高于 1/2。

图 9.2 将联合设计展示为对 1,000 个招募家庭的分配。对于家庭资产指数，最大的变化出现在最高层：联合设计从该层招募 262 个家庭，而不是 200 个。对于人均月非食品消费，最大的变化出现在第二层：在 207 个家庭中，它将 131 个分配到处理组；相比之下，基准设计下该层 199 个家庭中有一半被分配到处理组。附录 C.2 显示，当剔除某个家庭在层中占主导地位的划分，以及采用七个层时，这两项变化仍然存在。

表9.2报告了相对于基准设计，插件准则的减少幅度。每种实验设计均使用相同的估计方差进行优化和评估，因此这些减少幅度按构造必然是非负的。因此，对于每个协变量，这些减少幅度显示了联合设计中的哪一部分（分配或抽样）贡献更大。对于家庭资产指数，仅抽样设计带来的减少幅度更大；对于人均月非食品消费，仅分配设计带来的减少幅度更大，这与图 9.1 一致。在七个层的情况下，对于这两个协变量，仅抽样设计带来的平均降幅都更大（附录 C.2）。

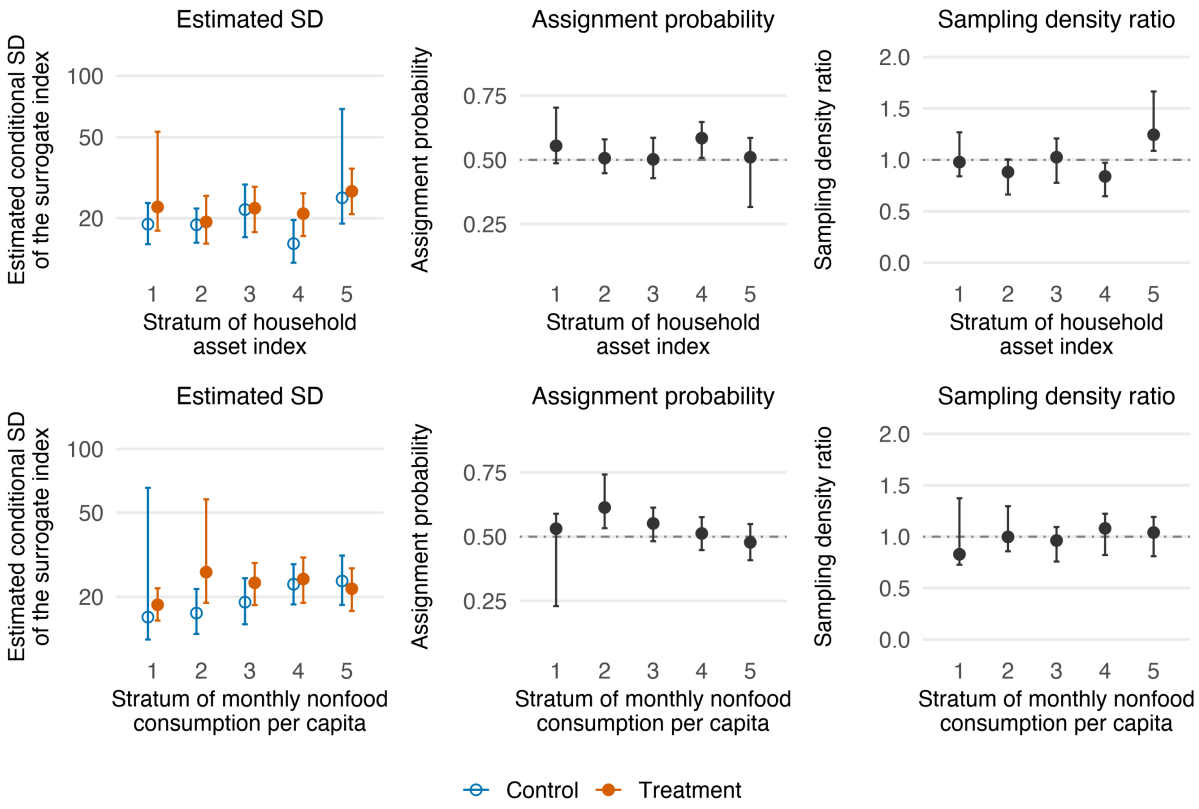


图 9.1。 按家庭资产指数和人均月非食品消费划分的各层中，联合设计的估计条件标准差、分配概率和抽样密度比。点表示中位数，条形表示在同一数据集的 1,000 次按处理分层的划分中第 10 和第 90 百分位数。各层是观察性样本中每个协变量的五个等概率区间，并按照数值从低到高编号。左侧面板以对数刻度显示对照组和处理组中替代指标的估计条件标准差，即条件方差层平均值的平方根；这些条件方差通过残差平方的平均值估计。中间面板显示估计的奈曼分配，右侧面板显示联合设计的抽样密度比。点划线标示概率 1/2 和比值 1。

协变量	实验性设计	Mean 减少	25th 百分位数	中位数	75th 百分位数
家庭资产指数	仅分配设计	3.66%	1.22%	2.12%	3.85%
家庭资产指数	仅抽样设计	5.29%	1.61%	2.92%	6.32%
家庭资产指数	联合设计	8.23%	3.21%	4.91%	9.16%
人均月非食品消费	仅分配设计	4.89%	1.46%	2.68%	5.45%
人均月非食品消费	仅抽样设计	3.73%	1.46%	2.30%	3.94%
人均月非食品消费	联合设计	7.72%	3.32%	4.71%	8.33%

表9.2。 家庭资产指数和人均月非食品消费的插件准则相对于基准设计的降幅。各项列出跨越 1,000次划分的百分比降幅均值和四分位数$\widehat{\ }$， V_j 相对于其在基准设计下取值的百分比降幅，分为五层。

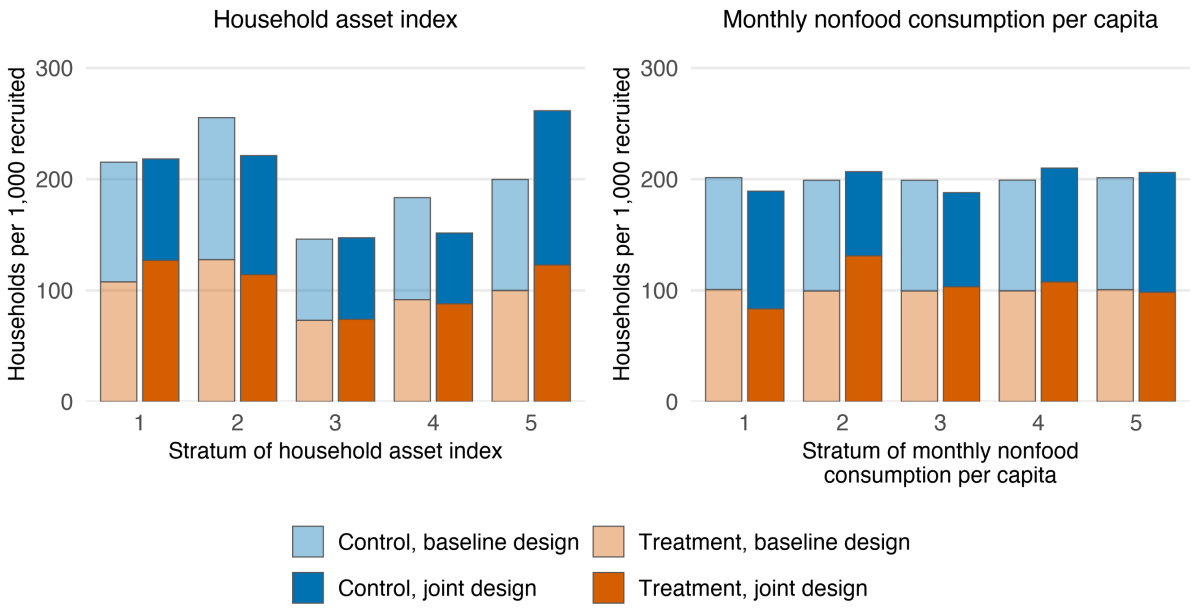


图 9.2. 基准设计和联合设计下各层招募的 1,000 个家庭的分配情况。每对柱形代表一个层，按协变量取值从低到高编号。浅色的左侧柱形表示基准设计，深色的右侧柱形表示联合设计。柱形高度表示每 1,000 个招募家庭中该层招募的家庭数，其下部和上部分别表示分配至处理组和对照组的家庭数。在基准设计下，每次划分中某层招募的家庭数等于该层 427 个观察性研究家庭所占比例乘以 1,000，其中一半分配至处理组。数值为 1,000 次划分的平均值。

10 结论

本文利用实验前可获得的观察性数据以及早期参与者的数据，指导抽样和处理分配，以估计长期处理效应。最优实验设计取决于处理组和对照组中替代指标的条件变异。序贯估计量能够学习这一实验设计，并且在所述条件下渐近正态；随着样本量增加，它达到最优固定设计界。渐近时间一致区间同时考虑了不断累积的实验变异，以及通过观察性数据在各监测时间之间共享的不确定性。其覆盖保证是渐近的，并适用于规定的监测起始时间及之后的时间。毕业项目示例展示了估计的方差异质性如何转化为抽样和分配的实验设计。

稿件准备过程中生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备这项工作期间，作者使用 Claude（Anthropic）、Codex（OpenAI）和 Gemini（Google）起草和修改文本、将手稿的部分内容翻译成英文、编写并检查模拟和实证示例所用的代码，以及检查推导和证明。使用这些工具后，作者根据需要审阅并编辑了内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

参考文献

Anderer, A., Bastani, H., and Silberholz, J.（2022年）。《有替代指标的自适应临床试验设计：何时值得采用？》《管理科学》，68(3)，1982–2002。Anderson, E. T., and Fox, E. J.（2019）。《价格促销如何发挥作用：实践与理论综述》。载于 Jean-Pierre Dubé 和 Peter E. Rossi（编），《营销经济学手册》，第1卷，497–552。北荷兰出版社。Athey, S., Chetty, R., and Imbens, G. W.（2025年）。《实验选择校正估计量：利用实验消除观测估计量中的偏差》。NBER工作论文第33817号。Athey, S., Chetty, R., Imbens, G. W., and Kang, H.（2026年）。《替代指标：结合短期代理变量，更快速、精准地估计长期处理效应》。《经济研究评论》，93(4)，2284–2312。Banerjee, A., Duflo, E., Goldberg, N., Karlan, D., Osei, R., Parienté, W., Shapiro, J., Thuysbaert, B., and Udry, C.（2015年）。《多方面项目为极端贫困人口带来持久进步：来自六个国家的证据》。《科学》，348(6236)，1260799。Chen, J., and Ritzwoller, D. M.（2023）。《长期处理效应的半参数估计》。《计量经济学杂志》，237(2, Part A)，105545。Chernozhukov, V., Chetverikov, D., Demirer, M., Duflo, E., Hansen, C., Newey, W., and Robins, J.（2018）。《用于处理效应和结构参数的双重/去偏机器学习》。《计量经济学杂志》，21(1)，C1–C68。Cook, T., Mishler, A., and Ramdas, A.（2024年）。《自适应实验中的半参数有效推断》。载于《第三届因果学习与推理会议论文集》，《机器学习研究论文集》，236，1033–1064。Dalal, A., Blöbaum, P., Kasiviswanathan, S., and Ramdas, A.（2024年）。《用于因果参数双重/去偏机器学习的任意时刻有效推断》。arXiv:2408.09598v2。Fan, Y., Wang, Z., and Wei, W.（2025年）。《SLOACI：基于替代指标的在线自适应因果推断》。arXiv:2512.06872v1。Frangakis, C. E., and Rubin, D. B.（2002年）。《因果推断中的主分层》。《生物统计学》，58(1)，21–29。Ghassami, A., Liu, C., Yang, A., Richardson, D., Shpitser, I., and Tchetgen Tchetgen, E.（2025年）。《结合实验数据与观察性数据以识别和估计长期因果效应》。arXiv:2201.10743v4。2025年9月修订；首次于2022年发布。Gopalakrishnan, A., and Park, Y.-H.（2021年）。《优惠券对访问至购买漏斗的影响》。《营销科学》，40(1)，48–61。Hahn, J., Hirano, K., and Karlan, D.（2011年）。《利用倾向得分进行自适应实验设计》。《商业与经济统计杂志》，29(1)，96–108。Hall, P., and Heyde, C. C.（1980年）。《鞅极限定理及其应用》。学术出版社。Howard, S. R., Ramdas, A., McAuliffe, J., and Sekhon, J.（2020年）。《通过非负超鞅构造时间一致的Chernoff界》。《概率调查》，17，257–317。Howard, S. R., Ramdas, A., McAuliffe, J., and Sekhon, J.（2021年）。《时间一致、非参数、非渐近置信序列》。《统计学年鉴》，49(2)，1055–1080。Huang, T.-W., and Ascarza, E.（2024年）。《以少胜多：利用短期信号克服低效的长期定向》。《营销科学》，43(4)，863–884。Imbens, G. W., Kallus, N., Mao, X., and Wang, Y.（2025年）。《在持续混杂下通过数据结合进行长期因果推断》。《英国皇家统计学会杂志B辑：统计方法学》，87(2)，362–388。

Jacod, J., and Shiryaev, A. N.（2003年）。《随机过程的极限定理》，第2版。《数学科学基础丛书》第288卷。施普林格。Johari, R., Koomen, P., Pekelis, L., and Walsh, D.（2022年）。《始终有效推断：对A/B测试进行持续监测》。《运筹学》，70(3)，1806–1821。Kallus, N., and Mao, X.（2025年）。《在结果数据有限时，替代指标在处理效应高效估计中的作用》。《英国皇家统计学会杂志B辑：统计方法学》，87(2)，480–509。Kato, M., Oga, A., Komatsubara, W., and Inokuchi, R.（2024年）。《利用协变量选择进行处理效应估计的主动自适应实验设计》。载于《第*41*届国际机器学习会议论文集》，《机器学习研究论文集》，235，23291–23323。Kato, M., Ishihara, T., Honda, J., and Narita, Y.（2025年）。《用于平均处理效应估计的高效自适应实验设计》。arXiv:2002.05308v7。2025年2月修订；首次于2020年发布。Lewis, R. A., and Rao, J. M.（2015年）。《衡量广告回报的经济学困境》。《经济学季刊》，130(4)，1941–1973。Neyman, J.（1934年）。《代表法的两个不同方面：分层抽样法与目的性选择法》。《英国皇家统计学会杂志》，97(4)，558–606。Park, Y., and Sasaki, Y.（2024年）。《结合实验数据与观察性数据进行长期政策评估的夹逼关系》。arXiv:2401.12050v1。Park, Y., and Sasaki, Y.（2026年）。《动态选择下实验数据与观察性数据结合所带来的信息量》。《计量经济学杂志》，254(Part B)，106219。Prentice, R. L.（1989年）。《临床试验中的替代终点：定义与操作标准》。《医学统计学》，8(4)，431–440。Ramdas, A., and Wang, R.（2025年）。《利用E值进行假设检验》。《统计学基础与趋势》，1(1–2)，1–390。Ramdas, A., Grünwald, P., Vovk, V., and Shafer, G.（2023）。《博弈论统计学与安全的任意时刻有效推断》。《统计科学》，38(4)，576–601。Sahni, N. S., Zou, D., and Chintagunta, P. K.（2017年）。《定向折扣优惠是否具有广告作用？来自70项现场实验的证据》。《管理科学》，63(8)，2688–2705。Shi, L., Wei, W., and Wang, J.（2024年）。《在有延迟结果的协变量调整响应自适应随机化实验中使用替代指标》。《神经信息处理系统进展》，37，71085–71121。van der Vaart, Aad W.（1998年）。《渐近统计学》。《剑桥统计与概率数学丛书》第3卷。剑桥大学出版社。Ville, J.（1939年）。《对集体概念的批判性研究》。巴黎：Gauthier-Villars。Waudby-Smith, I., Arbour, D., Sinha, R., Kennedy, E. H., and Ramdas, A.（2024年）。《时间一致中心极限定理与渐近置信序列》。《统计学年鉴》，52(6)，2613–2640。

附录

基于观察性数据的自适应实验：长期处理效应的高效实验设计与渐近时间一致推断

Kentaro Kawato

东京大学经济学研究生院

目录

附录 xA 证明.5 **0**

A.1 定理 2.1 的证明.50 A.2 定理 3.1 的证明.52 A.3 定理 3.2 的证明.61 A.4 命题 4.1 的证明.62 A.5 替代表示元的构造 .63 A.6 第 6 节的证明 .65 A.7 第 7 节的证明 .76

附录 B 其他模拟结果.95

B.1 固定时间结果.95 B.2 对目标轮次的敏感性.96 B.3 对规划值的敏感性.98

附录 C 额外实证结果. **99**

C.1 全部 20 个处理前变量的排名.99 C.2 敏感性分析 .100

附录 D 补充材料.102

附录 A 证明

附录 A 证明了第 2–7 节的形式化结果。附录 A.1 证明了定理 2.1 中的识别结果，附录A.2 证明了定理 3.1 中的效率界，附录 A.3 证明了定理 3.2 中的最优实验设计，附录 A.4 证明了命题 4.1 中自适应实验设计下的表示。附录 A.5 构造了替代表示元，附录 A.6 证明了引理 6.1 和 6.2 以及定理 6.1 中的渐近正态性，附录 A.7 证明了定理 7.1 和推论 7.1 中的时间一致覆盖率。

A.1 定理 2.1 的证明

附录 A.1 证明定理 2.1。在整个证明中，我们施加适当的矩条件，以确保所有显示的条件期望和积分（包括涉及 $Y(w)$的那些）都有定义，并将条件恒等式和密度比解释为定义在假设 2.6 所指定的分母为正的支持集上，在这些支持集之外则将比率设为零。

证明。证明通过推导（2.1）来建立潜在结果的条件均值恒等式，并将另外三个表示化归为（2.1）。步骤（i）证明该恒等式和（2.1）；步骤（ii）和（iii）计算给定协变量时（2.3）和（2.2）中加权项的条件均值；步骤（iv）则证明（2.4）在（2.1）右侧增加的两项均为零。

(i) 我们首先证明，对于任意 $w \in \{0,1\}$ 和任意目标支持集 x，都有 $\mathbb{E}[Y(w) \mid X = x, G = \mathrm{O}] = \mu_w(x)$，并由此推出 (2.1)。固定这样的 w 和 x。假设 2.4（条件外部效度）、假设 2.2（条件处理随机化）和假设 2.1（一致性）依次推出 $\mathbb{E}[Y(w) \mid X = x, G = \mathrm{O}] = \mathbb{E}[Y(w) \mid X = x, G = \mathrm{E}] = \mathbb{E}[Y(w) \mid W = w, X = x, G = \mathrm{E}] = \mathbb{E}[Y \mid W = w, X = x, G = \mathrm{E}]$。继而，迭代期望、假设 2.3（统计替代性）、假设 2.5（样本间条件结果可比性）以及第 2.2 节中的干扰函数定义依次推出，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Y \mid W = w, X = x, G = \mathrm{E}] \\
&= \int \mathbb{E}[Y \mid W = w, S = s, X = x, G = \mathrm{E}] f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) d\lambda_S(s) \\
&= \int \mathbb{E}[Y \mid S = s, X = x, G = \mathrm{E}] f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) d\lambda_S(s) \\
&= \int \mu(s,x) f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) d\lambda_S(s) = \mu_w(x),
\end{aligned}
$$

这就证明了该恒等式。该恒等式、迭代期望以及 τ 的定义继而推出 (2.1),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mu_1(X)-\mu_0(X)\mid G=\mathrm{O}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y(1)-Y(0)\mid X, G=\mathrm{O}]\mid G=\mathrm{O}]\\ &= \mathbb{E}[Y(1)-Y(0)\mid G=\mathrm{O}]=\tau.\end{aligned}$$

(ii) 接下来验证 (2.3)。对于处理组，根据 p 的定义、迭代期望、假设 2.6 中的正性以及 μ_1 的定义，可得 $\mathbb{E}[W\mu(S,\ X)/p(X)\mid X=x,\ G=\mathrm{E}] = \{p(x)/p(x)\}\mathbb{E}[\mu(S,\ X)\mid W=1,\ X=x,\ G=\mathrm{E}] = \mu_1(x)$；对照组的同样计算可得 $\mu_0(x)$。这两个加权恒等式、由假设 2.6 证明的 重要性权重消去以及 (2.1) 给出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\left\{\frac{W\mu(S,X)}{p(X)}-\frac{(1-W)\mu(S,X)}{1-p(X)}\right\}\Big|\ G=\mathrm{E}\right]\\ &=\int\{\mu_1(x)-\mu_0(x)\}f_{X|G=\mathrm{O}}(x)d\lambda_X(x)=\tau.\end{aligned}$$

(iii) 接下来验证 (2.2)。根据迭代期望和 μ 的定义，可得 $\mathbb{E}[\alpha(S,\ X)Y\mid G=\mathrm{O}] = \mathbb{E}[\alpha(S,\ X)\mu(S,\ X)\mid G=\mathrm{O}]$。接着，根据 α 的定义、给定 X 时的迭代期望、假设 2.6 中的替代变量支持条件及 μ_w 的定义，再结合 (2.1)，依次可得:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\alpha(S,X)\mu(S,X)\mid G=\mathrm{O}]\\ &=\mathbb{E}\left[\frac{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(S\mid X)-f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(S\mid X)}{f_{S|X,G=\mathrm{O}}(S\mid X)}\mu(S,X)\Big|G=\mathrm{O}\right]\\ &=\mathbb{E}\left[\int\frac{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s\mid X)-f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s\mid X)}{f_{S|X,G=\mathrm{O}}(s\mid X)}\mu(s,X)f_{S|X,G=\mathrm{O}}(s\mid X)d\lambda_S(s)\Big|G=\mathrm{O}\right]\\ &=\mathbb{E}[\mu_1(X)-\mu_0(X)\mid G=\mathrm{O}]=\tau.\end{aligned}$$

(iv) 最后，我们验证 (2.4)。对给定 $(S,\ X)$ 的观察性期望和给定 X 的实验性期望应用迭代期望，并利用假设 2.6 中的重要性权重消去，可知 (2.4) 右侧等于

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\mu_1(X)-\mu_0(X)\mid G=\mathrm{O}]+\mathbb{E}\big[\alpha(S,X)\mathbb{E}[Y-\mu(S,X)\mid S,X,G=\mathrm{O}]\big|G=\mathrm{O}\big]\\ &\quad+\int f_{X|G=\mathrm{O}}(x)\Big[\{\mu_1(x)-\mu_1(x)\}-\{\mu_0(x)-\mu_0(x)\}\Big]d\lambda_X(x)\\ &=\mathbb{E}[\mu_1(X)-\mu_0(X)\mid G=\mathrm{O}]=\tau.\end{aligned}$$

显示式中的第一个等号用到了 μ 和 μ_w的定义，第二个等号则是式 (2.1)。至此，定理 2.1 的证明完成。

A.2 定理 3.1 的证明

定理 3.1 中的矩条件为 $V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot),\ p(\cdot)) < \infty, V^{\mathrm{obs}} < \infty$，以及 $\mathbb{E}[\int \mathbb{E}[|Y| \mid S = s,\ X,\ G = \mathrm{O}]\{ f_{S|W=1,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s \mid X) + f_{S|W=0,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s \mid X)\}\ d\lambda_S(s)\ \mid G = \mathrm{O}] < \infty$。

定理 3.1 的证明将完整数据视为固定设计乘积模型 $(P^{\exp})^{\otimes N_{\mathrm{E}}} \otimes (P^{\mathrm{obs}})^{\otimes N_{\mathrm{O}}}$，其中设计 $(f_{X|G=\mathrm{E}}, p)$ 已知，并分两步进行。命题 A.2.1 表明，定理 3.1 中给出的配对 $(\phi^{\exp}, \phi^{\mathrm{obs}})$ 是该模型中 τ 的有效影响函数对；附录A.2.4 则表明，该配对在 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 尺度上的平方范数收敛于 $V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot),\ p(\cdot)) + \kappa V^{\mathrm{obs}}$，并通过卷积定理将此极限转化为效率界。两个引理提供了这些步骤所需的计算。引理 A.2.1 计算正则参数子模型的得分，这些得分给出附录 A.2.1 中的切空间，并将附录 A.2.2 中 $\overline{\tau}$ 的路径导数分解为观测协变量分布、观测结果分布和实验替代分布的贡献。引理 A.2.2 计算该配对的矩。根据其第 (b) 部分，该配对的观察性部分再现前两项贡献，而实验部分再现第三项贡献；再结合一个将两个部分都置于切空间中的截断论证，即可证明附录 A.2.3 中的命题 A.2.1。其第 (c) 部分给出了附录 A.2.4 中使用的方差。附录 A.2.5 证明了这两个引理。

A.2.1 数据分布、参数子模型与切空间

本小节介绍固定设计乘积模型、其正则参数子模型及其得分，以及附录 A.2.3 中用于确定有效影响函数对的切空间。分层抽样方案由两个相互独立的数据集构成：$\{(X_t, W_t, S_t) : t = 1, \ldots, N_{\mathrm{E}}\}$ 和 $\{(X_i, S_i, Y_i) :\ i = 1, \ldots, N_{\mathrm{O}}\}$，每个样本内部的观测值均独立同分布。在固定设计下，一个实验观测的密度为 $f_{X|G=\mathrm{E}}(x)p(x)^w\{1 - p(x)\}^{1-w} f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)^w f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)^{1-w}$，一个观测样本观测值的密度为 $f_{X|G=\mathrm{O}}(x) f_{S|X,G=\mathrm{O}}(s \mid x) f_{Y|S,X,G=\mathrm{O}}(y \mid s, x)$。这些密度确定了第 3.1 节的单观测分布 $P^{\exp}$ 和 P^{obs}，而 $\mathbb{E}^{\exp}$ 和 $\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}$ 表示它们的期望算子。量 v_w、σ^2 和 V^{obs} 的定义见第 3.1 节；从此处起，在附录 A 中，$V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}, p)$ 简写为 $V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}(\cdot),\ p(\cdot))$。

考虑一条由 r 索引、位于零的邻域内并在 $r = 0$ 处经过真实分布的一维正则路径；沿该路径，每个发生变化的因子都乘以 $1 + r$ 个其自变量的有界函数，并且该函数在给定该因子的条件变量时的条件均值为零。在这样的路径上，下面的每个积分都是 r 的多项式，其系数在定理 3.1 的矩条件下均为有限值，因此其导数

在 $r=0$ 处求取时无需交换极限与积分，并且这些有界函数就是下文定义的得分。满足这些条件均值约束的有界函数，在相应的平方可积函数空间中是稠密的，因此下文的切空间与更大类路径（即均方二次可微的路径）所对应的切空间相同。定理 3.1 给出了该固定设计乘积模型中的界。第 2 节的假设还对观测分布施加了限制。对于每个可测集 B 以及目标支持集中的每个 x，$\mathbb{P}(S\in B\mid X=x,G=\mathrm{O})\le\mathbb{P}(S\in B\mid W=1,X=x,G=\mathrm{E})+\mathbb{P}(S\in B\mid W=0,X=x,G=\mathrm{E})$，因为根据假设 2.1，$S\in B$ 要求 $S(1)\in B$ 或 $S(0)\in B$，而假设 2.2 和 2.4 给出了右侧。乘积模型并不施加这些不等式限制。沿该路径，设计因子 $f_{X|G=\mathrm{E}}(x)$ 和 $p(x)$ 保持不变，因此实验密度为 $f_{X|G=\mathrm{E}}(x)p(x)^{w}\{1-p(x)\}^{1-w}f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E},r}(s\mid x)^{w}f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E},r}(s\mid x)^{1-w}$，而观测密度为 $f_{X|G=\mathrm{O},r}(x)\,f_{S|X,G=\mathrm{O},r}(s\mid x)\,f_{Y|S,X,G=\mathrm{O},r}(y\mid s,x)$。对于 $w\in\{0,1\}$，将沿路径发生变化的因子的得分均定义在 $r=0$ 处，定义为

$$\ell_w^{\exp}(s,x):=\partial_r\log f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E},r}(s\mid x)|_{r=0},\qquad \ell_S^{\mathrm{obs}}(s,x):=\partial_r\log f_{S|X,G=\mathrm{O},r}(s\mid x)|_{r=0},$$
$$\ell_X^{\mathrm{obs}}(x):=\partial_r\log f_{X|G=\mathrm{O},r}(x)|_{r=0},\qquad \ell_Y^{\mathrm{obs}}(y,s,x):=\partial_r\log f_{Y|S,X,G=\mathrm{O},r}(y\mid s,x)|_{r=0}.$$

沿同一路径，长期结果的条件均值为 $\mu_r(s,x):=\int y\,f_{Y|S,X,G=\mathrm{O},r}(y\mid s,x)\,d\lambda_Y(y)$。下一条引理汇总了下文所用的得分计算，附录 A.2.5 对其进行了证明。

引理 A.2.1（正则路径的得分）。对于上述每条正则路径，以下结论均成立。

（a）在 $r=0$ 处，完整观测与实验数据的得分为

$$\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\{W_t\ell_1^{\exp}(S_t,X_t)+(1-W_t)\ell_0^{\exp}(S_t,X_t)\}+\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}}\{\ell_X^{\mathrm{obs}}(X_i)+\ell_S^{\mathrm{obs}}(S_i,X_i)+\ell_Y^{\mathrm{obs}}(Y_i,S_i,X_i)\}.$$

（b） $\mathbb{E}[\mathrm{l}\,\mathrm{exp}_w(S,X)\mid X,W=w,G=\mathrm{E}]=0$ 对于 $w\in\{0,1\}$，$\mathbb{E}[\mathrm{l}\,\mathrm{obs}_X(X)\mid G=\mathrm{O}]=0$，$\mathbb{E}[\mathrm{l}\,\mathrm{obs}_S(S,X)\mid X,G=\mathrm{O}]=0$，以及 $\mathbb{E}[\mathrm{l}\,\mathrm{obs}_Y(Y,S,X)\mid S,X,G=\mathrm{O}]=0$。

（c） $\partial_r\mu_r(s,x)|_{r=0}=\mathbb{E}[\{Y-\mu(S,X)\}l_Y^{\mathrm{obs}}(Y,S,X)\mid S=s,X=x,G=\mathrm{O}]$。

完整观测与实验数据的切空间是第 (a) 部分得分的 $L_2((P^{\exp})^{\otimes N_{\mathrm{E}}}\otimes(P^{\mathrm{obs}})^{\otimes N_{\mathrm{O}}})$ 闭包，其中各分量得分满足第 (b) 部分中的中心化限制，且完整得分平方可积。等价地，单次观测实验切空间是 $W\mathrm{exp}_1(S,X)+(1-W)\mathrm{exp}_0(S,X)$ 的闭包，而单次观测观察切空间是 $\mathrm{l}_{\mathrm{obs}X}(X)+\mathrm{l}_{\mathrm{obs}S}(S,X)+l_Y^{\mathrm{obs}}(Y,S,X)$ 的闭包。

A.2.2 目标参数的路径导数

本小节计算 τ 沿任意正则路径的导数，并将其分解为三个项；附录 A.2.3 将这三项与影响函数对相匹配。路径上的目标是定理 2.1 的回归表示（2.1），在该路径分布下取值为

$$\tau(r) = \int f_{X|G=\mathrm{O},r}(x) \int \mu_r(s,x)\Big\{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E},r}(s \mid x) - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E},r}(s \mid x)\Big\}\, d\lambda_S(s) d\lambda_X(x).$$

应用乘积法则并在 $r = 0$ 处求值，可从 $f_{X|G=\mathrm{O},\, r}$、 μ_r 和 $f_{S|W=w,\ X,\ G=\mathrm{E},\ r}$ 中各得到一项贡献，

$$\begin{aligned}
&\partial_r \tau(r)\big|_{r=0} \\
&= \int f_{X|G=\mathrm{O}}(x)\ell_X^{\mathrm{obs}}(x) \int \mu(s,x)\Big\{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\Big\}\, d\lambda_S(s) d\lambda_X(x) \\
&+ \int f_{X|G=\mathrm{O}}(x) \int \partial_r \mu_r(s,x)\big|_{r=0} \Big\{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\Big\}\, d\lambda_S(s) d\lambda_X(x) \\
&+ \int f_{X|G=\mathrm{O}}(x) \int \mu(s,x)\Big\{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\ell_1^{\mathrm{exp}}(s,x) \\
&\qquad - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\ell_0^{\mathrm{exp}}(s,x)\Big\}\, d\lambda_S(s) d\lambda_X(x).
\end{aligned}$$

第一项中的内层积分为 $\tau(x)$，因此引理 A.2.1(b) 中的 $\mathbb{E}[1_X^{\mathrm{obs}}(X) \mid G = \mathrm{O}] = 0$ 将第一项转化为 $\int f_{X|G=\mathrm{O}}(x)\tau(x)$l 观测 $x(x)\ d\lambda_X(x) = \mathbb{E}[\{\tau(X) - \tau\}$l 观测 $x(X)\ |G = \mathrm{O}]$。第二项利用 $\alpha(S,X)$ 所体现的密度比消去。根据 α 的定义以及假设 2.6 中的替代变量支持条件， $\alpha(s,x)f_{S|X,G=\mathrm{O}}($ $s \mid x) = f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x) - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)$，因此将 $\mathbb{E}[\alpha(S,X)\{\partial_r \mu_r(S,X)|_{r=0}\} \mid G = \mathrm{O}]$ 写成关于 $f_{X|G=\mathrm{O}}(x)f_{S|X,G=\mathrm{O}}(s \mid x)$ 的积分，便可看出该期望等于第二项。代入引理 A.2.1(c) 并使用迭代期望，第二项变为$\mathbb{E}[\alpha(S,X)\{Y - \mu(S,X)\}1_Y^{\mathrm{obs}}(YS,X) \mid G = \mathrm{O}]$。合并这三项可得

$$\begin{aligned}
&\partial_r \tau(r)\big|_{r=0} \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[\{\tau(X) - \tau\}\ell_X^{\mathrm{obs}}(X) \mid G = \mathrm{O}]}_{\text{(I)}} + \underbrace{\mathbb{E}[\alpha(S,X)\{Y - \mu(S,X)\}\ell_Y^{\mathrm{obs}}(Y,S,X) \mid G = \mathrm{O}]}_{\text{(II)}} \\
&+ \underbrace{\int f_{X|G=\mathrm{O}}(x) \int \mu(s,x)\Big\{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\ell_1^{\mathrm{exp}}(s,x)\,. \\
&\qquad - f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\ell_0^{\mathrm{exp}}(s,x)\Big\}\, d\lambda_S(s) d\lambda_X(x)}_{\text{(III)}}
\end{aligned}$$

项 (I) 是观测协变量分布的贡献，项 (II) 是观测结果分布的贡献，项 (III) 是实验替代分布的贡献。下文的引理 A.2.2(b) 表明，定理 3.1 中这对量的观察性部分重现了项 (I) 和 (II)，而实验部分重现了项 (III)。

A.2.3 有效影响函数对的验证

本小节证明命题 A.2.1，该命题将定理 3.1 中的函数对识别为有效影响函数对，附录 A.2.4 据此给出界。定义 A.2.1 陈述该函数对必须满足的表示，即将附录 A.2.2 的路径导数写成与得分的内积。

定义 *A.2.1*（影响函数对与有效影响函数）。令 $\ell^{\exp}(S, W, X) = W\ell^{\exp,1}(S, X) + (1 - W)\ell^{\exp,0}(S, X)$ 表示一次实验性观测的得分，并令 $\ell^{\mathrm{obs}}(X, S, Y) = \ell^{\mathrm{obs},X}(X) + \ell^{\mathrm{obs},S}(S, X) + \ell^{\mathrm{obs},Y}(Y; S, X)$ 表示一次观测样本观测值的得分。τ 的影响函数对是一对平方可积、均值为零的函数 $(\phi^{\exp}, \phi^{\mathrm{obs}})$，使得对每一个经过真实分布的正则参数子模型，

$$\partial_r \tau(r)|_{r=0} = \mathbb{E}^{\exp}\left[\phi^{\exp}(S, W, X)\ell^{\exp}(S, W, X)\right] + \mathbb{E}^{\mathrm{obs}}\left[\phi^{\mathrm{obs}}(X, S, Y)\ell^{\mathrm{obs}}(X, S, Y)\right].$$

有效影响函数对是这样一对影响函数：其分量分别属于附录 *A.2.1* 中单观测切空间的闭包，即乘积切空间中路径导数的 *Riesz* 表示元。对于大小为 N_{E} 和 N_{O} 的样本，由一对影响函数构成的全样本影响函数为

$$\frac{1}{N_{\mathrm{E}}}\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\phi^{\exp}(S_t, W_t, X_t) + \frac{1}{N_{\mathrm{O}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}}\phi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i).$$

命题 A.2.1（固定设计乘积模型中的有效影响函数对）。在固定设计乘积模型中，设 $\phi^{\exp}$（S、W、X）和 ϕ^{obs}（X、S、Y）为定理 *3.1* 中所列的函数。则有以下结论。

(*i*) 对于定理 *3.1* 的未中心化观测得分 ψ^{obs}，按照定义 *A.2.1* 的含义，（$\phi^{\exp}$、ϕ^{obs}）是 τ 的一对影响函数，而 ϕ^{obs}（X、S、Y）$= \psi^{\mathrm{obs}}$（X、S、Y）$- \tau$。

(ii) 沿每条正则路径，由这对函数形成的全样本影响函数与引理 *A.2.1(a)* 中完整观测与实验数据的得分之乘积，其期望为 $\partial_r \tau(r)|_{r=0}$。

(iii) 两个分量均属于附录 *A.2.1* 中单观测切空间的闭包。因此，ϕ^{exp} 和 ϕ^{obs} 分别是实验性和观测有效影响函数，而由它们形成的全样本影响函数则是完整观测与实验数据集的有效影响函数。

该证明使用了这一对函数的以下性质，这些性质由附录 A.2.5 证明。第 (a) 部分给出中心化；第 (b) 部分使两个得分配对与附录A.2.2 中分解的各项相匹配；第 (c) 部分则给出此处用于平方可积性以及附录 A.2.4 中用于方差的二阶矩。

引理 A.2.2（候选影响函数对的矩）。设 ϕ^{exp} 和 ϕ^{obs} 为定理 *3.1* 中展示的函数。

(a) $\mathbb{E}[\phi^{\mathrm{exp}}(S, W, X) \mid W, X, G = \mathrm{E}] = 0$ 以及 $\mathbb{E}[\alpha(S, X)\{Y - \mu(S, X)\} \mid S, X, G = \mathrm{O}] = 0$。特别地，$\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[\phi^{\mathrm{exp}}(S, W, X)] = 0$ 以及 $\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}}(X, S, Y)] = 0$。

(b) 沿附录 *A.2.1* 中的每一条正则路径，结合附录*A.2.2* 中分解的各项，$\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[\phi^{\mathrm{exp}}(S, W, X) l_{\mathrm{exp}}(S, W, X)]$ 等于项 *(III)*，而 $\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}}(X, S, Y) l_{\mathrm{obs}}(X, S, Y)]$ 等于项 *(I)* 和 *(II)* 之和。

(c) $\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[\phi^{\mathrm{exp}}(S, W, X)^2] = V^{\mathrm{exp}}(f_{X|G=\mathrm{E}}, p)$ 且 $\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}}(X, S, Y)^2] = V^{\mathrm{obs}}$，二者在定理 *3.1* 的矩条件下均为有限值。

命题 A.2.1 的证明。以下步骤 (i)、(ii) 和 (iii) 依次证明该命题的 (i)、(ii) 和 (iii) 部分。(i) 我们首先验证定义 A.2.1 的条件。引理 A.2.2(a) 表明这两个函数的均值均为零，而引理 A.2.2(c) 表明它们在定理 3.1 的矩条件下均平方可积。沿每一条正则路径，引理 A.2.2(b) 表明 $\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[\phi^{\mathrm{exp}} l_{\mathrm{exp}}] + \mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}} l_{\mathrm{obs}}]$ 是项 (I)–(III) 的和，根据附录 A.2.2 中的分解，该和为 $\partial_r \tau(r)|_{r=0}$。因此，$(\phi^{\mathrm{exp}}, \phi^{\mathrm{obs}})$ 是一个影响函数对，并且$\phi^{\mathrm{obs}} = \psi^{\mathrm{obs}} - \tau$ 由定理 3.1 中的定义得出。

(ii) 接下来，我们根据定义 A.2.1，验证引理 A.2.1(a)中全样本影响函数与完整样本得分的导数恒等式，即为$\sum_{s=1}^{N_{\mathrm{E}}} l_{\mathrm{exp}}(S_s, W_s, X_s) + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{O}}} l^{\mathrm{obs}}(X_j, S_j, Y_j)$。展开它们的乘积可得四个双重求和。在实验组双重求和中，含有 $t \neq s$ 的项根据独立性可分解为$\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[\phi^{\mathrm{exp}}(S, W, X)]\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[l^{\mathrm{exp}}(S, W, X)]$，一个中心化影响函数的均值与一个中心化得分的均值之积，并由引理 A.2.2(a)和引理 A.2.1(b)知其为零。观察组双重求和中的 $i \neq j$ 也同样成立，两个混合双重求和

根据两个样本的独立性和中心化性质消失。只剩下对角项，而它们的 N_{E} 和 N_{O} 重数抵消了 $1/N_{\mathrm{E}}$ 和 $1/N_{\mathrm{O}}$ 这两个因子。根据第 (i) 部分，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg[\Bigg\{\frac{1}{N_{\mathrm{E}}}\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\phi^{\exp}(S_t,W_t,X_t) \\
&\qquad+\frac{1}{N_{\mathrm{O}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}}\phi^{\mathrm{obs}}(X_i,S_i,Y_i)\Bigg\}\Bigg\{\sum_{s=1}^{N_{\mathrm{E}}}\ell^{\exp}(S_s,W_s,X_s)+\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{O}}}\ell^{\mathrm{obs}}(X_j,S_j,Y_j)\Bigg\}\Bigg] \\
&=\mathbb{E}^{\exp}[\phi^{\exp}(S,W,X)\ell^{\exp}(S,W,X)]+\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)\ell^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)]=\partial_r\tau(r)|_{r=0}\,.
\end{aligned}$$

(iii) 最后，两个部分都属于附录 A.2.1 的切空间闭包。根据引理 A.2.2(a)，实验部分在给定处理和协变量的条件下具有零条件均值。观察性部分是均值为零的协变量函数$\tau(X)-\tau$ 与残差 $\alpha(S,X)\{Y-\mu(S,X)\}$之和，其在给定 (S,X) 时的条件均值为零。截断每个平方可积部分并减去其相应的条件均值，可得到有界的中心化近似，并在 L_2 中收敛。这些有界方向是所述固定设计乘积模型中因子分解子模型的得分。因此，它们的极限属于该模型的切空间闭包。根据定义 A.2.1 和(i)，$(\phi^{\exp},\phi^{\mathrm{obs}})$ 是有效影响函数对。由此构成的全样本影响函数随后属于完整数据的切空间，并且根据(ii)，它是完整数据的有效影响函数。这证明了命题 A.2.1。

A.2.4 固定设计下的半参数效率界

本小节计算有效影响函数的方差，并完成定理 3.1 的证明。根据引理 A.2.2(a) 和 (c)，每个 $\phi^{\exp}(S_t,\ W_t,\ X_t)$ 的均值为零，方差为 $V^{\exp}(\ f_{X|G=\mathrm{E}},\ p)$；每个 $\phi^{\mathrm{obs}}(X_i,\ S_i,\ Y_i)$ 的均值为零，方差为 V^{obs}。命题 A.2.1(iii) 中全样本有效影响函数的两个样本均值相互独立且均值为零；由于每个样本内的观测值独立同分布，同一样本内不同指数对应的协方差均为零。因此，全样本有效影响函数的方差为

$$\frac{1}{N_{\mathrm{E}}}V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}},p)+\frac{1}{N_{\mathrm{O}}}V^{\mathrm{obs}}.$$

为应用卷积定理，考虑 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 尺度下的归一化坐标。影响函数对的归一化坐标为（$\phi^{\exp}(S,\ W,\ X),\ \sqrt{N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}}}\,\phi^{\mathrm{obs}}(X,\ S,\ Y)$），相应的得分坐标为（$l^{\exp},\ \sqrt{N_{\mathrm{O}}/N_{\mathrm{E}}}\,l^{\mathrm{obs}}$）。二者的配对保留了未缩放的路径导数，因为 $\mathbb{E}^{\exp}[\phi^{\exp}l^{\exp}]+\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\{\sqrt{N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}}}\,\phi^{\mathrm{obs}}\}\{\sqrt{N_{\mathrm{O}}/N_{\mathrm{E}}}\,l^{\mathrm{obs}}\}]=$

$\partial_r \tau(r)|_{r=0}$ 根据命题 A.2.1(i)。根据引理 A.2.2(c)，归一化影响函数对的平方范数（即 N_{E} 乘以上述方差）为

$$\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[\phi^{\mathrm{exp}}(S,W,X)^2] + \frac{N_{\mathrm{E}}}{N_{\mathrm{O}}}\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)^2] = V^{\mathrm{exp}}(f_{X\mid G=\mathrm{E}},p) + \frac{N_{\mathrm{E}}}{N_{\mathrm{O}}}V^{\mathrm{obs}}$$
$$\longrightarrow V^{\mathrm{exp}}(f_{X\mid G=\mathrm{E}},p) + \kappa V^{\mathrm{obs}}.$$

命题 A.2.1 指出，在所述模型中，该影响函数对就是有效影响函数对，而归一化坐标给出了其在 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 尺度上的方差。van der Vaart（1998）的定理 25.20 针对一个独立同分布样本陈述，因此我们将其论证应用于两个独立样本。沿着附录 A.2.1 中的每条路径，以及联合沿着有限条这样的路径，完整数据的对数似然比都是局部渐近正态的。在参数值 $r/\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 处，它等于 $rN^{-1/2}\mathrm{E}\,\{\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} l^{\mathrm{exp}}(S_t,W_t,X_t) + \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}} l^{\mathrm{obs}}(X_i,S_i,Y_i)\} - (r^2/2)\{\mathbb{E}^{\mathrm{exp}}[l\ \mathrm{exp}(S,W,X)^2] + (N_{\mathrm{O}}/N_{\mathrm{E}})\,\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[l\ \mathrm{obs}(X,S,Y)^2]\}$ 再加上一项依概率收敛于零的项；这是由每个因子的二次均值可微性以及每个样本中的中心极限定理得出的。将定理 25.20 证明中的卷积论证应用于这个局部渐近正态的实验序列，并使用上述归一化得分坐标，而非针对单个独立同分布样本进行论证，即可得到卷积下界；在 $N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}} \to \kappa$ 下的所示极限给出 $V^{\mathrm{exp}}(f_{X\mid G=\mathrm{E}},p) + \kappa V^{\mathrm{obs}}$，作为 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 尺度上 τ 的正则估计量的半参数效率界。如果这个极限范数为零，则下界直接为零。结合命题 A.2.1 中的有效影响函数及其在引理 A.2.2(c) 中给出的二阶矩，即可证明定理 3.1。

—

A.2.5 引理 *A.2.1* 和 *A.2.2* 的证明

引理 A.2.1 的证明。对于 (a) 部分，两个独立样本沿路径的联合对数似然为

$$\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\Big[\log f_{X\mid G=\mathrm{E}}(X_t) + W_t\log p(X_t) + (1-W_t)\log\{1-p(X_t)\}$$
$$+ W_t\log f_{S\mid W=1,X,G=\mathrm{E},r}(S_t\mid X_t) + (1-W_t)\log f_{S\mid W=0,X,G=\mathrm{E},r}(S_t\mid X_t)\Big]$$
$$+\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}}\Big[\log f_{X\mid G=\mathrm{O},r}(X_i) + \log f_{S\mid X,G=\mathrm{O},r}(S_i\mid X_i) + \log f_{Y\mid S,X,G=\mathrm{O},r}(Y_i\mid S_i,X_i)\Big].$$

每个实验样本求和项中只有两个替代项，以及每个观察样本求和项中的三个项依赖于 r，因此在 $r=0$ 处逐项求导即可得到第 (a) 部分中的得分。对于第 (b) 部分，在 $r=0$ 处对每个密度的归一化进行求导，可得到四个

中心化限制。例如，$0 = \partial_r\{\int f_{S|W=w,\,X,\,G=\mathrm{E},\,r}(s \mid x)\, d\lambda_S(s)\}\big|_{r=0} = \int f_{S|W=w,\,X,\,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\ell_w^{\exp}(s, x)\, d\lambda_S(s)$。对于第 (c) 部分，在积分号下对 $\mu_r(s, x)$ 求导，可得到

$$\begin{aligned}\partial_r \mu_r(s,x)\big|_{r=0} &= \int y\, f_{Y|S,X,G=\mathrm{O}}(y \mid s,x)\ell_Y^{\mathrm{obs}}(y,s,x)\, d\lambda_Y(y) \\ &= \int \{y - \mu(s,x)\} f_{Y|S,X,G=\mathrm{O}}(y \mid s,x)\ell_Y^{\mathrm{obs}}(y,s,x)\, d\lambda_Y(y) \\ &= \mathbb{E}[\{Y - \mu(S,X)\}\ell_Y^{\mathrm{obs}}(Y,S,X) \mid S = s, X = x, G = \mathrm{O}].\end{aligned}$$

第二个等式减去了条件得分均值乘以 $\mu(s, x)$，而根据第 (b) 部分，条件得分均值为零。

引理 A.2.2 的证明。对于第 (a) 部分，令 $w \in \{0, 1\}$。根据 $\mu_w(x)$ 的定义，$\int\{\mu(s,x) - \mu_w(x)\} f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s) = 0$。给定 $W = w$ 和 $X = x$，$\phi^{\exp}(S, W, X)$ 是 $\mu(S, x) - \mu_w(x)$ 乘以一个仅取决于 x 的因子，因此 $\mathbb{E}[\phi^{\exp}(S, W, X) \mid W, X, G = \mathrm{E}] = 0$。在给定 $X = x$ 的条件下对 W 求平均，分配概率会与逆分配概率因子相消，并且

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi^{\exp}(S,W,X) \mid X = x, G = \mathrm{E}] = \frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(x)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(x)}\Bigg[\int \{\mu(s,x) - \mu_1(x)\} f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s) \\ - \int \{\mu(s,x) - \mu_0(x)\} f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s)\Bigg] = 0.\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{E}^{\exp}[\phi^{\exp}(S, W, X)] = 0$。对于观察性部分，根据 μ 的定义，$\mathbb{E}[\alpha(S, X)\{Y - \mu(S, X)\} \mid S, X, G = \mathrm{O}] = \alpha(S, X)\mathbb{E}[Y - \mu(S, X) \mid S, X, G = \mathrm{O}] = 0$。由于根据 (2.1)，$\mathbb{E}[\tau(X) \mid G = \mathrm{O}] = \tau$，因此 $\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}}(X, S, Y)] = \mathbb{E}[\tau(X) - \tau \mid G = \mathrm{O}] + \mathbb{E}[\alpha(S, X)\mathbb{E}[Y - \mu(S, X) \mid S, X, G = \mathrm{O}] \mid G = \mathrm{O}] = 0$。

对于第 (b) 部分，首先考虑实验组块。由于 $W^2 = W$，$(1 - W)^2 = 1 - W$ 和 $W(1 - W) = 0$，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\exp}\Big[\phi^{\exp}(S,W,X)\{W\ell_1^{\exp}(S,X) + (1-W)\ell_0^{\exp}(S,X)\}\Big] \\ &= \mathbb{E}^{\exp}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\frac{W}{p(X)}\{\mu(S,X) - \mu_1(X)\}\ell_1^{\exp}(S,X)\right] \\ &- \mathbb{E}^{\exp}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\frac{1-W}{1-p(X)}\{\mu(S,X) - \mu_0(X)\}\ell_0^{\exp}(S,X)\right].\end{aligned}$$

在实验律下进行积分会使每个处理组或对照组中的密度比与相应的分配概率相互抵消，因此右侧等于

$$
\begin{aligned}
&\int f_{X\mid G=\mathrm{E}}(x)p(x)\frac{f_{X\mid G=\mathrm{O}}(x)}{f_{X\mid G=\mathrm{E}}(x)}\frac{1}{p(x)}\int\{\mu(s,x)\\
&\qquad-\mu_1(x)\}\ell_1^{\exp}(s,x)f_{S\mid W=1,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)\,d\lambda_S(s)d\lambda_X(x)\\
&-\int f_{X\mid G=\mathrm{E}}(x)\{1-p(x)\}\frac{f_{X\mid G=\mathrm{O}}(x)}{f_{X\mid G=\mathrm{E}}(x)}\frac{1}{1-p(x)}\int\{\mu(s,x)\\
&\qquad-\mu_0(x)\}\ell_0^{\exp}(s,x)f_{S\mid W=0,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)\,d\lambda_S(s)d\lambda_X(x)\\
&=\int f_{X\mid G=\mathrm{O}}(x)\int\mu(s,x)\Big\{f_{S\mid W=1,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)\ell_1^{\exp}(s,x)\\
&\qquad-f_{S\mid W=0,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)\ell_0^{\exp}(s,x)\Big\}\,d\lambda_S(s)d\lambda_X(x).
\end{aligned}
$$

最后一个等式利用来自引理 A.2.1(b) 的 $\mathbb{E}[l_{\exp w}(S,X)\mid X,W=w,G=\mathrm{E}]=0$，消去包含 $\mu_w(x)$（其中 $w\in\{0,1\}$）的项，所得结果即为项 (III)。

对于观测区块，将 $\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)\{l_{\mathrm{obs},X}(X)+l_{\mathrm{obs},S}(S,X)+l_{\mathrm{obs},Y}(Y,S,X)\}$ 展开后可得六个乘积。乘积 $\{\tau(X)-\tau\}l_S^{\mathrm{obs}}(S,X)$ 在对 X 条件化后均值为零，因为 $\mathbb{E}[l_{\mathrm{obs},S}(S,X)\mid X,G=\mathrm{O}]=0$。乘积 $\{\tau(X)-\tau\}l_{\mathrm{obs},Y}(Y,S,X)$ 在对 (S,X) 条件化后均值为零，因为 $\tau(X)-\tau$ is X-可测，且 $\mathbb{E}[l_{\mathrm{obs},Y}(Y,S,X)\mid S,X,G=\mathrm{O}]=0$。乘积 $\alpha(S,X)\{Y-\mu(S,X)\}l_X^{\mathrm{obs}}(X)$ 和 $\alpha(S,X)\{Y-\mu(S,X)\}l_{\mathrm{obs},S}(S,X)$ 的均值为零，因为 $\mathbb{E}[Y-\mu(S,X)\mid S,X,G=\mathrm{O}]=0$。剩下的两个乘积为

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}\Big[\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)\{\ell_X^{\mathrm{obs}}(X)+\ell_S^{\mathrm{obs}}(S,X)+\ell_Y^{\mathrm{obs}}(Y,S,X)\}\Big]\\
&=\mathbb{E}[\{\tau(X)-\tau\}\ell_X^{\mathrm{obs}}(X)\mid G=\mathrm{O}]+\mathbb{E}[\alpha(S,X)\{Y-\mu(S,X)\}\ell_Y^{\mathrm{obs}}(Y,S,X)\mid G=\mathrm{O}],
\end{aligned}
$$

它是项 (I) 和 (II) 的和。

对于第 (c) 部分，处理项与对照项的交叉乘积为零，因为 $W(1-W)=0$，且 $W^2=W$ and $(1-W)^2=1-W$给出

$$
\phi^{\exp}(S,W,X)^2=\left\{\frac{f_{X\mid G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X\mid G=\mathrm{E}}(X)}\right\}^2\left[\frac{W}{p(X)^2}\{\mu(S,X)-\mu_1(X)\}^2+\frac{1-W}{\{1-p(X)\}^2}\{\mu(S,X)-\mu_0(X)\}^2\right].
$$

给定 $X = x$，可得 $\mathbb{E}[\phi^{\exp}(S, W, X)^2 \mid X = x, G = \mathrm{E}] = \{f_{X|G=\mathrm{O}}(x)/f_{X|G=\mathrm{E}}(x)\}^2[v_1(x)/p(x) + v_0(x)/\{1-p(x)\}]$，并按照实验协变量分布进行积分，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\exp}[\phi^{\exp}(S,W,X)^2] &= \int \frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(x)^2}{f_{X|G=\mathrm{E}}(x)}\left\{\frac{v_1(x)}{p(x)} + \frac{v_0(x)}{1-p(x)}\right\} d\lambda_X(x) \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{E}}(X)}\left\{\frac{v_1(X)}{p(X)} + \frac{v_0(X)}{1-p(X)}\right\}\middle| G=\mathrm{O}\right] = V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}, p).\end{aligned}$$

对于观察性部分，$\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)^2 = \{\tau(X) - \tau\}^2 + 2\{\tau(X) - \tau\}\alpha(S,X)\{Y - \mu(S,X)\} + \alpha(S,X)^2\{Y - \mu(S,X)\}^2$。交叉项的均值为零，因为 $\mathbb{E}[\{\tau(X) - \tau\}\alpha(S,X)\{Y - \mu(S,X)\} \mid G = \mathrm{O}] = \mathbb{E}[\{\tau(X) - \tau\}\alpha(S,X)\mathbb{E}[Y - \mu(S,X) \mid S, X, G = \mathrm{O}] \mid G = \mathrm{O}] = 0$。因此，$\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[\phi^{\mathrm{obs}}(X,S,Y)^2] = \mathbb{E}[\{\tau(X) - \tau\}^2 \mid G = \mathrm{O}] + \mathbb{E}[\alpha(S,X)^2\sigma^2(S,X) \mid G = \mathrm{O}] = V^{\mathrm{obs}}$。根据定理 3.1 的矩条件，两个二阶矩均有限。

A.3 定理 3.2 的证明

附录 A.3 陈述了定理 3.2 的正则性条件，随后给出该定理的证明。在整个证明中，对于每个 $w \in \{0,1\}$，$0 < v_w(x) < \infty$ 对 $f_{X|G=\mathrm{O}}$-几乎处处的 x 成立，且 $0 < \mathbb{E}[\sqrt{v_1(X)} + \sqrt{v_0(X)} \mid G = \mathrm{O}] < \infty$。比较类由取值于 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$、对 $f_{X|G=\mathrm{O}}$-几乎处处的 x 成立的可测分配概率，以及可测的非负实验性协变量密度构成；这些密度的积分为一，且满足 $f_{X|G=\mathrm{O}} \ll f_{X|G=\mathrm{E}}$。定理 3.2 中给出的分配概率 $p^\star$ 和密度 $f^\star_{X|G=\mathrm{E}}$ 均属于该比较类。分配概率按 $f_{X|G=\mathrm{O}}$-几乎处处相等来识别，实验性协变量密度按 λ_X-几乎处处相等来识别；定理 3.2 中的唯一性即按此理解。

证明。 该证明分两步最小化 $V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}, p)$。步骤 (i) 在每个 x 处对分配概率最小化被积函数；步骤 (ii) 根据柯西–施瓦茨不等式，对实验协变量密度下的下界进行最小化，并根据等号条件得到唯一性。

(i) 对于每个 x，映射 $r \mapsto v_1(x)/r + v_0(x)/(1-r)$ 在 $(0,\ 1)$ 上严格凸，其一阶条件 $-v_1(x)/r^2 + v_0(x)/(1-r)^2 = 0$ 有唯一解 $p^\star(x)$。因此，在其可行性假设成立时，它是唯一的逐点最小化解，其中 $v_1(x)/p^\star(x) + v_0(x)/\{1 - p^\star(x)\} = \{\sqrt{v_1(x)} + \sqrt{v_0(x)}\}^2$。

(ii) 如步骤 (i) 所示，在对分配概率进行最小化后，柯西–施瓦茨不等式表明，对于每个可行的密度，

$$V^{\exp}(f_{X|G=\mathrm{E}}, p) \geq \int \frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(x)^2\{\sqrt{v_1(x)} + \sqrt{v_0(x)}\}^2}{f_{X|G=\mathrm{E}}(x)} d\lambda_X(x)$$
$$\geq \left\{ \int f_{X|G=\mathrm{O}}(x)\{\sqrt{v_1(x)} + \sqrt{v_0(x)}\} d\lambda_X(x) \right\}^2 = V^{\exp,\star}.$$

正且有限的归一化期望使 $f^{\star}_{X|G=\mathrm{E}}$ 成为一个密度。柯西–施瓦茨不等式取等要求 $f_{X|G=\mathrm{E}} = f_{X|G=\mathrm{O}}\{\sqrt{v_1} + \sqrt{v_0}\}/\mathbb{E}[\sqrt{v_1(X)} + \sqrt{v_0(X)} \mid G = \mathrm{O}]$ 几乎处处成立。~~v_1~~和 v_0 的正性给出目标支配关系 $f_{X|G=\mathrm{O}} \ll f^{\star}_{X|G=\mathrm{E}}$；这一等式条件与步骤 (i) 的唯一逐点最小化解共同证明了唯一性。由此得到定理 3.2 中的全部三个公式。

A.4 命题 4.1 的证明

附录 A.4 证明了命题 4.1，即定理 2.1 在自适应设计下的对应结论。该证明使用命题中所述的假设 2.1–2.6 和假设 4.1–4.3。第 4 节中的协变量密度 $f_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}$ 和分配概率 $p_{t,N_{\mathrm{O}}}$ 关于协变量取值和第 t 轮之前的历史信息联合可测。

证明。 固定一轮 t。待证明的表示为

$$\tau = \underbrace{\mathbb{E}\left[\mu_1(X) - \mu_0(X) + \alpha(S,X)\{Y - \mu(S,X)\} \middle| G = \mathrm{O}\right]}_{\text{(I)}}$$
$$+ \underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{f_{X|G=\mathrm{O}}(X_t)}{f_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)} \left\{ \frac{W_t\{\mu(S_t,X_t) - \mu_1(X_t)\}}{p_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)} - \frac{(1-W_t)\{\mu(S_t,X_t) - \mu_0(X_t)\}}{1 - p_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)} \right\} \middle| \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}} \right]}_{\text{(II)}}.$$

项 (I) 是增广表示（2.4）中的观察项，而步骤 (i) 根据定理 2.1 的证明中建立的条件均值恒等式，表明它等于 τ。项 (II) 是第 t轮的加权实验残差，步骤 (ii) 表明它为零，因为假设 4.2 和 4.3 将第 t 轮与第 2 节中所用替代变量的固定实验条件分布联系起来。

(i) 我们首先证明项 (I) 等于 τ。在假设 2.1–2.6 下，附录 A.1 中定理 2.1 的证明步骤 (i) 给出 $\mathbb{E}[Y(w) \mid X = x,\ G = \mathrm{O}] = \mu_w(x)$，其中 $w \in \{0, 1\}$，且

具有目标支持集的 x。由于给定 $(S,\ X)$ 时，$Y-\mu(S,\ X)$ 的条件均值为零，利用该恒等式、迭代期望以及 τ 的定义可得

$$\mathbb{E}\left[\mu_1(X)-\mu_0(X)+\alpha(S,X)\{Y-\mu(S,X)\}\middle|G=\mathrm{O}\right]=\mathbb{E}[\mu_1(X)-\mu_0(X)\mid G=\mathrm{O}]=\tau.$$

(ii) 接下来我们证明项 (II) 为零。由于替代指标和协变量取值于欧几里得空间（第 2.2 节），下文所用条件分布的正规版本均存在，而设计函数的联合可测性保证下文的被积函数可测。固定 $w\in\{0,1\}$ 和一个属于目标支持集的协变量值 x。假设 2.1（一致性）、假设 4.2（序贯处理随机化）和假设 4.3（历史不变的条件替代变量分布）依次推出，对于每个可测集 B,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t\in B\mid W_t=w,X_t=x,\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}})&=\mathbb{P}(S_t(w)\in B\mid W_t=w,X_t=x,\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}})\\&=\mathbb{P}(S_t(w)\in B\mid X_t=x,\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}})\\&=\mathbb{P}(S\in B\mid W=w,X=x,G=\mathrm{E}).\end{aligned}$$

对该条件律恒等式关于 $\mu(\cdot,x)$ 积分，并利用 μ_w 的定义，得到 $\mathbb{E}[\mu(S_t,X_t)\mid W_t=w,\ X_t=x,\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]=\mu_w(x)$。对于处理组残差，序贯随机化、假设 4.1 中的处理正值性以及该条件均值恒等式推出 $\mathbb{E}[W_t\{\mu(S_t,X_t)-\mu_1(X_t)\}/p_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)\mid X_t,\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]=0$；同理，$\mathbb{E}[(1-W_t)\{\mu(S_t,X_t)-\mu_0(X_t)\}/\{1-p_{t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)\}\mid X_t,\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]=0$。将这两个残差之差乘以密度比 $f_{X|G=\mathrm{O}}(X_t)/f_{X|G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)$，其分母根据假设 4.1 中的协变量重叠在目标支持集上为正；再关于 X_t 在其实际条件密度下积分，会保持条件均值为零，因此项 (II) 为零。由于项 (I) 等于 τ 且项 (II) 为零，该表示对每一轮 t 几乎处处成立，从而证明了命题 4.1。

A.5 替代表示元的构造

本附录推导备注 5.2 中针对自适应实验各轮次的基于分类的替代表示元构造。

固定轮次 t 并给定 $\mathrm{F}_{t-1,\ N_{\mathrm{O}}}$。根据一致性以及假设 4.2 和 4.3，对于 $w\in\{0,\ 1\}$，$f_{S_t|W_t=w,\ X_t=x,\ \mathrm{F}_{t-1,\ N_{\mathrm{O}}}}(s)=f_{S|W=w,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s\mid x)$ 在相关支持集上几乎处处成立。因此，给定 $X_t=x$ 时的代理变量密度为 $f_{S_t|X_t=x,\ \mathrm{F}_{t-1,\ N_{\mathrm{O}}}}(s)=p_{t,\ N_{\mathrm{O}}}(x)\ f_{S|W=1,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s\mid$

$x) + \{1 - p_{t,\ N_O}(x)\}\ f_{S|W=0,\ X,\ G=E}(s \mid x)$。令 P^{obs} 为 $(X,\ S,\ Y)$ 的观察性总体分布，固定任意 $\gamma \in (0,\ 1)$，并定义辅助混合分布 $Q_{t,\ N_O}$ 如下。

$$Q_{t,N_O}(G = O) = \gamma, \qquad Q_{t,N_O}(G = E) = 1 - \gamma,$$
$$Q_{t,N_O}\{(X, S, Y) \in A \mid G = O\} = P^{obs}(A),$$
$$Q_{t,N_O}\{(X, W, S) \in B \mid G = E\} = \mathbb{P}\{(X_t, W_t, S_t) \in B \mid \mathcal{F}_{t-1,N_O}\}$$

其中，A 和 B 是相应观测空间中的可测集。定律 $Q_{t,\ N_O}$ 是一种辅助定律，用于定义条件概率。其实验部分是记录的设计下下一次观测的条件定律，其观察性部分是总体定律 P^{obs}。下文中，备注 5.2 的 $p_Q(x)$、$p_Q(s,\ x)$、$\gamma_Q(x)$ 和 $\gamma_Q(s,\ x)$ 均在 $Q = Q_{t,\ N_O}$ 下求值。特别地，$p_Q(x) = p_{t,\ N_O}(x)$。

以下计算均在所示分母为正的支撑集上进行解释。根据贝叶斯定理，数据来源优势比满足 $\gamma_Q(x)/\{1 - \gamma_Q(x)\} = \gamma f_{X|G=O}(x)/\{(1 - \gamma)f_{X|G=E,t,N_O}(x)\}$，且 $\gamma_Q(s,x)/\{1 - \gamma_Q(s,x)\} = \gamma f_{X|G=O}(x)f_{S|X,G=O}(s \mid x)/\{(1 - \gamma)\ f_{X|G=E,t,N_O}(x)\ f_{S_t|X_t=x,F_{t-1},N_O}(s)\}$；处理概率满足 $p_Q(s,x)/p_Q(x) = f_{S|W=1,X,G=E}(s \mid x)/\ f_{S_t|X_t=x,F_{t-1},N_O}(s)$，且 $\{1 - p_Q(s,x)\}/\{1 - p_Q(x)\} = f_{S|W=0,X,G=E}(s \mid x)/f_{S_t|X_t=x,F_{t-1},N_O}(s)$。将表示元写成两个因子的乘积。第一个因子是实验性条件替代变量密度与观察性条件替代变量密度之比，第二个因子是处理特异性替代变量密度之差除以 $f_{S_t|X_t=x,F_{t-1},N_O}(s)$。将两个优势比之比代入第一个因子，并将处理概率两个比值之差代入第二个因子，可得以下等式链。

$$\begin{aligned}\alpha(s,x) &= \frac{f_{S_t|X_t=x,\mathcal{F}_{t-1,N_O}}(s)}{f_{S|X,G=O}(s \mid x)} \frac{f_{S|W=1,X,G=E}(s \mid x) - f_{S|W=0,X,G=E}(s \mid x)}{f_{S_t|X_t=x,\mathcal{F}_{t-1,N_O}}(s)} \\ &= \frac{\gamma_Q(x)}{\gamma_Q(s,x)} \frac{1 - \gamma_Q(s,x)}{1 - \gamma_Q(x)} \left\{ \frac{p_Q(s,x)}{p_Q(x)} - \frac{1 - p_Q(s,x)}{1 - p_Q(x)} \right\} \\ &= \frac{\gamma_Q(x)}{\gamma_Q(s,x)} \frac{1 - \gamma_Q(s,x)}{1 - \gamma_Q(x)} \frac{p_Q(s,x) - p_Q(x)}{p_Q(x)\{1 - p_Q(x)\}}\end{aligned}$$

这就是备注 5.2 中的表示。在 $f_{S_t|X_t=x,\ F_{t-1},\ N_O}(s) = 0$ 以及 $f_{S|X,\ G=O}(s \mid x) > 0$ 这些点，假设 4.1 中的处理正值性意味着处理组和对照组的条件代理密度均为零，因此 $\alpha(s,\ x) = 0$。在这些点上，概率表示也扩展为零。

混合比例 γ 和记录的设计（$f_{X|G=E、\ t、\ N_O}$、$p_{t、\ N_O}$）会影响这四个概率，但在 $\alpha(s、\ x)$ 的表达式中会抵消。推导基于以下条件：$G = O$ 下的分布为 P^{obs}，$G = E$ 下的处理特异性替代变量密度等于 $f_{S|W=w、\ X、\ G=E}$，并且

目标支持集上满足协变量重叠和处理正值性。因此，对任何具有这些性质的其他参考分布，同一表达式也成立，例如汇集多个轮次观测值所形成的分布。不过，右侧的四个概率必须都基于同一个参考分布来定义。

为了在第 t 轮次之后构造估计量，令 $\widehat{p}_Q(s,x)$、$\widehat{p}_Q(x)$、$\widehat{\gamma}_Q(s,x)$ 和 $\widehat{\gamma}_Q(x)$ 为在共同参考混合分布下定义的四个条件概率的估计量。它们对 (t, N_O) 的依赖在记号中被省略。在估计分母为正的区域上，表示函数估计量定义如下。

$$\widehat{\alpha}_{t,N_O}(s,x) = \frac{\widehat{\gamma}_Q(x)}{\widehat{\gamma}_Q(s,x)} \frac{1-\widehat{\gamma}_Q(s,x)}{1-\widehat{\gamma}_Q(x)} \frac{\widehat{p}_Q(s,x)-\widehat{p}_Q(x)}{\widehat{p}_Q(x)\{1-\widehat{p}_Q(x)\}}$$

在代表所选参考分布的实验数据中，处理概率可通过针对 W （给定 (S, X)）以及针对 W （给定 X）的二元概率模型来估计。当将 Q_{t,N_O} 取为参考分布时，处理倾向概率 $p_Q(x) = p_{t,N_O}(x)$ 即为记录的设计，无需估计。在合并数据中，数据来源概率可通过针对 $\mathbf{1}\{G = O\}$（给定 (S, X)）以及针对 $\mathbf{1}\{G = O\}$（给定 X）的二元概率模型来估计。

当这些模型是根据已经收集到的自适应观测进行估计时，参考分布必须与估计中使用的合并或重新加权方法相对应。特别是，合并后的实验律中的处理倾向概率不一定与$p_{t,N_O}(x)$一致，因此，合并多轮观测所得的概率通常不能与当前轮次的处理倾向概率$p_{t,N_O}(x)$结合使用。当使用 Q_{t,N_O} 时，其他概率估计值必须以相同的混合分布为目标。

这种构造无需在估计$\widehat{\alpha}_{t,N_O}$时直接估计条件代理密度。在自适应抽样所产生的实际依赖结构下，估计得到的表示元必须满足第6节和第7节提出的条件，即表示函数收敛条件、乘积速率条件，以及关于观测得分的正则性条件。

A.6 第 6 节的证明

本附录证明第 6 节的结果。附录 A.6.1 解释备注 A.6.1 中历史平均值的作用，证明引理 6.2，并陈述假设 A.6.1 的正则性条件；附录 A.6.2 证明引理 6.1；附录 A.6.3 通过鞅中心极限定理证明定理 6.1；附录 A.6.4 证明该证明中所使用的关于实验可预测方差的引理。

A.6.1 引理 *6.2* 的证明与正则性条件

本小节解释备注 A.6.1 中历史平均值的作用，证明引理 6.2，并陈述第6节和第7节中使用的正则性条件。总体算子在拟合函数保持不变的情况下进行积分。

备注 A.6.1（历史平均值在估计量分解中的作用）。 历史平均值 $\tau_{t,\,N_{\mathrm{O}}}$ 使观测得分具有与实验得分相同的拟合条件效应平均值。这两项符号相反，因此它们的和就是对同一函数分别按拟合目标密度和真实目标密度积分所产生的误差。

引理 6.2 的证明。 根据第 6.1 节中中心化实验得分的定义，以及 $P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},\,N_{\mathrm{O}}}}$的线性性（它在各轮次中保持不变），可得

$$\widehat{\phi}^{\exp}_{s,N_{\mathrm{O}}}(S_s,W_s,X_s)=\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}+P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)-\widehat{\tau}_{s,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)),$$

$$\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widehat{\phi}^{\exp}_{s,N_{\mathrm{O}}}(S_s,W_s,X_s)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}+P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}-\overline{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}).$$

第二个等式用到了算法 5.1第 6 步中定义的历史平均值 y

$$\overline{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(x)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widehat{\tau}_{s,N_{\mathrm{O}}}(x).$$

表示元 α 将观测得分与真实目标分布下的条件效应联系起来。根据其定义、假设 2.6 中的替代变量支持条件，以及两个处理组均值的定义，

$$\begin{aligned}&P^{\mathrm{obs}}[\alpha(\mu-\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}})]\\&=\int f_{X|G=\mathrm{O}}(x)\int\{\mu(s,x)-\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(s,x)\}\{f_{S|W=1,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)-f_{S|W=0,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)\}\,d\lambda_S(s)\,d\lambda_X(x)\\&=P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\{\tau(\cdot)-\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}\}.\end{aligned}$$

在步骤 6 中，取总体均值会将 Y 替换为 $\mu(S,\ X)$。加上再减去表示元项，并使用式 (2.1) 中的 $P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\tau(\cdot)=\tau$，可得

$$\begin{aligned}&P^{\mathrm{obs}}\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}}-\tau\\&=P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\overline{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}-\tau+P^{\mathrm{obs}}[\widehat{\alpha}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\mu-\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}})]\\&=P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}(\overline{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}-\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}})+P^{\mathrm{obs}}[(\widehat{\alpha}_{t,N_{\mathrm{O}}}-\alpha)(\mu-\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}})].\end{aligned}$$

将这些恒等式代入估计量，并将经验波动拆分为真实得分及其估计误差。条件效应项合并如下。

$$P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_\mathrm{O}}}(\widetilde{\tau}_{N_\mathrm{O}}-\overline{\tau}_{t,N_\mathrm{O}})+P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}(\overline{\tau}_{t,N_\mathrm{O}}-\widetilde{\tau}_{N_\mathrm{O}})=(P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_\mathrm{O}}}-P_{f_{X|G=\mathrm{O}}})(\widetilde{\tau}_{N_\mathrm{O}}-\overline{\tau}_{t,N_\mathrm{O}}).$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\widehat{\tau}_{t,N_\mathrm{O}}-\tau\\
&=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_\mathrm{O}}+P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_\mathrm{O}}}(\widetilde{\tau}_{N_\mathrm{O}}-\overline{\tau}_{t,N_\mathrm{O}})+(\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_\mathrm{O}}-P^{\mathrm{obs}})\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_\mathrm{O}}+P^{\mathrm{obs}}\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_\mathrm{O}}-\tau\\
&=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_\mathrm{O}}+\underbrace{(\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_\mathrm{O}}-P^{\mathrm{obs}})\psi^{\mathrm{obs}}}_{L^{\mathrm{obs}}_{N_\mathrm{O}}}+\underbrace{(\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_\mathrm{O}}-P^{\mathrm{obs}})(\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_\mathrm{O}}-\psi^{\mathrm{obs}})}_{R^{\mathrm{i}}_{t,N_\mathrm{O}}}\\
&\quad+\underbrace{(P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_\mathrm{O}}}-P_{f_{X|G=\mathrm{O}}})(\widetilde{\tau}_{N_\mathrm{O}}-\overline{\tau}_{t,N_\mathrm{O}})}_{R^{\mathrm{ii}}_{t,N_\mathrm{O}}}+\underbrace{P^{\mathrm{obs}}[(\widehat{\alpha}_{t,N_\mathrm{O}}-\alpha)(\mu-\widehat{\mu}_{N_\mathrm{O}})]}_{R^{\mathrm{iii}}_{t,N_\mathrm{O}}}.
\end{aligned}$$

该恒等式对每个适用的 N_O 以及每个满足相关项可积的 $t\geq 1$ 均成立。这包括定理 6.1 中的 $t=N_\mathrm{E}$ 以及附录 A.7 中的每个 $t\geq t_{0,\,N_\mathrm{O}}$，并由此证明引理 6.2。

假设 A.6.1（正则性条件）。下文概述这些条件的适用范围。共同条件适用于第 *6* 节中的每个 N_O 和 $1\leq t\leq N_\mathrm{E}$，以及第 *7* 节中的每个 N_O 和 $t\geq 1$。同时方差界涵盖第 *6* 节的第1轮至 N_E 轮，以及第 *7* 节中从 $t_{0,\,N_\mathrm{O}}$ 轮起的各轮次，具体规定见 *(viii)* 和 *(x)*。

- 条件 *(i)–(vii)* 在第*6*节和第*7*节中均适用。
- 条件 *(viii)* 和 *(ix)* 仅适用于第 *6* 节。
- 条件 *(x)* 和 *(xi)* 仅适用于第 *7* 节。

(i) 观察性样本如第 *4* 节所述，为独立同分布，且假设 *6.5* 中的总体得分条件$P^{\mathrm{obs}}\psi^{\mathrm{obs}}=\tau$ 和 $\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[(\psi^{\mathrm{obs}}-\tau)^2]=V^{\mathrm{obs}}<\infty$ 成立。这并未对第 *7* 节中假设 *6.5* 的时刻 N_E 施加拟合得分条件。

(ii) 对于相关支持集上的每个自变量，$\widehat{\mu}_{N_\mathrm{O}}(s,x)$、$f_{X|G=\mathrm{O}、\,N_\mathrm{O}}(x)$、$\widehat{\mu}_{w、\,t、\,N_\mathrm{O}}(x)$、$\widehat{v}_{w、\,t、\,N_\mathrm{O}}(x)$、$\widehat{\widehat{p}^{\star}_{t}}$、$_{N_\mathrm{O}}(x)$ 以及 $f\bigstar_{X|G=E、\,t、\,N_\mathrm{O}}(x)$ 均为 F_{t-1,N_O}-可测。固定的观察数据拟合 $\widehat{\mu}_{N_\mathrm{O}}$ 和 $f_{X|G=\mathrm{O}、\,N_\mathrm{O}}$以及初始实验矩拟合均为 $F0,_{N_\mathrm{O}}$-可测。所选表示函数构造所需的任何其他观测拟合也具有相同的可测性。实际设计函数 $x\mapsto f_{X|G=\mathrm{E}、\,t、\,N_\mathrm{O}}(x)$ 以及 $x\mapsto p_{t、\,N_\mathrm{O}}(x)$ 均为 F_{t-1,N_O}-可测，观测前拟合函数也如此

$\widehat{\tau}_{t,\,N_O}(\cdot)$ 以及 $\tau_{t,\,N_O}(\cdot)$。第 t 轮之后，表示元 $\widehat{\alpha}_{t,\,N_O}$ 为 $\mathrm{F}_{t,\,N_O}$-可测；它不必是$\mathrm{F}_{t-1,\,N_O}$-可测。记录的实验得分和更新后的观测得分均为$\mathrm{F}_{t,\,N_O}$-可测。这些要求适用于相关支持集上的每一点，并要求 *(iv)* 中的函数和被积函数具有可测性。

(iii) 实际条件设计分布满足 $f_{X_t|F_{t-1},N_O}(x) = f\bigstar_{X|G=E,t,N_O}(x)$，并且 $Pr(W_t = 1 \mid X_t = x, F_{t-1},N_O) = \widehat{p}^{\star}_{t},N_O(x)$，其中 $\widehat{f}\bigstar_{X|G=E,t,N_O}(x) \geq 0, \int \widehat{f}\bigstar_{X|G=E,t,N_O}(x)\, d\lambda_X(x) = 1$，且 $0 \leq \widehat{p}^{\star}_{t},N_O(x) \leq 1$。

（iv）序贯随机化和替代指标的条件分布等价性给出$f_{S_t|W_t=w,\ X_t=x,\ \mathrm{F}_{t-1,\ N_O}}(s) = f_{S|W=w,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s \mid x)$。拟合函数、密度、权重和评分组成部分均为可测的，并且附录 *A.6* 和 *A.7* 的证明中出现的所有条件期望和积分均存在。

(v) 目标与实验协变量分布具有共同支撑集，支撑集 $f^{\star}_{X|G=\mathrm{E},\ t,\ N_O}$ =支撑集 $f_{X|G=O}$。拟合目标分布是积分为一的非负密度，满足支撑集 $f_{X|G=O,\ N_O}$ = 支撑集 $f_{X|G=O}$ 和$f_{X|G=O,\ N_O} \ll f_{X|G=O}$，且在此支持集之外没有质量。

(vi) 在目标支持集上，对于每个适用的 N_O、t 和处理分配，$0 < \widehat{p}^{\star}_{t},N_O(x) < 1, 0 < \widehat{f}\bigstar_{X|G=E,t,N_O}(x) < \infty, 0 < \widehat{v}_{w,t,N_O}(x) < \infty$，以及 $0 < \int \widehat{f}_{X|G=O,N_O}(x) \sum_{w=0}^{1} \sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_O}(x)}\, d\lambda_X(x) < \infty$。所有用到的评分分母均为正且有限。这些逐点条件不要求所有轮次都满足一致有界性。

(vii) 真实替代指标分布是在共同支撑集上的非负密度。对于每个目标支持集x, $f_{S|W=w,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s \mid x) \geq 0$ 和 $\int f_{S|W=w,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s) = 1$。基于密度的构造还使用归一化为 *1* 的非负拟合密度；直接矩估计不需要此类拟合密度。

(viii) 对于第 *6* 节，真实方差在目标支持集上满足 $v \leq v_w(x) \leq v$。以趋近于 *1* 的概率，同时对于两种处理分配、每个目标支持集 x，以及每个 $1 \leq t \leq N_E$, $v \leq \widehat{v}_{w,t,N_O}(x) \leq v$ 和 $v \leq \int \{\widehat{\mu}_{N_O}(s, x) - \widetilde{\mu}_{w,N_O}(x)\}^2 f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s) \leq v$。

(ix) *(viii)* 中的常数独立于 N_O 固定，且$0 < v < v < \infty$。

(x) 对于第 *7* 节，方差界仅从监测起始时间起施加。存在固定常数 $0 < v < v < \infty$，使得处理组和对照组中的真实方差 $v_w(x)$ 在目标支持集上属于 $[v, v]$。以趋于 *1* 的概率，同时对于 $w = 0、1$、每个目标支持集取值 x 以及每个 $t \geq t_0$，N_O，$v \leq \widehat{v}_{w,\ t,\ N_O}(x) \leq v$ 和 $v \leq \int \{\widehat{\mu}_{N_O}(s,\ x) - \widetilde{\mu}_{w,\ N_O}(x)\}^2 f_{S|W=w,\ X,\ G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s) \leq v$。这些一致界使可预测方差代数中的平方根和逆平方根运算保持稳定。

(xi) 对于第 *7* 节，除 *(i)* 外，$V^{\mathrm{obs}} > 0$ 和 $\mathbb{E}_{X|G=O}[\{\sum_{w=0}^{1} \sqrt{v_w(X)}\}^2] < \infty$。假设 *7.3* 对目标密度以及处理组和对照组中的回归函数施加了风险条件。

假设 *7.2* 提供了得分矩。这里对第 *7* 节在时间 N_{E} 不施加 *Cesàro* 条件或拟合得分条件。

A.6.2 引理 *6.1* 的证明

证明。该证明在给定 $\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}$ 的条件下，对第 t 轮实验得分关于 S_t、W_t 和 X_t 积分，并说明其条件均值等于$\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}$定义中的可预测中心化项的相反数。对于 $w=0,\ 1$，轮次开始前的可测性以及假设 A.6.1(ii)–(iv) 中替代变量的条件分布等价性给出 $\mathbb{E}[\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(S_t,X_t)\mid W_t=w,X_t=x,\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]=\int \widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(s,x)\,f_{S\mid W=w,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)\,d\lambda_S(s)=\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)$。由于假设 A.6.1(iii)使第 t 轮实际的处理概率和协变量密度分别等于 $\widehat{p}_t^{\star}$,$_{N_{\mathrm{O}}}$ 和 $f^{\star}_{X\mid G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}$，序贯随机化会抵消处理权重，而实际实验协变量密度会抵消其逆权重。因此

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\widehat{\phi}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}(S_t,W_t,X_t)\mid\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]\\
&\quad=\int \widehat{f}^{\star}_{X\mid G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(x)\frac{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(x)}{\widehat{f}^{\star}_{X\mid G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(x)}\sum_{w=0}^{1}(2w-1)\{\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)-\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)\}\,d\lambda_X(x)\\
&\quad=P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)-\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)),
\end{aligned}
$$

以及 $\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}$ 的定义给出 $\mathbb{E}[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}\mid\mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]=P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O}',N_{\mathrm{O}}}}(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)-\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot))+P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}(\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)-\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot))=0$。中心化得分 $\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}$ 根据其构造以及假设 A.6.1(ii) 是 $\mathrm{F}_{t,N_{\mathrm{O}}}$-可测的。结合引理 6.1 中假定的平方可积性，这就证明了对于每个适用的 N_{O} 和 t，引理 6.1 均成立。在第 7 节中，假设 7.2 保证了这种平方可积性，因为条件 Jensen 不等式给出 $\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}}]\le C^{2/r}$。

A.6.3 定理 *6.1* 的证明

证明。 我们在 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$ 尺度上对引理 6.2 的分解乘以 $t=N_{\mathrm{E}}$。由于观察性样本用于选择实验设计，实验鞅平均与观察经验平均相互依赖，因此我们将二者之和视为一个有序的鞅差行，其中观测记录位于前面。附录 A.6.3.1 将该行的鞅中心极限定理表述为引理 A.6.1；附录 A.6.3.2 给出关于实验可预测方差的引理 A.6.2；附录 A.6.3.3 验证引理 A.6.1 的鞅差、条件 Lindeberg 和可预测方差条件。附录 A.6.3.4 证明三个余项可以忽略，附录 A.6.3.5 则将两部分结合起来。

将引理 6.2 的分解乘以 $t = N_{\mathrm{E}}$，再乘以 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}$，并令 $L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} = N_{\mathrm{O}}^{-1} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}} \{\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \tau\}$，根据假设 A.6.1(i)，这成立，因为 $P^{\mathrm{obs}}\psi^{\mathrm{obs}} = \tau$，可得

$$\sqrt{N_{\mathrm{E}}}(\widehat{\tau}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}} - \tau) = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{E}}}} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}} + \frac{\sqrt{N_{\mathrm{E}}}}{N_{\mathrm{O}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}} \{\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \tau\} + \sqrt{N_{\mathrm{E}}} R^{\mathrm{i}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}} + \sqrt{N_{\mathrm{E}}} R^{\mathrm{ii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}} + \sqrt{N_{\mathrm{E}}} R^{\mathrm{iii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}.$$

右侧前两项是有序行之和，并根据鞅中心极限定理具有正态极限。后面三项是引理 6.2 中的余项：对于 $R^{\mathrm{i}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}$，由假设 6.5 中的经验过程条件控制；对于 $R^{\mathrm{ii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}$ 和 $R^{\mathrm{iii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}$，则由柯西–施瓦茨不等式和假设 6.6 中的乘积收敛率控制。

A.6.3.1 Hall 和 Heyde 的鞅中心极限定理 (1980年)

本步骤陈述了分解中前两项所使用的鞅中心极限定理。附录 A.6.3.3 验证了该定理的三个条件。

引理 A.6.1（标量有序行的鞅中心极限定理）。我们使用*Hall 和 Heyde*（*1980*年）的推论 *3.1*，该推论源自其定理 *3.2*，并专门针对一个标量有序行。对于固定的 N_{O}，该行由 $N_{\mathrm{O}} + N_{\mathrm{E}}$ 增量组成。首先揭示 N_{O} 观测记录，使其生成$\mathrm{F}_{0,N_{\mathrm{O}}} = \sigma(\mathcal{D}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}})$，随后根据$\{\mathrm{F}_{t,N_{\mathrm{O}}}\}_{t=0}^{N_{\mathrm{E}}}$揭示 N_{E} 实验记录。有序增量为

$$\frac{\sqrt{N_{\mathrm{E}}}}{N_{\mathrm{O}}}\{\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \tau\}, \quad i = 1, \ldots, N_{\mathrm{O}},$$
$$\frac{\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}}{\sqrt{N_{\mathrm{E}}}}, \qquad\qquad t = 1, \ldots, N_{\mathrm{E}}.$$

对于这一行，在满足以下条件时，该推论适用。

1. 所展示的增量构成一个平方可积鞅差行。

2. 对每个 $\varepsilon > 0$，合并后的条件林德伯格和满足

$$\frac{N_{\mathrm{E}}}{N_{\mathrm{O}}^2} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}} \mathbb{E}\Bigg[\{\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \tau\}^2 \mathbf{1}\left\{\frac{\sqrt{N_{\mathrm{E}}}}{N_{\mathrm{O}}}|\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \tau| > \varepsilon\right\} \Bigg| \sigma\{(X_j, S_j, Y_j) : 1 \le j < i\}\Bigg]$$
$$+ \frac{1}{N_{\mathrm{E}}} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \mathbb{E}\left[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \mathbf{1}\left\{|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}| > \varepsilon\sqrt{N_{\mathrm{E}}}\right\} \Big| \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}\right] \xrightarrow{p} 0.$$

3. 可预测条件方差满足

$$\frac{N_{\mathrm{E}}}{N_{\mathrm{O}}} V^{\mathrm{obs}} + \frac{1}{N_{\mathrm{E}}} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \mathbb{E}[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}^2 \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] \xrightarrow{p} \kappa V^{\mathrm{obs}} + V^{\mathrm{exp},\star}.$$

由于条件 *3* 中的极限是一个常数，推论 *3.1* 后的说明表明，可以用该极限的可测性替代 σ-域上的嵌套条件 *(3.21)*；该可测性显然成立，因此该推论便可在不要求稳定性的情况下给出依分布收敛。在条件 *1–3* 下，该推论因此给出标量极限

$$\frac{\sqrt{N_{\mathrm{E}}}}{N_{\mathrm{O}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{O}}} \{\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \tau\} + \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{E}}}} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \kappa V^{\mathrm{obs}} + V^{\mathrm{exp},\star}).$$

A.6.3.2 实验可预测方差

条件 3 中的实验部分需要较长的计算，下面的引理对此作了汇总。附录 A.6.3.3 利用该引理验证条件 3，附录 A.6.4 则对其加以证明。

引理 A.6.2（实验可预测方差）。在定理 *6.1* 的假设下，

$$\frac{1}{N_{\mathrm{E}}} \sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}} \mathbb{E}[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}^2 \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] \xrightarrow{p} V^{\mathrm{exp},\star}.$$

A.6.3.3 主导项的正态极限

这一步针对分解的前两项验证引理 A.6.1 的三个条件。对于条件 1，观测记录是独立同分布的，且 $P^{\mathrm{obs}}\psi^{\mathrm{obs}} = \tau$，因此依次揭示这些记录可得 $\mathbb{E}[\sqrt{N_{\mathrm{E}}}N^{-1}\mathrm{O}\{\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i) - \tau\} \mid \sigma\{(X_j, S_j, Y_j) : 1 \le j < i\}] = 0$，并且假设 A.6.1(i) 使这些增量平方可积。假设 6.3 使实验增量平方可积，因此由引理 6.1 可知，每个 $\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}$ 都是 $\mathrm{F}_{t,N_{\mathrm{O}}}$-可测的，且$\mathbb{E}[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathrm{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] = 0$。由于观测记录生成 $\mathrm{F}_{0,N_{\mathrm{O}}}$，这些有序增量构成一个平方可积鞅差行，这就是条件 1。

对于条件 2，观测区块和实验组块分别有界。由于观测记录是独立同分布的，观测区块等于$(N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}})\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[(\psi^{\mathrm{obs}} - \tau)^2 \mathbf{1}\{|\psi^{\mathrm{obs}} - \tau| > \varepsilon N_{\mathrm{O}}/\sqrt{N_{\mathrm{E}}}\}]$，，并且该值收敛于零，因为假设 6.1 给出 $N_{\mathrm{O}}/\sqrt{N_{\mathrm{E}}} \asymp \sqrt{N_{\mathrm{O}}} \to \infty$ 和 $N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}} \to \kappa$，而假设 A.6.1(i) 则给出了得分平方的可积性。

对于实验组块，不等式 $\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{2}\mathbf{1}\{|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|>\varepsilon\sqrt{N_{\mathrm{E}}}\}\le(\varepsilon\sqrt{N_{\mathrm{E}}})^{2-r}|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|^{r}$ 以及假设 6.3 中的条件李雅普诺夫条件给出

$$\frac{1}{N_{\mathrm{E}}}\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}\Big[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{2}\mathbf{1}\Big\{|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|>\varepsilon\sqrt{N_{\mathrm{E}}}\Big\}\;\Big|\;\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}\Big]$$
$$\le\frac{1}{\varepsilon^{r-2}\mathrm{N}_{\mathrm{E}}^{r/2}}\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}[|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|^{r}\mid\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]\xrightarrow{p}0.$$

两个分块界之和验证了整个有序行满足条件 2。

对于条件 3，独立同分布观测记录对可预测条件方差的贡献恰好为 $N_{\mathrm{E}}V^{\mathrm{obs}}/N_{\mathrm{O}}$，根据假设 6.1，该贡献收敛于 κV^{obs}。引理 A.6.2 表明，实验性贡献依概率收敛于 $V^{\mathrm{exp},\star}$，因此总和依概率收敛于 $\kappa V^{\mathrm{obs}}+V^{\mathrm{exp},\star}$，这就是条件 3。于是，引理 A.6.1 表明，分解中的前两项依分布收敛于 $\mathcal{N}(0,\ \kappa V^{\mathrm{obs}}+V^{\mathrm{exp},\star})$。

A.6.3.4 余项

这一步表明，分解中的最后三项依概率收敛于零。根据 $R^{\mathrm{i}}_{N_{\mathrm{E}},\,N_{\mathrm{O}}}$ 的定义，假设 6.5 中的第二个条件表述为 $\sqrt{N_{\mathrm{O}}}R^{\mathrm{i}}_{N_{\mathrm{E}},\,N_{\mathrm{O}}}=o_p(1)$。对于这两个乘积余项，柯西–施瓦茨不等式和假设 6.6 给出

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}|R^{\mathrm{ii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}|\le\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\left\|\frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}{f_{X|G=\mathrm{O}}}-1\right\|_{2,X|G=\mathrm{O}}\|\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot)-\overline{\tau}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\|_{2,X|G=\mathrm{O}}=o_p(1),$$
$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}|R^{\mathrm{iii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}|\le\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\|\widehat{\alpha}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}-\alpha\|_{2,\mathrm{obs}}\|\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}-\mu\|_{2,\mathrm{obs}}=o_p(1).$$

因此，三个余项中的每一个都是 $o_p(N^{-1/2}{}_{\mathrm{O}})$。由于 $N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}}\to\kappa$，$\sqrt{N_{\mathrm{E}}}R^{\mathrm{i}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}=\sqrt{N_{\mathrm{E}}/N_{\mathrm{O}}}\sqrt{N_{\mathrm{O}}}R^{\mathrm{i}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}=o_p(1)$，同样的因式分解还给出 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}R^{\mathrm{ii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}=o_p(1)$ 和 $\sqrt{N_{\mathrm{E}}}R^{\mathrm{iii}}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}=o_p(1)$。

—

A.6.3.5 证明的完成

附录 A.6.3.3 给出了分解中前两项的正态极限，附录 A.6.3.4 表明最后三项依概率收敛于零。将这些极限代入分解并应用斯卢茨基定理，得到

$$\sqrt{N_{\mathrm{E}}}(\widehat{\tau}_{N_{\mathrm{E}},N_{\mathrm{O}}}-\tau)\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,V^{\mathrm{exp},\star}+\kappa V^{\mathrm{obs}}).$$

这就证明了定理 6.1。 □

A.6.4 引理 *A.6.2* 的证明

引理 A.6.2 的证明。我们将每一轮的条件方差与一个仅取决于初始观测样本的积分的平方进行比较。随后，对各轮次的这一比较取平均，并应用假设 6.2，即可证明该引理。

A.6.4.1 单轮中的条件方差

使用第 6.1 节中的算子，定义

$$A_{t,N_{\mathrm{O}}} := P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}\left[\sum_{w=0}^{1}\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)}\right],$$
$$A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}} := P_{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}\left[\sum_{w=0}^{1}\sqrt{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X)}\right].$$

算法第 2 步中协变量密度和分配概率的归一化5.1意味着，在目标支持集上，

$$\begin{aligned}&\widehat{f}^{\star}_{X\mid G=\mathrm{E},t,N_{\mathrm{O}}}(x)\Pr(W_t=w\mid X_t=x,\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}})\\&=\frac{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(x)\sum_{j=0}^{1}\sqrt{\widehat{v}_{j,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}}{A_{t,N_{\mathrm{O}}}}\frac{\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}}{\sum_{j=0}^{1}\sqrt{\widehat{v}_{j,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}}=\frac{\widehat{f}_{X\mid G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(x)\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}}{A_{t,N_{\mathrm{O}}}}.\end{aligned}$$

假设 A.6.1(ii)–(vi) 将其确定为 $(X_t,\ W_t)$ 的条件联合密度，并使分母在该支持集上为正。将拟合目标密度除以步骤 4 中的联合密度，可得，在 $\{W_t=w\}$ 上，

$$\widehat{\phi}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}(S_t,W_t,X_t)=(2w-1)\frac{A_{t,N_{\mathrm{O}}}}{\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)}}\{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(S_t,X_t)-\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X_t)\}.$$

给定 $X_t=x$、$W_t=w$ 和过去信息，拟合指标的均值为 $\widetilde{\mu}_{w,\ N_{\mathrm{O}}}(x)$，方差为$\widetilde{v}_{w,\ N_{\mathrm{O}}}(x)$。围绕该均值展开可得

$$\int\{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(s,x)-\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)\}^2 f_{S\mid W=w,X,G=\mathrm{E}}(s\mid x)\,d\lambda_S(s)=\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)+\{\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)-\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)\}^2.$$

因此，将得分平方后对联合密度积分可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\widehat{\phi}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}(S_t, W_t, X_t))^2 \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] \\
&= \int \sum_{w=0}^{1} \frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(x)\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}}{A_{t,N_{\mathrm{O}}}} \frac{A^2_{t,N_{\mathrm{O}}}}{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)} \left[\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x) + \{\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x) - \widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)\}^2\right] d\lambda_X(x) \\
&= A_{t,N_{\mathrm{O}}} \underbrace{P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}} \left[\sum_{w=0}^{1} \frac{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X) + \{\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X) - \widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)\}^2}{\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)}}\right]}_{B_{t,N_{\mathrm{O}}}}.
\end{aligned}
$$

减去引理 6.1 的证明中计算出的条件均值的平方，得到

$$
\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] = A_{t,N_{\mathrm{O}}} B_{t,N_{\mathrm{O}}} - \{P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}} - \widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot))\}^2.
$$

固定一个轮次，使得对于两个臂以及每个目标支持集x，$\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)$ 和$\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)$均位于 $[\underline{v}, v]$ 中。对于该区间内的 a, b 以及 $d \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \frac{|a-b|}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \le \frac{|a-b|}{2\sqrt{\underline{v}}}, \\
&\left|\frac{b+d^2}{\sqrt{a}} - \sqrt{b}\right| \le \frac{d^2}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}|\sqrt{b} - \sqrt{a}| \le \frac{d^2}{\sqrt{\underline{v}}} + \frac{\sqrt{\overline{v}}}{2\underline{v}}|a-b|.
\end{aligned}
$$

将这些界对归一化拟合目标密度积分，并在目标支持集上取上确界，得到

$$
\begin{aligned}
&|A_{t,N_{\mathrm{O}}} - A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}}| \le \frac{1}{2\sqrt{\underline{v}}} \sum_{w=0}^{1} \|\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|_\infty, \\
&|B_{t,N_{\mathrm{O}}} - A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}}| \le \sum_{w=0}^{1} \left\{ \frac{\|\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|^2_\infty}{\sqrt{\underline{v}}} + \frac{\sqrt{\overline{v}}}{2\underline{v}} \|\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|_\infty \right\}.
\end{aligned}
$$

由詹森不等式和条件效应的处理组减去对照组定义可得

$$
\{P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}} - \widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot))\}^2 \le P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}[(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}} - \widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot))^2] \le 2\sum_{w=0}^{1} \|\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|^2_\infty.
$$

由于 $0 \le A_{t,\ N_{\mathrm{O}}},\ A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}} \le \bar{2}\sqrt{v}$ 在这一轮中，加上并减去 $A_{t,\ N_{\mathrm{O}}} A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}}$，可得单轮界

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] - (A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}})^2\right| \\
&\le A_{t,N_{\mathrm{O}}} |B_{t,N_{\mathrm{O}}} - A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}}| + A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}} |A_{t,N_{\mathrm{O}}} - A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}}| + \{P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}(\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}} - \widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot))\}^2 \\
&\le \left(1 + \sqrt{\overline{v}/\underline{v}}\right)^2 \sum_{w=0}^{1} \left\{\|\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|_\infty + \|\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|^2_\infty\right\}.
\end{aligned}
$$

A.6.4.2 共同拟合积分的极限

对于每个 w, x，两个条件标准差分别是在同一替代分布下中心化的拟合指标和真实指标的 L_2 范数。反三角不等式表明，它们的差不超过中心化估计误差的范数。去掉中心化后，得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\sqrt{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)} - \sqrt{v_w(x)}\right|^2 \\
&\le \int \left[\{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(s,x) - \mu(s,x)\} - \{\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x) - \mu_w(x)\}\right]^2 f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s) \\
&= \int \{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(s,x) - \mu(s,x)\}^2 f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s) - \{\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x) - \mu_w(x)\}^2 \\
&\le \int \{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(s,x) - \mu(s,x)\}^2 f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid x)\, d\lambda_S(s).
\end{aligned}
$$

由定理 3.2，$\sqrt{V^{\exp,\star}} = P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}[\sum_{w=0}^{1} \sqrt{v_w(X)}]$。加上再减去真实目标分布下拟合标准差的积分。当 $\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x) \le v$ 在目标支持集上的两个臂中均成立时，假设 A.6.1(v) 中的绝对连续性和柯西–施瓦茨不等式给出

$$
\begin{aligned}
&|A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}} - \sqrt{V^{\exp,\star}}| \\
&\le \left|P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\left[\left\{\frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(X)}{f_{X|G=\mathrm{O}}(X)} - 1\right\} \sum_{w=0}^{1} \sqrt{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X)}\right]\right| + \sum_{w=0}^{1} P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\left[\left|\sqrt{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X)} - \sqrt{v_w(X)}\right|\right] \\
&\le 2\sqrt{\overline{v}} \left\|\frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}{f_{X|G=\mathrm{O}}} - 1\right\|_{2,X|G=\mathrm{O}} + \sum_{w=0}^{1} \left\{P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\left[\int \{\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}}(s,X) - \mu(s,X)\}^2 f_{S|W=w,X,G=\mathrm{E}}(s \mid X)\, d\lambda_S(s)\right]\right\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

A.6.4.3 终端平均值

在假设 A.6.1(viii) 的同时事件上，对于第 1、……、N_{E} 轮中的所有目标支持集 x，两条臂的方差界均成立，而假设 A.6.1(ix) 固定了它们的常数

且与 N_{O} 无关。该事件的概率趋于 1。因此，假设 6.4 和附录 A.6.4.2 中的初始风险给出 $A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}} \xrightarrow{p} \sqrt{V^{\exp,\star}}$。在同一事件上，附录 A.6.4.1 给出

$$\left|\frac{1}{N_{\mathrm{E}}}\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] - V^{\exp,\star}\right|$$
$$\leq \frac{\left(1+\sqrt{\overline{v}/\underline{v}}\right)^2}{N_{\mathrm{E}}}\sum_{t=1}^{N_{\mathrm{E}}}\sum_{w=0}^{1}\left\{\|\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|_\infty + \|\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}} - \widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|^2_\infty\right\} + \left|(A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}})^2 - V^{\exp,\star}\right|.$$

根据假设 6.2，该均值依概率趋于零；最后一项则根据 $A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}}$ 的极限趋于零。由于该事件的补集发生的概率趋于零，这就证明了引理 A.6.2。

A.7 第 7 节的证明

附录 A.7 证明定理 7.1 和推论 7.1。首先陈述引理 A.7.1–A.7.3，并由这些引理证明定理 7.1 和推论 7.1；随后逐一证明引理 A.7.1–A.7.3，并在首次用到各引理证明的小节开头陈述相应的进一步引理。图 A.1 展示了这些结果之间的依赖关系。从一个结果指向另一个结果的箭头表示第二个结果的证明用到了第一个结果；指向框架的箭头表示框架中三个引理的证明都用到了该结果；从框架指出的箭头表示定理 7.1 的证明用到了这三个引理；虚线框则标示出源自文献的结果。定理 7.1 和推论 7.1 以深蓝色显示，而用于证明定理 7.1 的引理 A.7.1–A.7.3 则以浅蓝色显示。

A.7.1 引理 *A.7.1–A.7.3* 的陈述

本小节列出当前适用的条件，介绍证明中使用的符号，并陈述引理 A.7.1–A.7.3。第 7 节使用共同条件以及假设 A.6.1 中的第 7 节条件；引理 6.1 给出条件中心化，而假设 7.2 为所有 N_{O} and $t \geq 1$ 提供平方可积性。回想一下，$\mathrm{F}_{0,\,N_{\mathrm{O}}} = \sigma(\mathcal{D}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}})$ 由观察性样本生成。假设 A.6.1(xi) 给出 $V^{\mathrm{obs}} > 0$；由于假设 A.6.1(x) 将真实方差 $v_w(x)$ 限定在目标支持集 $[\underline{v}, \overline{v}]$ 上，定理 3.2 中最小实验方差的形式给出 $V^{\exp,\star} = \{\mathbb{E}[\sqrt{v_1(X)} + \sqrt{v_0(X)} \mid G = \mathrm{O}]\}^2 \geq 4\underline{v} > 0$。假设 7.2 和条件 Jensen 不等式给出：对于每个 N_{O} 和 $s \geq 1$，$\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathrm{F}_{s-1,\,N_{\mathrm{O}}}] \leq C^{2/r}$，因此 $\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}] \leq C^{2/r}$。

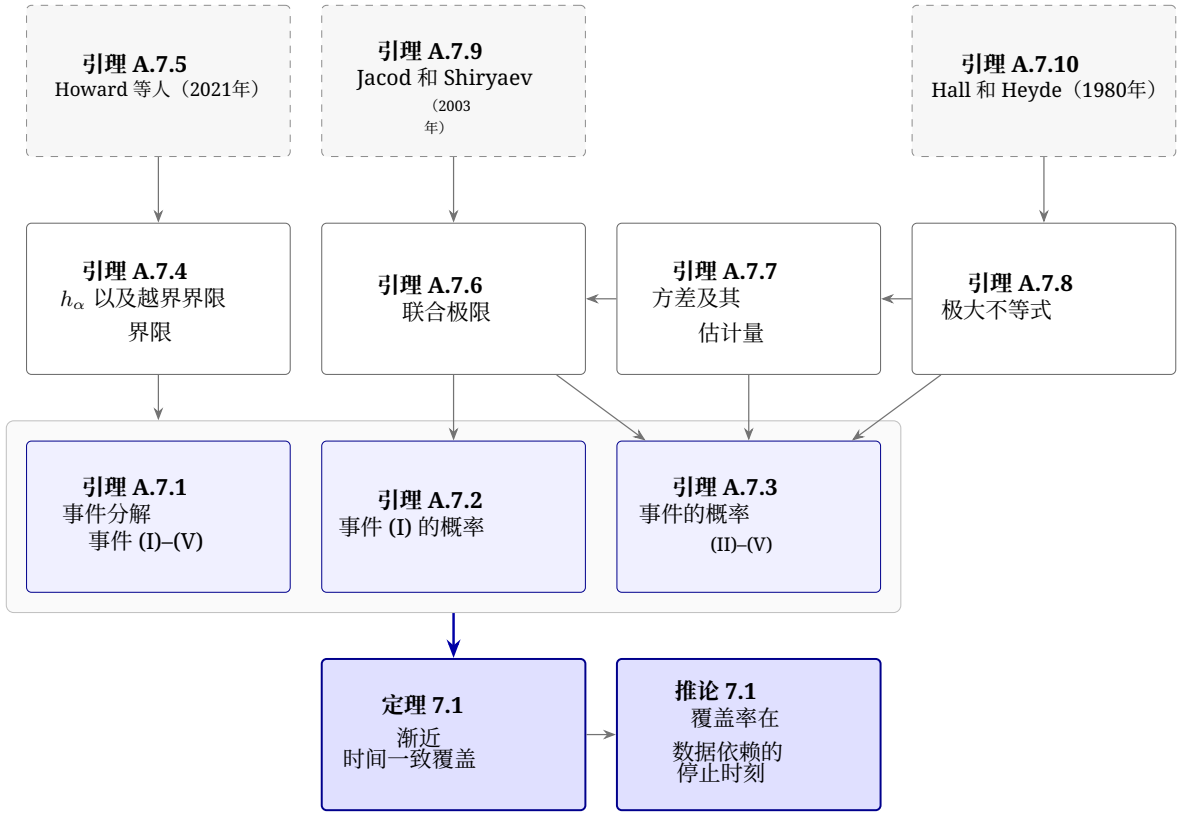


图 A.1. 定理 7.1 证明中结果的依赖关系

证明从估计误差的分解开始。引理 6.2 的推导见附录 A.6.1，且该结论对每一轮 $t \geq 1$ 均成立：

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}(\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \tau) = \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\left(L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} + \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right) + \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\left(R^{\mathrm{i}}_{t,N_{\mathrm{O}}} + R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}} + R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}\right).$$

在归一化时间尺度 $u = t/N_{\mathrm{O}}$ 上，右侧第一项的渐近方差为

$$\sigma^2(u) := V^{\mathrm{obs}} + \frac{V^{\mathrm{exp},\star}}{u}, \qquad u > 0.$$

第一个引理将 $\{\exists t \geq t_{0,\ N_{\mathrm{O}}} : \tau \notin C_{t,\ N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\}$ 分解为五个事件，引理 A.7.2 和 A.7.3 则对这些事件的概率给出界。下文中，$c_\omega \in (0,\ \infty)$ 是假设 7.1(2) 中的常数。下文解释和证明所引用的引理 A.7.4–A.7.10，均陈述在首次使用其证明的小节开头。

引理 A.7.1 （事件 (I)–(V) 的分解）。固定 $\eta \in (0,\ 1)$，并令

$$\varepsilon_\eta := \frac{\eta}{5}\{2V^{\mathrm{obs}}\log(1/\alpha)\}^{1/2}.$$

存在一个常数 $K_0 \geq 2$，它依赖于 η 但不依赖于 K 或 N_{O}，使得对于每个 $K \geq K_0$ 以及每个满足$t_{0,\ N_{\mathrm{O}}} \leq N_{\mathrm{O}}/K$的 N_{O}，

$$\{\exists t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}} : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} \subseteq (\mathrm{I}) \cup (\mathrm{II}) \cup (\mathrm{III}) \cup (\mathrm{IV}) \cup (\mathrm{V}),$$

其中，t 在此处及下文中遍历整数，五个事件为

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &:= \left\{ \max_{N_{\mathrm{O}}/K \leq t \leq K N_{\mathrm{O}}} \frac{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\,|L^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} + t^{-1}\sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}|}{\sigma(t/N_{\mathrm{O}})\, h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}}))} \geq 1-\eta \right\}, \\
(\mathrm{II}) &:= \{\exists t \in [t_{0,N_{\mathrm{O}}}, N_{\mathrm{O}}/K) : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\}, \\
(\mathrm{III}) &:= \left\{ \sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{t \geq \lfloor K N_{\mathrm{O}} \rfloor} \left| \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} \right| > \varepsilon_\eta \right\}, \\
(\mathrm{IV}) &:= \left\{ \exists t \geq N_{\mathrm{O}}/K : \left| \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\, \overline{B}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \sigma(t/N_{\mathrm{O}})\, h_\alpha\!\left(\frac{c_\omega}{\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}})} \right) \right| > \varepsilon_\eta \right\}, \\
(\mathrm{V}) &:= \left\{ \sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \left(|R^{\mathrm{i}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| \right) > \varepsilon_\eta \right\}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\Pr\{\exists t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}} : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} \leq \Pr\{(\mathrm{I})\} + \Pr\{(\mathrm{II})\} + \Pr\{(\mathrm{III})\} + \Pr\{(\mathrm{IV})\} + \Pr\{(\mathrm{V})\}.$$

引理 A.7.2 (事件 (I) 的概率)。在定理 *7.1* 的条件下，固定 $\eta \in (0,1)$，并令 Z为标准正态随机变量，W 为与 Z独立的标准布朗运动。

(a) 对每个 $K \geq K_0$，令 K_0 为引理 *A.7.1* 中的常数，则

$$\limsup_{N_{\mathrm{O}} \to \infty} \Pr\{(\mathrm{I})\} \leq \Pr\left\{ \sup_{u>0} \frac{|(V^{\mathrm{obs}})^{1/2} Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2} W(u)/u|}{\sigma(u)\, h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u))} \geq 1-\eta \right\}.$$

(b) (a) 部分右侧的表达式不依赖于 K，且当 $\eta \downarrow 0$ 时，其极限至多为 α。

引理 A.7.3 (事件 (II)–(V) 的概率)。在定理 *7.1* 的条件下，以下结论成立。

(a) $\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} (|R^{\mathrm{i}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}|) \xrightarrow{p} 0.$

(b) 事件（*II*）的概率满足

$$\lim_{K \to \infty} \limsup_{N_{\mathrm{O}} \to \infty} \Pr\{\exists t \in [t_{0,N_{\mathrm{O}}}, N_{\mathrm{O}}/K) : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} = 0.$$

(c) 对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{K\to\infty} \limsup_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\left\{ \sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{t\ge \lfloor K N_{\mathrm{O}} \rfloor} \left| \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

(d) 对每个 $K \ge 1$和 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\left\{ \exists t \ge N_{\mathrm{O}}/K : \left| \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\, \overline{B}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \sigma(t/N_{\mathrm{O}})\, h_\alpha\!\left(\frac{c_\omega}{\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}})} \right) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

A.7.2 定理 *7.1* 和推论 *7.1* 的证明

本小节利用引理 A.7.1–A.7.3 证明定理 7.1，随后证明推论 7.1。

定理 7.1 的证明。固定 $\eta \in (0,1)$，令 K_0 为引理 A.7.1 中的常数。对于 $K \ge K_0$，条件 $t_{0,N_{\mathrm{O}}} \le N_{\mathrm{O}}/K$ 对所有充分大的 N_{O}均成立，因为 $t_{0,N_{\mathrm{O}}}/N_{\mathrm{O}} \to 0$。对引理 A.7.1 中的不等式取上极限 $N_{\mathrm{O}}\to\infty$，并将引理 A.7.2(a) 应用于 Pr{(I)}，将引理 A.7.3(d)（其中 $\varepsilon = \varepsilon_\eta$）应用于 Pr{(IV)}，以及将引理 A.7.3(a) 应用于 Pr{(V)}，可得对每个 $K \ge K_0$,

$$\begin{aligned} \limsup_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\{\exists t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}} : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} \le{}& \Pr\left\{ \sup_{u>0} \frac{|(V^{\mathrm{obs}})^{1/2} Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2} W(u)/u|}{\sigma(u)\, h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u))} \ge 1-\eta \right\} \\ &+ \limsup_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\{\mathrm{(II)}\} + \limsup_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\{\mathrm{(III)}\}. \end{aligned}$$

左侧既不依赖于 K，也不依赖于 η；右侧第一项不依赖于 K。令 $K \to \infty$，由引理 A.7.3(b) 和引理 A.7.3(c)，结合 $\varepsilon = \varepsilon_\eta$，可消去最后两项。令 $\eta \downarrow 0$，由引理 A.7.2(b)，第一项可由 α 上界。因此，对于所有 $t \ge t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$，均有下极限 $\liminf_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\{\tau \in C_{t,\,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} \ge 1-\alpha$，从而证明定理 7.1。

推论 7.1 的证明。由于 $t_{0,\,N_{\mathrm{O}}} \le T_{\mathrm{stop},\,N_{\mathrm{O}}} < \infty$ 几乎处处成立，事件 $\tau \in C_{t,\,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)$ 对所有 $t \ge t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$ 均成立，除去一个零测集后包含于事件 $\{\tau \in C_{T_{\mathrm{stop},\,N_{\mathrm{O}}},\,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\}$ 中。因此，由定理 7.1 可得下极限 $\liminf_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\{\tau \in C_{T_{\mathrm{stop},\,N_{\mathrm{O}}},\,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} \ge 1-\alpha$，从而证明推论 7.1。 □

A.7.3 引理 *A.7.1* 的证明

本小节首先陈述引理 A.7.4 和引理 A.7.5（本小节中的证明将使用它们），然后证明引理 A.7.1 和引理 A.7.4。引理 A.7.1 的证明使用引理 A.7.4(c)，而引理 A.7.4(d) 的证明使用引理 A.7.5。引理 A.7.5、A.7.9 和 A.7.10 是文献中的结果，以下按其使用的形式陈述。

引理 A.7.4（膨胀因子和高斯混合穿越界）。固定 $\alpha \in (0,1)$。

(a) For every $x > 0$, $h_\alpha(x)^2 \ge 2\log(1/\alpha)$ *and* $h_\alpha(x)^2 \ge 2\log(1/\alpha)/x$.

（*b*）映射 $(c, v) \mapsto v^{1/2} h_\alpha(c/v)$ 在$(0,\infty)^2$上连续。

(c) 对于每个 $c \in (0,\infty)$，函数 $u \mapsto \sigma(u) h_\alpha(c/\sigma^2(u))$ 在 $(0,\infty)$上连续，下界为 $\{2V^{\mathrm{obs}}\log(1/\alpha)\}^{1/2}$，并且当 $u \to \infty$ 时收敛到一个有限极限。

(d) 对于每个 $c \in (0,\infty)$，当 $\sigma^2(u) = V^{\mathrm{obs}} + V^{\mathrm{exp},\star}/u$ 时，Z 和 W 与引理 *A.7.2* 中所述相同，

$$\Pr\left\{\sup_{u>0} \frac{|(V^{\mathrm{obs}})^{1/2} Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2} W(u)/u|}{\sigma(u)\, h_\alpha(c/\sigma^2(u))} \geq 1\right\} \leq \alpha.$$

引理 *A.7.5*（双侧正态混合边界）。*Howard* 等人（*2021*年，第*3.2*节）公式（*3.7*）及其附录 *A.3* 中的详细说明，给出了满足其双向次高斯条件（定义 *1*，其中 $\psi(\lambda) = \lambda^2/2$ 且 $l_0 = 1$）的过程的双侧正态混合边界。我们采用以下形式。设 $(T_k)_{k\geq 0}$ 是一个适应于滤过 $(H_k)_{k\geq 0}$ 的实值过程，且 $(q_k)_{k\geq 0}$ 是 $[0,\infty)$ 中满足 $T_0 = q_0 = 0$ 的确定性序列。假设对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，过程 $(\exp\{\lambda T_k - \lambda^2 q_k/2\})_{k\geq 0}$ 关于 $(H_k)_{k\geq 0}$ 是一个上鞅。那么，对于每个 $\rho > 0$ 和 $\beta \in (0,1)$，

$$\Pr\left[\exists k \geq 1 : |T_k| \geq \left\{(q_k + \rho)\log\frac{q_k + \rho}{\beta^2 \rho}\right\}^{1/2}\right] \leq \beta.$$

引理 A.7.1 的证明。固定 $\eta \in (0,1)$。引理 A.7.4(c) 中的边界在无穷远处有有限极限。选取 $K_0 \geq 2$，使其取决于 η，但独立于 K 和 N_{O}，从而

$$\left|\sigma(u) h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u)) - \sigma(u') h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u'))\right| \leq \varepsilon_\eta \qquad (u, u' \geq K_0 - 1).$$

引理 A.7.4(c) 中的下界给出

$$5\varepsilon_\eta = \eta\{2V^{\mathrm{obs}}\log(1/\alpha)\}^{1/2} \leq \eta\, \sigma(u) h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u)) \qquad (u > 0).$$

固定任意的 $K \geq K_0$ 以及任意的 N_{O}，使得 $t_{0,\,N_{\mathrm{O}}} \leq N_{\mathrm{O}}/K$。假设 $\tau \notin C_{t,\,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)$ 在整数 $t \geq t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$ 处成立。如果 $t < N_{\mathrm{O}}/K$，则事件（II）发生。对于 $t \geq N_{\mathrm{O}}/K$，假设（IV）和（V）均不发生。一次遗漏意味着 $|\widehat{\tau}_{t,-N_{\mathrm{O}}} - \tau| > B_{t,\,N_{\mathrm{O}}}$。引理 6.2 以及（V）和（IV）的补事件随后给出

$$\begin{aligned}
&\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\left|L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} + \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right| \\
&\geq \sqrt{N_{\mathrm{O}}}|\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \tau| - \varepsilon_\eta > \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\,\overline{B}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \varepsilon_\eta \\
&\geq \sigma(t/N_{\mathrm{O}}) h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}})) - 2\varepsilon_\eta.
\end{aligned}$$

将 t 处的主导项与其在该整数处的值进行比较

$$r := \min\{t, \lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor\}.$$

由于 $N_{\mathrm{O}}/K \le N_{\mathrm{O}} \le \lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor$，我们有 $N_{\mathrm{O}}/K \le r \le KN_{\mathrm{O}}$。若 $r = t$，则两个指标处的主导项和边界均相同。若 $r < t$，则 $r = \lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor$。在此情形下，也假设 (III) 不发生，因此

$$\begin{aligned}
&\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \left| \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} - \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{r} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} \right| \\
&\le 2\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{j \ge \lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor} \left| \frac{1}{j} \sum_{s=1}^{j} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} \right| \le 2\varepsilon_{\eta}.
\end{aligned}$$

在此情形下，$t/N_{\mathrm{O}} \ge r/N_{\mathrm{O}} \ge K - 1/N_{\mathrm{O}} \ge K_0 - 1$，因此选择 K_0 可将边界值之差限制在 ε_{η} 以内。由于 $L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}$ 在两个指标处相同，因此无论哪种情形，

$$\begin{aligned}
&\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \left| L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} + \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{r} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} \right| \\
&\ge \sqrt{N_{\mathrm{O}}} \left| L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} + \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} \right| - 2\varepsilon_{\eta} \\
&> \sigma(r/N_{\mathrm{O}}) h_{\alpha}(c_{\omega}/\sigma^2(r/N_{\mathrm{O}})) - 5\varepsilon_{\eta} \\
&\ge (1 - \eta)\, \sigma(r/N_{\mathrm{O}}) h_{\alpha}(c_{\omega}/\sigma^2(r/N_{\mathrm{O}})).
\end{aligned}$$

The 边界为正，因此事件 (I) 在 r处发生。这证明了有限样本包含关系 on

$$\{\exists t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}} : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} \subseteq \mathrm{(I)} \cup \mathrm{(II)} \cup \mathrm{(III)} \cup \mathrm{(IV)} \cup \mathrm{(V)}.$$

取概率并应用并集界，即得所述不等式，从而证明引理 A.7.1。

A.7.3.1 引理 *A.7.4* 的证明

(a)–(c) 部分由h_{α}的定义推出。(d) 部分的证明首先将(d)部分中的过程除以其方差，表示为在 $1/\sigma^2(u)$ 处取值的布朗运动，然后将引理 A.7.5 应用于二进网格上的该布朗运动，并通过路径连续性从网格推广到连续时间。

引理 A.7.4(a)–(c) 的证明。(a) 对于 $x > 0$，$(x+1)/x \geq 1$ 和 $(x+1)/x \geq 1/x$ 均成立，且 $\log\{(x+1)/\alpha^2\} \geq \log(1/\alpha^2) = 2\log(1/\alpha)$。这两个界均由 $h_\alpha(x)^2 = \{(x+1)/x\}\log\{(x+1)/\alpha^2\}$ 得出。

(b) 对于 c，$v \in (0, \infty)$，根据 h_α 的定义可得

$$v\, h_\alpha\left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{v(c+v)}{c}\log\left(\frac{c+v}{v\alpha^2}\right),$$

它在 $(0, \infty)^2$ 上连续且为正，因此其平方根也如此。

(c) 函数 $u \mapsto \sigma^2(u)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续且为正，满足 $\sigma^2(u) \geq V^{\mathrm{obs}}$，并且当 $u \to \infty$ 时收敛到 V^{obs}。因此，第 (b) 部分给出了连续性以及极限 $(V^{\mathrm{obs}})^{1/2} h_\alpha(c/V^{\mathrm{obs}})$，而第 (a) 部分给出了 $\sigma^2(u) h_\alpha(c/\sigma^2(u))^2 \geq 2V^{\mathrm{obs}}\log(1/\alpha)$。这就证明了第 (a)–(c) 部分。

~**引理 A.7.4(d) 的证明**。取定 $c \in (0, \infty)$，令 W 为标准布朗运动，并记

$$a(u) := \frac{1}{\sigma^2(u)} = \frac{u}{uV^{\mathrm{obs}} + V^{\mathrm{exp},\star}}, \qquad u > 0.$$

由于 $V^{\mathrm{obs}} > 0$ 且 $V^{\mathrm{exp},\star} > 0$ 根据附录 A.7.1，映射 $u \mapsto a(u)$ 是从 $(0, \infty)$ 到 $(0, 1/V^{\mathrm{obs}})$ 的递增双射。

~**步骤 1.** 我们证明，(d) 部分中的过程除以其方差后，其分布与在 $a(u)$ 处取值的 W 相同。由于 Z 服从标准正态分布且独立于 W，过程 $\{(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2}W(u)/u : u > 0\}$ 是一个具有连续路径的中心高斯过程。将其除以 $\sigma^2(u)$，即可得到标准化过程；该过程在时刻 u 和 u' 的协方差为（其中 $0 < u \leq u'$），

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}\left\{\frac{(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2}W(u)/u}{\sigma^2(u)}, \frac{(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2}W(u')/u'}{\sigma^2(u')}\right\}\\ &= \frac{V^{\mathrm{obs}} + V^{\mathrm{exp},\star}u/(uu')}{\sigma^2(u)\sigma^2(u')} = \frac{\sigma^2(u')}{\sigma^2(u)\sigma^2(u')} = a(u) = \min\{a(u), a(u')\},\end{aligned}$$

~其中，最后一个等式成立是因为 a 单调递增。这是 $W(a(u))$ 的协方差；它也是一个在 $(0, \infty)$ 上具有连续路径的中心高斯过程。因此，这两个过程具有相同的有限维分布。由于二者的路径均连续，下面每个比值在 $u > 0$ 上的上确界都等于其在正有理数 u 上的上确界，因此这两个上确界具有相同的概率分布。

步骤 2。 我们在二进网格上对 W 应用引理 A.7.5。固定 $n \geq 1$，并令 $T_k := W(k2^{-n})$，$q_k := k2^{-n}$，且 $\mathcal{H}_k := \sigma\{W(b) : 0 \leq b \leq k2^{-n}\}$，其中 $k \geq 0$。独立的高斯增量表明，对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $k \geq 0$，

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\lambda T_{k+1} - \lambda^2 q_{k+1}/2\} \mid \mathcal{H}_k\right] = \exp\{\lambda T_k - \lambda^2 q_k/2\},$$

因此，引理 A.7.5 可与 $\rho = c^{-1}$ 一起应用。对于 $\beta \in (0,\ 1)$，定义

$$\mathcal{M}_\beta(a) := \left\{(a + c^{-1}) \log \frac{1 + ca}{\beta^2}\right\}^{1/2}, \qquad a \geq 0.$$

由于 $(a + c^{-1})/(\beta^2 c^{-1}) = (1 + ca)/\beta^2$，引理 A.7.5 给出，对于每个 $n \geq 1$ 和 $\beta \in (0,\ 1)$，

$$\Pr\left\{\exists k \geq 1 : |\widetilde{W}(k2^{-n})| \geq \mathcal{M}_\beta(k2^{-n})\right\} \leq \beta.$$

步骤 3。 我们将第 (d) 部分中的边界与 M_α 对齐，并从网格过渡到连续时间。h_α 的定义，其中 $x = c\,a(u) = c/\sigma^2(u)$，给出

$$\frac{h_\alpha(c/\sigma^2(u))^2}{\sigma^2(u)} = a(u)\,\frac{c\,a(u) + 1}{c\,a(u)} \log \frac{c\,a(u) + 1}{\alpha^2} = \mathcal{M}_\alpha(a(u))^2.$$

因此，将第 (d) 部分中比值的分子和分母分别除以 $\sigma^2(u)$，并应用步骤 1，可得

$$\Pr\left\{\sup_{u>0} \frac{|(V^{\mathrm{obs}})^{1/2} Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2} W(u)/u|}{\sigma(u)\, h_\alpha(c/\sigma^2(u))} \geq 1\right\} = \Pr\left\{\sup_{0<a<1/V^{\mathrm{obs}}} \frac{|\widetilde{W}(a)|}{\mathcal{M}_\alpha(a)} \geq 1\right\}.$$

边界 M_α 在 $[0, \infty)$ 上连续且严格为正，并且 $W(0) = 0$。因此，比值 $|\widetilde{W}(a)|/M_\alpha(a)$ 在 $[0, 1/V^{\mathrm{obs}}]$ 上连续，并在 $a = 0$ 处等于零，所以它在 $(0,\ 1/V^{\mathrm{obs}})$ 上的上确界等于其在 $[0, 1/V^{\mathrm{obs}}]$ 上的最大值。如果该最大值至少为一，则它在某个正时间处取得。

固定 $\beta \in (\alpha,\ 1)$，使得 $M_\beta < M_\alpha$ 在 $[0, \infty)$ 上。若 $|W(a^*)| \geq M_\alpha(a^*)$ 在某个 $a^* > 0$ 处成立，则由连续性可知，$|W| > M_\beta$ 在 a^* 的某个邻域内成立，而该邻域包含一个正的二进有理数。步骤 2 中的网格事件随 n 增大，因此

$$\Pr\left\{\max_{0\leq a\leq 1/V^{\mathrm{obs}}} \frac{|\widetilde{W}(a)|}{\mathcal{M}_\alpha(a)} \geq 1\right\} \leq \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\exists k \geq 1 : |\widetilde{W}(k2^{-n})| \geq \mathcal{M}_\beta(k2^{-n})\right\} \leq \beta.$$

令 $\beta \downarrow \alpha$ 即可证明引理 A.7.4(d)，并完成引理 A.7.4 的证明。 □

A.7.4 引理 *A.7.2* 的证明

本小节首先陈述引理 A.7.6–A.7.10，这些引理会在本小节的证明中用到；随后证明引理 A.7.2 以及引理 A.7.6–A.7.8。引理 A.7.6 给出了引理 A.7.2 第 (a) 部分中用到的极限，而在附录 A.7.3.1 中证明的引理 A.7.4(d) 给出了第 (b) 部分。引理 A.7.6 的证明用到了引理 A.7.7(b) 和引理 A.7.9；引理 A.7.7 的证明用到了引理 A.7.8(b)；引理 A.7.8 的证明则用到了引理 A.7.10。

引理 A.7.6（观察误差与实验部分和的联合极限）。在定理 *7.1* 的条件下，对于任意固定的 $K < \infty$,

$$\left(\sqrt{N_{\mathrm{O}}}L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}, \left\{\frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}}\sum_{s=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}}u\rfloor}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}} : 0 \le u \le K\right\}\right) \rightsquigarrow \left((V^{\mathrm{obs}})^{1/2}Z, \{(V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2}W(u) : 0 \le u \le K\}\right)$$

在 $\mathbb{R} \times D([0,K])$ 中，其中 Z 和 W 与引理 *A.7.2* 中的相同，而 $D([0,K])$ 赋予其 *Skorokhod* J_1 拓扑。

引理 A.7.7（实验得分的方差与方差估计量）。在满足定理 *7.1* 的条件但不满足假设 *7.1(2)* 的情况下，以下结论成立。

(a) $\sup_{t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |\mathbb{E}[\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}^2 \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] - V^{\mathrm{exp},\star}| \xrightarrow{p} 0.$

(b) For every fixed $K \ge 1$, $\sup_{t \ge N_{\mathrm{O}}/K} |V_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{exp}} - V^{\mathrm{exp},\star}| \xrightarrow{p} 0.$

(c) $\sup_{t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{exp}} - V_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{exp}}| \xrightarrow{p} 0.$

(d) For every fixed $\varepsilon \in (0,1)$, $\Pr\{\inf_{t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{exp}} < (1-\varepsilon)V^{\mathrm{exp},\star}\} \to 0.$

(e) $\sup_{t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |\widehat{V}_{t,N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} - V^{\mathrm{obs}}| \xrightarrow{p} 0.$

引理 A.7.8（部分和与运行平均值的极大不等式）。对于任意固定的 N_{O}，令 $(U_{k,\,N_{\mathrm{O}}})_{k\ge1}$ 为相对于滤过 $(\mathrm{H}_{k,\,N_{\mathrm{O}}})_{k\ge0}$ 的鞅差序列，使得 $\sup_{k\ge1}\mathbb{E}[U_{k,N_{\mathrm{O}}}^2] < \infty$。

(a) 对于 每个整数 $n \ge 1$ 和 $\lambda > 0$，$\Pr\{\max_{1\le k\le n} |\sum_{s=1}^{k} U_{s,N_{\mathrm{O}}}| > \lambda\} \le n \sup_{k\ge1}\mathbb{E}[U_{k,N_{\mathrm{O}}}^2]/\lambda^2$。

(b) 对每个整数 $m \ge 1$ 和 $\lambda > 0$,

$$\Pr\left\{\sup_{t\ge m}\left|\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}U_{k,N_{\mathrm{O}}}\right| > \lambda\right\} \le \frac{4\sup_{k\ge1}\mathbb{E}[U_{k,N_{\mathrm{O}}}^2]}{\lambda^2 m}.$$

引理 A.7.9（鞅函数中心极限定理）。我们采用 *Jacod* 和 *Shiryaev*（*2003*年）中定理 *VIII.3.33* 的充分条件方向，该定理适用于部分和

取至确定性指标 $\lfloor N_{\mathrm{O}} s \rfloor$、 $s \geq 0$的情形。对于每个 N_{O}，令 $(U_{k,\ N_{\mathrm{O}}})_{k\geq 1}$ 为关于滤过 $(\mathrm{H}_{k,\ N_{\mathrm{O}}})_{k\geq 0}$的平方可积鞅差序列，并令 $\mathcal{V}\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$为连续非减确定性函数，且 $\mathcal{V}(0) = 0$。假设

(1) $\sum_{k=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} s \rfloor} \mathbb{E}[U_{k,N_{\mathrm{O}}}^2 \mid \mathrm{H}_{k-1,\ N_{\mathrm{O}}}] \xrightarrow{p} \mathcal{V}(s)$ 对每个 $s \geq 0$均成立；(2) $\sum_{k=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} s \rfloor} \mathbb{E}[U_{k,N_{\mathrm{O}}}^2 \mathbf{1}\{|U_{k,\ N_{\mathrm{O}}}| > \varepsilon\} \mid \mathrm{H}_{k-1,\ N_{\mathrm{O}}}] \xrightarrow{p} 0$对每个 $s \geq 0$和 $\varepsilon > 0$均成立。

Then

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} s \rfloor} U_{k,N_{\mathrm{O}}} : s \geq 0 \right\} \rightsquigarrow \{\Gamma(s) : s \geq 0\}$$

在 $D([0,\infty)$ 中，赋予其 *Skorokhod* J_1 拓扑，其中 Γ 是具有独立增量的连续中心高斯过程，并且对每个 $s \geq 0$都有 $\mathbb{E}[\Gamma(s)^2] = \mathcal{V}(s)$ 。

条件（1）表示可预测二次变差的收敛，条件（2）表示条件林德伯格条件。附录 A.7.4.1 验证了观测记录和实验记录这一行记录满足这两个条件。

引理 A.7.10（鞅最大不等式）。我们采用 $p = 2$*Hall* 和 *Heyde*（*1980*年）推论 *2.1* 的情形，该推论由其定理 *2.1* 推出。对于每个固定的 N_{O}，令 $(U_{k,\ N_{\mathrm{O}}})_{k\geq 1}$ 为关于滤过 $(\mathrm{H}_{k,\ N_{\mathrm{O}}})_{k\geq 0}$的平方可积鞅差序列。对于每个有限的 n 和 $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} &\lambda^2 \Pr\left\{ \max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{s=1}^{k} U_{s,N_{\mathrm{O}}} \right| > \lambda \right\} \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left| \sum_{s=1}^{n} U_{s,N_{\mathrm{O}}} \right|^2 \right] = \sum_{s=1}^{n} \mathbb{E}[U_{s,N_{\mathrm{O}}}^2], \end{aligned}$$

其中等式的成立用到了鞅差的 L_2-正交性。

根据引理 6.1，对于第一个序列；根据构造，对于第二个序列，$(\widetilde{m}_{s,\ N_{\mathrm{O}}})_{s\geq 1}$ 和 $(\widetilde{m}_{s,\ N_{\mathrm{O}}}^2 - \mathbb{E}[\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}^2 \mid \mathrm{F}_{s-1,\ N_{\mathrm{O}}}])_{s\geq 1}$都是相对于 $(\mathrm{F}_{s,\ N_{\mathrm{O}}})_{s\geq 0}$的鞅差序列；而假设 7.2（其中 $r > 4$）使它们平方可积，因此它们确为这样的序列。

引理 A.7.2 的证明。回顾引理 A.7.1，对于每个 $K \geq K_0$,

$$(\mathrm{I}) = \left\{ \max_{N_{\mathrm{O}}/K\leq t\leq KN_{\mathrm{O}}} \frac{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\,|L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} + t^{-1}\sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}|}{\sigma(t/N_{\mathrm{O}})\, h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}}))} \geq 1-\eta \right\}.$$

我们用引理 A.7.6 中这一对的连续泛函来界定该事件中的最大值，并取极限。(a) 固定 $K \geq K_0$，令 f 为路径 $f(v) = N^{-1/2} \circ \sum_{s=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} v \rfloor} \widetilde{m}_{s,\ N_{\mathrm{O}}}, 0 \leq v \leq K$。对于整数 $t \in [N_{\mathrm{O}}/K,\ KN_{\mathrm{O}}]$，点 t/N_{O} 位于 $[1/K,\ K]$ 中，并满足 $\lfloor N_{\mathrm{O}}(t/N_{\mathrm{O}}) \rfloor = t$,

因此，$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}(L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}} + t^{-1}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,\,N_{\mathrm{O}}})$ 等于 $z + f(t/N_{\mathrm{O}})/(t/N_{\mathrm{O}})$，其中 $z = \sqrt{N_{\mathrm{O}}}L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}$。所以，事件 (I) 中的最大值至多为映射在这一对上的取值

$$(z, f) \longmapsto \sup_{1/K \le u \le K} \frac{|z + f(u)/u|}{\sigma(u)\, h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u))}$$

从 $\mathbb{R}\times D([0,K])$ 到 $[0,\infty)$。根据引理 A.7.4(c)，分母至少为 $\{2V^{\mathrm{obs}}\log(1/\alpha)\}^{1/2}$，并且在 $[1/K, K]$ 上有 $1/u \le K$。因此，在两对 (z, f) 和 (z', f') 之间，该映射的变化至多为 $(|z-z'| + K\sup_{0\le u\le K}|f(u)-f'(u)|)/\{2V^{\mathrm{obs}}\log(1/\alpha)\}^{1/2}$。对于第二坐标连续的每一对点，该映射都是连续的，因为根据 Jacod 和 Shiryaev（2003）的命题 VI.1.17(b)，在 SkorokhodJ_1 拓扑中收敛于连续极限的 $D([0,K])$ 中的序列，在 $[0,K]$ 上一致收敛；这里将路径通过其在 K 处的值延拓至 $[0,\infty)$，而这些值在 $D([0,\infty))$ 的 Skorokhod 拓扑中收敛，因为 $[0,K]$ 的时间变换固定 K，并在 K 之后按恒等式延拓。引理 A.7.6 中的极限具有连续路径，因此由引理 A.7.6 和连续映射定理可知，该映射在 $(\sqrt{N_{\mathrm{O}}}L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}, f)$ 处的值依分布收敛于对 $1/K \le u \le K$ 上 $|(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2}W(u)/u|/\{\sigma(u)\mathrm{h}_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u))\}$ 的上确界。集合 $[1-\eta,\infty)$ 是闭集，因此由 Portmanteau 定理可得

$$\limsup_{N_{\mathrm{O}}\to\infty}\Pr\{(\mathrm{I})\} \le \Pr\left\{\sup_{1/K\le u\le K}\frac{|(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}Z + (V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2}W(u)/u|}{\sigma(u)\, h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(u))} \ge 1-\eta\right\},$$

并将 u 的取值范围扩大到 $(0,\ \infty)$，即可得出 (a) 部分。

(b) (a) 部分右侧的表达式不依赖于 K。当 $\eta \downarrow 0$ 时，其对应的事件递减至上确界（对 $u > 0$ 取值）至少为 1 的事件。由上连续性以及 $c = c_\omega$ 下的引理 A.7.4(d)，极限因此不超过 α。这就证明了引理 A.7.2。

A.7.4.1 引理 *A.7.6* 的证明

证明。 在鞅行中，先放置观测记录，再放置实验轮次

$$U_{k,N_{\mathrm{O}}} := \frac{\psi^{\mathrm{obs}}(X_k, S_k, Y_k) - \tau}{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}}, \qquad \mathcal{H}_{k,N_{\mathrm{O}}} := \sigma\{(X_i, S_i, Y_i) : 1 \le i \le k\}, \qquad 1 \le k \le N_{\mathrm{O}},$$
$$U_{N_{\mathrm{O}}+t,N_{\mathrm{O}}} := \frac{\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}}{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}}, \qquad \mathcal{H}_{N_{\mathrm{O}}+t,N_{\mathrm{O}}} := \mathcal{F}_{t,N_{\mathrm{O}}}, \qquad t \ge 1.$$

取 $\mathrm{H}_{0,\ N_{\mathrm{O}}}$ 平凡。在衔接处，$\mathrm{H}_{N_{\mathrm{O}},\ N_{\mathrm{O}}} = \sigma(\mathcal{D}_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}}) = \mathrm{F}_{0,\ N_{\mathrm{O}}}$。假设 A.6.1(i)使观察性增量成为具有条件方差 $V^{\mathrm{obs}}/N_{\mathrm{O}}$的鞅差。引理 6.1 和假设 7.2 使实验增量成为关于同一滤过的平方可积鞅差。

对于实验可预测方差，使用引理 A.7.7(b)。其在附录 A.7.4.2.2 中的证明使用了第 (a) 部分、假设 7.2 中的矩上界，以及假设 7.1(1) 中的 $t_{0,\ N_{\mathrm{O}}}/N_{\mathrm{O}} \to 0$。该论证无需借助引理 A.7.6 即可证明第 (b) 部分。对于固定的 $u > 0$，最终有 $\lfloor N_{\mathrm{O}} u \rfloor \geq N_{\mathrm{O}} u/2 \geq N_{\mathrm{O}}/\max\{1,\ 2/u\}$。因此，第 (b) 部分适用于固定常数 $\max\{1,\ 2/u\}$，并且

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} u \rfloor} \mathbb{E}[U^2_{N_{\mathrm{O}}+t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] \\ &= \frac{\lfloor N_{\mathrm{O}} u \rfloor}{N_{\mathrm{O}}}\, V^{\exp}_{\lfloor N_{\mathrm{O}} u \rfloor, N_{\mathrm{O}}} \xrightarrow{p} u V^{\exp,\star}.\end{aligned}$$

在 $u = 0$ 处，该和为零。到行时间 $s \geq 0$为止，观测贡献为$V^{\mathrm{obs}}\min\{\lfloor N_{\mathrm{O}} s \rfloor, N_{\mathrm{O}}\}/N_{\mathrm{O}}$。取 $u = (s-1)^+$，即可得到完整的可预测方差极限

$$\sum_{k=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} s \rfloor} \mathbb{E}[U^2_{k,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{H}_{k-1,N_{\mathrm{O}}}] \xrightarrow{p} \mathcal{V}(s) := V^{\mathrm{obs}} \min(s, 1) + V^{\exp,\star}(s-1)^+.$$

对于 $\varepsilon > 0$，条件林德伯格和中的观测贡献由真实得分的尾部二阶矩所界定。根据独立性和假设 A.6.1(i),

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\min\{\lfloor N_{\mathrm{O}} s \rfloor, N_{\mathrm{O}}\}} \mathbb{E}[U^2_{k,N_{\mathrm{O}}} \mathbf{1}\{|U_{k,N_{\mathrm{O}}}| > \varepsilon\} \mid \mathcal{H}_{k-1,N_{\mathrm{O}}}] \\ &\leq P^{\mathrm{obs}}\Big[(\psi^{\mathrm{obs}} - \tau)^2 \mathbf{1}\{|\psi^{\mathrm{obs}} - \tau| > \varepsilon\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\}\Big] \longrightarrow 0\end{aligned}$$

由控制收敛定理可得。对于实验增量，$z^2\mathbf{1}\{|z| > \varepsilon\} \leq \varepsilon^{2-r}|z|^r$。结合$u = (s-1)^+$，假设 7.2 给出

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} u \rfloor} \mathbb{E}[U^2_{N_{\mathrm{O}}+t,N_{\mathrm{O}}} \mathbf{1}\{|U_{N_{\mathrm{O}}+t,N_{\mathrm{O}}}| > \varepsilon\} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] \\ &\leq \frac{\varepsilon^{2-r}}{N_{\mathrm{O}}^{r/2}} \sum_{t=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} u \rfloor} \mathbb{E}[|\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}|^r \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] \leq C u\, \varepsilon^{2-r} N_{\mathrm{O}}^{1-r/2} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

引理 A.7.9 现在给出了行部分和收敛到连续中心高斯过程 Γ 的结果，该过程具有独立增量，方差函数为 $\mathcal{V}$。对于每个固定的 $K < \infty$，映射

$$\gamma \longmapsto \big(\gamma(1), \{\gamma(1+u) - \gamma(1) : 0 \leq u \leq K\}\big)$$

在连续路径处关于 J_1 拓扑连续，因为根据 Jacod 和 Shiryaev (2003年的命题 VI.1.17(b), 该拓扑下的收敛是局部一致的。该映射下这一行的两个坐标为

$$\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{O}}} U_{k,N_{\mathrm{O}}} = \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\, L_{N_{\mathrm{O}}}^{\mathrm{obs}},$$
$$\sum_{k=N_{\mathrm{O}}+1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}}(1+u)\rfloor} U_{k,N_{\mathrm{O}}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}} \sum_{t=1}^{\lfloor N_{\mathrm{O}} u\rfloor} \widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}}.$$

根据连续映射定理，它们的联合极限由对Γ应用同一映射给出。其第一坐标服从 $\mathcal{N}(0, V^{\mathrm{obs}})$ 的分布，并且根据独立增量与第二坐标相互独立。对于 $0 \le u' \le u \le K$,

$$\mathrm{Var}\{\Gamma(1+u) - \Gamma(1+u')\} = \mathcal{V}(1+u) - \mathcal{V}(1+u') = V^{\mathrm{exp},\star}(u-u').$$

第二坐标从零开始，具有连续路径和相互独立的中心高斯增量，因此在 $[0, K]$ 上服从 $(V^{\mathrm{exp},\star})^{1/2} W$ 的分布。这证明了引理 A.7.6。

A.7.4.2 引理 *A.7.7* 的证明

本小节证明引理 A.7.7。附录 A.7.4.2.1 证明第 (a) 部分以及附录 A.6.4 中定义的 $A_{N_{\mathrm{O}}}^{\circ}$ 的极限，附录 A.7.4.2.2 证明第 (b) 部分，附录 A.7.4.2.3 证明第 (c) 部分，附录 A.7.4.2.4 证明第 (d) 部分，附录 A.7.4.2.5 证明第 (e) 部分。

A.7.4.2.1 引理 *A.7.7(a)* 的证明

证明。 在假设 A.6.1(x)中的事件上，$\widehat{v}_{w,\,t,\,N_{\mathrm{O}}}(x)$ 和$\widetilde{v}_{w,\,N_{\mathrm{O}}}(x)$ 对两个臂、所有目标支持集 x 以及每个 $t \ge t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$ 同时属于 $[v, \bar{v}]$。该事件的概率趋近于 1。在假设 A.6.1 的条件中，附录 A.6.4.1 中的单轮界和附录 A.6.4.2 中的界仅使用此形式的共同条件和方差界，因此它们在该事件上成立。由于$\widetilde{v}_{w,\,N_{\mathrm{O}}}$ 在各轮中固定不变，附录 A.6.4.2 中的界以及假设 7.3 中的两个初始风险给出

$$A_{N_{\mathrm{O}}}^{\circ} \xrightarrow{p} P_{f_{X|G=\mathrm{O}}}\left[\sum_{w=0}^{1} \sqrt{v_w(X)}\right] = \sqrt{V^{\mathrm{exp},\star}}.$$

在同一事件上，在每个监测轮次应用附录 A.6.4.1 中的单轮界。于是

$$\sup_{t\ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}}\left|\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}}\mid\mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}]-V^{\exp,\star}\right|$$

$$\le\left(1+\sqrt{\overline{v}/\underline{v}}\right)^2\sum_{w=0}^{1}\left\{\sup_{t\ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}}\|\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}-\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|_\infty+\left(\sup_{t\ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}}\|\widehat{\mu}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}-\widetilde{\mu}_{w,N_{\mathrm{O}}}\|_\infty\right)^2\right\}+\left|(A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}})^2-V^{\exp,\star}\right|.$$

根据假设 7.3，每个臂对应的两个上确界都依概率收敛于零。根据前述极限，最后一项收敛于零。例外事件的概率趋于零，由此证明第 (a) 部分。

A.7.4.2.2 引理 *A.7.7(b)* 的证明

这一步证明引理 A.7.7 的第 (b) 部分。固定 $K\ge 1$。由于 $t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}/N_{\mathrm{O}}\to 0$，对于所有充分大的 N_{O}，每个 $t\ge N_{\mathrm{O}}/K$都满足 $t\ge t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$。将平均值 $V^{\exp}_{t,\,N_{\mathrm{O}}}=t^{-1}\sum_{s=1}^{t}\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}\mid\mathbb{F}_{s-1,\,N_{\mathrm{O}}}]$ 在 $t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$处分开。前 $t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$ 项与 $V^{\exp,\,\star}$ 的偏差至多为 $C^{2/r}+V^{\exp,\,\star}$，其余各项的偏差至多为第 (a) 部分中的上确界。因此，对于所有 $t\ge N_{\mathrm{O}}/K$，

$$\left|V^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}-V^{\exp,\star}\right|\le\frac{Kt_{0,N_{\mathrm{O}}}}{N_{\mathrm{O}}}\left(C^{2/r}+V^{\exp,\star}\right)+\sup_{s\ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}}\left|\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}\mid\mathcal{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}]-V^{\exp,\star}\right|=o_p(1),$$

这就证明了第 (b) 部分。

A.7.4.2.3 引理 *A.7.7(c)* 的证明

证明。 样本中心化消除了可行实验得分中的共同观察项。事实上，第 6.1 节给出

$$\widehat{\phi}^{\exp}_{s,N_{\mathrm{O}}}(S_s,W_s,X_s)+P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}\widehat{\tau}_{s,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)=\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}+P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}.$$

因此，展开样本方差并减去其可预测对应项，可得

$$\begin{aligned}&\widehat{V}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}-V^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}\\&=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}-\left(\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right)^2-V^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}\\&=\underbrace{\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\left\{\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}-\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}\mid\mathcal{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}]\right\}}_{\text{(i)}}-\underbrace{\left(\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right)^2}_{\text{(ii)}}.\end{aligned}$$

将引理 A.7.8(b) 应用于 (i) 中的中心化平方项，以及 (ii) 中平方前的得分。前者按构造即为鞅差，后者则由引理 6.1 可知为鞅差。它们的条件二阶矩满足

$$\mathbb{E}\left[\left\{\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}} - \mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}]\right\}^2 \mid \mathcal{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}\right] \le \mathbb{E}[\widetilde{m}^4_{s,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}] \le C^{4/r},$$
$$\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{s-1,N_{\mathrm{O}}}] \le C^{2/r}$$

由假设 7.2 和条件 Jensen 不等式可得。固定 $\varepsilon > 0$，对中心化平方的平均值使用阈值 $\varepsilon/2$，对得分平均值使用阈值 $\sqrt{\varepsilon/2}$。由三角不等式、并集界和引理 A.7.8(b)（其中 $m = t_{0,\ N_{\mathrm{O}}}$）可得

$$\Pr\left\{\sup_{t \ge t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |\widehat{V}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}} - V^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}| > \varepsilon\right\} \le \frac{4C^{4/r}}{t_{0,N_{\mathrm{O}}}(\varepsilon/2)^2} + \frac{4C^{2/r}}{t_{0,N_{\mathrm{O}}}(\varepsilon/2)} \longrightarrow 0,$$

因为 $t_{0,\ N_{\mathrm{O}}} \to \infty$，由假设 7.1(1) 可知。这就证明了第 (c) 部分。

A.7.4.2.4 引理 *A.7.7(d)* 的证明

证明。每一轮中各臂内替代指标的变化都给出了一个下界$t \ge 1$。给定 $X_t = x$、$W_t = w$ 和过去信息后，在第 6.1 节中减去中心化项不会影响方差。附录 A.6.4.1 中的得分公式以及假设 A.6.1(iv) 中的条件替代分布给出

$$\mathrm{Var}(\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid X_t = x, W_t = w, \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}) = \frac{A^2_{t,N_{\mathrm{O}}}}{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}\,\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x).$$

引理 6.1 对给定过去信息的得分进行了中心化。因此，由全方差定律以及附录 A.6.4.1 中 (X_t, W_t) 的联合密度可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] = \mathrm{Var}(\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}) \\
&\ge \mathbb{E}[\mathrm{Var}(\widetilde{m}_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid X_t, W_t, \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}) \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}] \\
&= \int \sum_{w=0}^{1} \frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}(x)\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}}{A_{t,N_{\mathrm{O}}}} \frac{A^2_{t,N_{\mathrm{O}}}\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(x)}{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(x)}\, d\lambda_X(x) = A_{t,N_{\mathrm{O}}}\, P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}\left[\sum_{w=0}^{1} \frac{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X)}{\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)}}\right].
\end{aligned}$$

这些恒等式利用了假设 A.6.1(v) 和 (vi) 中的共同支撑集与逐点正性；这些条件在 $t_{0,N_{\mathrm{O}}}$ 之前也适用。

对 x 和两个臂应用柯西–施瓦茨不等式，并以拟合目标密度作为 x 中的权重。根据附录 A.6.4.1 中的定义，

$$(A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}})^2 = \left\{ P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}} \left[\sum_{w=0}^{1} \widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)^{1/4} \frac{\sqrt{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X)}}{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)^{1/4}} \right] \right\}^2$$
$$\leq P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}} \left[\sum_{w=0}^{1} \sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)} \right] P_{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}} \left[\sum_{w=0}^{1} \frac{\widetilde{v}_{w,N_{\mathrm{O}}}(X)}{\sqrt{\widehat{v}_{w,t,N_{\mathrm{O}}}(X)}} \right] \leq \mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \mid \mathcal{F}_{t-1,N_{\mathrm{O}}}].$$

下界对所有轮次都相同。取平均并使用$V^{\exp}_{t}$ $_{,N_{\mathrm{O}}}$ 的定义可得

$$\inf_{t\geq 1} V^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}} \geq (A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}})^2.$$

对于固定的 $\varepsilon \in (0,1)$，将容差分配给该下界和可行方差中的误差。于是

$$\Pr\left\{ \inf_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \widehat{V}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}} < (1-\varepsilon) V^{\exp,\star} \right\}$$
$$\leq \Pr\left\{ \sup_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |\widehat{V}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}} - V^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}| > \varepsilon V^{\exp,\star}/2 \right\} + \Pr\left\{ (A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}})^2 < (1-\varepsilon/2) V^{\exp,\star} \right\} \longrightarrow 0$$

根据第 (c) 部分、附录 A.7.4.2.1 中 $A^{\circ}_{N_{\mathrm{O}}}$ 的极限以及 $V^{\exp,\star} > 0$。这就证明了第 (d) 部分。

A.7.4.2.5 引理 *A.7.7(e)* 的证明

这一步证明引理 A.7.7 的 (e) 部分。我们比较拟合的观测得分的经验方差与真实得分的经验方差。将拟合的观测得分写成真实得分加上差 $\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t}$ $_{,N_{\mathrm{O}}} - \psi^{\mathrm{obs}}$。展开 $\widehat{V}^{\mathrm{obs}}_{t}$ $_{,N_{\mathrm{O}}}$ 定义中的中心化平方后，该估计量等于 $\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i)$ 的经验方差，加上 $\psi^{\mathrm{obs}}(X_i, S_i, Y_i)$ 与 $(\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t}$ $_{,N_{\mathrm{O}}} - \psi^{\mathrm{obs}})(X_i, S_i, Y_i)$ 的经验协方差的两倍，再加上后一项的经验方差。第一项不依赖于 t，并根据大数定律依概率收敛到 V^{obs}，因为由假设 A.6.1(i)，$P^{\mathrm{obs}}\psi^{\mathrm{obs}} = \tau$ 和 $\mathbb{E}^{\mathrm{obs}}[(\psi^{\mathrm{obs}} - \tau)^2] = V^{\mathrm{obs}} < \infty$。最后一项至多为 $\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}}[\{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t}$ $_{,N_{\mathrm{O}}} - \psi^{\mathrm{obs}}\}^2]$，，根据柯西–施瓦茨不等式，中间项的绝对值至多为第一项与此上界乘积的平方根的两倍。假设 7.4 的第三个条件以及其第一个条件中的一致 $L_2(P^{\mathrm{obs}})$ 一致性意味着

$$\sup_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}}[\{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \psi^{\mathrm{obs}}\}^2]$$
$$\leq \sup_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} P^{\mathrm{obs}}[\{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \psi^{\mathrm{obs}}\}^2] + o_p(1) = o_p(1).$$

因此，中间项和最后一项关于 $t \geq t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}$ 一致为 $o_p(1)$，且 $\sup_{t\geq t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}} |\widehat{V}^{\mathrm{obs}}_{t\,,\,N_{\mathrm{O}}} - \overline{V}^{\mathrm{obs}}| \xrightarrow{p} 0$，这就证明了 (e) 部分，并完成了引理 A.7.7 的证明。

A.7.4.3 引理 *A.7.8* 的证明

证明。 (a) 引理 A.7.10 和 $\sum_{s=1}^{n} \mathbb{E}[U^2_{s,N_{\mathrm{O}}}] \leq n \sup_{k\geq 1} \mathbb{E}[U^2_{k,N_{\mathrm{O}}}]$ 给出了 (a) 部分。

(b) 固定 m 和 λ。若对某个 $j \geq 0$ 和 $|t^{-1}\sum_{k=1}^{t} U_{k,\,N_{\mathrm{O}}}| > \lambda$ 有 $2^j m \leq t < 2^{j+1}m$，则 $\max_{1\leq k\leq 2^{j+1}m} |\sum_{s=1}^{k} U_{s,\,N_{\mathrm{O}}}| > \lambda 2^j m$。结合 $n = 2^{j+1}m$，引理 A.7.10 和对 j 使用并集界可得

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\sup_{t\geq m}\left|\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} U_{k,N_{\mathrm{O}}}\right| > \lambda\right\} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sum_{s=1}^{2^{j+1}m}\mathbb{E}[U^2_{s,N_{\mathrm{O}}}]}{\lambda^2 2^{2j} m^2} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j+1}m \sup_{k\geq 1}\mathbb{E}[U^2_{k,N_{\mathrm{O}}}]}{\lambda^2 2^{2j} m^2} = \frac{4\sup_{k\geq 1}\mathbb{E}[U^2_{k,N_{\mathrm{O}}}]}{\lambda^2 m}.\end{aligned}$$

由此证明了引理 A.7.8。

A.7.5 引理 *A.7.3* 的证明

本小节证明引理 A.7.3，该引理给出了事件 (II)–(V) 的概率上界。

证明。 (a) 由于 $R^{\mathrm{i}}_{t\,,\,N_{\mathrm{O}}} = (\mathbb{P}^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} - P^{\mathrm{obs}})\{\widehat{\psi}^{\mathrm{obs}}_{t\,,\,N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \psi^{\mathrm{obs}}(\cdot)\}$，假设 7.4 的第二个条件就是第一个余项界 $\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\sup_{t\geq t_{0,\,N_{\mathrm{O}}}} |R^{\mathrm{i}}_{t\,,\,N_{\mathrm{O}}}| = o_p(1)$。对于目标密度余项，根据柯西–施瓦茨不等式和假设 7.5 中的第一个乘积收敛率可得

$$\begin{aligned}\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\sup_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| &\leq \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\left\|\frac{\widehat{f}_{X|G=\mathrm{O},N_{\mathrm{O}}}}{f_{X|G=\mathrm{O}}} - 1\right\|_{2,X|G=\mathrm{O}} \\ &\quad \times \sup_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \|\widetilde{\tau}_{N_{\mathrm{O}}}(\cdot) - \overline{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}}(\cdot)\|_{2,X|G=\mathrm{O}} = o_p(1).\end{aligned}$$

同样，根据柯西–施瓦茨不等式和假设 7.5 中的第二个乘积收敛率可得

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\sup_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| \leq \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\|\widehat{\mu}_{N_{\mathrm{O}}} - \mu\|_{2,\mathrm{obs}} \sup_{t\geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \|\widehat{\alpha}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \alpha\|_{2,\mathrm{obs}} = o_p(1).$$

将这三个界相加即可证明 (a) 部分。

(b) 我们证明，在第 $t < N_{\mathrm{O}}/K$ 轮，$\tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)$ 会导致实验得分的一个较大的部分和，然后利用极大不等式对其概率进行界定。固定 $K \geq 1$。由引理 A.7.4(a)、$x = \omega_{N_{\mathrm{O}}}/\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}}$ 以及不等式 $\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \geq \widehat{V}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}}/t$ 可得

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\,\overline{B}_{t,N_{\mathrm{O}}} \geq \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\,\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \left\{\frac{2\log(1/\alpha)}{\omega_{N_{\mathrm{O}}}}\right\}^{1/2} \geq \frac{N_{\mathrm{O}}}{t}\,\widehat{V}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}} \left\{\frac{2\log(1/\alpha)}{N_{\mathrm{O}}\omega_{N_{\mathrm{O}}}}\right\}^{1/2}.$$

令 $c_1 := (V^{\exp,\star}/2)\{\log(1/\alpha)/c_\omega\}^{1/2}$，并考虑以下条件

$$\text{(C1)} \quad \inf_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \widehat{V}^{\exp}_{t,N_{\mathrm{O}}} \geq \frac{V^{\exp,\star}}{2},$$

$$\text{(C2)} \quad N_{\mathrm{O}}\omega_{N_{\mathrm{O}}} \leq 2c_\omega,$$

$$\text{(C3)} \quad |\sqrt{N_{\mathrm{O}}}L^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}}| + \sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} \left(|R^{\mathrm{i}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}|\right) \leq \frac{c_1 K}{2}.$$

若 (C1) 和 (C2) 成立，则根据它们以及上文给出的 $\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\,B_{t,N_{\mathrm{O}}}$ 下界可得 $\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\,B_{t,N_{\mathrm{O}}} \geq c_1 N_{\mathrm{O}}/t$，对每个 $t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}$ 均成立。附录 A.7.1 中的分解给出

$$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}|\widehat{\tau}_{t,N_{\mathrm{O}}} - \tau| \leq \frac{N_{\mathrm{O}}}{t}\left|\frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right| + |\sqrt{N_{\mathrm{O}}}L^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}}| + \sqrt{N_{\mathrm{O}}}\left(|R^{\mathrm{i}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{ii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}| + |R^{\mathrm{iii}}_{t,N_{\mathrm{O}}}|\right).$$

因此，若 (C1)–(C3) 成立，且对于某个整数 $t \in [t_{0,N_{\mathrm{O}}}, N_{\mathrm{O}}/K)$ 有 $\tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)$，则由 $N_{\mathrm{O}}/t > K$ 和 (C3) 可得

$$\frac{N_{\mathrm{O}}}{t}\left|\frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{O}}}}\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right| > \frac{c_1 N_{\mathrm{O}}}{t} - \frac{c_1 K}{2} > \frac{c_1 N_{\mathrm{O}}}{2t},$$

因此 $\left|\sum_{s=1}^{t}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right| > c_1 N_{\mathrm{O}}^{1/2}/2$。根据引理 A.7.8(a)，令 $U_{s,N_{\mathrm{O}}} = \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}$, $n = \lfloor N_{\mathrm{O}}/K \rfloor$, $\lambda = c_1 N_{\mathrm{O}}^{1/2}/2$，并结合 $\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}] \leq C^{2/r}$，可得

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\{\exists t \in [t_{0,N_{\mathrm{O}}}, N_{\mathrm{O}}/K) : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\} \cap \{\text{(C1)–(C3) hold}\}\right] \\ &\leq \Pr\left\{\max_{1 \leq k \leq \lfloor N_{\mathrm{O}}/K \rfloor}\left|\sum_{s=1}^{k}\widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right| > \frac{c_1 N_{\mathrm{O}}^{1/2}}{2}\right\} \leq \frac{4C^{2/r}}{c_1^2 K}.\end{aligned}$$

对于补集，结合 $\varepsilon = 1/2$ 使用引理 A.7.7(d) 和假设 7.1(2)，可知 (C1) 和 (C2) 以趋于 1 的概率成立。引理 A.7.6 给出 $\sqrt{N_{\mathrm{O}}}L^{\mathrm{obs}}_{N_{\mathrm{O}}} \rightsquigarrow (V^{\mathrm{obs}})^{1/2}Z$，而 (a) 部分表明 (C3) 中的一致余项为 $o_p(1)$，因此由斯卢茨基引理可知 (C3) 左侧依分布收敛至 $(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}|Z|$。因此，Portmanteau 定理

将 (C3) 不成立的概率的上极限界定为 $\Pr\{(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}|Z| \geq c_1 K/2\}$。合并这两个界得

$$\limsup_{N_{\mathrm{O}}\to\infty} \Pr\left\{\exists t \in [t_{0,N_{\mathrm{O}}}, N_{\mathrm{O}}/K) : \tau \notin C_{t,N_{\mathrm{O}}}(\alpha)\right\} \leq \frac{4C^{2/r}}{c_1^2 K} + \Pr\left\{|Z| \geq \frac{c_1 K}{2(V^{\mathrm{obs}})^{1/2}}\right\},$$

当 $K \to \infty$ 时趋于零。这证明了第 (b) 部分。

第 (c) 部分在第 $\lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor$ 轮之后应用引理 A.7.8(b)，第 (d) 部分则结合方差极限与h_α的连续性。(c) 固定 $\varepsilon > 0$ 和 $K \geq 1$。引理 A.7.8(b) 中取$U_{s,N_{\mathrm{O}}} = \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}$, $m = \lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor$, $\lambda = \varepsilon/\sqrt{N_{\mathrm{O}}}$ 和 $\mathbb{E}[\widetilde{m}^2_{s,N_{\mathrm{O}}}] \leq C^{2/r}$，可得

$$\Pr\left\{\sqrt{N_{\mathrm{O}}} \sup_{t \geq \lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor} \left|\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} \widetilde{m}_{s,N_{\mathrm{O}}}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{4C^{2/r} N_{\mathrm{O}}}{\varepsilon^2 \lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor},$$

当 $N_{\mathrm{O}} \to \infty$ 时收敛于 $4C^{2/r}/(\varepsilon^2 K)$，因为 $N_{\mathrm{O}}/\lfloor KN_{\mathrm{O}} \rfloor \to K^{-1}$。当 $K \to \infty$ 时，此极限趋于零。

(d) 固定 $K \geq 1$和 $\varepsilon > 0$。我们首先证明，在第 N_{O}/K 轮之后，$N_{\mathrm{O}}\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}}$ 与 $\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}})$ 一致接近。根据定义，

$$N_{\mathrm{O}}\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} - \sigma^2(t/N_{\mathrm{O}}) = \frac{N_{\mathrm{O}}}{t}\left(\widehat{V}^{\mathrm{exp}}_{t,N_{\mathrm{O}}} - V^{\mathrm{exp},\star}\right) + \left(\widehat{V}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}} - V^{\mathrm{obs}}\right),$$

且对于 $t \geq N_{\mathrm{O}}/K$，$N_{\mathrm{O}}/t \leq K$。对于所有充分大的 N_{O}，$N_{\mathrm{O}}/K \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}$，因为 $t_{0,N_{\mathrm{O}}}/N_{\mathrm{O}} \to 0$，所以由引理 A.7.7(c) 和引理 A.7.7(b) 可得 $\sup_{t \geq N_{\mathrm{O}}/K} |\widehat{V}^{\mathrm{exp}}_{t,N_{\mathrm{O}}} - V^{\mathrm{exp},\star}| \xrightarrow{p} 0$，而由引理 A.7.7(e) 可得 $\sup_{t \geq t_{0,N_{\mathrm{O}}}} |\widehat{V}^{\mathrm{obs}}_{t,N_{\mathrm{O}}} - V^{\mathrm{obs}}| \xrightarrow{p} 0$。因此

$$\sup_{t \geq N_{\mathrm{O}}/K} \left|N_{\mathrm{O}}\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} - \sigma^2(t/N_{\mathrm{O}})\right| \xrightarrow{p} 0.$$

对于 $t \geq N_{\mathrm{O}}/K$, $\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}}) \in [V^{\mathrm{obs}}, V^{\mathrm{obs}} + KV^{\mathrm{exp},\star}]$。由这一收敛以及假设 *7.1(2)*，满足以下条件的事件的概率趋于 *1*：对每个$t \geq N_{\mathrm{O}}/K$，$N_{\mathrm{O}}\omega_{N_{\mathrm{O}}} \in [c_\omega/2, 2c_\omega]$且$N_{\mathrm{O}}\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}} \in [V^{\mathrm{obs}}/2, V^{\mathrm{obs}} + KV^{\mathrm{exp},\star} + 1]$。在此事件上，$\sqrt{N_{\mathrm{O}}}\, B_{t,N_{\mathrm{O}}} = (N_{\mathrm{O}}\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}})^{1/2} h_\alpha(N_{\mathrm{O}}\omega_{N_{\mathrm{O}}}/(N_{\mathrm{O}}\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}}))$ 和 $\sigma(t/N_{\mathrm{O}}) h_\alpha(c_\omega/\sigma^2(t/N_{\mathrm{O}}))$ 是映射 $(c, v) \mapsto v^{1/2} h_\alpha(c/v)$ 在紧集 $[c_\omega/2, 2c_\omega] \times [V^{\mathrm{obs}}/2, V^{\mathrm{obs}} + KV^{\mathrm{exp},\star} + 1]$ 中两个点处的取值。根据引理 *A.7.4(b)*，该映射在此紧集上是一致连续的。因此，在此事件上，它在这两点处的取值之差至多为其在 $|N_{\mathrm{O}}\omega_{N_{\mathrm{O}}} - c_\omega| + \sup_{t \geq N_{\mathrm{O}}/K} |N_{\mathrm{O}}\widehat{\sigma}^2_{t,N_{\mathrm{O}}}|$ 处的连续模。

$\sigma^2(t/N_O)|$，根据假设 7.1(2) 和前面的公式，它依概率收敛于零。由于该事件的概率趋于 1，因此可得

$$\sup_{t \geq N_O/K} \left| \sqrt{N_O}\, \overline{B}_{t,N_O} - \sigma(t/N_O)\, h_\alpha\left(\frac{c_\omega}{\sigma^2(t/N_O)} \right) \right| \xrightarrow{p} 0,$$

而 (d) 部分中的概率不超过该事件补集的概率加上该上确界超过 ε 的概率，因此趋于零。这证明了 (d) 部分，并完成了引理 A.7.3 的证明。

附录 B 其他模拟结果

附录 B 报告了第 8 节模拟的其他结果。附录 B.1 报告完整的固定时间结果，附录 B.2 报告 95% 时间一致区间的结果以及 90% 区间对目标轮次的敏感性，附录 B.3 则报告对规划值的敏感性。

B.1 固定时间结果

表 B.1 报告了八种实验设计在参与者数量为 1,000、2,500 和 5,000 时，长期平均处理效应估计量的固定时间表现，以及在同一轮次下相对于基准设计的蒙特卡洛方差减少量。在每次重复试验中，所有实验设计均共享观察性样本和用于生成实验的随机数。

实验设计	轮次	Bias	蒙特卡洛标准差	RMSE	Mean SE	覆盖率	蒙特卡罗方差减少
基准设计	1,000	-0.0073	0.5238	0.5237	0.5354	95.3%	—
基准设计	2,500	-0.0078	0.3307	0.3307	0.3411	95.5%	—
基准设计	5,000	-0.0037	0.2313	0.2313	0.2441	96.3%	—
$S^{(1)}$ 联合设计	1,000	-0.0064	0.5394	0.5393	0.5417	95.3%	-6.0%
$S^{(1)}$ 联合设计	2,500	-0.0076	0.3353	0.3353	0.3464	95.0%	-2.8%
$S^{(1)}$ 联合设计	5,000	-0.0047	0.2423	0.2423	0.2466	95.4%	-9.8%
$S^{(2)}$ 联合设计	1,000	-0.0032	0.5072	0.5070	0.5090	95.0%	6.3%
$S^{(2)}$ 联合设计	2,500	-0.0051	0.3129	0.3128	0.3115	94.7%	10.5%
$S^{(2)}$ 联合设计	5,000	-0.0051	0.2161	0.2161	0.2189	95.5%	12.7%
替代平均联合设计	1,000	-0.0073	0.5080	0.5079	0.5138	95.0%	5.9%
替代平均联合设计	2,500	-0.0083	0.3113	0.3113	0.3166	95.0%	11.4%
替代平均联合设计	5,000	-0.0049	0.2180	0.2180	0.2228	95.1%	11.2%
仅 SI 分配设计	1,000	-0.0034	0.5199	0.5197	0.5343	95.2%	1.5%

实验设计	轮次	Bias	蒙特卡洛标准差	RMSE	Mean SE	覆盖率	蒙特卡罗方差减少
仅 SI 分配设计	2,500	-0.0056	0.3292	0.3292	0.3396	96.1%	0.9%
仅 SI 分配设计	5,000	-0.0053	0.2326	0.2326	0.2429	96.4%	-1.1%
SI 仅采样设计	1,000	-0.0077	0.5052	0.5051	0.5104	95.0%	7.0%
SI 仅采样设计	2,500	-0.0085	0.3102	0.3103	0.3134	94.7%	12.0%
SI 仅采样设计	5,000	-0.0036	0.2155	0.2155	0.2205	95.1%	13.2%
SI 联合设计	1,000	-0.0039	0.5048	0.5047	0.5087	95.2%	7.1%
SI 联合设计	2,500	-0.0061	0.3100	0.3100	0.3111	94.4%	12.1%
SI 联合设计	5,000	-0.0055	0.2157	0.2157	0.2185	95.8%	13.1%
分层预言机 SI 联合设计	1,000	-0.0012	0.5010	0.5009	0.5063	95.1%	8.5%
分层预言机 SI 联合设计	2,500	-0.0034	0.3089	0.3089	0.3096	95.1%	12.7%
分层预言机 SI 联合设计	5,000	-0.0041	0.2156	0.2156	0.2178	95.5%	13.1%

表 B.1。 三个轮次下八种实验设计的长期平均处理效应估计值。偏差是相对于真实值 1 测量的。蒙特卡洛标准差是 2,000 个估计值的样本标准差，均值标准误是估计标准误的均值，覆盖率是普通固定时间 95% 区间的覆盖率。蒙特卡罗方差降幅是相对于同一轮次下基准设计的蒙特卡罗方差（蒙特卡洛标准差的平方）的百分比降幅，因此正值表示方差有所减少。

B.2 对目标轮次的敏感性

表 B.2 报告了 95% 时间一致区间的结果。与表 8.3 中的 90% 区间一样，对于每种实验设计，同时覆盖率均超过名义水平。

表 B.3 报告了目标轮次为 1,250、3,750 和 5,000 时的 90%时间一致区间，以及表 8.3 中目标轮次为 2,500 时的结果。对于这些目标轮次，SI 联合设计的有效目标轮次（即在重复试验中，其膨胀因子达到最小值的轮次的中位数）分别为 1,150、3,156 和 4,128。

目标轮次	实验设计	同时覆盖率	检测	Mean stop	中位数 stop	停止样本量四分位距
1,250	基准设计	95.4%	94.9%	2,032.7	1,664.0	949.8–2,819.2
1,250	$S^{(1)}$ 联合设计	95.3%	94.1%	2,059.6	1,722.0	929.0–2,899.2
1,250	$S^{(2)}$ 联合设计	95.0%	97.4%	1,840.0	1,519.0	905.0–2,527.2
1,250	替代平均联合设计	95.5%	97.2%	1,893.9	1,585.0	919.0–2,612.0

目标轮次	实验设计	同时覆盖率	检测	Mean stop	中位数 stop	停止样本量四分位距
1,250	仅 SI 分配设计	96.2%	95.4%	2,045.4	1,686.0	923.0–2,875.2
1,250	SI 仅采样设计	95.7%	97.3%	1,855.7	1,561.0	924.8–2,523.5
1,250	SI 联合设计	95.4%	98.0%	1,828.6	1,516.0	904.0–2,479.0
1,250	分层预言机 SI 联合设计	95.3%	97.5%	1,809.2	1,494.0	902.8–2,436.0
3,750	基准设计	96.5%	95.4%	2,137.3	1,826.0	1,137.5–2,863.2
3,750	$S^{(1)}$ 联合设计	96.0%	94.7%	2,154.1	1,859.0	1,131.0–2,907.2
3,750	$S^{(2)}$ 联合设计	95.6%	97.9%	1,910.9	1,638.5	1,063.0–2,536.5
3,750	替代平均联合设计	96.1%	97.7%	1,952.2	1,693.0	1,081.8–2,609.2
3,750	仅 SI 分配设计	96.7%	95.8%	2,133.4	1,823.0	1,126.2–2,921.8
3,750	SI 仅采样设计	96.1%	97.7%	1,921.9	1,659.5	1,065.8–2,551.2
3,750	SI 联合设计	96.0%	98.1%	1,893.1	1,636.0	1,055.5–2,495.0
3,750	分层预言机 SI 联合设计	95.7%	98.2%	1,868.9	1,606.0	1,052.0–2,443.2
5,000	基准设计	96.9%	95.4%	2,210.2	1,908.5	1,229.0–2,941.5
5,000	$S^{(1)}$ 联合设计	96.8%	94.6%	2,227.6	1,944.0	1,224.5–2,974.2
5,000	$S^{(2)}$ 联合设计	96.1%	98.0%	1,966.8	1,700.5	1,141.8–2,574.2
5,000	替代平均联合设计	96.4%	97.7%	1,999.1	1,750.5	1,147.8–2,653.0
5,000	仅 SI 分配设计	97.1%	95.6%	2,197.1	1,905.5	1,196.5–2,962.2
5,000	SI 仅采样设计	96.5%	97.7%	1,968.9	1,715.0	1,129.0–2,582.5
5,000	SI 联合设计	96.5%	98.1%	1,951.4	1,694.5	1,121.0–2,563.0
5,000	分层预言机 SI 联合设计	96.1%	98.2%	1,924.6	1,688.5	1,119.0–2,497.5

表 B.3. 90%时间一致区间对目标轮次的敏感性。针对每个目标轮次的区间均在相同的保存路径上重新计算。在所有设定中，规划值均为监测起始时间受监测实验的实验方差估计。每个比率的分母均为 2,000；未检测到结果的重复试验在停止样本量汇总中按 5,000 计。

实验性设计	同时覆盖率	检测	平均停止样本量	中位停止样本量	停止样本量四分位距
基准设计	98.3%	92.0%	2,427.7	2,139.5	1,280.8–3,388.0
$S^{(1)}$ 联合设计	97.8%	90.9%	2,478.1	2,216.0	1,282.8–3,508.0
$S^{(2)}$ 联合设计	97.8%	96.0%	2,174.0	1,902.0	1,189.8–2,958.0
替代变量-平均联合设计	98.1%	96.0%	2,202.7	1,909.0	1,197.8–2,952.2
SI 仅分配设计	98.1%	91.7%	2,424.1	2,134.5	1,254.8–3,386.8
SI 仅采样设计	98.0%	96.4%	2,170.1	1,879.5	1,186.0–2,935.2
SI 联合设计	97.9%	96.3%	2,167.4	1,906.0	1,181.5–2,933.2
分层预言机 SI 联合设计	98.0%	96.2%	2,135.1	1,869.0	1,178.5–2,895.8

表 B.2。 95% 时间一致区间的同时覆盖率和检测。同时覆盖率要求从参与者 595 到参与者 5,000 的每个 95% 时间一致区间都包含真实值 1。检测包括在界限处的交叉。均值停止和中位停止是停止样本量，未检测到的重复试验记录为 5,000。停止样本量四分位距报告这些停止样本量的第25和第75百分位数。

B.3 对规划值的敏感性

本小节在每种实验设计的 2,000 条保存路径上重新计算区间，并且只改变调节变量中的规划值 V，保持监测窗口$t = 595$、.....5，000、目标轮次 $t^{\star}_{N_O} = 2$，500，以及保存路径的估计值和方差估计值不变。规划值分别为受监测实验在第200轮和监测起始时间（第595轮）的实验方差估计值，以及每种实验设计下$V^{\exp}$ 的总体值。表 B.4 报告了每个规划值下八种实验设计的同时覆盖率范围，以及 SI 联合设计的结果。同时覆盖率随规划值变化很小。

名义水平	规划值	有效目标	覆盖率范围	覆盖率	检测	Mean stop
90%	第200轮	2,161	95.3%–96.4%	95.6%	98.2%	1,848.3
90%	监测起始时间（轮次595)	2,163	95.2%–96.4%	95.6%	98.2%	1,846.1
90%	总体方差	2,731	95.4%–96.4%	95.8%	98.2%	1,870.0
95%	第200轮	2,161	97.8%–98.3%	97.9%	96.3%	2,169.1
95%	监测起始时间（轮次595)	2,163	97.8%–98.3%	97.9%	96.3%	2,167.4
95%	总体方差	2,731	97.8%–98.4%	98.1%	96.4%	2,180.0

表 B.4. 规划值对时间一致区间的影响。所有比率均基于 2,000 次重复试验计算，覆盖率是在整个监测窗口内的同时覆盖率。覆盖范围给出了八种实验设计中同时覆盖率的最小值和最大值，其他结果列则针对 SI 联合设计。每个规划值均以第 2,500 轮为目标轮次。有效目标是指在重复试验中，SI 联合设计的膨胀因子达到最小值时所在监测窗口轮次的中位数，因此它与 2,500 的差值表明规划值使该轮次偏离目标轮次的程度。检测是指下端点首次在 5,000 名参与者时超过零。

附录 C 其他实证结果

附录 C 报告了全部 20 个处理前变量的排名，以及第9节中实验设计的三项敏感性检验。

C.1 所有 20 个处理前变量的排名

表 C.1 报告了 20 个处理前变量在联合设计下相对于基准设计的插件准则减少量。这些变量根据计算实验设计的各个划分上的均值进行排名（补充材料 1 第 S1.2.2 节的步骤 3），最后一列给出了七个层下的排名。储蓄存款和正式借款在少数家庭中非零，因此在某些划分中，实验样本的一个臂在非零值层中没有家庭。在正式借款的 655 个划分中，有 29 个划分里的所有观察家庭的正式借款均为零，此时该协变量只形成一个层。无论层数如何，家庭资产指数、资产指数和人均月非食品消费的排名分别为第一、第二和第三。

Rank	变量	划分	均值降-幅	第25百分位数	中位数	第75百分位数	排名与七层
1	资产 _hh_指数 _bsl	1,000	8.23%	3.21%	4.91%	9.16%	1
2	资产 _指数 _bsl	1,000	7.97%	2.82%	4.26%	8.84%	2
3	非食品月度个人消费基准生活水平	1,000	7.72%	3.32%	4.71%	8.33%	3
4	总计月度个人消费基准生活水平	1,000	7.15%	3.21%	4.60%	7.43%	4
5	粮食安全指数	990	6.59%	2.46%	3.70%	6.79%	7

Rank	变量	划分	均值降幅	第 25 百分位数	中位数	第 75 百分位数	排名与七个层
6	经济感知（基线）	1,000	6.49%	2.66%	3.97%	6.73%	6
7	人均月食品消费（基线）	1,000	6.48%	2.95%	4.27%	6.46%	5
8	人均月耐用品消费（基线）	1,000	5.84%	2.99%	4.35%	6.54%	9
9	资产生产指数 bsl	995	5.75%	1.82%	2.97%	6.29%	8
10	loan_非正式金额 _bsl	991	4.92%	2.23%	3.38%	5.32%	11
11	loan_总金额 _bsl	1,000	4.75%	1.94%	2.90%	5.09%	10
12	基线食物充足情况	1,000	3.87%	0.81%	1.64%	4.39%	12
13	基线成年人跳过进餐情况	1,000	3.15%	0.65%	1.44%	3.57%	13
14	基线儿童旷课	1,000	3.09%	1.17%	2.04%	3.84%	14
15	基线全天	1,000	2.95%	0.73%	1.51%	3.34%	15
16	fs_两餐 _bsl	1,000	1.90%	0.67%	1.30%	2.49%	16
17	储蓄存款金额 bsl	745	1.37%	0.61%	1.08%	1.83%	17
18	iagri_month_bsl	997	1.30%	0.51%	0.96%	1.66%	18
19	ranimals _月份 _bsl	1,000	1.22%	0.61%	1.03%	1.60%	19
20	loan_formalamт _bsl	655	0.89%	0.36%	0.64%	1.21%	20

表 C.1. 联合设计下全部 20 个处理前变量的插件准则减少量。划分数表示计算实验设计所用的 1,000 次划分中的划分次数；均值和四分位数均基于这些划分计算。

C.2 敏感性分析

本小节报告了对第 9.3 节实验设计的三项检验。首先，每个层中的实验家庭数量都很少，因此单个家庭可能会主导该层的估计方差。对于每个层，我们排除了以下划分：在这些划分中，某个家庭的残差平方占该层任一组残差平方的比例超过 60%。第 9.3 节报告的两项相对于基准设计的差异依然存在。联合设计对家庭资产指数的最高层进行更高比例的抽样，其抽样密度比的中位数为 1.20，且在剩余划分中的 98% 里该比值大于 1；此外，联合设计在按人均月非食品消费划分的第二层中分配处理，其中位概率为 0.60，且在剩余划分中的 97% 里该概率大于 1/2。

其次，图 C.1 展示了七个层下的图 9.1，联合设计与基准设计的差异仍出现在相同位置。它对家庭资产指数的最高层进行更密集的抽样，抽样密度比的中位数为 1.28，且在 97% 的划分中大于 1；对于人均月非食品消费，其最大的中位数分配概率为 0.58，出现在第三层，该层涵盖了五层划分中的第二层的一部分。第三，在七个层的情况下，对于两种协变量，按插件准则的平均降幅衡量， 仅抽样设计都大于仅分配设计：家庭资产

指数为 6.43% 对 4.84%，人均月非食品消费为 5.68% 对 3.48%。因此，表 9.2 中这两种设计在人均月非食品消费方面的排序取决于层数。

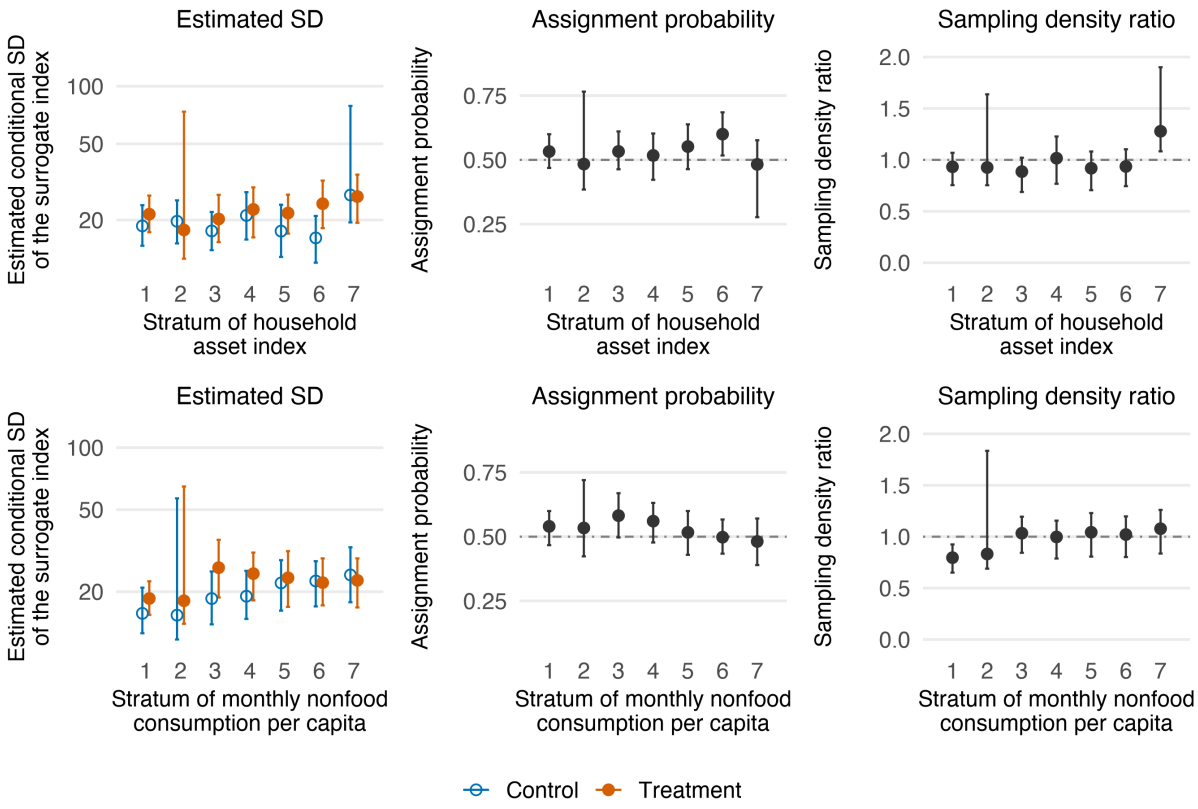


图 C.1. 七层联合设计的条件标准差、分配概率和抽样密度比估计值。各面板与图 9.1 相对应，其中各层由观察性样本中每个协变量的七个等概率区间构成。

附录 D 补充材料

本附录介绍随本文一并提供的两份补充材料，相关材料将在 https://kkawato.github.io/ 上提供。

补充材料 1（实现说明）介绍第 8 节和第 9 节的数值结果的计算方法。对于第 8 节中的模拟，该材料说明了算法 5.1 每一步所使用的估计量、实验设计和得分。对于第 9 节中的示例，该材料列出了毕业数据中的变量，并介绍了如何在每个数据拆分中估计实验设计。最后附有用于模拟和示例的 R 代码。

补充材料 2（补充理论结果）将定理 3.1 的效率界与Chen 和 Ritzwoller (2023) 的合并样本界联系起来。此外，该材料还针对正确设定的有限维模型，给出了满足假设 6.2、6.4、6.6、7.3 和 7.5 的充分条件。