arXiv:2611.30620v1 [econ.TH] 23 Nov 2026

具有社会类型的大型经济*

Wei He† Yeneng Sun‡ Bin Wu§ Nicholas C. Yannelis¶

本版本：2026年11月24日

摘要

本文为具有社会外部性的大型经济构建了一种新的一般均衡框架，其中个体既有姓名，也有社会类型。社会类型界定了外部性发挥作用所依托的参照群体（社区、同伴或地位阶层），并构成市场结构的基本要素。我们证明，每个可容许的经济存在竞争均衡，当且仅当社会匿名性成立。该条件要求，可观测社会类型不能在任何非可忽略的子经济中完全识别个体。该框架可扩展至具有不完备偏好、不可分物品和生产的广义大经济，因此能够涵盖偏好和消费集的非凸性。我们的证明以条件凸化取代了标准的总体凸化论证。应用包括同伴效应、社会比较，以及基于局部社会基准的风险分担。

关键词：大型经济；外部性；社会类型；竞争均衡；社会匿名性

*本文早期版本曾在以下会议上宣读：2017年6月于葡萄牙法鲁举行的第17届SAET会议；2017年6月于中国香港举行的2017年计量经济学会亚洲会议；2019年5月于中国深圳举行的第4届北大-新加坡国立大学量化金融与经济学年度国际会议；2019年9月于中国南京举行的2019年南京博弈论与经济行为国际会议；2023年9月于中国昆明举行的国家自然科学基金委员会经济科学青年科学基金项目研讨会；2024年8月于中国北京举行的第7届博弈论学会世界大会。我们感谢这些会议的与会者提出宝贵意见。Wei He 感谢香港研究资助局（14506325）和国家自然科学基金委员会（编号：72122023）的经费支持。Bin Wu 感谢国家自然科学基金委员会（编号：72203154和72450003）的资助。部分研究成果的早期版本见 Bin Wu 博士论文第6章（Wu，2019）。

†香港中文大学经济学系，香港新界沙田。电子邮箱：hewei@cuhk.edu.hk。

‡新加坡国立大学经济学与数学系，新加坡 119076。电子邮箱：ynsun@nus.edu.sg。§首都经济贸易大学国际经济与管理学院，中国北京丰台区，邮编 100070。电子邮箱：bwu.econ@gmail.com。

¶爱荷华大学经济学系，美国爱荷华州爱荷华城，邮编 IA 52242-1994。电子邮箱：nicholasyannelis@gmail.com。

1 引言

完全竞争是《经济理论》中的核心思想之一。它不仅假设个体接受既定价格，也体现了一种更深层的构想：市场如何协调一致地聚合分散的决策。自Aumann (1964年,1966)以来，大型经济的连续统模型已成为完全竞争的经典表述：个体选择是分散进行的，价格协调稀缺性，而市场配置则由对一个由可忽略代理人组成的社会进行聚合而形成。

然而，个体不仅消费商品；他们也生活在社区中、就读于学校、观察同伴、比较地位，并对他人的行为作出反应。例如，学生的教育投资可能取决于同学的努力程度；代理人的住房或耐用品选择可能受到其所在社区平均生活标准的影响；居民也可能会将自身消费与向往群体的消费进行比较。这些外部性是社会中市场的常见特征，文献中对此已有充分记载。[1]

在大规模社会中，假设代理人能够观察完整的配置或与每一个个体进行比较，是不切实际的。社会比较通常通过与具有社会意义的类别相关联的基准来实现。这一做法体现在公共统计数据中：它们报告地区、职业、地方或其他群体层面的各种结果。[2] 这些汇总指标可作为以社会类别为条件的总量基准。我们将定义此类类别的信息称为代理人的社会类型。它可以代表位置、社区、学校、职业、同届群体、财富群体、地位阶层、网络位置，或若干属性的组合。一旦引入这类社会力量，外部性的组织方式便成为经济环境的一部分。模型不仅必须说明哪些人的选择会产生影响，还必须说明这些选择在哪个层面被观察、汇总，并与收益相关联。因此，社会类型结构应被视为市场的一项原始要素，与商品、禀赋和偏好同等重要。

这一观察引出了一个自然的问题：如何对存在外部性的 大型经济进行建模？这个问题尤其棘手，因为外部性给均衡存在性带来了新的困难。价格仍然协调稀缺性，个体仍然可以忽略不计，但配置也创造了个体据以评估自身选择的社会环境。同伴行为、社区标准、局部拥堵，

[1]研究社会互动和同伴效应下经济环境的文献十分丰富。直观地说，个体从某项活动中获得的收益可能取决于其同伴的行为；例如，参见Manski (1993年)、Brock和Durlauf (2001)以及Blume等 (2011）。在许多情境下，个体可能表现出“攀比消费”偏好，即对来自其参照群体的社会压力作出反应；例如，参见Duesenberry (1949)、Abel (1990年)、Ljungqvist和Uhlig (2000)以及Hopkins和Kornienko (2004）。[2]相关例子包括地区人均国内生产总值、经合组织区域福祉指标、联合国开发计划署人类发展指数、按职业和地区划分的工资估计（例如美国劳工统计局的职业就业与工资统计），以及联邦住房金融局房价指数。这些测度体现了将复杂的个体结果汇总到具有社会意义的层面这一普遍做法。

以及地位比较，都是由市场配置本身内生生成的。个体针对这些社会对象进行优化，而这些社会对象又必须由个体所选择的配置再现。因此，均衡不仅要求总需求与总供给相一致，还要求进入个体偏好的、具有社会意义的总量相一致。

然而，一旦存在外部性，这一看似自然的一致性要求便立即面临困难。在没有外部性的典型连续统经济中（Aumann（1966），其主要优势之一在于，可以不对个体偏好作凸性假设。正如我们在第 2 节所证明的，在存在外部性时，如果没有凸性，均衡可能并不存在。在适当的正则性条件下，施加凸偏好可以恢复均衡存在性。但这样做将牺牲连续统方法最受推崇的特征之一，即在严格且去中心化的框架中处理非凸偏好的能力。

除偏好非凸性之外，另一个独立且重要的内在非凸性来源是消费集本身。当住房、汽车或学位等商品必须以不可分的整数数量消费时，消费集本质上是非凸的。如果不改变经济问题，就无法将这一特征假定为不存在。用原集合的凸包替代原集合会引入分数消费，而这并不能为每个个体分配一个实际的不可分商品商品束。允许彩票则会改变所研究的配置。事实上，在不施加进一步限制的情况下，即使在具有外部性的有限经济中，面对一般偏好和非凸消费集，均衡存在性问题仍基本上悬而未决。[3]

本文为具有外部性的大型经济建立了一个竞争性均衡框架，直接应对这些存在性问题。我们区分代理人的姓名与其社会类型。姓名用于识别个人，而类型则记录个人据以进行社会定位的属性。代理人所面临的外部性由在社会类型层面汇总的配置产生。这一表述捕捉了这样一种理念：在大规模社会中，人们通常会对群体的行为作出反应，而不是对每一个人的行为分别作出反应。我们的模型涵盖了现有的若干大型经济和完全竞争框架。[4]

我们通过第2节中的示例说明社会信息的作用。个体由位置和教育程度这两个特征来刻画。这两个特征分别影响社会比较：个体会将自己的消费与位置和教育程度均不高于自身的个体的累计消费进行比较。当记录的是精确位置时，个体优化要求个体专门生产两种商品中的一种，而比较基准的一致性和市场出清则要求每个下矩形中的消费都保持均衡。这些要求无法调和，因此不存在均衡。现在，将精确

[3]关于有限代理人经济中均衡存在性的系统性处理，参见Florenzano (2003)。

[4]详细讨论请参见备注 2。

位置替换为地理社区，同时保留教育程度。这样，同一社区中教育程度相同的个体便具有相同的社会类型，但仍是彼此独立的个体。他们可以消费不同的商品，同时维持社区层面基准的均衡。这一变化使均衡得以恢复，而无需改变禀赋或效用设定。

为体现代理人空间与社会类型所传递的信息在丰富程度上的差异，我们要求满足社会匿名性：可观测社会类型永远无法穷尽个体身份。[5] 因此，具有外部性的大经济包含两个层次的匿名性。个体代理人对市场总量的影响微不足道，而社会匿名性则为不同的个体选择留出了足够空间，使其在给定社会类型的条件下可以对应相同的总量。我们的首个主要结果根据这一思路给出了精确刻画。定理1表明，大型交换经济存在均衡，当且仅当社会匿名性成立。充分性方向表明，即使个体需求是非凸的，或受到外部性的影响，经济也可以对具有相同社会类型的个体的选择进行平均，从而生成所需的社会总量。也就是说，可以在给定社会类型的条件下实现凸化。必要性方向则意味着，当社会类型结构相对于代理人空间过于丰富时，可以构造出一个不存在均衡的经济。因此，社会匿名性是均衡存在所需的最小结构。

该定理对一个基本问题给出了结构性答案：完全竞争何时能与社会互动相容？其核心观点是，外部性需要聚合，而非识别。当社会类型函数满足社会匿名性时，竞争性市场能够容纳社会比较、同伴效应和局部互动。如果每个代理人都能观察到配置的细节，竞争性市场则可能无法实现这一点；在大经济中，这种要求或许过于苛刻。

我们的第二个主要结果将这一刻画扩展到偏好不完备、存在生产且同时包含可分商品和不可分物品的广义大经济。这些特征对于应用十分重要。一些具有重要经济意义的选择是离散的，例如住房、汽车、耐用品设施、技术采用、使用权或地方基础设施。生产决定总资源约束，即使某些商品的初始供给为零，也可能使其变得可供使用。偏好可能是不完备的，也可能无法用效用函数表示。该框架还允许存在基于消费连续变换的外部性，包括有界暴露度量以及针对不可分物品的采用指标。[6] 我们的广义模型同时包含上文讨论的两种自然的非凸性：偏好可能导致需求非凸，而不可分物品会使可行消费集合本身非凸。均衡配置必须向个人分配实际的整数商品束，同时再现相关的

[5]其基础是由 He、Sun 和 Sun (2017) 提出的处处不等价条件；参见定义 2。[6]Rauh (2003) 以及 Yu 和 Zhu(2005) 研究了收益取决于汇总统计量或非线性变换的汇总统计量的大型博弈。注释 6给出了本文中相应的推广。

外部性。尽管存在这些困难，我们的定理2 仍为这一更广泛的类别提供了精确的均衡存在性充要刻画，该类别同时允许非凸偏好和内在非凸的消费集合。

在方法论上，我们提出了超越现有方法的新论证。我们的证明以条件凸化论证取代了标准的总体凸化论证。在经典的连续统模型中，连续统代理人在整个经济体层面使需求凸化。存在社会外部性时，配置还必须再现以社会类型为条件的需求。社会匿名性是满足条件聚合所需凸性与紧性性质的条件。因此，该证明将社会匿名性这一经济学概念与 He 和 Sun（2018）所发展的对应的条件期望理论联系起来。关于必要性，我们给出了一个尖锐结果：只要存在一个子经济，其中社会信息涵盖了个体信息，就可以构造出一个没有任何均衡的经济，同时保持商品数量不变。

我们通过将结果应用于同伴效应、社会比较和风险分担，展示了这些结果的实用性。在同伴效应经济中，教育投资或培训取决于同学、邻居、同届群体、职业群体或其他具有社会意义的群体的投资。[7] 同伴基准由均衡配置本身决定。在社会比较经济中，个体会对参照群体的消费标准作出反应，这与“攀比消费”模型相同。[8] 最后，家庭可以交易状态依存索取权，同时在重叠邻域中将消费与内生标准进行比较。[9] 即使这些比较导致对状态依赖型消费计划的偏好呈非凸，均衡仍然存在。在这三种应用中，进入偏好的社会对象是内生的，而界定参照群体的类型则是经济的原始要素。

相关文献。 本文对大型经济的一般均衡理论作出了贡献。自从 Aumann（1964年、1966）以来，连续统模型一直是完全竞争的标准框架。 Hildenbrand(1970、1974）发展了这一方法的生产和分配基础。 Mas-Colell（1977）以及 Khan and Yamazaki(1981）分析了包含不可分物品的大型经济。[10] Schmeidler（1969）研究了不完备偏好下的竞争均衡。本文保留了大型经济的表述方式，但改变了聚合问题。在经典模型中，只需要

[7]例如，参见Manski (1993)、Brock and Durlauf (2001)、Sacerdote (2001)、Calv´o-Armengol、Patacchini和Zenou (2009)以及Blume et al. (2011)。[8]例如，参见Duesenberry (1949)、Abel (1990)、Ljungqvist和Uhlig (2000)以及Hopkins and Kornienko (2004)。[9]例如，参见Arrow (1964)、Wilson (1968)、Townsend (1994)和Abel (1990)。[10]关于具有不可分物品、满足替代性及相关条件的有限市场，已有相关文献；例如参见Kelso and Crawford (1982)、Gul and Stacchetti (1999)以及Sun and Yang (2006, 2009)。拟市场方法研究替代性的配置与定价制度；参见Gul, Pesendorfer and Zhang (2024)以及Gul and Pesendorfer (2026)。这些研究通常不考虑内生消费外部性。

在整个经济体层面聚合个人需求。在我们的模型中，配置还会生成进入偏好的社会环境，而相关的聚合则根据社会类型对需求进行凸化。[11]

本文与具有外部性的大型经济相关文献密切相关。Hammond、Kaneko 和 Wooders (1989年) 研究具有有限联盟和广泛外部性的连续统经济，而 Hammond(1999年) 则发展了相关的核心等价结果。Noguchi (2005) 给出了凸偏好条件下的存在性结果。Cornet 和 Topuzu(2005) 研究具有 Lyapunov 性质的外部性映射，包括有限个固定参考联盟的情形。Noguchi 和 Zame (2006) 采用分布方法，取消了偏好的凸性假设。[12] 他们分析了具有外部性、生产和不可分物品的竞争性市场，并通过实例说明均衡不存在问题。Anderson 等人最近发表的论文 Anderson 等人(2026) 研究凸偏好，并证明了具有劣品、生产和全面外部性的大型竞争性市场中均衡的存在性。我们研究通过一般社会类型组织的外部性，并指出社会匿名性是均衡存在的精确条件。

本文也与研究外部性下福利与政策的一般均衡文献相关。其中一条研究脉络探讨外部性何时会使福利定理失效、得以保留或重新成立；参见 Ledyard（1971）、Osana（1972）、Parks（1991）、Arrow 和 Dasgupta（2009），以及 Li、Zenou 和 Zhou（2026）。另一条脉络将外部性视为缺失市场，并研究能否通过针对外部效应的阿罗式价格或林达尔价格实现效率的分散化；参见 Arrow（1969）、Foley（1970）、Roberts（1973）、Khan 和 Vohra（1985），以及 Anderson、Duanmu 和 Li（2026）。近期，Anderson 和 Duanmu（2025）以及 Anderson 等人（2026）研究了阿罗–德布鲁环境中的税收、配额、总量管制与交易及相关政策工具。在探讨竞争性配置是否有效率之前，我们先问：什么样的社会结构才能使竞争性配置成为可能？我们的回答是，大型市场不仅要求价格接受行为具有足够的匿名性，也要求外部性发挥作用所依赖的社会信息具有足够的匿名性。

本文其余部分的组织如下。第2 节通过一个社会比较经济的示例，说明社会信息的丰富程度如何决定均衡存在性。第3 节构建具有社会类型的大规模交换经济模型，并证明基于社会匿名性的充要刻画。该节还讨论其在同伴效应、社会比较和风险分担中的应用。第4 节将这一结果扩展到具有不完备偏好的广义大经济、

[11] McLean 和 Postlewaite （2002、2004）研究了不对称信息经济中的信息规模概念。 Sun 和 Yannelis （2007）研究了一种连续统经济，其中每个代理人的私人信息只会影响一小群个体。这些论文与我们的研究有一个共同见解：在经济学上有意义的可忽略性概念，取决于个体影响他人的渠道。[12]正如 Sun、Sun 和 Yu （2020）所讨论的，当代理人空间被建模为经典勒贝格单位区间时，大经济中的均衡分布可能无法由任何个体均衡配置所诱导。此外，他们还证明，均衡分布与一个（类型对称的）随机化均衡唯一对应。

不可分物品和生产。第5 节作出结论。证明汇集于附录和补充附录中。

2 一个说明性示例

本节介绍一个具有消费外部性的简单交换经济。我们首先描述一种不存在均衡的外部性结构，然后说明如何通过对同一外部性进行更粗略的组织来恢复均衡存在性。

社会比较通常涉及不止一个特征。[13] 家庭可能会将自己的消费与特定地理区域内人们的消费以及给定的教育程度进行比较。这两个特征不必合并为单一排名。在下面的示例中，位置和教育程度直接进入比较。两种情形的区别在于，地理信息所识别的是精确位置，还是仅识别更广泛的社区。

每个个体由一对 (v, w) 标记。第一个坐标 $v \in V = [0,1]$ 表示她在地理轴上的位置，第二个坐标 $w \in W = [0,1]$ 表示她的教育程度，该特征被建模为连续特征，数值越大表示受教育程度越高。人口为 $I = V \times W$，赋予完备的 Lebesgue σ-代数 $\mathcal{I}$ 和 Lebesgue 概率测度 λ。社会类型空间为 $T = [0,1]^2$。社会类型函数 $\alpha : I \to T$ 记录比较中使用的位置和教育信息。在 T 上的序关系按坐标逐一比较：当个体所记录的位置和教育程度都弱低于另一人的相应信息时，该比较包含这些个体。

每个代理人都拥有两种可分商品各一单位的禀赋，$e(v, w) = (1, 1)$。不存在生产。消费配置是一个可测且可积的函数$f = (f^1, f^2) : I \to \mathbb{R}^2_+$。对于 $k = 1, 2$，定义社会类型 s下的比较指标如下

$$\eta_k(s; f) = \int_{\{(t,j) \in I : \alpha(t,j) \leq s\}} f^k(t, j)\, d\lambda(t, j).$$

因此，η_k 记录了比较群体中商品 k 的累计消费。它是一个总量，而不是平均值，并且在 s的每个坐标上均不递减。

代理人（v, w）从商品束（x^1, x^2）中获得的效用为

$$u_{(v,w)}(x^1, x^2; f) = \left(\frac{x^1}{1 + \eta_1(\alpha(v, w); f)} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{x^2}{1 + \eta_2(\alpha(v, w); f)} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

比较群体中某种商品的消费越多，自身消费该商品的边际价值就越低。对于固定的比较指标，效用连续且对每种商品严格递增、严格凸。因此，个体需求倾向于

[13]例如，经合组织的维度包括收入与财富、工作与工作质量、住房、健康、知识与技能、环境质量、工作与生活平衡、社会联系、公民参与、安全以及主观幸福感。

专业化：代理人将全部收入用于购买两种商品中的一种。

情形 I： 基于精确位置和教育程度的比较。

令 $\alpha(v,w) = (v,w)$。代理人 (v,w) 的比较群体是下矩形$[0,v]\times[0,w]$。因此

$$\eta_k(\alpha(v,w);f) = \int_0^v \int_0^w f^k(t,j)\,dj\,dt, \qquad k=1,2.$$

个人社会类型的两个坐标都被精确观测到。

事实1。 具有 $\alpha(v,w) = (v,w)$ 的经济没有均衡。

要看出其中的矛盾，假设 (f,p) 是一个均衡。严格单调性要求$p^1, p^2 > 0$；将 $p^1 + p^2 = 1$ 归一化。每个代理人的收入都是一。于是，严格凸性意味着几乎每个代理人选择 $(1/p^1,0)$ 或 $(0,1/p^2)$。将全部收入用于购买商品 k 时，效用为

$$\left\{p^k[1+\eta_k(\alpha(v,w);f)]\right\}^{-\frac{3}{2}}.$$

因此，当第一种商品的价格经比较指标调整后较低时，代理人选择第一种商品；当反向不等式成立时，则选择第二种商品。

写出 $F_k(v,w) = \eta_k(\alpha(v,w);\, f)$，并考虑两者之差

$$H(v,w) = p^1[1+F_1(v,w)] - p^2[1+F_2(v,w)].$$

结合 $c = p^1 - p^2$ 和 $q = p^1 f^1 - p^2 f^2$，可得

$$H(v,w) = c + \int_0^v \int_0^w q(t,j)\,dj\,dt.$$

几乎每个代理人都会把全部收入用于购买一种商品，因此 $q = 1$ 如果她购买商品 1，且 $q = -1$ 如果她购买商品 2。当 $H(v,w) > 0$时，她严格偏好只购买商品 2；当 $H(v,w) < 0$时，她严格偏好只购买商品 1。因此 $q = -1$ 在 $\{H > 0\}$ 上几乎处处成立，且 $q = 1$ 在 $\{H < 0\}$上几乎处处成立。附录 1 中的引理 A.1 于是给出

$$|H(v,w)| \le |p^1 - p^2| \qquad \text{for every } (v,w) \in I.$$

市场出清要求 $F_1(1,1) = F_2(1,1) = 1$。因此，在正方形的上角点处， $H(1,1) = 2(p^1 - p^2)$。该界限迫使 $p^1 = p^2$。它还会迫使 $H(v,w) = 0$ 在每个下矩形上成立，因此对于每个 (v,w)，都有 $F_1(v,w) = F_2(v,w)$。对这些累积积分取混合偏导数，可得 $f^1 = f^2$几乎处处成立。这与每个代理人都必须专门生产一种商品的要求相矛盾。均衡不存在。

尽管人口是无原子的，但均衡要求几乎每个代理人消费等量的两种商品。这与个体最优性不相容，

因为个体最优性要求几乎每个代理人将其全部收入用于一种商品。

情形 II：社区层面比较。 现在假设个体不根据精确位置进行比较。将 V 划分为有限个地理社区，其端点为 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_M = 1$。记为 $C_m = [a_{m-1}, a_m)$，其中最后一个区间包含 1。对于 $v \in C_m$，令

$$\alpha_M(v, w) = \left(\frac{a_{m-1} + a_m}{2}, w \right).$$

该指标以其所在社区的中点替代个体的位置，同时保留其教育程度。

将相同的效用和比较公式用于 α_M，以替代 α。教育程度为 w 且位于社区 m 的代理人，会将消费与位于社区 1、……、m 且教育程度不超过 w 的个体进行比较。因此，她的比较指标为

$$\eta_k(\alpha_M(v, w); f) = \int_0^{a_m} \int_0^{w} f^k(t, j)\, dj\, dt, \qquad k = 1, 2.$$

参照群体现在包括整个地理社区，而不再止于个体自身的位置。

事实 2。 对于每个有限社区划分，采用社区层面比较的经济都存在均衡。

取 $(p^1, p^2) = (1/2, 1/2)$。在每个社区内，将第一种商品分配给其位置的前一半，将第二种商品分配给其余一半：

$$f(v, w) = \begin{cases} (2, 0), & a_{m-1} \le v < (a_{m-1} + a_m)/2, \\ (0, 2), & (a_{m-1} + a_m)/2 \le v < a_m, \end{cases} \qquad v \in C_m.$$

对于 $v = 1$，设 $f(1, w) = (0, 2)$。在每个教育程度层级上，每个社区的两种商品的平均消费相同。因此，

$$\eta_1(\alpha_M(v, w); f) = \eta_2(\alpha_M(v, w); f) = a_m w.$$

在这些价格下，只购买商品 1 和只购买商品 2 都是最优选择。拟议配置为每位代理人分配其中一种商品束，并使两个市场都出清。

这一对比凸显了社会类型函数相对于代理人空间所发挥的作用。在情形 I 中，代理人的类型准确记录两个坐标。在情形 II 中，同一社区内教育程度相同的个体具有相同的社会类型，而其个体位置仍各不相同。他们可以获得不同的商品束，同时不改变社区层面的比较指标。这种可能性使个体

专业化与均衡的社会总量得以协调。在下一节中，我们将把这一要求形式化为社会匿名性。

3 大型交换经济

本节介绍具有外部性的大型交换经济模型。该经济由一个连续统代理人和 l 种可分商品组成。每个代理人都拥有一个初始禀赋束。我们通过引入社会类型扩展标准模型，社会类型可以表示位置、职业或其他可观测特征。代理人的收益取决于其消费束以及按社会类型汇总的配置。正如上一节所示，均衡可能不存在。我们将证明，在满足以下假设的经济中，社会匿名性刻画了均衡存在性。

3.1 设置

形式上，大型交换经济如下所述。

1. 代理人空间是一个无原子完备概率空间（$I, \mathcal{I}, \lambda$）。2. 有 $l \geq 1$ 种可分商品，商品空间为 $\mathbb{R}^l_+$。禀赋映射$e:\ I \to \mathbb{R}^l_+$ 可积，并满足 $\int_I e\, d\lambda \gg 0$。[14]3. 配置是一个 $\mathcal{I}$-可测的可积函数 $f : I \to \mathbb{R}^l_+$。4. 令 T 为可能的社会类型空间。它是一个完备、可分、可度量化空间，并赋予其博雷尔 σ-代数 $\mathcal{B}(T)$。可测社会类型函数$\alpha : I \to T$ 为每个代理人 i指定一个类型 $\alpha(i)$。5. 令 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}$ 表示由社会类型函数 α生成的 σ-代数。由于 T 可分且可度量化，该代数是可数生成的。给定一个配置f，其外部性是关于 α的条件期望，记为 $\mathbb{E}(f \mid \alpha)$。[15]令 $\Gamma = L_1((I, \mathcal{G}, \lambda); \mathbb{R}^l_+)$表示可能的外部性集合，并赋予其从 $L_1((I, \mathcal{G}, \lambda); \mathbb{R}^l)$继承的弱拓扑。本文中，$\Gamma$ 中的有界序列是指在 L_1 范数下有界的序列。[16]6. 每个代理人 i 都有一个效用函数 $u_i:\ \mathbb{R}^l_+ \times \Gamma \to \mathbb{R}$，该函数关于消费和外部性联合连续。对于每个$(x, \gamma)$，映射 $i \mapsto u_i(x, \gamma)$是 $\mathcal{I}$-可测的。对于

[14]对于向量 x 和 y，$x \gg y$ 表示 $x^j > y^j$ 在每个坐标上成立，而 $x \geq y$ 表示 $x^j \geq y^j$ 在每个坐标上成立。对于有限维向量 x，记作 $\|x\|_1 = \sum_j |x^j|$。[15]条件期望和下文所有 L_1 函数均视为在几乎处处相等的意义下相同。[16]对于 $\gamma \in L_1((I,\ \mathcal{G},\ \lambda); \mathbb{R}^l)$，

$$\|\gamma\|_{L_1} := \int_I \|\gamma(i)\|_1 \, d\lambda(i) = \sum_{j=1}^{l} \int_I |\gamma^j(i)| \, d\lambda(i).$$

每个 i 和 γ，$u_i(\cdot,\ \gamma)$ 关于自身消费严格单调。[17] 给定一个配置f，代理人 i的收益为 $u_i(f(i)\ \mathbb{E}(f \mid \alpha))$。

7. 令 $\wp$ 为 $\mathbb{R}^l_+$ 上连续函数的空间，并赋予紧开拓扑；令 $\wp_+$ 为其严格单调函数子集。对于每个 $\gamma \in \Gamma$，定义 $\Phi_\gamma(i) = u_i(\cdot,\ \gamma)$，并令 $\mu_\gamma = \lambda \circ \Phi_\gamma^{-1}$ 为 $\wp$ 上的诱导分布。(6) 中的可测性使 Φ_γ 可测。

对于每个有界序列 $\{\gamma_n\}_{n\geq 1} \subset \Gamma$，序列 $\{\mu_{\gamma_n}\}_{n\geq 1}$ 一致紧：对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个紧集 $K_\epsilon \subset \wp_+$，使得对于每个 n，$\mu_{\gamma_n}(K_\epsilon) \geq 1-\epsilon$。

大经济是一个对 $(\mathcal{E},\ \alpha)$，其中 $\mathcal{E}(i) = (u_i,\ e(i))$。

注释 1. 个体效用可能受到他人消费的影响，这种影响源于地位追求、从众主义或利他主义。尽管如此，认为大经济中的个体会对每个人的具体消费束作出反应，或许并不合理，因为这会对个体提出不切实际的要求，或造成认知负担。我们的表述体现了这样一种观点：个体会通过可观察类型对他人进行分类，例如社会地位、职业或地理位置。条件期望 $\mathbb{E}(f \mid \alpha)$ 概括了这些类型层面的消费。个体可能会对若干社会类型集合上的消费平均值，或对不同类型间的加权平均值作出反应，而不必分别对每个个体的消费作出反应。

注 2. 个体效用可能随社会环境而变化。对于任意一个范数有界的环境序列，条件（7）允许我们选取一个由严格递增效用函数构成的紧族，使得每种环境中几乎所有代理人的效用函数都属于该族。例外者的比例可以任意小，而这些代理人可能因环境而异。若干常见情形都满足这一条件。

(a) 它涵盖了 *Aumann (1964年、1966)* 的标准大交换经济，其中u_i 独立于 γ。

(b) 更一般地，设 $u_i(x,\gamma) = v_i(x, z(\gamma))$，其中 z 是连续的，取值于紧致度量空间 Z，并且对于每个 v_i，其关于 (x,z) 是连续的，且对x 严格单调。另假设，对于每个 (x,z)，$i \mapsto v_i(x,z)$ 是可测的。覆盖除少数个体外所有个体的函数 v_i 的一个紧族，会产生其消费截面的一个紧族，并且对 $z \in Z$ 一致。若当 γ 取遍一个范数有界集时，$z(\gamma)$ 取值于一个紧集，同样的论证也适用。这包括由有限个群体总量描述的外部性，例如

[17]也就是说，$x \geq y$ 和 $x \neq y$ 蕴含 $u_i\ (x,\ \gamma)\ > u_i\ (y,\ \gamma)$。[18]该空间上的紧开拓扑是紧消费集上一致收敛的拓扑。

，对于一个 $\mathcal{G}$-可测划分 $I_1, \ldots, I_n$，如 *Hammond、Kaneko 和 Wooders (1989年)* 中所述；另见 *Hammond (1999年)*。

(c) 假设个体具有可测偏好参数 $\theta_i \in \Theta$，其中 Θ 是紧的，并且外部性通过指标 $z_i(\gamma) \in Z$ 进入，其中 Z 是紧的。如果 $u_i(x,\gamma) = v(x,\theta_i,z_i(\gamma))$，且对于每个 (θ,z)，v 关于 x 连续且严格单调，则

$$K = \{v(\cdot,\theta,z) : (\theta,z) \in \Theta \times Z\}$$

是 的紧致子集 $\wp_+$。因此，（7）成立。与（*b*）中一样，指标的紧集可能取决于 $\|\gamma\|_{L_1}$ 的界。该表述适用于按照 *Hildenbrand(1974)* 对个体特征的描述。

对于存在性结果，一致紧性可以由以下序数条件替代。令 q^j 为第 j 个坐标单位向量。对于每个 M、$R>0$ 和 $\epsilon>0$，假设存在 $\eta \in (0,1)$，使得对于每个满足 $\|\gamma\|_{L_1} \le M$ 的 γ，存在一个可测集 $I_\gamma \subseteq I$，满足 $\lambda(I_\gamma) \ge 1-\epsilon$，在该集合上

$$u_i((1-\eta)x + q^j, \gamma) > u_i(x,\gamma) \quad \textit{for all } \|x\|_1 \le R,\ x \in \mathbb{R}^l_+, \quad j = 1,\ldots,l. \tag{1}$$

因此，在有界消费集合上，任何一种商品增加一单位，都能补偿商品束的充分小比例缩减；这一结论对有界社会环境一致成立，并且除去任意小的一组个体后仍然成立。例外集可能取决于社会环境。该条件仅取决于偏好排序，不会因个体效用的严格递增变换而改变。一致紧性蕴含(1)：连续性和严格单调性保证每个紧效用族上都存在共同的 η，而若所述一致性不成立，则会产生一个有界外部性序列，违反一致紧性。我们将在附录中说明如何对定理*1* 的证明作相应修改。

下面，我们通过两个例子来说明外部性的结构。

例1。设代理人空间为完备*Lebesgue*单位区间。若社会类型函数 $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ 严格单调，则它能区分每个个体。因此，$\mathbb{E}(f \mid \alpha) = f$ 几乎处处成立。

或者，令 $\alpha(i) = L$ 对于 $i \in [0,1/2)$，并令 $\alpha(i) = H$ 在其他情况下。社会类型信息仅区分这两个群体。条件期望是他们的平均消费：$\mathbb{E}(f \mid \alpha)$ 在第一组中等于 $2\int_0^{1/2} f\,d\lambda$，在第二组中等于 $2\int_{1/2}^1 f\,d\lambda$。

例2 （重访第 2 节中的例子。）比较指标 η_1 和 η_2 是以下情形的函数：情形 *I* 中的 $\mathbb{E}(f \mid \alpha)$，以及情形 *II* 中的 $\mathbb{E}(f \mid \alpha_M)$。因此，上述框架涵盖了第 *2* 节中的例子。

- *I*在情形 *I* 中，$\alpha(v,w) = (v,w)$ 确定了代理人，因此 $\mathbb{E}(f \mid \alpha) = f$ 几乎处处成立。

下矩形$R_{v,\ w} = [0, v] \times [0, w]$ 由社会类型决定，并且

$$\eta_k(\alpha(v, w); f) = \int_{R_{v,w}} f^k \, d\lambda = \int_{R_{v,w}} \mathbb{E}(f^k \mid \alpha) \, d\lambda, \qquad k = 1, 2.$$

- 在情形 *II* 中，社会类型函数 α_M 记录社区和教育程度。对于几乎所有的 (v, w) 满足 $v \in C_m$ 的点，条件期望对社区内的位置进行平均：

$$\mathbb{E}(f \mid \alpha_M)(v, w) = \frac{1}{a_m - a_{m-1}} \int_{a_{m-1}}^{a_m} f(t, w) \, dt.$$

社区 m中教育程度为 w 的代理人的比较集为$R_{m,\ w} = (C_1 \cup \cdots \cup C_m) \times [0, w]$。该集合由社会类型决定，并且等于$[0, a_m] \times [0, w]$ （边界除外）。因此

$$\eta_k(\alpha_M(v, w); f) = \int_{R_{m,w}} f^k \, d\lambda = \int_{R_{m,w}} \mathbb{E}(f^k \mid \alpha_M) \, d\lambda, \qquad k = 1, 2.$$

因此，在社区内进行平均会保留每一个比较指标，同时允许具有相同社会类型的个体选择不同的商品束。

其他假设同样得到满足。在固定比较矩形上的积分是 Γ上的弱连续泛函。因此，每个代理人的效用关于自身消费和外部性是联合连续的，并且关于自身消费严格单调。效用赋值是可测的。事实上，当矩形端点收敛时，它们的对称差的测度趋于零。于是， Γ的每个弱紧子集上的一致可积性进一步保证了它们的积分在该子集上一致收敛。因此，在紧开拓扑下，该赋值在情形 *I* 中关于 (v, w) 连续，并且在情形 *II* 中于每个社区内关于 w连续。

最后，令(γ_n) 为一个范数有界的外部性序列，并选择对每个 n 都对 $\|\gamma_n\|_{L_1}$ 形成界的 $b < \infty$。每个比较积分都属于 $[0, b]$。因此，所有条件效用都属于紧族

$$\left\{ x \longmapsto b_1 (x^1)^{3/2} + b_2 (x^2)^{3/2} : (b_1, b_2) \in [(1 + b)^{-3/2}, 1]^2 \right\}.$$

每个成员都是严格单调的，这验证了一致紧性。

定义 1。 如果以下条件成立，则配置 f 与一个非负且非零的价格向量 p 一起构成$(\mathcal{E}, \alpha)$ 的均衡。

1. 效用最大化：对于几乎处处的 $i \in I$，

$$f(i) \in D(i, p, \mathbb{E}(f \mid \alpha)), \qquad D(i, p, \gamma) = \operatorname*{argmax}_{x \in B(i,p)} u_i(x, \gamma),$$

其中 $B(i, p) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : \ p \cdot x \leq p \cdot e(i)\}$。

2. 市场出清： $\int_I f\, d\lambda = \int_I e\, d\lambda$。

3.2 均衡存在性

第 2 节中的说明性示例固定禀赋和效用设定，同时改变消费所依据的社会信息比较方式。在这两种情形下，个体都会关心他人的消费。两者的区别在于，社会类型函数是否能在保留比较基准的同时，为不同的个体选择留出空间。

在情形 I 中，位置和教育程度这一对信息几乎处处能够识别代理人。个体优化要求每位代理人专门生产一种商品。然而，矩形比较结构与市场出清共同要求两种商品的累计消费在每个下矩形上都相等。由于这些矩形能够确定配置，这两项要求彼此不相容。

在情形 II 中，位置只记录到社区层级。对于每个教育程度层级，社区内的人口可以在两种消费选择之间进行划分。这种划分使同一社区内教育程度相同的个体的平均消费等于 $(1,\ 1)$，因此能够再现支持这些选择的比较基准。相关的丰富性存在于社会类型内部的人口中；它不必源自偏好或禀赋的差异。

我们利用 社会匿名性来形式化这一差异，并采用 He、Sun 和 Sun (2017) 引入的处处不等价条件。对于一个正测度集 $D \in \mathcal{I}$，定义受限的 σ-代数 $\mathcal{I}^D = \{D \cap A :\ A \in \mathcal{I}\}$ 以及 $\mathcal{G}^D = \{D \cap A :\ A \in \mathcal{G}\}$。代数$\sigma$ $\mathcal{I}$ 处处不等价于 $\mathcal{G}$，是指对于每个非忽略集合 $D \in \mathcal{I}$，都存在一个$\mathcal{I}$-可测子集 $D_0 \subseteq D$，使得 $\lambda(D_0 \triangle D_1) > 0$ 对每个 $D_1 \in \mathcal{G}^D$都成立。

定义 2（社会匿名性）。 具有社会类型函数 α 的大经济在满足以下条件时称为社会匿名的： $\mathcal{I}$ 处处不等价于 $\mathcal{G}$。我们也称 α 相对于代理人空间 $(I, \mathcal{I}, \lambda)$ 满足社会匿名性。

社会匿名性是对代理人空间和社会类型函数的一项条件。函数 α 记录外部性发挥作用所依托的特征，例如社区、位置、财富排名或职业。社会匿名性要求，这些特征在人口的每个正测度部分中都保留可测的个体差异。[19] 因此，即使将注意范围限制在某个子经济中，社会类型也不能识别其中代理人的所有可测子集。在第2节中，情形 I 不满足社会匿名性，而情形 II 满足；在情形 II 中，即使记录了社区和教育程度，个体位置仍然存在差异。

以下定理从社会匿名性的角度刻画了均衡存在性。

[19]例如，在无原子代理人空间上，常数社会类型函数满足社会匿名性。

定理1. 固定一个整数 $l \geq 2$、一个代理人空间 $(I, \mathcal{I}, \lambda)$，以及一个社会类型函数$\alpha$：$I \to T$。以下陈述等价。

i. 社会类型函数满足社会匿名性。

ii. 每个 l商品的大型交换经济都存在一个均衡。

注 3. 充分性部分表明，社会类型内部的个体特异性差异足以恢复均衡存在性。证明使用了与个体需求相关的条件期望对应。在社会匿名性下，即使个体需求是非凸的，该对应也具有不动点论证所需的凸性和紧性。在保持所需条件总量不变的同时，可以在整个人口中分配不同的最优商品束。

对于必要性，社会匿名性的缺失表明存在一个正测度子经济，在该子经济中，社会类型穷尽了个体信息。可以将矩形示例置于该子经济中，而不改变给定的社会类型函数 α。个体优化要求专业化，而矩形消费总量的一致性则要求几乎处处对两种商品进行等量消费。该构造使用两种商品，并且通过将其余商品合并为一个消费指数，可以扩展到任意固定的 $l \geq 2$ 。它不要求构造一个商品数量不断增加的经济序列。

因此，定理*1* 给出了均衡存在性的精确刻画，因为它提供了关于个体身份与社会类型之间关系的最小结构条件。

注4。 社会匿名性与一致紧性解决的是不同的困难。前者允许个体选择在社会类型内部发生变化，同时保持外部性不变。后者防止偏好沿着有界的社会环境序列退化。在补充附录*B.2*中，我们给出了一个满足第*3.1* 节除一致紧性之外所有假设的两种商品经济：该经济具有社会匿名性、相同的严格正禀赋和线性严格单调效用，但不存在均衡。在资源可行配置中，第一种商品的消费逐渐集中于低社会类型，从而使几乎所有个体越来越不愿放弃第二种商品。该例还违反了注*2*中的序数条件。

当收益不依赖于外部性时，社会类型函数 α 可以取为常数。此时，无原子性蕴含社会匿名性。定理1 蕴含了无外部性的典型连续统经济中的均衡存在性结果，如Aumann (1966)所述。

推论1。 没有外部性的大型交换经济存在均衡。

3.3 应用

接下来，我们将介绍三个经济应用，以阐释这一框架。在每个应用中，社会基准由市场配置决定，而

界定参照群体的社会类型则作为经济的一部分给出。

教育中的同伴效应与人力资本投资

我们首先考虑一个存在教育同伴效应的经济。这个例子受到社会互动与同伴效应相关文献的启发；例如，Manski（1993）、Brock 和 Durlauf （2001）、Sacerdote （2001）以及Calv´o-Armengol、Patacchini 和 Zenou（2009）。个人从事某项活动所获得的回报可能取决于其同伴的行为。在竞争性经济中，个人投资以及影响其回报的同伴行为，都由市场配置决定。

存在两种可分商品。商品 0 是私人消费，商品 1 是教育或培训服务。商品束写作 $x = (c,\ h) \in \mathbb{R}^2_+$，其中 h 是为人力资本投资购买的服务数量。禀赋 $e : I \to \mathbb{R}^2_+$ 是可积的，且$\int_I e\, d\lambda \gg 0$。其第二个坐标表示对固定供给培训服务的索赔权。因此，交易的是人力资本投资的投入，而不是由此形成的人力资本存量。

每个个体都有一个社会类型 $\alpha(i) \in T$，其中 T 是一个紧致度量空间。社会类型可以描述学校、社区、同届群体或职业。例如，考虑赋予 $I = T \times [0,1]$ $\nu \otimes \mu$ 的情形，其中 ν 是 T上的概率测度，而 μ是 $[0,1]$上的均匀分布。令 $\alpha(t,\ r) = t$。坐标 r 用于标记具有相同社会类型的学生或家庭。在这个乘积人口中，社会类型函数满足社会匿名性。

对于 $\gamma = (\gamma^0,\ \gamma^1) \in \Gamma$，将个体 i 的同伴暴露指数定义为

$$H_i(\gamma) = \int_I k(\alpha(i), \alpha(i'))\gamma^1(i')\, d\lambda(i'),$$

其中 $k : T \times T \to \mathbb{R}_+$ 有界且博雷尔可测。权重 $k(t,\ t')$衡量类型为 t 的个体受到社会类型为 t'的个体投资影响的程度。它可以赋予同校个体或附近社区的个体更高的权重。当权重的积分为 1 时，H_i 是同伴投资的加权平均。对于固定的 i，权重 $k(\alpha(i)\ \alpha(i'))$ 是 $\alpha(i')$的有界可测函数，因此

$$H_i(\mathbb{E}(f \mid \alpha)) = \int_I k(\alpha(i), \alpha(i'))f^1(i')\, d\lambda(i').$$

因此，条件期望恰好包含计算同伴暴露所需的信息。

代理人 i 具有偏好参数 $\theta_i \in \Theta$，其中 Θ 是紧的度量空间，$i \mapsto \theta_i$ 是可测的。该参数可以描述能力、家庭背景或培训的私人回报。设 $A,\ B : \mathbb{R}_+ \times \Theta \times T \to \mathbb{R}$和 Q: $\mathbb{R}_+ \times \Theta \times T \to \mathbb{R}_+$连续。假设 $A(\cdot,\ \theta,\ t)$和 $B(\cdot,\ \theta,\ t)$严格递增，并且 $Q(\cdot,\ \theta,\ t)$非递减。令

β： $\mathbb{R}_+ \times \Theta \times T \to \mathbb{R}_+$ 也连续。代理人 i 的效用为

$$u_i(c, h, \gamma) = A(c, \theta_i, \alpha(i)) + B(h, \theta_i, \alpha(i)) + \beta(H_i(\gamma), \theta_i, \alpha(i))Q(h, \theta_i, \alpha(i)).$$

前两项描述私人消费和培训的私人回报所带来的效用。最后一项表示该回报可能取决于同伴投资。如果 β 关于其第一个参数非递减，则更高的同伴投资会提高培训的增量回报。这体现了个人投资与参照群体投资之间的互补性。对培训回报不作凹性假设。

这些偏好满足第 3.1 节的假设。对于每个代理人， H_i 均弱连续，且效用赋值可测。如果 $\|\gamma\|_{L_1} \leq M$，那么 $0 \leq H_i(\gamma) \leq \|k\|_\infty M$。因此，条件效用属于紧参数集 $\Theta \times T \times [0, \|k\|_\infty M]$ 在紧开拓扑下的连续像。该像中的每种效用都严格单调。因此，一致紧性条件成立。

根据定理 1，只要满足社会匿名性，经济就存在均衡。从经济学角度看，同伴效应会形成一个内生反馈回路：每个代理人对人力资本投资的需求取决于同伴群体的投资，而同伴群体的投资又由均衡配置本身决定。模型不要求个体观察每个人的投资选择。相反，他们会根据由社会类型概括的社会信息作出反应，这些社会类型包括学校、社区、队列、职业或网络位置。该结果允许存在非凹回报，也不要求同伴效应很小。

攀比消费

接下来，我们考察会改变不同消费品相对价值的社会比较。这个例子受到相对收入、地位和“攀比消费”偏好模型的启发；例如，参见 Duesenberry(1949）、 Abel(1990年）、Ljungqvist和Uhlig (2000），以及 Hopkins和Kornienko (2004）。家庭会将自己的消费与参照群体的消费进行比较，这种比较可能以不同方式影响每种商品的价值。这个例子表明，我们的结论适用于一大类采用社会压力系数表述的模型。

共有 $l \geq 2$ 种可分商品，其可积禀赋满足 $\int_I e \, d\lambda \gg 0$。为具体说明社会结构，设 $I = [0, 1]^2$。将代理人写作 $i = (v, w)$，其中 v 是她在给定社会排序中的位置， w 则为该位置上的家庭编索引。令 $\alpha(v, w) = v$。这种排序可能反映职业或社会背景；它并非由代理人的均衡消费决定。

代理人 $i = (v, w)$ 的参照群体由地位不高于她的家庭组成：$L_i = [0, v] \times [0, 1]$。对于 $v > 0$，将特定商品的比较指标定义为该群体的平均

消费，

$$\xi_i^j(\gamma) = \frac{1}{v}\int_{L_i} \gamma^j(i')\, d\lambda(i'), \qquad j = 1, \ldots, l.$$

设定 $\xi_i^j(\gamma) = 0$ 当 $v = 0$时，这只涉及个体中的一个零测集。由于归属L_i 由社会类型决定，指标 $\xi_i^j(\mathbb{E}(f \mid \alpha))$ 就是参照群体中商品 j 的实际平均消费。用群体的测度进行归一化，可以将其消费标准与群体规模区分开来。

设 $\theta_i \in \Theta$ 可测地分配，且 Θ 为紧度量空间。对于每种商品 j，令v_j：$\mathbb{R}_+ \times \Theta \to \mathbb{R}$ 连续，并且关于其第一个自变量严格递增。令 a_j：$\mathbb{R}_+ \to [a_j, a_j]$ 连续，其中 $0 < a_j \leq a_j < \infty$。个体 i的效用为 $-$

$$u_i(x, \gamma) = \sum_{j=1}^{l} a_j(\xi_i^j(\gamma)) v_j(x^j, \theta_i).$$

如果a_j 递增，更高的参照群体消费会提高额外消费商品 j所带来的效用增益。这体现了攀比动机。相反，递减的a_j 允许参照群体消费降低额外自身消费的价值。该设定关注社会基准对相对估值的影响；它并不要求家庭知道自己在消费分布中的排名。

对于固定代理人，每个比较指标都是弱连续的。因子 $1/v$ 在各代理人之间并非一致有界，但这对一致紧性不会造成困难：所有条件效用都属于紧族

$$\left\{ x \mapsto \sum_{j=1}^{l} b_j v_j(x^j, \theta) : \theta \in \Theta,\ b_j \in [\underline{a}_j, \overline{a}_j] \right\}$$

严格单调函数。效用赋值是可测的。在这个乘积人口中，未记录的家庭坐标 w 提供了社会匿名性所需的个体差异，而定理 1给出了一个均衡。

采用局部社会基准的风险分担

我们的表述还允许研究具有重叠局部参照群体的风险分担问题。风险配置是或有市场理论和风险分担中的经典问题；参见 Arrow（1964年) 以及 Wilson（1968年)。地方社区内的消费保险也是 Townsend（1994年) 实证分析的核心。在这里，家庭在完全或有市场中进行交易，但相对于内生邻域标准评价消费。这使风险分担问题与消费外部性联系起来，例如 Abel（1990年) 所研究的消费外部性。我们要考察的是：当围绕这些标准的得失偏好不必为凸时，竞争均衡是否存在。

有 $l \geq 2$ 个状态，其概率为 $\pi^j > 0$ 和 $\sum \pi^j = 1$。设 $I = [0,1]^2$，并将一个家庭写作 $(v,\ w)$。坐标 v 是其位置，而 w 对该位置上的家庭及其偏好特征进行索引。社会类型记录位置：$\alpha(v,\ w) = v$。可积禀赋 $e(v,\ w) \in \mathbb{R}^l_+$ 规定了该家庭在每个状态下的资源，其中 $\int_I e\, d\lambda \gg 0$。在状态价格 p下，家庭可以选择满足 $p \cdot x \leq p \cdot e(v,\ w)$ 的任意消费计划 x。

固定 $0 < \delta \leq 1$。位置 v的社区为 $N_\delta(v) = [v-\delta, v+\delta] \cap [0,1]$。记其长度为$|N_\delta(v)|$，将状态-$j$ 消费标准定义为

$$R^j_v(\gamma) = \frac{1}{|N_\delta(v)|} \int_{N_\delta(v)} \int_0^1 \gamma^j(t,r)\, dr\, dt.$$

这就是该社区中的平均消费。由于 $N_\delta(v) \times [0,1]$中的成员资格由社会类型决定，因此从 f 以及从 $\mathbb{E}(f \mid \alpha)$都可以得到相同的平均值。家庭会对当地消费标准作出反应，而不会观察个别邻居的消费。

令 $b : [0,1] \to [\underline{b}, \bar{b}]$ 连续，且满足 $0 < \underline{b} \leq b \leq \bar{b} < \infty$。参数 $b(w)$衡量家庭对社会比较的敏感度。考虑得失函数

$$m(z) = \begin{cases} z^\rho, & z \geq 0, \\ -\kappa(-z)^\rho, & z < 0, \end{cases} \qquad 0 < \rho < 1, \quad \kappa > 1,$$

以及偏好

$$u_{(v,w)}(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{l} \pi^j \left[x^j + b(w) m\big(x^j - R^j_v(\gamma)\big) \right].$$

线性项对物质消费赋予价值。比较项对损失赋予的权重高于同等规模的收益，并且在参照点两侧均表现出递减敏感性，正如Kahnemanand Tversky(1979)所示。我们保留通常的概率权重，并令参照点取决于社区的消费。在损失区域，状态-j 消费的效用是凸的。因此，对消费计划的偏好可能是非凸的，通常关于竞争性风险分担的凹性论证并不适用。

然而，定理 1 的假设得以满足。对于每个位置，参照点都是外部性的有界线性泛函。由于 $|N_\delta(v)| \geq \delta$，界 $\|\gamma\|_{L_1} \leq M$ 意味着 $0 \leq R^j_v(\gamma) \leq M/\delta$ 对每个位置和状态都成立。因此，条件效用属于由 $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ 以及 $[0, M/\delta]^l$中的参照向量所索引的紧族。所有这些效用函数关于自身消费都是连续且严格递增的。它们向家庭的分配是可测的，并且乘积人口满足社会匿名性，因为无原子的家庭坐标 w 未被 α记录。

因此，存在一个竞争均衡（$f,\ p$），在该均衡中，家庭选择其

偏好的状态依赖型消费计划，且索赔权在每种状态下均得以出清，

$$\int_I f^j \, d\lambda = \int_I e^j \, d\lambda, \qquad j = 1, \ldots, l,$$

邻域标准也由这些相同的计划生成。该结果允许对风险持非凸态度，且不对社会比较的强度施加小幅度限制。它确立了均衡的存在性，无须假定风险偏好相同，也不意味着唯一性或风险分担有效。

4 广义大型经济

第3 节中的交换经济，在具有效用表示、可分商品和固定总资源的环境中，单独考察了社会类型的作用。许多应用还需要纳入其他特征。家庭可能具有不完备偏好；住房、汽车或耐用品设施等商品可能不可分；资源也可能由生产决定。这些特征带来了新的困难。本节将建立一个一般框架，沿三个维度扩展模型：（i）个体具有不完备偏好；（ii）存在不可分物品；（iii）存在生产部门。我们将证明，在这一更广泛的类别中，社会匿名性对于每个经济都存在均衡而言，仍然是充要条件。

4.1 设定

广义经济描述如下。

1. 代理人空间是一个无原子且完备的概率空间（I，$\mathcal{I}$，λ）。2. 存在 $l \geq 1$ 种可分商品和 $m \geq 0$ 种不可分物品，商品空间为$X = \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{Z}^m_+$。禀赋映射 $e : I \to X$ 是可积的。某种商品的总初始禀赋可能为零点。3. 存在一家由消费者所有的单一企业。[20] 所有权份额由可测映射 $\theta : I \to \mathbb{R}_+$ 给出，且满足 $\int_I \theta \, d\lambda = 1$。生产集 $Y \subseteq \mathbb{R}^{l+m}$ 是闭且凸的，并满足：(i) $0 \in Y$；(ii) $Y \cap (-Y) = \{0\}$（不可逆性）；(iii)$Y - \mathbb{R}^{l+m}_+ \subseteq Y$（自由处置）；以及 (iv) 资源条件

$$\left(Y + \int_I e \, d\lambda \right) \cap \mathbb{R}^{l+m}_{++} \neq \varnothing.$$

4. 配置是一个 $\mathcal{I}$-可测的可积函数 $f : I \to X$，为每个个体分配由可分商品和不可分物品组成的商品束。

[20]采用单一企业的表述方式只是为了简化记号。

5. 类型空间 T 是完备的、可分的且可度量化的，并带有其 Borel σ-代数。社会类型函数 $\alpha : I \to T$ 是可测的。令 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}$ 表示由 α生成的 σ-代数。个体通过 $\mathbb{E}(f \mid \alpha)$评价配置。外部性的空间为

$$\Gamma = L_1((I, \mathcal{G}, \lambda); \mathbb{R}_+^{l+m}),$$

在相对弱拓扑下。其取值不必具有整数坐标：整数消费的条件平均可以是分数。

6. 对每个代理人 i，条件偏好 $\succ_i (\gamma)$ 比较给定外部性 γ 下的商品束。当 x 严格偏好于 y 时，我们记作 $x \succ_i (\gamma) y$ 。对于每个 γ，此关系均满足非自反性、传递性和严格单调性：若 $x \geq y$ 和 $x \neq y$ ，则有$x \succ_i (\gamma) y$。其严格偏好图关于消费和外部性是开集；等价地，

$$\{(x, y, \gamma) \in X \times X \times \Gamma : x \not\succ_i (\gamma) y\}$$

是闭集。不施加完备性假设。

7. 令 $\wp$ 为定义在 X 上的非自反、传递偏好的空间，其严格偏好图为开集；该空间赋予这些图的补集的闭收敛拓扑；参见Hildenbrand (1974, 第 96 页)。对于每个 γ，映射 $\Phi_\gamma : i \mapsto \succ_i (\gamma)$ 是到 $\wp$的可测映射，并且

$$\{(i, x, y) : x \succ_i (\gamma) y\} \in \mathcal{I} \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X).$$

8. 条件偏好 $\succ_i (\gamma)$ 满足补偿条件：对于每个$x \in X$

$$(c, 0^m) \succ_i (\gamma) x \qquad \text{for some} \qquad c \in \mathbb{R}_+^l.$$

令 $\wp_+ \subseteq \wp$ 表示满足这一补偿条件的严格单调偏好的子集。

9. 记 $\mu_\gamma = \lambda \circ \Phi_\gamma^{-1}$。对于每个范数有界序列 $\{\gamma_n\}_{n \geq 1} \subset \Gamma$，这些分布都是一致紧的：对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个紧集 $K_\epsilon \subset \wp_+$，使得对于每个 n，$\mu_{\gamma_n}(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ 。

10. 对于每个非负且非零的价格向量 p ，若 $\pi(p) := \sup_{y \in Y} p \cdot y$ 有限，则将收入分布定义为

$$\lambda_d^p(B) = \lambda\{i \in I : p \cdot e(i) + \theta(i)\pi(p) \in B\}, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

当 $m \geq 1$时，对于每个满足 $\sum_{h=1}^{l} p^h > 0$ 的上述价格，该分布都是分散的，即对于所有 $b \in \mathbb{R}$， $\lambda_d^p(\{b\}) = 0$ 。

广义大经济是（$\mathcal{E}$， α， Y），其中 $\mathcal{E}(i) = (\succ_i, e(i), \theta(i))$ 。它通过允许不完备偏好、不可分消费和

生产。

注释 5。 • 生产假设是标准的；参见 *Hildenbrand (1970、 1974)* 。企业可以保持不活动状态，而自由处置允许丢弃不需要的商品。不可逆性排除了无需成本即可逆转非零生产计划的可能性。总资源条件要求存在某个可行的生产计划，使每种商品都以严格为正的总量可供使用。该条件允许企业能够生产的商品具有零初始供给，正如下例所示。

• 条件（*8*）要求，仅通过充分消费可分商品，任何商品束都能够得到改善。该条件已被 *Mas-Colell*（*1977*）以及 *Hammond、Kaneko 和 Wooders*（*1989年*）采用。它与一致紧性一道，排除了所有可分商品均为免费的极限价格。当 $m = 0$时，条件（*8*）由严格单调性推出。取 $Y = -\mathbb{R}^{l+m}_+$还允许存在带有不可分物品的纯交换经济，因为只有在价格对某种可分商品赋予价值时，才要求具有分散性。

• 对于不可分物品，当收入达到某个离散商品束的成本时，需求可能发生不连续变化。如果有正质量的家庭收入恰好等于该成本，这种不连续性可能会持续存在于总需求中。收入分散条件排除了这类质量点。[21] 由于收入包括分配利润，该条件针对的是总收入，而不仅仅是初始禀赋的价值。当 $m = 0$ 时，不要求收入分散假设。

• 条件（*10*）可以弱化。对于每个非负且非零的 p，满足 $\sum_{h=1}^{l} p^h > 0$ 和 $\pi(p) < \infty$，只需要求

$$\lambda\{i : p \cdot e(i) + \theta(i)\pi(p) = p \cdot (0^l, z) > 0\} = 0 \quad for\ every\ z \in \mathbb{Z}^m_+. \tag{2}$$

只有等于纯不可分商品束支出的正收入才必须具有零质量。在其他正收入水平上，预算边界上的商品束必须包含正支出的可分商品，而在证明最优性时，可以稍微减少该商品的数量。在价格严格为正时，零收入家庭只能获得零商品束。因此，(2)允许临界支出以外的收入原子，包括零点处的原子。在定理 *2* 的证明中，我们确实只以这种较弱的形式使用分散性。当 $m = 0$ 时，该条件是空泛的。

接下来我们定义竞争均衡。

定义 3。 配置 f、非负且非零的价格向量 p 以及生产计划 $y \in Y$构成 $(\mathcal{E}, \alpha, Y)$ 的均衡，当且仅当以下条件成立。

1. 个体最优性：对于几乎所有的 i, $f(i)$，在 $\succ_i (\mathbb{E}(f \mid \alpha))$ 下是最大的，其中

$$B_i(p, y) = \{x \in X : p \cdot x \leq p \cdot e(i) + \theta(i)p \cdot y\}.$$

[21]关于 关于分散性与非凸消费，请参见 Khan 和 Yamazaki (1981) 以及 Suzuki (1995) .

也就是说，$f(i) \in B_i(p,y)$并且不存在 $z \in B_i(p,y)$使得 $z \succ_i (\mathbb{E}(f \mid \alpha))f(i)$。

2. 利润最大化：$p \cdot y = \text{上确界}_{y' \in Y}\, p \cdot y'$。

3. 市场出清：$\int_I f\, d\lambda = \int_I e\, d\lambda + y$。

以下刻画涉及广义经济这一类。

定理 2。固定一个代理人空间$(I, \mathcal{I}, \lambda)$和一个社会类型函数 $\alpha\colon I \to T$。以下陈述等价。

i. 社会类型函数满足社会匿名性。

ii. 每个广义大经济都存在一个均衡。

注释 6。外部性也可以是变换后的消费的条件期望。具体而言，考虑一个连续函数 $\tau : X \to \mathbb{R}^k$满足

$$\|\tau(x)\| \leq a + b\|x\|_1 \quad \textit{for some } a, b \geq 0,$$

并令 $\zeta = \mathbb{E}(\tau \circ f \mid \alpha)$ 为每个配置 f对应的外部性 $L_1((I, \mathcal{G}, \lambda); \mathbb{R}^k)$赋予其弱拓扑。保留第*4.1*节的假设，并将条件（*6*）–（*9*）表述在该外部性空间上。于是，社会匿名性仍然足以保证均衡存在。 [22]

4.2 一个例子

现在通过一个家庭购买汽车的生产经济来说明定理 2。汽车提供实用利益和社会区分。后者取决于财富相同或较低的家庭中汽车所有权的普遍程度。该经济结合了生产、不可分消费和社会比较。

如第 2节所述，令 $I = [0,1]^2$ 配备乘积勒贝格测度 λ的完备化。家庭由(v, w)标识，其中 v 是其初始财富排名，而 w用于区分具有相同财富排名的家庭。设 $\alpha(v, w) = v$。社会信息记录财富排名，并汇总该排名家庭的消费。独立且无原子的家庭坐标 w提供超出社会类型的个体差异，因此社会匿名性成立。

有两种商品，消费集为 $X = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$。商品 1 是可分消费，商品 2 是汽车。家庭的禀赋以及其在企业中的所有权份额分别为 $e(v, w) = (2 + v, 0)$ 和 $\theta(v, w) = v + \frac{1}{2}$。财富排名较高的家庭持有更多的可分商品以及更大的所有权份额。因此

$$\int_I e\, d\lambda = \left(\frac{5}{2}, 0\right), \qquad \int_I \theta\, d\lambda = 1.$$

[22]大型博弈中也出现了此类表述；例如，请参见 Rauh (2003)、Yu 和 Zhu (2005)以及 He 和 Sun (2018)。

该企业利用可分商品生产汽车。其生产集为

$$Y = \left\{ (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 : y^1 \le 0, \quad y^1 + y^2 \le 0, \quad y^2 \le \frac{1}{2} \right\}.$$

生产一辆汽车至少需要一个单位的可分商品，总生产能力为 1/2，并且允许自由处置。所有可供消费的汽车均由企业生产。生产计划（$-\frac{1}{2}$，12）使两种商品的总资源都严格为正。

– –

家庭会将汽车所有权与财富排名不高于自身的家庭进行比较。对于 $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \in \Gamma$，定义

$$r_v(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{v} \displaystyle\int_0^v \int_0^1 \gamma^2(t, j)\, dj\, dt, & v > 0, \\ \dfrac{1}{2}, & v = 0, \end{cases} \qquad \eta_v(\gamma) = \min\{1, r_v(\gamma)\}.$$

当 $\gamma = \mathbb{E}(f \mid \alpha)$ 时，$r_v(\gamma)$ 是该比较群体中家庭持有汽车数量的平均值。在 $v = 0$ 处赋予的数值并不重要，因为该群体是零测度。

家庭（v，w）的效用为

$$u_{(v,w)}(x, \gamma) = x^1 + \left(\frac{3}{2} - \eta_v(\gamma) \right) \frac{\log(1 + x^2)}{\log 2}.$$

汽车消费的系数可以写成

$$\frac{3}{2} - \eta_v(\gamma) = \frac{1}{2} + \big(1 - \eta_v(\gamma)\big).$$

第一项表示汽车带来的私人收益；第二项表示地位溢价。随着相似或较低财富家庭中的汽车所有权日益普及，与所有权相关的差异会减弱。当比较群体中的平均汽车所有权达到每个家庭一辆汽车时，地位溢价消失。汽车仍然能够带来私人收益，且偏好保持严格单调。额外的汽车带来递减收益，而整数约束使个体消费选择呈现非凸性。

论断 1。存在一个价格为 $p^* = (1, 1)$、生产计划为 $y^* = (-\frac{1}{2}, 12)$ 且具有配置的均衡

$$f^*(v, w) = \begin{cases} (1 + v, 1), & 0 \le w \le \frac{1}{2}, \\ (2 + v, 0), & \frac{1}{2} < w \le 1. \end{cases}$$

每个财富群体中有一半的家庭购买一辆汽车，另一半则将其费用保留为

可分消费。因此，

$$\mathbb{E}(f^* \mid \alpha)(v, w) = \left(\frac{3}{2} + v, \frac{1}{2}\right), \qquad \eta_v\big(\mathbb{E}(f^* \mid \alpha)\big) = \frac{1}{2}.$$

在 $p^* = (1,\ 1)$ 处，企业获得零利润，财富排名为 v 的家庭收入为 $2+v$。购买 q 辆汽车，并将剩余收入用于购买可分商品，可获得效用

$$2 + v - q + \frac{\log(1+q)}{\log 2}.$$

选择 $q = 0$ 和 $q = 1$ 带来相同的效用，而每个可行的整数 $q \geq 2$ 带来的效用都严格更低。因此，由 f^* 配置的两个商品束都是最优的。生产计划 y^*使利润最大化，且市场出清：

$$\int_I f^*\, d\lambda = \left(2, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_I e\, d\lambda + y^*.$$

该例明确展示了社会匿名性的作用。具有相同财富排名的家庭可以作出不同的不可分选择，同时形成共同的比较基准。家庭身份使具有相同社会类型的家庭之间可以存在这些选择差异，而投影 $\alpha(v,\ w) = v$ 决定哪些信息会进入社会比较。由此产生的配置同时支持个体优化以及这些选择所依赖的社会基准。我们在补充附录B.1中验证模型假设并证明该结论。

5 结语

本文构建了一个大规模社会中的竞争均衡框架，其中市场配置创造出内生的社会环境。该建模思想在于区分代理人的姓名与其社会类型。姓名用于识别个体，而社会类型决定个体选择被观察并汇总为同伴行为、消费基准及其他外部性的层级。配置决定社会环境，社会环境决定个体需求，而个体需求决定配置。

核心观点是，除了个体可忽略性之外，社会环境的组织方式也关系到均衡的存在性。当社会信息足够丰富，能够识别个体消费时，均衡可能不存在。当社会信息允许不同的个体选择，同时保留相关的社会总量时，条件聚合便能调和非凸个体需求与市场出清。社会匿名性将这种区别形式化：在人口中任何正测度部分，社会类型都不会穷尽个体信息。矩形示例直接展示了这种区别。精确位置和教育程度所产生的比较

与个体专业化并不相容；按社区层级记录位置则能恢复均衡。

定理 1 指出，社会匿名性是每个交换经济都存在均衡的条件。对于至少包含两种商品的任意固定数量商品而言，该条件既是必要条件，也是充分条件。其必要性通过一种保持商品空间不变的直接构造得以确立。定理 2 将这一刻画扩展到具有不完备偏好、生产和不可分物品的广义经济类。该框架同时涵盖偏好非凸性与个体消费集固有的非凸性。它还允许可生产商品的初始供给为零。

综合来看，这些结果表明，具有外部性的一个大经济应同时规定代理人空间和社会类型函数。前者描述个体可忽略性，后者则决定在汇总选择时哪些区别仍然可被保留。这一区分开了两个问题：社会环境如何由均衡产生，以及观察社会环境时所采用的分类如何作为市场原始要素加以规定。

这些应用在具有同伴效应、社会比较以及带有局部社会基准的风险分担的经济中说明了这一差异。在每种情形下，价格协调个体选择，而配置再现进入偏好的社会对象。本文不讨论非对称信息和私人信息。一个自然的拓展方向是在保留组织外部性的社会类型结构的同时引入私人信息。我们将这一拓展留待未来研究。

参考文献

A. B. Abel，《习惯形成与攀比效应下的资产价格》，《美国经济评论》**80**（1990年），38–42。R. M. Anderson 和 H. Duanmu，《总量管制与交易和碳税与阿罗–德布鲁模型的结合》，《计量经济学》**93**（2025年），357–393。R. M. Anderson、H. Duanmu、M. A. Khan 和 M. Uyanik，《具有劣品、生产和全面外部性的大型竞争性市场中均衡的存在性》，arXiv:2511.00478v3，2026年。R. M. Anderson、H. Duanmu 和 J. Li，《具有劣品的林达尔–福利模型中均衡的存在性》，《纯粹与应用逻辑年鉴》**177**（2026年），103751。K. J. Arrow，《证券在风险承担最优配置中的作用》，《经济研究评论》**31**（1964年），91–96。K. J. Arrow，《经济活动的组织：选择市场配置还是非市场配置的相关问题》，载于《公共支出的分析与评估：*PPB*体系》，第1卷，美国政府印刷局，华盛顿哥伦比亚特区，1969年，47–64。

K. J. Arrow 和 P. S. Dasgupta，《炫耀性消费与非炫耀性闲暇》，《经济学杂志》**119**（2009年），F497–F516。R. J. Aumann，《连续统交易者市场》，《计量经济学》**32**（1964年），39–50。R. J. Aumann，《连续统交易者市场中竞争均衡的存在性》，《计量经济学》**34**（1966年），1–17。L. E. Blume、W. A. Brock、S. N. Durlauf 和 Y. M. Ioannides，《社会互动识别》，载于：J. Benhabib、A. Bisin 和 M. O. Jackson（编），《社会经济学手册》，第1B卷，North-Holland，阿姆斯特丹，2011年，第853–964页。W. A. Brock 和 S. N. Durlauf，《具有社会互动的离散选择》，《经济研究评论》**68**（2001年），235–260。A. Calv´o-Armengol、E. Patacchini 和 Y. Zenou，《教育中的同伴效应与社会网络》，《经济研究评论》**76**（2009年），1239–1267。B. Cornet 和 M. Topuzu，《具有外部性且消费者构成测度空间的经济中的均衡存在性》，《经济理论》**26**（2005年），397–421。J. S. Duesenberry，《收入、储蓄与消费者行为理论》，哈佛大学出版社，马萨诸塞州剑桥，1949年。M. Florenzano，《一般均衡分析：均衡的存在性与最优性》，Kluwer Academic Publishers，波士顿，2003年。D. K. Foley，《林达尔解与具有公共品的经济之核》，《计量经济学》**38**（1970年），66–72。F. Gul、W. Pesendorfer 和 M. Zhang，《具有约束的伪市场中不可分物品的有效配置》，《政治经济学杂志》**132**（2024年），3708–3736。F. Gul 和 W. Pesendorfer，《作为集体选择规则的伪林达尔均衡》，《经济研究评论》**93**（2026年），938–967。F. Gul 和 E. Stacchetti，《具有总替代品的瓦尔拉斯均衡》，《经济理论杂志》**87**（1999年），95–124。P. J. Hammond、M. Kaneko 和 M. H. Wooders，《具有有限联盟的连续统经济：核、均衡与广泛外部性》，《经济理论杂志》**49**（1989年），113–134。P. J. Hammond，《一般广泛外部性下的 f-核等价》，《数学经济学杂志》**32**（1999年），177–184。W. He 和 Y. Sun，《对应的条件期望及其经济应用》，《经济理论》**66**（2018年），265–299。W. He、X. Sun 和 Y. Sun，《无限多个代理人的建模》，《理论经济学》**12**（2017年），771–815。W. Hildenbrand，《具有生产且消费者构成测度空间的经济中的均衡存在性》，《计量经济学》**38**（1970年），608–623。W. Hildenbrand，《大经济的核与均衡》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1974年。

E. Hopkins 和 T. Kornienko, 《原地踏步：作为地位博弈的消费者选择》, 《美国经济评论》**94**（2004）, 1085–1107。D. Kahneman 和 A. Tversky, 《前景理论：风险下决策的分析》, 《计量经济学》**47** （1979）, 263–291。A. S. Kelso, Jr. 和 V. P. Crawford, 《工作匹配、联盟形成与总替代品》, 《计量经济学》**50** （1982）, 1483–1504。M. A. Khan 和 R. Vohra, 《论具有非传递性消费者测度空间的经济中的林达尔均衡的存在性》, 《经济理论杂志》**36** （1985）, 319–332。M. A. Khan 和 A. Yamazaki, 《论具有不可分商品和连续统交易者的经济之核》, 《经济理论杂志》**24** （1981）, 218–225。J. O. Ledyard, 《外部性下最优点与市场均衡的关系》, 《经济理论杂志》**3** （1971）, 54–65。C. Li、Y. Zenou 和 J. Zhou, 《市场何时发挥作用？多重网络与效率》, CEPR讨论论文第21517号，2026年。L. Ljungqvist 和 H. Uhlig, 《攀比效应下的税收政策与总需求管理》, 《美国经济评论》**90**（2000）, 356–366。C. F. Manski, 《内生社会效应识别：反射问题》, 《经济研究评论》**60** （1993）, 531–542。A. Mas-Colell, 《不可分商品与一般均衡理论》, 《经济理论杂志》**16** （1977）, 443–456。R. P. McLean 和 A. Postlewaite, 《信息规模与激励相容》, 《计量经济学》**70** （2002）, 2421–2453。R. P. McLean 和 A. Postlewaite, 《信息规模与有效拍卖》, 《经济研究评论》**71**（2004）, 809–827。M. Noguchi, 《连续统代理人下的相互依存偏好》, 《数理经济学杂志》**41**（2005）, 665–686。M. Noguchi 和 W. R. Zame, 《具有外部性的竞争性市场》, 《理论经济学》**1** （2006）, 143–166。H. Osana, 《外部性与福利经济学基本定理》, 《经济理论杂志》**4**（1972）, 401–414。R. P. Parks, 《帕累托无关外部性》, 《经济理论杂志》**54** （1991）, 165– 179。M. T. Rauh, 《收益取决于汇总统计量的连续统玩家非合作博弈》, 《经济理论》**21**（2003）, 901–906。D. J. Roberts, 《消费者测度空间下林达尔均衡的存在性》, 《经济理论杂志》**6**（1973）, 355–381。B. Sacerdote, 《随机分配下的同伴效应：达特茅斯室友的研究结果》, 《经济学季刊》**116** （2001）, 681–704。

D. Schmeidler, 《具有连续统交易者和不完备偏好的市场中的竞争均衡》, 《计量经济学》**37** （1969）, 578–585。S. M. Srivastava, 《博雷尔集教程》, 施普林格, 纽约, 1998年。X. Sun、Y. Sun 和 H. Yu, 《均衡分布的个体主义基础》, 《经济理论杂志》**189**（2020）, 105083。N. Sun 和 Z. Yang, 《均衡与不可分性：总替代品与互补品》, 《计量经济学》**74** （2006）, 1385–1402。N. Sun 和 Z. Yang, 《具有替代品和互补品的离散市场的双轨调整过程》, 《计量经济学》**77**（2009）, 933–952。Y. Sun 和 N. C. Yannelis, 《不对称信息经济中的完全竞争：效率与激励的相容性》, 《经济理论杂志》**134**（2007）, 175– 194。T. Suzuki, 《非凸生产经济》, 《经济理论杂志》**66** （1995）, 158– 177。R. M. Townsend, 《印度乡村的风险与保险》, 《计量经济学》**62** （1994）, 539–591。R. Wilson, 《辛迪加理论》, 《计量经济学》**36**（1968年）, 119–132。B. Wu, 《大型博弈与大型经济的均衡》, 博士论文, 新加坡国立大学, 2019年。可见：https://scholarbank.nus.edu.sg/entities/publication/c33afcaf-a7f6-44d4-a540-8568dc996c0e。H. Yu 和 W. Zhu, 《具有变换后的汇总统计量的大型博弈》, 《经济理论》**26**（2005）, 237–241。

A 附录

A.1 定理 1的证明

充分性论证在保留原有禀赋和完整预算集的同时，对价格进行逼近。条件凸化在每次逼近中都给出一个不动点。随后，一致紧性排除了极限价格为零的情形，之后通过条件选择得到一个均衡配置。对于必要性，我们将第 2节中的矩形经济置于一个正测度集上，在该集合中，社会类型信息与完整的个体信息同样丰富。

充分性证明。 设 α 满足社会匿名性，因此 $\mathcal{I}$ 处处不等价于 $\mathcal{G} = \sigma(\alpha)$。记 $\bar{e} = \int_I e\, d\lambda$, $\mathbf{1}_l = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^l$ 并令

$$\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}^l_+ : \sum_{j=1}^{l} p^j = 1 \right\}, \qquad p^0 = l^{-1}\mathbf{1}_l, \qquad \Delta_\epsilon = (1-\epsilon)\Delta + \epsilon p^0, \quad 0 < \epsilon < 1.$$

步骤 1。辅助均衡与有界总消费。对于 $p \gg 0$，保留完整的预算集 $B(i,p) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : p \cdot x \le p \cdot e(i)\}$ 以及需求 $D(i,p,\gamma)$，均来自第3.1节。对于每个 i，预算对应 $p \mapsto B(i,p)$ 在 $\mathbb{R}^l_{++}$ 上连续且具有非空紧值。贝尔热最大值定理和可测最大值定理意味着，$D(i,p,\gamma)$ 非空且紧，$i \mapsto D(i,p,\gamma)$ 对每个 (p,γ) 都是可测的，并且 $(p,\gamma) \mapsto D(i,p,\gamma)$ 对每个 i 都是上半连续的。对于 $p \in \Delta_\epsilon$，每个预算可行消费束都满足

$$\|x\|_1 \le b_\epsilon(i) := \frac{l}{\epsilon}\|e(i)\|_1.$$

定义

$$\Gamma_\epsilon = \left\{\gamma \in \Gamma : 0 \le \gamma^j \le \mathbb{E}(b_\epsilon \mid \alpha) \text{ a.e., } j = 1, \dots, l\right\}.$$

共同的可积上界使该集合一致可积。它还是凸的且弱闭，因此邓福德–佩蒂斯定理给出弱紧性。由于 $\mathcal{G}$ 是可数生成的，且 Γ_ϵ 是弱紧的，Γ_ϵ 上的相对弱拓扑是可度量化的。根据 He 和 Sun (2018，定理 2–4)，对应

$$\phi_\epsilon(p,\gamma) = \{\mathbb{E}(f \mid \alpha) : f(i) \in D(i,p,\gamma) \text{ a.e.}\}$$

在 Γ_ϵ 中具有非空、凸、弱紧值，并且是上半连续的。对于$\gamma \in \Gamma_\epsilon$，令

$$\psi_\epsilon(\gamma) = \operatorname*{argmax}_{q \in \Delta_\epsilon} q \cdot \left(\int_I \gamma \, d\lambda - \bar{e}\right).$$

由于 Δ_ϵ 非空、紧且凸，并且目标函数关于 q是线性的，ψ_ϵ 具有非空、凸、紧值。此外，$\gamma \mapsto \int_I \gamma \, d\lambda$ 是弱连续的。因此，贝尔热最大值定理给出了 ψ_ϵ 在 Γ_ϵ上的弱 L^1 拓扑下的上半连续性。范–格利克斯伯格定理给出了 $\psi_\epsilon \times \phi_\epsilon$ 的一个不动点（p_ϵ，γ_ϵ）以及一个配置 f_ϵ，使得 $\gamma_\epsilon = \mathbb{E}(f_\epsilon \mid \alpha)$ 和 $f_\epsilon(i) \in D(i, p_\epsilon, \gamma_\epsilon)$ 几乎处处成立。严格单调性意味着预算耗尽。因此，令 $z_\epsilon = \int_I \gamma_\epsilon \, d\lambda - \bar{e}$，

$$p_\epsilon \cdot z_\epsilon = 0, \qquad q \cdot z_\epsilon \le 0 \quad (q \in \Delta_\epsilon). \tag{3}$$

特别地，$p^0 \in \Delta_\epsilon$ 给出

$$\int_I \|f_\epsilon(i)\|_1 \, d\lambda \le \int_I \|e(i)\|_1 \, d\lambda. \tag{4}$$

由于 γ_ϵ 非负且与 f_ϵ具有相同的积分，因此它满足相同的 L_1 界。

步骤2。极限价格的严格正性。选择 $\epsilon_n \downarrow 0$ 和一个子列，使得$p_n \to p \in \Delta$，并将相应的配置和外部性分别记为 f_n 和 γ_n。令$w_n(i) = p_n \cdot e(i)$，以及 $w(i) = p \cdot e(i)$。由于 $\bar{e} \gg 0$，集合 $A = \{i : w(i) > 0\}$ 的测度为$\delta > 0$。

Su假设 $p^j = 0$。利用（4）、马尔可夫不等式和一致紧性，选取

$R<\infty$ 以及一个紧集 $K\subset\wp_+$，使得

$$\lambda\{i:\|f_n(i)\|_1>R\}<\delta/4,\qquad \lambda\{i:u_i(\cdot,\gamma_n)\notin K\}<\delta/4$$

对每个 n。因此，

$$S_n=A\cap\{i:\|f_n(i)\|_1\le R\}\cap\{i:u_i(\cdot,\gamma_n)\in K\}$$

测度至少为 $\delta/2$。由于 λ(上极限$_n$ S_n) $\geq$上极限$_n$ λ(S_n)，正测度集中的个体属于无穷多个 S_n。除去个体最优性失效的零测集之并，选取一个这样的个体 i。 $\{x\geq 0$ 的紧性: $\|x\|_1\leq R\}$ 以及 K的紧性，再结合预算耗尽性，可得到一个子列，使得沿该子列

$$f_n(i)\to x,\qquad u_i(\cdot,\gamma_n)\to v\in K,\qquad p\cdot x=w(i)>0,$$

其中，效用收敛在紧消费集上一致。令q^j 表示第 j个坐标单位向量。严格单调性给出 v($x+q^j$) $>v(x)$。由连续性，选取充分小的$\chi\in$ (0,1)，使得

$$v((1-\chi)x+q^j)>v(x),\qquad p\cdot((1-\chi)x+q^j)=(1-\chi)w(i)<w(i).$$

价格和效用收敛意味着，沿该子列，对所有充分大的指标，$(1-\chi)x+q^j$ 是可负担的，并且严格偏好于 $f_n(i)$，这就产生了矛盾。因此$p\gg 0$。

步骤3。极限配置。根据步骤2，对于所有充分大的 n， p_n 的每个坐标都被某个 $\beta>0$ 从下方有界。预算可行性进而给出共同的可积上界 $\|f_n(i)\|_1\leq\beta^{-1}\|e(i)\|_1$。外部性位于一个共同的弱紧序区间中。因此，经过取子列， $\gamma_n=\mathbb{E}(f_n\mid\alpha)\rightharpoonup\gamma$ 对于某个 $\gamma\in\Gamma$.根据 He 和 Sun（2018，引理3），存在一个配置 f 满足 $f(i)\in$ Ls$_n f_n(i)$ 几乎处处成立，$\mathbb{E}($ $f\mid\alpha)=\gamma$，其中Ls$_n x_n$ 表示向量序列(x_n)的收敛子列的极限集合。

对于几乎所有的 i，取一个子列，使得 $f_n(i)\to f(i)$。由于 $p_n\to p\gg 0$ and $\gamma_n\rightharpoonup\gamma$， $D(i,\cdot,\cdot)$ 的上半连续性推出 $f(i)\in D(i,p,\gamma)$。由于 $\gamma_n\rightharpoonup\mathbb{E}(f\mid\alpha)$, $z_n=\int_I\gamma_n\,d\lambda-\bar{e}\to\int_I f\,d\lambda-\bar{e}=:z$. 对于任意 $q\in\Delta$，将 (3) 应用于 $(1-\epsilon_n)q+\epsilon_n p^0$ 并取极限，可得对每个 $q\in\Delta$ 和 $p\cdot z=0$，都有 $q\cdot z\leq 0$。因此 $z\leq 0$；由于 $p\gg 0$, $z=0$。于是市场出清，且 (f,p) 是一个均衡。 □

备注中的序数条件2。 为完整起见，在一致紧性之外采用（1）时，同样的证明仍然成立。只有步骤2有所变化。选择一个正测度集 A，在该集合上 w（i）>0，并利用总量界选择 R，使得 $\|f_n$（i）$\|_1\leq R$ 在一个测度充分小的集合之外成立。使用（1），并令例外集小于 λ（A）/4。在那里

是一个代理人 $i \in A$ 以及一个无限子列，使得沿着该子列， $\|f_n(i)\|_1 \le R$，并且不等式（1）对该代理人成立。对于该代理人，预算耗尽以及 $w_n(i) \to w(i) > 0$ 意味着

$$b_n = (1-\eta) f_n(i) + q^j, \qquad p_n \cdot b_n = w_n(i) - \eta w_n(i) + p_n^j < w_n(i)$$

当 $p^j = 0$ 时，对所有充分大的指标均成立。在所选取的子列上，根据序数条件， b_n 严格偏好于 $f_n(i)$，这就产生了矛盾。证明的其余部分不变。

接下来证明必要性。以下界将在矩形示例及其下文的嵌入中导出矛盾。

引理1（矩形界）。设 $q\colon [0,1]^2 \to [-1,1]$ 可测，并定义

$$H(v,w) = c + \int_0^v \int_0^w q(t,j)\, dj\, dt, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

假设在 $\{H > 0\}$ 上 $q = -1$ 几乎处处成立，且在$\{H < 0\}$上 $q = 1$ 几乎处处成立。那么 $|H(v,w)| \le |c|$ 处处成立。特别地，若 $c = 0$，则 $H \equiv 0$ 和 $q = 0$ 几乎处处成立。

证明。积分表示表明 H 是利普希茨连续的，且 $H_{vw} = q$ 几乎处处成立，并且 $H(v,0) = H(0,w) = c$。我们先用一个积分恒等式处理 $c = 0$。对于$c > 0$，我们构造一个函数 ϕ，使得 $|\phi(s)| \le c$，然后证明 $H(v,w) = \phi(vw)$。情形 $c < 0$ 可通过将 (H,q,c) 替换为 $(-H,-q,-c)$ 得到。

步骤 *1*。零边界值。假设 $c = 0$。符号限制仅确定 q 在 $H \neq 0$处的取值。为了得到在整个正方形上几乎处处成立的恒等式，我们首先证明

$$H_v = 0 \quad \text{a.e. on } \{H = 0\}. \tag{5}$$

为说明这一点，固定 w 并将 $h(v)$ 写为 $= H(v, w)$。由于 h 是利普希茨的， h' 几乎处处存在。在一个非孤立零点 v 处，若 h' 存在，则选取不同的零点 $v_n \to v$。于是

$$h'(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(v_n) - h(v)}{v_n - v} = 0.$$

孤立零点至多可数，而 h' 不存在的点构成一个零测集。因此， $h' = 0$ 在 $\{h = 0\}$ 上几乎处处成立。在任何满足 $h'(v) = 0$ 的零点处，我们有 $h(v+\varepsilon) = o(|\varepsilon|)$，这也给出 $(|h|)'(v) = 0$。在零点集之外，只要 h' 存在，普通的链式法则便适用。因此，$(|h|)' = \operatorname{sgn}(h)\, h'$ 几乎处处成立，其中 $\operatorname{sgn}(0) = 0$。这些结论对每个固定的 w 都成立。令 N 由以下点组成： H_v 不存在的点，或 $H = 0$ 和 H_v 存在但不为零的点。前述论证表明，对每个固定的 w，截面 $N_w = \{v : (v, w) \in N\}$ 的一维测度为零。

因此，由 Fubini 定理可得

$$\iint_{[0,1]^2} \mathbf{1}_N(v,w)\,dv\,dw = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 \mathbf{1}_N(v,w)\,dv\right)}_{=0} dw = 0.$$

因此 N 具有二维测度为零。在 N之外， $H = 0$ 意味着 $H_v = 0$，从而证明了（5）。

因此，

$$\partial_v |H| = \operatorname{sgn}(H) H_v \quad \text{a.e. on } [0,1]^2. \tag{6}$$

对于几乎处处的 v，我们取绝对连续代表 $H_v(v,\ w) = \int_0^w q(v,\ j)\,dj$。于是

$$\partial_w \left(\frac{1}{2} H_v^2\right) = H_v q \quad \text{a.e. on } [0,1]^2. \tag{7}$$

在 $\{H \neq 0\}$上，符号限制给出 $q = -\operatorname{sgn}(H)$ 几乎处处成立；在 $\{H = 0\}$上，（5）给出 $H_v = 0$ 几乎处处成立。结合（6）和（7），我们得到

$$\partial_w \left(\frac{1}{2} H_v^2\right) + \partial_v |H| = H_v\big[q + \operatorname{sgn}(H)\big] = 0 \quad \text{a.e. on } [0,1]^2. \tag{8}$$

在 $[0,v] \times [0,w]$上对（8）积分，利用 $H_v(t,\ 0) = H(0,\ j) = 0$，得到

$$\frac{1}{2} \int_0^v H_v(t,w)^2\,dt + \int_0^w |H(v,j)|\,dj = 0$$

对于每一对端点。两个积分都必须为零，因此 $H = 0$ 几乎处处成立。由连续性可得 $H \equiv 0$，从而 $q = H_{vw} = 0$ 几乎处处成立。

步骤*2*：构造并界定 $c > 0$的剖面。我们首先确定一个区域，在该区域上， H已经确定。由于 $q \geq -1$，我们有 $H(v,\ w) \geq c - vw$。因此，只要 $vw < c$，就有 $H > 0$；并且在该区域内几乎处处有 $q = -1$ 。所有终点满足 $vw \leq c$ 的下矩形，除去一个零测边界外，都位于该区域内。因此

$$H(v,w) = c - vw \qquad \text{whenever } vw \leq c.$$

如果 $c \geq 1$，则这就在整个正方形上确定了 H，并证明了该界。以下设 $0 < c < 1$。

因此，该解只取决于乘积水平 c之前的 vw 。我们从以下内容开始，构造这一单变量剖面的延拓：

$$\phi(s) = c - s, \qquad 0 \leq s \leq c.$$

它的第一个零点是 c，且 $\phi'(c) = -1$。我们通过连接取值和一阶导数相匹配的片段来延拓 ϕ 。

假设构造出的一个片段在零点 $r > 0$ 处结束，且斜率为 $d \neq 0$。令 $\sigma = \operatorname{sgn}(d) \in$

$\{-1,1\}$。为了匹配这一斜率，若 $d>0$，下一个片段必须在r 右侧紧邻处为正；若 $d<0$，则必须为负。因此， σ 指定了下一个片段离开零点时的符号。由于 $H(v,w)=c-vw$ 在初始区域上，我们寻求如下形式的延拓：$H^*(v,w)=\phi(vw)$。令 $s=vw$，可得 $\partial_{vw}H^*=(s\phi'(s))'$。在符号为 σ的片段上，符号限制因此要求 $(s\phi'(s))'=-\sigma$。两次积分可得

$$\phi(s)=A+B\log s-\sigma s.$$

选择 A 和 B，使其在 r处的函数值和斜率相匹配，由此得到

$$A+B\log r-\sigma r=0,\qquad \frac{B}{r}-\sigma=d. \tag{9}$$

求解 (9) 得到 $B=r(d+\sigma)$ $A=\sigma r-r(d+\sigma)\log r$. 因此，下一个片段被唯一确定：

$$\phi(s)=r(d+\sigma)\log(s/r)-\sigma(s-r)=\sigma\big[r(1+|d|)\log(s/r)-(s-r)\big], \tag{10}$$

其中 $d=\sigma|d|$。方程 (10) 在 ϕ 的符号为 σ时适用，因此我们使用它，直到遇到下一个零点或 $s=1$，以先发生者为准。对于 $0<c<1$，初始片段 $\phi(s)=c-s$ 给出 $r=c$，$d=-1$，且 $\sigma=-1$。代入 (10) 得到

$$\phi(s)=s-c-2c\log(s/c). \tag{11}$$

(11) 中的表达式的导数为 $1-2c/s$。因此，它从 $s=c$ 处的零点开始递减，在 $s=2c$处达到负最小值 $c(1-2\log 2)$，随后递增。由于当$s\to\infty$时，(11) 趋于 $+\infty$，因此它有唯一的下一个零点 $r_2>2c$。我们仅在 $[c,\min\{r_2,1\}]$上使用这一片段。为验证该构造可以重复进行，令 $a=r(1+|d|)>r$且 $F(s)=a\log(s/r)-(s-r)$。那么 $\phi(s)=\sigma F(s)$ $F'(s)=\frac{a}{s}-1$. 由于 $F(r)=0$， F在 (r,a) 上递增，随后递减至 $-\infty$。因此，存在唯一的 $t>r$，使得

$$F(t)=0,\qquad t>a=r(1+|d|). \tag{12}$$

此外， $F>0$在（r， t）上。因此， ϕ在（r， t）上的符号为 σ，并且

$$\phi'(t)=\sigma\left(\frac{a}{t}-1\right)\neq 0,\qquad \operatorname{sgn}\phi'(t)=-\sigma=-\operatorname{sgn}(d).$$

如果 $t<1$，那么同一规则由此定义下一段。

各部分在每个拼接点处的函数值和斜率都相匹配，因此构造出的函数经过有限步后仍为 C^1。在每个开符号区间上， $\phi(s)=A+B\log s-\sigma s$，因此

$$\phi'(s)=\frac{B}{s}-\sigma,\qquad \phi''(s)=-\frac{B}{s^2}.$$

因此，

$$s\phi''(s) + \phi'(s) = -\sigma = -\operatorname{sgn}\phi(s). \tag{13}$$

该方程在每一段内部成立； ϕ'' 在拼接点处不一定存在。为证明该构造能够达到 $s = 1$，接下来我们对 ϕ 和 ϕ' 进行界定，并排除零点聚集的情况。

定义

$$E(s) = \frac{s}{2}\phi'(s)^2 + |\phi(s)|.$$

在 ϕ 符号恒定且非零的每个开区间上，(13)给出

$$\begin{aligned} E'(s) &= \frac{1}{2}\phi'(s)^2 + s\phi'(s)\phi''(s) + \operatorname{sgn}(\phi(s))\phi'(s) \\ &= \frac{1}{2}\phi'(s)^2 + \phi'(s)\big[s\phi''(s) + \operatorname{sgn}\phi(s)\big] = -\frac{1}{2}\phi'(s)^2. \end{aligned}$$

该恒等式在每个零点处也成立。事实上， E 在拼接点 r 处连续，因为ϕ 和 ϕ' 在那里连续。对于充分小的 $h \neq 0$，由中值定理可知，在 r 与 $r + h$ 之间存在ξ_h ，使得

$$\frac{E(r+h) - E(r)}{h} = -\frac{1}{2}\phi'(\xi_h)^2.$$

令 $h \to 0$，得到 $E'(r) = -\frac{1}{2}\phi'(r)^2$。因此，在每个有限的构造区间上，包括拼接点， E均连续可微，并且在端点处具有单侧导数。

由于 E 单调不增，我们有 $|\phi(s)| \leq E(s) \leq E(0) = c.$ 。为了控制相邻零点之间的距离，还要注意

$$(sE(s))' = E(s) + sE'(s) = |\phi(s)| \geq 0.$$

At t第一个零点 $s = c$, $E(c) = c/2$。在任意构造出的零点 $r \geq c$ 处，记 $\phi'(r) = d$。该 n

$$\frac{(rd)^2}{2} = rE(r) \geq cE(c) = \frac{c^2}{2}, \qquad \text{so} \qquad r|d| \geq c.$$

由（12），下一个零点 t（如果能到达）出现在转向点 $r(1 + |d|)$ 之后，因此 $t - r > r|d| \geq c.$ 相邻零点之间的距离大于 c，所以在 $[0, 1]$中只能出现有限多个。每个显式片段在任意有限正自变量处均为有限值。因此，该构造定义了 $\phi \in C^1([0, 1])$，且 $|\phi(s)| \leq c$对每个 $s \in [0, 1]$均成立。该函数只有有限个零点，并且在每个零点 $\phi'(r) \neq 0$ 处 r。

步骤*3*：证明 H 遵循构造的剖面。令 $H^*(v, w) = \phi(vw)$，并令$q^*(v, w) = -\operatorname{sgn}\phi(vw)$，其中 $v, w \in [0, 1]$。现在我们证明， $H = H^*$ 在 $[0, 1]^2$上成立。步骤2已经在 $vw \leq c$时给出了这一等式。

在初始片段上， $\phi'' = 0$。在每个后续片段上，（10）给出

$$\phi''(s) = -\frac{r(d+\sigma)}{s^2},$$

由于其有界， $s \geq r > 0$。由于分段数量有限，且 ϕ' 在各拼接点处连续， ϕ' 是利普希茨函数，因此绝对连续。根据（13），

$$H^*_{vw}(v,w) = \phi'(vw) + vw\phi''(vw) = q^*(v,w) \quad \text{a.e.}$$

对 $H^*_{vw} = q^*$ 在 $[0,v] \times [0,w]$ 上积分，并利用 $H^*(v,\ 0) = H^*(0,\ w) = c$，可得

$$H^*(v,w) = c + \int_0^v \int_0^w q^*(t,j)\, dj\, dt.$$

因此，当 $v = 0$ 或 $w = 0$ 时， H 和 H^* 都等于 c，且其二重积分表示的被积函数分别为 q 和 q^*。步骤2证明了当 $vw \leq c$时二者相等。

Let

$$\rho = \sup\{a \in [0,1] : H(v,w) = \phi(vw) \text{ whenever } vw \leq a \text{ and } (v,w) \in [0,1] \times [0,1]\}.$$

我们有 $\rho \geq c > 0$。根据 ρ的定义，当 $vw < \rho$时等式成立。若 $vw = \rho$，取 $v_n = (1 - 1/n)v$。于是 $v_n w < \rho$，由连续性可得 $H(v,w) = \lim_{n\to\infty} H(v_n, w) = \lim_{n\to\infty} \phi(v_n w) = \phi(\rho)$。因此，当 $vw \leq \rho$时， $H(v,w) = \phi(vw)$。假设 $\rho < 1$。在$\{vw \leq \rho\}$上， $H = H^*$，因此符号限制给出 $H^* \neq 0$成立处几乎处处有 $q = q^*$。由于 ϕ 有有限个零点 r_k， H^* 的零点集是有限个集合 $\{vw = r_k\}$的并，每个集合的二维测度均为零。因此，在 $\{vw \leq \rho\}$上几乎处处有 $q = q^*$。

对于 $s = vw > \rho$，令 $D = [0,v] \times [0,w] \cap \{tj > \rho\}$。由于 $q = q^*$ 在 $([0,v] \times [0,w])$ 上几乎处处成立 $\setminus D$，因此 $q - q^*$ 在该集合上的积分为零。 D 在 t 处的垂直截面为 $(\rho/t,\ w]$，当 $\rho/w < t \leq v$ 时成立，否则为空。因此 $|q - q^*| \leq 2$ 给出

$$\begin{aligned} |H(v,w) - \phi(s)| &\leq \iint_D |q - q^*|\, dt\, dj \leq 2\int_{\rho/w}^{v} \left(w - \frac{\rho}{t}\right) dt \\ &= 2\big[s - \rho - \rho\log(s/\rho)\big] = 2\int_\rho^s \frac{u-\rho}{u}\, du \\ &\leq \frac{2}{\rho}\int_\rho^s (u-\rho)\, du = \frac{(s-\rho)^2}{\rho}. \end{aligned} \tag{14}$$

这个估计仅取决于 s，因此对乘积水平相同的所有点都一致成立。

如果 $\phi(\rho) \neq 0$，由连续性可得

$$|\phi(s)| \geq \frac{|\phi(\rho)|}{2} > \frac{(s-\rho)^2}{\rho}$$

对于 $s > \rho$ 与 ρ 足够接近。如果 $\phi(\rho) = 0$，那么 $\phi'(\rho) \neq 0$ 以及 $\phi(s)/(s-\rho) \to \phi'(\rho)$ a s

$s \downarrow \rho$。因此

$$|\phi(s)| \geq \frac{|\phi'(\rho)|}{2}(s-\rho) > \frac{(s-\rho)^2}{\rho}$$

对于 $s > \rho$ 充分接近 ρ。无论哪种情况，取 $\delta \in (0, 1-\rho)$ 足够小，使得 (14) 蕴含

$$|H(v,w) - \phi(s)| \leq \frac{(s-\rho)^2}{\rho} < |\phi(s)|, \qquad \rho < s = vw \leq \rho + \delta. \tag{15}$$

由 (15)，若 $\phi(s) > 0$，则

$$H(v,w) \geq \phi(s) - |H(v,w) - \phi(s)| > \phi(s) - |\phi(s)| = 0.$$

同理，若 $\phi(s) < 0$，则

$$H(v,w) \leq \phi(s) + |H(v,w) - \phi(s)| < \phi(s) + |\phi(s)| = 0.$$

因此，只要 $\rho < vw \leq \rho + \delta$，$H(v,w)$ 与 $\phi(vw)$ 就具有相同的非零符号。

它们的符号限制现在迫使 $q = q^*$ 在 $\{vw \leq \rho + \delta\}$ 上几乎处处成立。所有终止于该区域的下矩形都完全包含在其中。对相等的被积函数积分可得，只要 $vw \leq \rho + \delta$，就有 $H(v,w) = H^*(v,w) = \phi(vw)$，这与 ρ 的定义矛盾。因此，在整个正方形上，$\rho = 1$ 和 $|H(v,w)| = |\phi(vw)| \leq c$。结合步骤 1 以及 $c < 0$ 的符号反转，这就证明了该引理。

□

定理 1的必要性证明。固定 $l \geq 2$ 和给定的社会类型函数 $\alpha: I \to T$，并假设社会匿名性不成立。记 $\mathcal{G} = \sigma(\alpha)$。存在 $D \in \mathcal{I}$，满足 $\zeta = \lambda(D)$，> 0使得 D 的每个可测子集都与 $D \cap G$ 在零测集意义下相同，且 $G \in \mathcal{G}$对某个 D成立。我们在 D上嵌入矩形示例，同时保持代理人空间、社会类型函数和商品数量不变。

步骤 1。在单位正方形上表示子经济。令 $\lambda_D = \lambda|_D/\zeta$。概率空间（$D$，$\mathcal{G}^D$，$\lambda_D$）是无原子的：任意正测度集都可以在 $\mathcal{I}^D$ 中被分割，并且所得子集在 $\mathcal{G}^D$ 中都有代表（模零测集意义下）。由于 $\mathcal{G}^D$ 是可数生成的，He、Sun 和 Sun（2017，引理 6）给出了一个从（D，$\mathcal{G}^D$，λ_D）到勒贝格单位区间的保测映射，该映射生成 $\mathcal{G}^D$（模零测集意义下）。将其与从 $[0,1]$ 到 $[0,1]^2$ 的保测博雷尔同构复合（Srivastava，1998，定理 3.4.23），我们得到一个 $\mathcal{G}^D$-可测映射 $\psi: D \to [0,1]^2$，满足 $\lambda_D \circ \psi^{-1} = \text{Leb}_{[0,1]^2}$，$\sigma(\psi)$ 在 λ_D-零测集意义下成立。由于 $[0,1]^2$ 是 Polish 空间，Srivastava（1998，命题 3.3.4）给出了一个 $\mathcal{G}$-可测扩展 $\varphi: I \to [0,1]^2$，满足 $\varphi|_D = \psi$。由于 φ 是 $\sigma(\alpha)$-可测的，存在一个博雷尔映射 $\vartheta: T \to [0,1]^2$，使得 $\varphi = \vartheta \circ \alpha$。对于 $z = (v, w)$，定义

$$B_z = \{i \in I : \varphi^1(i) \leq v,\ \varphi^2(i) \leq w\} \in \mathcal{G}.$$

因此，$B_z = \alpha^{-1}(\vartheta^{-1}([0,v] \times [0,w]))$：比较组由原始社会类型决定。映射 φ 提供辅助坐标，不会取代 α。

步骤2。构造并验证经济。对于 $x \in \mathbb{R}^l_+$ 以及任意 $\mathcal{I}$-可测映射$h:\ I \to \mathbb{R}^l_+$，定义

$$\widehat{x} = \left(x^1, \frac{1}{l-1}\sum_{j=2}^{l} x^j\right), \qquad \widehat{h}(i) = \left(h^1(i), \frac{1}{l-1}\sum_{j=2}^{l} h^j(i)\right). \tag{16}$$

令 $e(i) = 1_D(i)\mathbf{1}_l$。回忆一下，$\Gamma = L_1((I,\ \mathcal{G},\ \lambda);\ \mathbb{R}^l_+)$ 配备相对弱拓扑。对于 $z \in [0,1]^2$ 和 $\gamma \in \Gamma$，定义

$$A_k(z;\gamma) = \frac{1}{\zeta}\int_{B_z} \widehat{\gamma}^k \, d\lambda, \qquad k = 1, 2,$$

其中 $\widehat{\gamma}$ 由（16）定义。对于（x，γ）$\in \mathbb{R}^l_+ \times \Gamma$，令

$$u_i(x,\gamma) = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\widehat{x}^k}{1 + A_k(\varphi(i);\gamma)}\right)^{3/2}.$$

总禀赋为 $\zeta\mathbf{1}_l \gg 0$。对于每个固定的 z，$A_k(z;\cdot)$ 是 L^1 上的有界线性泛函。因此，u_i 关于（x，γ）联合连续。由于（$1 + A_k(\varphi(i);\ \gamma)$）$^{-3/2} > 0$ 对于 $k = 1$，2 成立，并且增加任一商品都会严格增加一个复合数量，u_i 对每种商品都是严格单调的。对于固定的 γ，函数（z，i）$\mapsto \mathbf{1}_{B_z}(i)\widehat{\gamma}^k(i)$ 是联合可测的。因此，对 i 积分表明，$z \mapsto A_k(z;\gamma)$ 是博雷尔可测的。由于 φ 可测，对于每个固定的（x，γ），$i \mapsto u_i(x,\ \gamma)$ 都是可测的。

如果对所有 n都有 $\|\gamma_n\|_{L^1} \le M$，那么 $0 \le A_k(z;\gamma_n) \le M/\zeta$. 因此，所有条件效用都属于

$$\mathcal{K}_b := \left\{x \to b_1(\widehat{x}^1)^{3/2} + b_2(\widehat{x}^2)^{3/2} : (b_1,b_2) \in [b,1]^2\right\}, \qquad \text{where} \qquad b = (1+M/\zeta)^{-3/2} > 0.$$

由于 $\mathcal{K}_b$ 是 $[b,1]^2$的连续像，因此它在紧开拓扑下是紧的。由于所有条件效用都属于由严格单调效用构成的公共紧集 $\mathcal{K}_b$，因此可推出一致紧性。

步骤3。均衡中的价格与消费选择。假设 $(f,\ p)$ 是一个均衡。严格单调性要求 $p \gg 0$。D 之外的个体收入为零，因此消费为零。商品2、.....、l 的价格必须相等。否则，用较便宜的替代品替代一定数量的较贵商品，并将节省下来的收入用于购买商品1，就会严格提高效用。因此，较贵商品的需求将为零，这与其正的总供给相矛盾。

由于 $p^2 = \cdots = p^l$，由 $\widetilde{p} = \left(p^1,\ (l-1)p^2\right)$. 定义复合价格。于是

$$p \cdot x = p^1x^1 + p^2\sum_{j=2}^{l} x^j = \widetilde{p}^1\widehat{x}^1 + \widetilde{p}^2\widehat{x}^2.$$

将价格标准化，使得 $\widetilde{p}^1+\widetilde{p}^2=1$。于是， D 中的每个代理人的收入均为 1。固定均衡外部性 $\gamma=\mathbb{E}(f\mid\alpha)$。对于任意满足 $\widetilde{p}\cdot a\le 1$ 的 $a=(a^1,a^2)\in\mathbb{R}^2_+$，原消费束 $\xi(a)=(a^1,a^2,\dots,a^2)\in\mathbb{R}^l_+$ 满足 $\widehat{\xi\ a}(\ )=a$ 以及 $p\cdot\xi(a)=\widetilde{p}\cdot a\le 1$。因此， $\xi(a)$ 对 D中的每个代理人都是可负担的。原经济中的个体最优性意味着，对于每一个这样的 a 以及几乎所有的 $i\in D$， $u_i(f(i)\ \gamma)\ge u_i(\xi(a)\ \gamma)$。每个可负担的复合商品束 a 在原经济中都有一个可负担的实现 $\xi(a)$，且 $\xi(a)=a$。令 f 为由（16）定义的复合配置。由于效用仅取决于复合数量，个体最优性意味着， $f(i)$ 在 $\{a\in\mathbb{R}^2_+$ 上最大化诱导效用： $\widetilde{p}\cdot a\le 1\}$。预算耗尽给出 $\widetilde{p}\cdot\widehat{f}(i)=1$。预算线上的任何两个坐标均为正的商品束都严格位于两个角点之间。因此，复合数量上的效用严格凸性使得至少有一个角点严格更优。因此，

$$\widehat{f}(i)\in\left\{(1/\widetilde{p}^1,0),(0,1/\widetilde{p}^2)\right\}\quad\text{for almost every } i\in D.$$

步骤*4*。应用矩形界。令 $D_1=\{i\in D:\ \widehat{f}^1(i)>0\}$. 根据 D 的定义性质以及 $\varphi|_D$的生成性质，存在一个博雷尔集 $C\subseteq[0,1]^2$，使得$D_1=D\cap\varphi^{-1}(C)$ 模去零测集成立。定义

$$g(z)=\begin{cases}(1/\widetilde{p}^1,0), & z\in C,\\ (0,1/\widetilde{p}^2), & z\notin C.\end{cases}$$

于是，在 D上几乎处处有 $f=g\circ\varphi$。对于 $z=(v,\ w)$ 和 $k=1,\ 2$,

$$\begin{aligned}A_k(z;\mathbb{E}(f\mid\alpha))&=\frac{1}{\zeta}\int_{B_z}\mathbb{E}(\widehat{f}^k\mid\alpha)\,d\lambda=\frac{1}{\zeta}\int_{B_z}\widehat{f}^k\,d\lambda\\&=\frac{1}{\zeta}\int_{D\cap B_z}g^k(\varphi(i))\,d\lambda(i)=\int_0^v\int_0^w g^k(t,j)\,dj\,dt=:F_k(v,w).\end{aligned}\tag{17}$$

第一个等式使用了 A_k 的定义和 $x\mapsto\widehat{x}$的线性性。第二个等式由 $B_z\in\mathcal{G}$ 以及条件期望的性质得到。第三个等式使用了在 D之外的 $f=0$ 以及在 D上的 $\widehat{f}=g\circ\varphi$，除去零测集后成立。第四个等式由 $B_z=\varphi^{-1}([0,v]\times[0,w])$ 以及 φ 在 $\lambda_D=\lambda|_D/\zeta$下服从均匀分布得到。

代入 $z=(1,\ 1)$ 得到（17）

$$(F_1(1,1),F_2(1,1))=\frac{1}{\zeta}\int_I\widehat{f}\,d\lambda=\frac{1}{\zeta}\int_I\widehat{e}\,d\lambda=(1,1).\tag{18}$$

第一个等式使用了 $B_{(1,1)}=I$。第二个等式由市场出清和 $x\mapsto\widehat{x}$ 的线性性质推出。最后一个等式使用了 $\widehat{e}=1_D(1,\ 1)$ 以及 $\lambda(D)=\zeta$。令 $c=\widetilde{p}^1-\widetilde{p}^2$， $q=\widetilde{p}^1g^1-\widetilde{p}^2g^2$，并定义

$$H=\widetilde{p}^1(1+F_1)-\widetilde{p}^2(1+F_2).\tag{19}$$

由于 g 仅取 $(1/\widetilde{p}^1,\ 0)$ 和 $(0,\ 1/\widetilde{p}^2)$ 这两个值，因此有 $(\widetilde{p}^1g^1,\ \widetilde{p}^2g^2)\in\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$.

因此 $q \in \{-1,1\}$。利用（17）和（19），我们得到

$$\begin{aligned} H(v,w) &= c + \widetilde{p}^{1} F_1(v,w) - \widetilde{p}^{2} F_2(v,w) \\ &= c + \int_0^v \int_0^w \left[\widetilde{p}^{1} g^{1}(t,j) - \widetilde{p}^{2} g^{2}(t,j)\right] dj\, dt = c + \int_0^v \int_0^w q(t,j)\, dj\, dt. \end{aligned}$$

在坐标（v, w）处，将全部收入用于复合商品 k 可获得效用

$$U_k(v,w) = \{\widetilde{p}^{k}[1 + F_k(v,w)]\}^{-3/2}.$$

对于几乎处处的 $i \in D$，记（v, w）$= \varphi$（i）。如果 H（v, w）> 0，则 U_2（v, w）$> U_1$（v, w），因此代理人选择第二种复合商品，且 q（v, w）$= -1$。如果 H（v, w）< 0，则U_1（v, w）$> U_2$（v, w），因此代理人选择第一种复合商品，且 q（v, w）$= 1$。个体最优性给出了在 φ（i）处的符号限制，这对 λ_D-几乎处处的 $i \in D$成立。由于在 λ_D下，φ 在 $[0,1]^2$ 上均匀分布，因此相同的符号限制对于正方形上关于二维Lebesgue测度几乎处处成立。因此，引理1给出$|H| \le |c|$。由（18），H（1，1）$= 2\widetilde{p}^{1} - 2\widetilde{p}^{2} = 2c$. 因此 $2|c| \le |c|$，所以 $c = 0$。随后该引理给出 $q = 0$ 几乎处处成立，这与 $q \in \{-1,1\}$矛盾。因此，社会匿名性的缺失导致存在一个 l-商品经济（$\mathcal{E}$，α），其具有给定的代理人空间和社会类型函数，但不存在均衡。 consequently，陈述（ii）蕴含社会匿名性。

□

A.2 定理2 的证明

充分性证明采用一个对生产集的紧限制和一个对价格单纯形的近似。在辅助不动点处，对生产的限制不起作用，因此企业已经在其原始生产集上实现利润最大化。起初，我们仅将严格可负担的改进排除在家庭选择之外。一致紧性和可补偿性，再加上收入条件，可以排除极限价格为零的情形。随后，条件选择给出一个极限配置，其个体最优性由收入分散性推出。

证明。(i)⇒(ii)：假设 α 满足社会匿名性，因此 $\mathcal{I}$ 处处不等价于$\mathcal{G} = \sigma$（α）。考虑任意具有给定代理人空间和社会类型函数的广义经济。记 $d = l + m$、 $\bar{e} = \int_I e\, d\lambda$和 $\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}^{d}_{+} : \ \sum_{j=1}^{d} p^{j} = 1 \right\}$。

步骤 *1.* 辅助价格、生产与家庭选择。 令 $C := \operatorname{rec} Y = \{c \in \mathbb{R}^{d} : y + tc \in Y$对所有 $y \in Y$, $t \ge 0\}$. 由于 Y是闭凸集， C是闭凸锥。自由处置和 $0 \in Y$给出 $-\mathbb{R}^{d}_{+} \subseteq C \subseteq Y$。因此，不可逆性意味着 $C \cap (-C) = \{0\}$。令 $S = \{c \in C : \ \|c\|_2 = 1\}$。这个集合非空且紧，并且 $0 \notin \operatorname{co} S$：否则，一个等于零点的凸组合会使一个非零向量及其相反向量都属于 C。对 0 和紧凸集 co S进行严格分离，可得 $\omega \in \mathbb{R}^{d}$和 $\eta > 0$，使得对所有 $s \in S$都有 $\omega \cdot s \le -\eta$。经缩放后，对所有 $c \in C$都有 $\omega \cdot c \le -\eta \|c\|_2$。因此，只要 $\|\omega' - \omega\|_2 < \eta$，柯西–施瓦茨不等式就给出 $\omega' \cdot c = \omega \cdot c + (\omega' - \omega) \cdot c \le (-\eta + \|\omega' - \omega\|_2)\|c\|_2 \le 0$，

对所有 $c \in C$均成立。因此，极锥 $C^\circ := \{\omega' \in \mathbb{R}^d \colon \omega' \cdot c \le 0$ 对所有 $c \in C\}$ 均成立，包含开球 $\mathcal{O}(\omega,\ \eta) := \{\omega' \in \mathbb{R}^d \colon \|\omega' - \omega\|_2 < \eta\}$。因此 $\operatorname{int} C^\circ \neq \varnothing$。

取 $p^0 \in \operatorname{int} C^\circ$，其中 $\sum_j p^{0,j} = 1$。于是，对每个非零的 $c \in C$，都有 $p^0 \gg 0$ 和 $p^0 \cdot c < 0$。对于 $b \in \mathbb{R}$，上水平集 $L_b := \{y \in Y \colon p^0 \cdot y \ge b\}$ 是闭的。若它无界，则可选取 $y_n \in L_b$，使得 $\|y_n\|_2 \to \infty$，并在取子列后得到 $y_n/\|y_n\|_2 \to c$，且 $\|c\|_2 = 1$。对于任意 $y \in Y$和 $t \ge 0$，由凸性可得，对所有充分大的 n，$(1 - t/\|y_n\|_2)y + (t/\|y_n\|_2)y_n \in Y$。取极限并利用闭性可得 $y + tc \in Y$，因此 $c \in C$。但 $p^0 \cdot y_n \ge b$意味着 $p^0 \cdot c \ge 0$，这与非零的 $c \in C$满足 $p^0 \cdot c < 0$ 相矛盾。因此，L_b 有界，从而是紧的。固定 $\bar{Y} = \{y \in Y \colon p^0 \cdot y \ge -p^0 \cdot \bar{e} - 1\}$. 该集合是紧凸集，且包含零点。定义

$$\bar{\pi}(p) = \max_{y \in \bar{Y}} p \cdot y, \qquad \Phi(p) = \operatorname*{argmax}_{y \in \bar{Y}} p \cdot y, \qquad M = \max_{p \in \Delta} \bar{\pi}(p).$$

利润函数 $\bar{\pi}(p)$ 连续且非负，而 Φ 是上半连续的，其值非空、紧且凸。

对于 $0 < \varepsilon < 1$，令

$$\Delta_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\Delta + \varepsilon p^0, \qquad \eta_\varepsilon = \varepsilon \min_j p^{0,j} > 0.$$

对于带有 $p \gg 0$ 的 $p \in \Delta$，保留完整的家庭预算

$$B_i(p) = \{x \in X : p \cdot x \le w_i(p)\}, \qquad w_i(p) = p \cdot e(i) + \theta(i)\bar{\pi}(p).$$

在 $p \in \Delta_\varepsilon$ 下，每个可负担束都满足

$$\|x\|_1 \le b_\varepsilon(i) := \eta_\varepsilon^{-1}\big(\|e(i)\|_1 + M\theta(i)\big).$$

令 $Q_i(p, \gamma)$ 由 $B_i(p)$ 中不存在严格可负担改进的商品束组成：

$$Q_i(p,\gamma) = \{x \in B_i(p) : \text{there is no } z \in X \text{ with } z \succ_i (\gamma) x \text{ and } p \cdot z < w_i(p)\}.$$

由于 $B_i(p)$ 非空且紧，且 $\succ_i (\gamma)$ 具有传递性和自反性，且其图是开集，Hildenbrand（1974，定理 3，第 29 页）保证 $B_i(p)$ 存在一个 $\succ_i (\gamma)$-极大元。每个这样的元素都属于 $Q_i(p,\gamma)$，因此 $Q_i(p,\gamma) \neq \varnothing$。预算可行性在取极限时得以保持。由收入的连续性和偏好图的开性，不等式 $z \succ_i (\gamma)x$ 和 $p \cdot z < w_i(p)$ 在局部范围内仍然成立。因此，Q_i 具有闭图。界 $b_\varepsilon(i)$ 将所有值限制在同一个紧集内，所以 Q_i 在 (p,γ) 上是紧值且上半连续的。固定 (p,γ) 和一个可数稠密集 $X_0 \subseteq X$。由于严格偏好和严格可负担性在改进商品束方面是开条件，任何此类改进都可以选自 X_0。因此，是否属于 $Q_i(p,\gamma)$ 由预算约束和可数个可测条件决定。因此，$i \mapsto Q_i(p,\gamma)$ 具有一

可测图。其紧值以及代理人空间的完备性进而意味着该对应是可测的。最后，每个 $x \in Q_i(p,\ \gamma)$ 都会用尽预算。否则，只需稍微增加一种可分商品，就能得到严格可负担的改进。

考虑凸集

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \Gamma : 0 \le \gamma^j \le \mathbb{E}(b_\varepsilon \mid \alpha) \text{ a.e., } j = 1, \dots, d\}.$$

共同的可积上界保证了一致可积性。由于 Γ_ε 也是弱闭的，根据邓福德–佩蒂斯定理，它是弱紧的。由于 $\mathcal{G}$ 是可数生成的，Γ_ε 上的相对弱拓扑可度量化。附录 A.1 步骤 1 中的条件聚合论证表明，

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(p,\gamma) = \{\mathbb{E}(f \mid \alpha) : f(i) \in Q_i(p,\gamma) \text{ a.e.}\}$$

是上半连续的，取值于 Γ_ε，且其值非空、凸且弱紧。价格对应

$$A_\varepsilon(\gamma, y) = \operatorname*{argmax}_{q \in \Delta_\varepsilon} q \cdot \left(\int_I \gamma \, d\lambda - \bar{e} - y \right)$$

是上半连续的，且在 Δ_ε中具有非空、紧且凸的值。Fan–Glicksberg 定理应用于 $A_\varepsilon \times \mathcal{Q}_\varepsilon \times \Phi$ 在 $\Delta_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \times Y$ 上，得到一个不动点 $(p_\varepsilon,\ \gamma_\varepsilon,\ y_\varepsilon)$ 和一个配置 f_ε，使得

$$\gamma_\varepsilon = \mathbb{E}(f_\varepsilon \mid \alpha), \qquad f_\varepsilon(i) \in Q_i(p_\varepsilon, \gamma_\varepsilon) \quad \text{a.e.}$$

记 $x_\varepsilon = \int_I f_\varepsilon \, d\lambda$ 和 $z_\varepsilon = x_\varepsilon - \bar{e} - y_\varepsilon$。对预算耗尽条件积分，并利用 $\int_I \theta \, d\lambda = 1$，得到 $p_\varepsilon \cdot x_\varepsilon = p_\varepsilon \cdot \bar{e} + \bar{\pi}(p_\varepsilon) = p_\varepsilon \cdot (\bar{e} + y_\varepsilon)$。因此，价格对应给出

$$p_\varepsilon \cdot z_\varepsilon = 0, \qquad q \cdot z_\varepsilon \le 0 \quad (q \in \Delta_\varepsilon). \tag{20}$$

步骤2。生产约束未生效。由于 $p^0 \in \Delta_\varepsilon$ 且 $x_\varepsilon \ge 0$，

$$p^0 \cdot y_\varepsilon = p^0 \cdot x_\varepsilon - p^0 \cdot \bar{e} - p^0 \cdot z_\varepsilon \ge -p^0 \cdot \bar{e} > -p^0 \cdot \bar{e} - 1. \tag{21}$$

假设某个 $y' \in Y$ 满足 $p_\varepsilon \cdot y' > p_\varepsilon \cdot y_\varepsilon$。对于 $0 < t < 1$，凸性给出 $y_t := (1-t)\, y_\varepsilon + t y' \in Y$。由（21）以及 t 中的连续性，$p^0 \cdot y_t > -p^0 \cdot \bar{e} - 1$ 对于所有充分小的 $t > 0$，因此 $y_t \in Y$ 且 $p_\varepsilon \cdot y_t > p_\varepsilon \cdot y_\varepsilon$，这与 y_ε 相对于 Y 的最优性相矛盾。因此

$$y_\varepsilon \in \operatorname*{argmax}_{y \in Y} p_\varepsilon \cdot y, \qquad \bar{\pi}(p_\varepsilon) = \sup_{y \in Y} p_\varepsilon \cdot y. \tag{22}$$

此外，（20）给出

$$0 \le p^0 \cdot x_\varepsilon \le p^0 \cdot \bar{e} + p^0 \cdot y_\varepsilon \le p^0 \cdot \bar{e} + \max_{y \in \bar{Y}} p^0 \cdot y. \tag{23}$$

由于 $p^0 \gg 0$ 且 $\bar{Y}$ 是紧集，（23）推出（x_ε）一致有界。由于 $\gamma_\varepsilon = \mathbb{E}(f_\varepsilon \mid \alpha)$ 非负，且其积分与 f_ε相同，因此（γ_ε）在 L^1中一致有界。最后，$y_\varepsilon \in Y$和 $z_\varepsilon = x_\varepsilon - \bar{e} - y_\varepsilon$ 推出（z_ε）一致有界。

取 $\varepsilon_n \downarrow 0$ 以及一个子列，使得

$$p_n \to p \in \Delta, \qquad y_n \to y \in \bar{Y}, \qquad x_n \to x, \qquad z_n \to z,$$

其中，下标 n 替换 ε_n。将（20）应用于 $(1-\varepsilon_n)\, q + \varepsilon_n p^0$ 并取极限，得到 $q \cdot z \le 0$ 对每个 $q \in \Delta$都成立，因此 $z \le 0$。由（22），$p_n \cdot y_n \ge p_n \cdot y'$ 对每个 $y' \in Y$都成立。结合 $p_n \cdot z_n = 0$ 和 $x_n = \bar{e} + y_n + z_n$取极限，得到

$$z \le 0, \qquad p \cdot z = 0, \qquad x = \bar{e} + y + z, \qquad y \in \operatorname*{argmax}_{y' \in Y} p \cdot y'. \tag{24}$$

由于 $y_n \in Y$且 Y是闭集，$y \in Y$。由（24），y在 Y上实现利润最大化。因此$\bar{\pi}(p) = \pi(p) = p \cdot y < \infty$。此外，（22）推出 $\bar{\pi}(p_n) = p_n \cdot y_n \to \pi(p)$。

步骤*3*。极限价格严格为正。设

$$w_n(i) = p_n \cdot e(i) + \theta(i)\bar{\pi}(p_n), \qquad w(i) = p \cdot e(i) + \theta(i)\pi(p).$$

则几乎处处有 $w_n(i) \to w(i)$。根据资源条件，存在某个 $\widehat{y} \in Y$ satisfies$\bar{e} + \widehat{y} \gg 0$，因此

$$\int_I w \, d\lambda = p \cdot \bar{e} + \pi(p) \ge p \cdot (\bar{e} + \widehat{y}) > 0. \tag{25}$$

设 $E(p) = \{p \cdot (0^l, z) : z \in \mathbb{Z}_+^m\}$ 并定义

$$A = \begin{cases} \{i : w(i) > 0\}, & \sum_{h=1}^{l} p^h = 0, \\ \{i : w(i) > 0,\ w(i) \notin E(p)\}, & \sum_{h=1}^{l} p^h > 0. \end{cases}$$

由（25），$\lambda\{i : w(i) > 0\} > 0$。在第二种情况下，条件（10）以及 的可数性 $E(p)$ 意味着 $\lambda(A) > 0$ 当 $m \ge 1$时，而 $E(p) = \{0\}$ 当 $m = 0$时。$\lambda(A) > 0$ 在两种情况下均成立。

假设 $p^j = 0$，并记 $\delta = \lambda(A) > 0$。由于 $f_n \ge 0$ 和 (x_n) 一致有界，马尔可夫不等式给出 $R < \infty$，使得 $\lambda\{i : \|f_n(i)\|_1 > R\} < \delta/4$ 对每个 n 都成立。此外，$\gamma_n = \mathbb{E}(f_n \mid \alpha)$ 满足 $\int_I \|\gamma_n(i)\|_1 \, d\lambda = \|x_n\|_1$。因此，条件（9）给出一个紧集 $K \subseteq \wp_+$，使得 $\lambda\{i : \succ_i (\gamma_n) \notin K\} < \delta/4$对每个 n都成立。因此 $S_n :=$

$\{i \in A:\ \|f_n(i)\|_1 \le R,\ \succ_i(\gamma_n) \in K\}$ 满足 $\lambda(S_n) \ge \delta/2$。因此 $\lambda(\limsup_n S_n) \ge \limsup_n \lambda(S_n) \ge \delta/2$。由于下列性质在一个公共零测集之外成立，我们可以选取 $i \in \limsup_n S_n$，使得 $f_n(i) \in Q_i(p_n,\ \gamma_n)$ 且 $p_n \cdot f_n(i) = w_n(i)$ 对每个 n 都成立，并且 $w_n(i) \to w(i)$。这个代理人属于 S_n，对无穷多个 n 都成立。限制到这些指标上，$\{x \in X$ 的紧性：$\|x\|_1 \le R\}$ 和 K 给出

$$f_n(i) \to a \in X, \qquad \succ_i(\gamma_n) \to \succ^* \in K.$$

预算耗尽和收入收敛意味着

$$p \cdot a = \lim_n p_n \cdot f_n(i) = \lim_n w_n(i) = w(i) > 0.$$

我们构造 $b \in X$，使得 $b \succ^* a$ 且 $p \cdot b < w(i)$。若 $\sum_{h=1}^{l} p^h = 0$，则针对 $\succ^* \in K$ 的条件（8）给出 $c \in \mathbb{R}^l_+$，使得 $b = (c,\ 0^m) \succ^* a$，且 $p \cdot b = 0 < w(i)$。否则，$p \cdot a = w(i) \notin E(p)$ 意味着对某个可分坐标 $h \le l$，有 $p^h a^h > 0$。令 q^k 表示第k个坐标单位向量。严格单调性意味着 $a + q^j \succ^* a$。对于足够小的$t \in (0,\ a^h)$，严格偏好图的开性意味着

$$b = a + q^j - tq^h \succ^* a, \qquad p \cdot b = w(i) - tp^h < w(i).$$

无论哪种情况，价格和收入收敛都意味着沿着该子列最终有 $p_n \cdot b < w_n(i)$。严格偏好图的补集的闭收敛也意味着最终有 $b \succ_i (\gamma_n) f_n(i)$。否则，极限点对$(b,\ a)$将属于$\succ^*$的补集。这与 $f_n(i) \in Q_i(p_n,\ \gamma_n)$矛盾。因此 $p \gg 0$。由于 $z \le 0$ 且$p \cdot z = 0$，我们得到 $z = 0$ 和 $x = \bar{e} + y$。

步骤*4*。恢复均衡配置。p_n 的所有坐标最终都超过某个$\beta > 0$，因此预算可行性给出了共同的可积上界

$$\|f_n(i)\|_1 \le \beta^{-1}\big(\|e(i)\|_1 + M\theta(i)\big).$$

由于(γ_n)位于一个共同的弱紧序区间内，取一个子列使得$\gamma_n \rightharpoonup \gamma$。根据 He 和 Sun（2018，引理3），存在一个可积的 f，使得 $f(i) \in \mathrm{Ls}_n f_n(i)$ 几乎处处成立，并且 $\mathbb{E}(f \mid \alpha) = \gamma$。由于 X 是闭集，且 $f(i) \in \mathrm{Ls}_n f_n(i)$，我们有 $f(i) \in X$ 几乎处处成立。对常向量使用 $\gamma_n \rightharpoonup \gamma$ 并利用$\mathbb{E}(f \mid \alpha) = \gamma$，得到

$$\int_I f\,d\lambda = \int_I \gamma\,d\lambda = \lim_n \int_I \gamma_n\,d\lambda = x = \bar{e} + y. \tag{26}$$

对于几乎处处的 i，选取一个子列，使得 $f_n(i) \to f(i)$。对预算不等式取极限，得到 $p \cdot f(i) \le w(i)$。如果某个 $b \in X$ 满足 $b \succ_i (\gamma) f(i)$ 且 $p \cdot b < w(i)$，那么根据偏好图的开性以及价格和收入的收敛性，可知沿着该子列最终有 $b \succ_i (\gamma_n) f_n(i)$ 且 $p_n \cdot b < w_n(i)$。这与 $f_n(i) \in$

$Q_i(p_n,\ \gamma_n)$。因此，几乎处处有 $f(i) \in Q_i(p,\ \gamma)$。

由于 $p \gg 0$，零收入主体的预算为 $\{0\}$。对于几乎处处的正收入主体， $w(i) \notin E(p)$：当 $m \geq 1$ 时，这由条件（10）得出；当 $m = 0$ 时，则由 $E(p) = \{0\}$ 得出。假设 $b \in X$ 满足 $b \succ_i (\gamma) f(i)$ 以及 $p \cdot b \leq w(i)$。由于 $f(i) \in Q_i(p,\ \gamma)$，$p \cdot b = w(i) \notin E(p)$。因此，对于某个可分坐标 $h \leq l$，有 $b^h > 0$。记 q^h 为第 h 个坐标单位向量，则由偏好图的开性，对于充分小的 $t \in$ （0，b^h），

$$b - tq^h \succ_i (\gamma) f(i), \qquad p \cdot (b - tq^h) = w(i) - tp^h < w(i),$$

矛盾的是 $f(i) \in Q_i(p,\ \gamma)$。因此， f 几乎处处是个体最优的。结合（24）中的利润最大化和（26）中的市场出清，这证明（f，p，y）是一个均衡。

(ii)⇒(i)：定理1 中具有给定社会类型函数 α的交换经济可通过令 $m = 0$ 和 $Y = -\mathbb{R}^l_+$ 嵌入，且不改变 α。[23] 由严格单调性可知，条件（8）成立。在任何广义均衡中，严格单调性都意味着 $p \gg 0$，因此利润最大化蕴含 $y = 0$。所以，这样的均衡就是交换均衡。定理1 必要性证明中的反例由此证明了该结论。

□

[23]定义 $x \succ_i (\gamma)\ z$ 当且仅当 $u_i(x,\ \gamma) > u_i(z,\ \gamma)$，并取 $\theta \equiv 1$。关于 u_i 的假设意味着所需的性质所诱导的偏好 关系 $\succ_i$。当 $m = 0$时，收入分散条件不适用。

《具有社会类型的大型经济》的补充

Wei He、Yeneng Sun、Bin Wu、Nicholas C. Yannelis

B.1 断言的证明1

我们首先验证第4.1节的假设，然后检验所提出的均衡。

步骤 *1.* 人口、生产与收入。代理人空间是完备化的勒贝格单位正方形，且 $\mathcal{G}$ 由（v， w）$\mapsto$ v生成。根据He、Sun 和 Sun （2017，引理1，第780页），Borel乘积 σ-代数无处等价于 $\mathcal{G}$。由于完备化保持这一性质， $\mathcal{I}$ 无处等价于 $\mathcal{G}$。

禀赋映射与所有权映射是可测且可积的，其总量如例中所述。生产集 Y 是闭的、凸的，包含零点，并允许自由处置。若 y 与 $-y$ 均属于 Y，则它们第一坐标上的不等式给出 $y^1 = 0$，而它们坐标和上的不等式进而给出 $y^2 = 0$。因此$Y \cap (-Y) = \{0\}$。此外，

$$\int_I e\, d\lambda + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(2, \frac{1}{2}\right) \gg 0,$$

这验证了总资源条件。

对于每个 $p = (p^1, p^2) \geq 0$，最大利润为

$$\pi(p) = \sup_{y \in Y} p \cdot y = \frac{1}{2}(p^2 - p^1)^+, \qquad a^+ = \max\{a, 0\}.$$

事实上，采用 $y^2 < 0$ 的计划所得利润为非正值。如果 $y^2 = q \geq 0$，那么 $q \leq \frac{1}{2}$ 以及$y^1 \leq -q$，因此 $p \cdot y \leq (p^2 - p^1)q$。对于每个 $q \in [0, 1/2]$，计划 $(-q, q)$ 属于 Y，并获得 $(p^2 - p^1)q$。因此，当 $p^2 > p^1$ 时， $q = 1/2$ 达到最大值；当$p^2 \leq p^1$时， $q = 0$ 达到最大值。

家庭 (v, w) 的收入为

$$p \cdot e(v, w) + \theta(v, w)\pi(p) = p^1(2 + v) + \left(v + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(p^2 - p^1)^+.$$

作为 v的函数，这是一个斜率为的仿射函数

$$p^1 + \frac{1}{2}(p^2 - p^1)^+ > 0 \qquad \text{whenever } p \geq 0 \text{ and } p \neq 0.$$

由于收入关于 v 严格递增，每个收入水平至多对应一个财富排名。由于 v 服从均匀分布，收入分布对每个单点赋予的概率均为零，正如条件（10）所要求的那样。

步骤*2.* 偏好。对于固定的 $v > 0$，函数 $v^{-1}\mathbf{1}_{[0,v]\times[0,1]}$ 属于 $L_\infty(I, \mathcal{G}, \lambda)$。

因此

$$h \to \frac{1}{v}\int_{[0,v]\times[0,1]} h^2\,d\lambda$$

是 $L_1((I,\mathcal{G},\lambda);\mathbb{R}^2)$ 上的有界线性泛函，且其限制 r_v 在 Γ 上弱连续。在 $v=0$，$r_0 \equiv 1/2$。因此，对每个 v，$\eta_v = \min\{1, r_v\}$ 都是弱连续的，而效用公式给出了 $u_{(v,w)}$ 关于 (x,γ) 的联合连续性。对于固定的 γ，定义 $r_v(\gamma)$ 的累积积分关于 v 连续，因此 $v \mapsto \eta_v(\gamma)$ 在 $(0,1]$ 上连续。结合其在零点处规定的取值，该映射在 $[0,1]$ 上可测。因此，效用关于家庭及其消费束是联合可测的。特别地，其严格偏好图具有所要求的可测性。效用表示给出非自反性和传递性，而联合连续性给出了关于消费和外部性的开严格偏好图。严格单调性由

$$\frac{1}{2} \le \frac{3}{2} - \eta_v(\gamma) \le \frac{3}{2}$$

以及 $q \mapsto \log(1+q)$ 的严格递增性。

对于一致紧性，定义

$$U_\eta(x) = x^1 + \left(\frac{3}{2} - \eta\right)\frac{\log(1+x^2)}{\log 2}, \qquad 0 \le \eta \le 1,$$

并令 $\succ_\eta$ 为其严格偏好关系。我们证明，$\eta \mapsto \succ_\eta$ 在闭收敛拓扑下连续。记

$$F_\eta = \{(x,z) \in X \times X : U_\eta(x) \le U_\eta(z)\}$$

为严格偏好图的补集。令 $\eta_n \to \eta$。若 $(x_k,z_k) \in F_{\eta_{n_k}}$ 且 $(x_k,z_k) \to (x,z)$，则由联合连续性可得 $U_\eta(x) \le U_\eta(z)$，因此 $(x,z) \in F_\eta$。于是 $\limsup_n F_{\eta_n} \subseteq F_\eta$。反过来，固定 $(x,z) \in F_\eta$，并令

$$\delta_n = \max\{0, U_{\eta_n}(x) - U_{\eta_n}(z)\}, \qquad z_n = (z^1 + \delta_n, z^2).$$

由于 $U_\eta(x) \le U_\eta(z)$，连续性意味着 $\delta_n \to 0$。仅可分坐标增加，因此 $z_n \in X$，而效用公式给出 $U_{\eta_n}(z_n) = U_{\eta_n}(z) + \delta_n \ge U_{\eta_n}(x)$。因此 $(x,z_n) \in F_{\eta_n}$ 且 $(x,z_n) \to (x,z)$，这说明 $F_\eta \subseteq \liminf_n F_{\eta_n}$。于是 $\liminf_n F_{\eta_n} = \limsup_n F_{\eta_n} = F_\eta$。根据第4.1节的条件 (7)，这正是 $\succ_{\eta_n} \to \succ_\eta$ 在 $\wp$ 中的情形。因此 $\eta \mapsto \succ_\eta$ 连续，其像 $K = \{\succ_\eta : \eta \in [0,1]\}$ 是紧的。对于任意 $x \in X$，取

$$c > x^1 + \frac{3\log(1+x^2)}{2\log 2}$$

对每个 $\eta \in [0,1]$，都有 $U_\eta(c,0) > U_\eta(x)$。因此，K 中的每种偏好都满足条件（8）。结合严格单调性，可得 $K \subseteq \wp_+$。由于 $v \mapsto \eta_v(\gamma)$ 可测，且

$\eta \mapsto \succ_\eta$ 连续，条件偏好赋值是可测的。所有条件偏好都位于同一个紧集 K 中，因此对每个 $\gamma \in \Gamma$，都有 $\mu_\gamma(K) = 1$ 。这验证了条件（9）中的一致紧性。

步骤*3*。均衡。令 $A = [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$和 $\gamma^* = \mathbb{E}(f^* \mid \alpha)$。由于 $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mid \alpha) = \frac{1}{2}$，拟议配置满足 $\gamma^*(v,\ w) = \left(\frac{3}{2} + v,\ \frac{1}{2}\right)$。因此，对于每个$v \in [0,1]$，$r_v(\gamma^*) = \eta_v(\gamma^*) = \frac{1}{2}$。

在 $p^* = (1,\ 1)$ 处，最大利润为零，收入为 $b = 2 + v$。对于每个可负担束 $(x^1,\ q) \in X$，

$$u_{(v,w)}((x^1, q), \gamma^*) = x^1 + \frac{\log(1+q)}{\log 2} \le b - q + \frac{\log(1+q)}{\log 2} \le b,$$

其中，最后一个不等式由 $1 + q \le 2^q$ 对 $q \in \mathbb{Z}_+$推出。两个指定的商品束 $(b,\ 0)$ 和 $(b-1,\ 1)$ 都达到该界，因此是最优的。

最后，

$$\int_I f^*\, d\lambda = \left(2, \frac{1}{2}\right) = \int_I e\, d\lambda + y^*.$$

方案 $y^* = (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ 属于 Y，并满足 $p^* \cdot y^* = 0 = \pi(p^*)$。因此，个体最优性、利润最大化和市场出清均成立，从而证明了该主张。

B.2 备注中主张的证明4

步骤 *1*。构造与正则性。 令 $I = [0,1]^2$ 具有完备的 Lebesgue 测度，并将一个代理人写作 $(v,\ w)$。存在两种可分商品，$e(v,\ w) = (1,\ 1)$，以及 $\alpha(v,\ w) = v \in [0,1]$。因此，$\mathcal{G} = \sigma(\alpha)$ 记录第一坐标。对于 $\gamma \in \Gamma$，定义

$$A(\gamma) = \int_I \gamma^1\, d\lambda, \qquad B(\gamma) = \int_I v\gamma^1(v,w)\, d\lambda, \qquad c(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{(A(\gamma) - 1/2)_+}{B(\gamma)^2}, & A(\gamma) > 0, \\ 0, & A(\gamma) = 0, \end{cases}$$

其中 $a_+ = \max\{a, 0\}$。效用为 $u_{(v,w)}(x,\ \gamma) = x^1 + [1 + vc(\gamma)]x^2$。外部性提高了第二种商品的相对价值，并且社会类型越高，响应越强。

A 和 B 均为弱连续。由于 $\gamma^1 \ge 0$和 $v > 0$几乎处处，$A(\gamma_0) > 0$ 意味着 $B(\gamma_0) > 0$。在 γ_0的弱邻域 $\{B > B(\gamma_0)/2\}$ 上，分母与零保持正距离，因此 $c = (A - 1/2)_+/B^2$ 是连续的。这包括$A(\gamma_0) = 1/2$。如果 $A(\gamma_0) = 0$，那么 c 在 γ_0的弱邻域 $\{A < 1/2\}$ 上为零。因此，效用是联合连续的、关于代理人可测的，并且严格单调。偏好是线性的，因而是凸的。代理人空间和社会类型函数与第4.2节中的相同。因此，社会匿名性成立，正如步骤 1中命题 1证明所示。

步骤*2*。均衡不存在。假设（$f,\ p$）是一个均衡，并记

$\gamma = \mathbb{E}(f \mid \alpha)$。严格单调性排除了任一商品价格为零的情况。将$p = (s,\ 1-s)$规范化，使得 $0 < s < 1$，于是每个家庭的收入均为一。市场出清给出 $A(\gamma) = 1$，因此 $c = c(\gamma) > 0$。两个预算顶点对应的效用分别为 $1/s$ 和 $(1+vc)/(1-s)$。因此，当.....时，代理人会唯一选择商品1

$$v < \tau := \frac{1-2s}{sc},$$

以及当 $v > \tau$ 时的商品 2。由于 v 服从均匀分布，无差异家庭$\{(v,\ w) \in I :\ v = \tau\}$ 的测度为零，因此其选择不会影响总需求。如果$\tau \le 0$，商品 1 的总需求为零。如果 $\tau \ge 1$，商品 2 的总需求为零。由于每种商品的供给均为单位供给，市场出清要求 $0 < \tau < 1$。对商品 1 出清市场可得

$$1 = \int_I f^1 \, d\lambda = \frac{1}{s}\lambda\{(v,w) \in I : v < \tau\} = \frac{\tau}{s}.$$

因此 $\tau = s$。由于 v 有界且 $\mathcal{G}$-可测，

$$B(\gamma) = \int_I v\, \mathbb{E}(f^1 \mid \alpha)\, d\lambda = \int_I v f^1 \, d\lambda = \frac{1}{s}\int_0^s v\, dv = \frac{s}{2}.$$

由此可得

$$c = \frac{1/2}{(s/2)^2} = \frac{2}{s^2}, \qquad cs^2 = 1-2s,$$

其中，最后一个等式由 $\tau = s$ 得出。因此 $2 = 1-2s$，矛盾。

步骤*3*。紧性和序数条件的失效。考虑

$$\gamma_n(v,w) = \big(n\mathbf{1}_{\{v<1/n\}}, 1\big), \qquad n \ge 1.$$

每个 γ_n 都是 $\mathcal{G}$-可测的，并满足 $\int_I \gamma_n \, d\lambda = (1,1)$，因此其本身就是一个可行配置，并诱导出外部性 γ_n。此外，$\|\gamma_n\|_{L_1} = 2$，$A(\gamma_n) = 1$，$B(\gamma_n) = 1/(2n)$，且$c(\gamma_n) = 2n^2$。令 $K \subset \wp_+$ 为第3.1节效用空间中的非空紧集。在紧开拓扑下，于 (0, 1) 处的取值是连续的。由于 K 非空且紧，该映射达到一个有限最大值：

$$b_K := \max_{u \in K} u(0,1) < \infty.$$

因此，$u_{(v,w)}(\cdot, \gamma_n)$ 属于 K 要求 $1 + 2vn^2 \le b_K$。因此，

$$\mu_{\gamma_n}(K) \le \lambda\{(v,w) : 1 + 2vn^2 \le b_K\} \le \frac{(b_K - 1)^+}{2n^2} \to 0.$$

因此，一致紧性不成立。

要检验注释 2 中的 不等式（1），取 $M = 2$、$R = 1$、$\epsilon = 1/2$、$x =$ （0，1），并且

$q^1 = (1,\ 0)$。对于任意固定的 $\eta \in (0,\ 1)$，

$$u_{(v,w)}((1-\eta)x + q^1, \gamma_n) - u_{(v,w)}(x, \gamma_n) = 1 - \eta(1 + 2vn^2).$$

这一差值为正的代理人集合的测度为

$$\min\left\{1, \frac{1-\eta}{2\eta n^2}\right\} \to 0.$$

对于每个 $\eta \in (0, 1)$，选择满足 $n^2 > (1-\eta)/\eta$ 的 n。此时，即使对于 $x = (0, 1)$ 和 $q^1 = (1, 0)$，满足该比较的家庭也不到一半。因此，不存在对每个 γ_n 都适用的 η，而注 2 中的不等式（1）正是如此要求的。尽管 c 是连续的，统计量（$A(\gamma_n)$ $B(\gamma_n)$）趋近于无法达到的点 $(1, 0)$，且 $c(\gamma_n) \to \infty$。

B.3 注 6 中断言的证明6

假设 α 满足社会匿名性，因此 $\mathcal{I}$ 处处不等价于 $\mathcal{G} = \sigma(\alpha)$。我们采用附录 2 A.2中的定理 2 充分性证明所用的记号和近似。令 ζ 表示变换后的外部性，并令 $Q_i(p,\ \zeta)$ 表示其中定义的家庭对应，其偏好在 ζ处进行评估。我们共同追踪消费和变换后的消费。

对于每个 $0 < \varepsilon < 1$，定义

$$Z_\varepsilon = \left\{\zeta \in L_1((I, \mathcal{G}, \lambda); \mathbb{R}^k) : \|\zeta(i)\| \le a + b\,\mathbb{E}(b_\varepsilon \mid \alpha)(i) \text{ a.e.}\right\}.$$

根据 Γ_ε 附录A.1中步骤 1 的论证，Z_ε 是凸的且弱紧，其相对弱拓扑是可度量化的。对于 $p \in \Delta_\varepsilon$，每个 $x \in Q_i(p,\ \zeta)$ 都满足 $\|x\|_1 \le b_\varepsilon(i)$，因此 $\|\tau(x)\| \le a + b\,b_\varepsilon(i)$。对于每个可测选择 f，取自 $Q_i(p,\ \zeta)$，条件 Jensen 不等式给出

$$\big\|\mathbb{E}(\tau \circ f \mid \alpha)\big\| \le \mathbb{E}(\|\tau \circ f\| \mid \alpha) \le a + b\,\mathbb{E}(b_\varepsilon \mid \alpha).$$

因此 $\mathbb{E}(\tau \circ f \mid \alpha) \in Z_\varepsilon$。根据附录A.2 中的步骤 1 以及 $x \mapsto (x,\ \tau(x)$ 的连续性，对应

$$H_i(p, \zeta) = \{(x, \tau(x)) : x \in Q_i(p, \zeta)\}$$

具有非空紧值，对每个(p, ζ)在 i 中可测，并且对几乎所有 i，关于(p, ζ)上半连续。同一步骤得到的预算界 $\|x\|_1 \le b_\varepsilon(i)$给出$\|x\|_1 + \|\tau(x)\| \le a + (1+b)b_\varepsilon(i)$，因此 H_i可积有界。由于 $\mathcal{I}$与 $\mathcal{G}$ 处处不等价，且 $\Delta_\varepsilon \times Z_\varepsilon$ 可度量化，我们可以将 He 和 Sun（2018，定理2–4）的结果应用于联合对应 H_i。其条件期望对应

$$\widehat{Q}_\varepsilon(p, \zeta) = \big\{(\mathbb{E}(f \mid \alpha), \mathbb{E}(\tau \circ f \mid \alpha)) : f \text{ is a measurable selection of } Q_i(p, \zeta)\big\}$$

is u上半连续，且在 $\Gamma_\varepsilon \times Z_\varepsilon$中具有非空、凸、弱紧值。

令 $D_\varepsilon = \Delta_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \times Z_\varepsilon \times Y$。根据附录 A.2中的步骤 1以及前述论证， D_ε在欧氏拓扑与弱拓扑的乘积拓扑下非空、紧且凸。定义 $\Psi_\varepsilon : D_\varepsilon \rightrightarrows D_\varepsilon$ 如下

$$\Psi_\varepsilon(p,\gamma,\zeta,y) = A_\varepsilon(\gamma,y) \times \widehat{Q}_\varepsilon(p,\zeta) \times \Phi(p).$$

这里 $A_\varepsilon : \Gamma_\varepsilon \times Y \rightrightarrows \Delta_\varepsilon$ 和 $\Phi : \Delta_\varepsilon \rightrightarrows Y$ 具有附录 A.2中步骤 1所确立的性质。因此，三个因子都具有上半连续、非空、紧凸值。它们的有限乘积也具有相同性质，因而由 Fan–Glicksberg 不动点定理可得一个不动点。所得不动点由一个配置 f_ε 表示，并满足

$$\gamma_\varepsilon = \mathbb{E}(f_\varepsilon \mid \alpha), \qquad \zeta_\varepsilon = \mathbb{E}(\tau \circ f_\varepsilon \mid \alpha), \qquad f_\varepsilon(i) \in Q_i(p_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \quad \text{a.e.}$$

预算耗尽和价格不动点条件给出了附录 A.2中步骤 2的生产与总消费结论。特别地，生产在 Y上最大化利润，且 $\sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L_1} < \infty$。此外，

$$\|\zeta_\varepsilon\|_{L_1} \le \int_I \|\tau(f_\varepsilon(i))\|\, d\lambda(i) \le a + b\|f_\epsilon\|_{L_1}.$$

选择 $\varepsilon_n \downarrow 0$。如附录A.2中步骤2所述，取一个子列使得 $p_n \to p$， $y_n \to y$，并且 $x_n := \int_I f_n\, d\lambda \to x$。令 $z = x - \bar{e} - y$。由于（ζ_n）在范数下有界，条件（9）适用，且步骤3中的边界价格论证给出 $p \gg 0$。由（24）， y在 p处使利润最大化， $z \le 0$，并且 $p \cdot z = 0$。因此 $z = 0$ 并且 $x = \bar{e} + y$。

由于 $p_n \to p \gg 0$，附录A.2 中步骤4的预算界给出一个可积的g，使得 $\|f_n(i)\|_1 \le g(i)$ 在舍弃有限项后成立。令 $F_n = (f_n, \tau \circ f_n)$。那么 $\|F_n(i)\| \le a + (1+b)\, g(i)$ 在乘积范数下成立。条件 Jensen 不等式给出 $\mathbb{E}(F_n \mid \alpha)$的一个共同可积上界，因此沿着一个子列

$$(\gamma_n, \zeta_n) = \mathbb{E}(F_n \mid \alpha) \rightharpoonup (\gamma, \zeta).$$

根据处处不等价性和He 和 Sun （2018，引理 3），存在一个可积对（f， h）使得

$$(f(i), h(i)) \in \operatorname{Ls}_n F_n(i) \quad \text{a.e.}, \qquad \mathbb{E}((f,h) \mid \alpha) = (\gamma, \zeta).$$

对于几乎所有的 i，选择一个子列 $n_j = n_j(i)$，使得

$$(f_{n_j}(i), \tau(f_{n_j}(i))) \to (f(i), h(i)).$$

由于 X是闭的，且 τ是连续的，因此 $f(i) \in X$和 $h(i) = \tau(f(i))$。于是 $\zeta = \mathbb{E}(\tau \circ f \mid \alpha)$。

用常向量检验 $\gamma_n \rightharpoonup \gamma$ 可得

$$\int_I f\, d\lambda = \int_I \gamma\, d\lambda = \lim_n \int_I f_n\, d\lambda = \bar{e} + y.$$

沿着同一个体子列，$p_{n_j} \to p$，$\zeta_{n_j} \rightharpoonup \zeta$，以及 $f_{n_j}(i) \to f(i)$。由于$f_{n_j}(i) \in Q_i(p_{n_j}, \zeta_{n_j})$，$Q_i$的闭图性质给出 $f(i) \in Q_i(p, \zeta)$。附录A.2 步骤4最后一段中的预算边界论证现在给出了几乎处处的个体最优性。结合利润最大化和市场出清，即可证明该命题。