arXiv:2611.30622v1 [math.CA] 23 Nov 2026

Kakeya集与截断Nikodym集的邻域的测度

Iqra Altaf

摘要

我们证明，在 $\mathbb{R}^d$ 中存在这样的 Kakeya 集：其 δ-邻域的测度为 $\lesssim |\log\ \delta|^{-(d-1)}$。我们还证明，对于足够小的 δ， $\mathbb{R}^2$$\gtrsim \varepsilon^{-1}|\log\ \delta|^{-1}$ 中的一个 δ-邻域的测度为 ε-截断 Nikodym 集的测度。足够小的尺度取决于 Nikodym 集以及 ε。

1 引言

$\mathbb{R}^d$ 中的 Kakeya 集是一个零测集，其中在每个方向 [1] 上都包含一条单位线段。在平面中，Kakeya 集具有 Hausdorff维数 2，这一点早已为人所知。Kakeya集猜想断言， $\mathbb{R}^d$ 中的每个 Kakeya 集都具有 Hausdorff维数 d。Wang和Zahl 的一项重大突破证明了 $\mathbb{R}^3$ [2] 中的 Kakeya集猜想。他们的证明区分了黏性Kakeya集与非粘性Kakeya集 [3, 4, 2]。在 [5]，中，Lai和Wong 构造出了一个平面上的勒贝格测度为零的非粘性Kakeya集。在更高维度中，他们构造了黏性Kakeya集和非粘性Kakeya集，这些集合不是平面 Kakeya 集与 $\mathbb{R}^{d-2}$ 的笛卡尔积。

对于 $\mathbb{R}^2$ 中的 Kakeya 集，标准论证表明，其 δ-邻域的测度至少为$\gtrsim |\log\ \delta|^{-1}$ [6]。在 [7], 中，Keich 通过明确构造一个 Kakeya 集，证明了这个界是尖锐的；该集合的 δ-邻域的测度为 $\lesssim |\log\ \delta|^{-1}$。因此，对$d/2$ 个这样的 Kakeya 集取笛卡尔积（即使 d 也如此），便得到 $\mathbb{R}^d$ 中的一个 Kakeya 集，其 δ-邻域的测度为$\lesssim_d |\log\ \delta|^{-d/2}$。再将这个 Kakeya 集与一个单位区间取笛卡尔积，就得到 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的一个 Kakeya 集，其 δ-邻域的测度同样为 $\lesssim_d |\log\ \delta|^{-d/2}$。本文构造了若干 Kakeya 集，其 δ-邻域的测度为 $\lesssim_d |\log\ \delta|^{-(d-1)}$。我们的做法是在 Lai和Wong [5]近期工作的基础上进一步发展。Fern´andez-Delgado 和 de la Salle 通过不同的构造得到了相同的界 [8]。

与 Kakeya 集密切相关的是 Nikodym 集。若集合 N in $\mathbb{R}^d$ 是零测集，且对每个 $y \in \mathbb{R}^d$，都存在一条经过 y 的直线 ℓ_y，使得去心直线 $\ell_y \setminus \{y\}$ 包含于 N，则称 N 为 Nikodym 集。最初的平面构造归功于 Nikodym [9]。

Falconer [10] 利用具有指定投影的集合，得到了 Nikodym 构造的高维版本。他构造了一个零测集 $F \subset \mathbb{R}^d$，使得经过每个点 $x \notin F$，都存在一个满足 $H_x \setminus \{x\} \subset F$的超平面 H_x。本文将重新研究线段，并探讨去除每条线段上最靠近其基点的部分后，这些线段并集的邻域能有多小。

记号。对于 $d \in \mathbb{N}$，集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 和 $\delta > 0$， $|E|$ 表示 E 的 d 维勒贝格测度，而 $E(\delta)$ 表示 E的 δ 邻域，即

$$E(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{dist}(x, E) < \delta\}.$$

我们的第一个定理关于 Kakeya集。

定理 1。 **1.** 对于每个整数 $d \geq 2$，都存在一个紧 ***Kakeya*** 集 $K \subset \mathbb{R}^d$，使得 t

$$|K(\delta)| \lesssim_d (\log(1/\delta))^{-(d-1)}$$

对所有充分小的 $\delta > 0$,

实际上，我们证明的结论比定理 1.1 更强。我们将利用随机康托集构造 Kakeya 集。我们证明，在 $\mathbb{R}^d$ 中，几乎所有此类 Kakeya 集的 δ-邻域的测度均为 $\lesssim_d (\log(1/\delta))^{-(d-1)}$。

对于 Nikodym 命题，设 $z:\ [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ 是一个勒贝格可测函数。设 $N \subset \mathbb{R}^2$是一个零测集，使得

$$N = \{p + t(z(p), 1) : \text{for every } p \in [0,1]^2 \text{ and every } 0 < t \leq 1\}. \tag{1}$$

显然，这样的集合 N沿着 $[0,1]^2$,是稠密的，其意义是 $[0,1]^2 \subset N$。因此，为了有意义地讨论 N的 δ-邻域的测度，我们考虑 Nikodym 集的一个截断版本。定义 N 的 ε-截断为

$$N_\varepsilon = \{p + t(z(p), 1) : p \in [0,1]^2,\ \varepsilon \leq t \leq 1\}. \tag{2}$$

定理 1.2。 设 N 是如 (1) 中的 ***Nikodym*** 集。存在一个绝对常数 $c > 0$，使得对于每个 $0 < \varepsilon \leq 1/2$,

$$\liminf_{\delta \downarrow 0} \log(1/\delta)\, |N_\varepsilon(\delta)| \geq c/\varepsilon.$$

因此，在必要时减小绝对常数后，

$$|N_\varepsilon(\delta)| \geq \frac{c}{\varepsilon \log(1/\delta)} \qquad (0 < \delta < \delta_0(N, z, \varepsilon)).$$

我们允许阈值 δ_0 取决于固定的 Nikodym 集 N、斜率的选取以及 ε。

2 Kakeya 构造

我们首先通过纯不可整流集描述 Kakeya 集的一个众所周知的构造。设 $E \subset [0,1]^2$ 是一个紧的纯不可整流集，使得 $\mathcal{H}^1(E) < \infty$，且其在 x-轴上的投影为 $[0,1]$。令

$$K = \{(tx + y, t) : (x, y) \in F,\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

对于任意 $x \in [0,1]$，投影假设给出至少一个 y，使得 $(x,\ y) \in E$。相应的线段 $(tx + y,\ t) = (y,\ 0) + t(x,\ 1)$，其方向为 $(x,\ 1)$，长度为 $\sqrt{1 + x^2} \geq 1$。这些方向填满单位圆上的一段弧，因此有限个 K 的旋转副本在每个方向上都包含一条线段。令 $P_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使得

$$P_t(x, y) = tx + y.$$

根据 Besicovitch-Federer 投影定理，具有有限 $\mathcal{H}^1$ 的纯不可整流集的几乎所有投影长度均为零。映射 P_t 给出了方向为 $(t,\ 1)$ 的标量投影，再乘以 $\sqrt{1 + t^2}$。因此，对于几乎所有 $t \in [0,1]$，都有 $|P_t(E)| = 0$。Fubini 定理给出 $|K| = 0$。因此， K 的旋转副本的有限并是一个紧的平面 Kakeya 集，其

零测集。
对于 $d \geq 2$，令 E_1，……，E_{d-1} 为上述纯不可整流集。令，

$$K = \{((y_1, \ldots, y_{d-1}) + t(x_1, \ldots, x_{d-1}), t) : (x_j, y_j) \in E_j,\, 0 \leq t \leq 1\}. \tag{3}$$

因此，对于每个这样的 $x_1, \ldots, x_{d-1} \in [0,1]^{d-1}$，我们都能得到一个方向为 $(x_1, \ldots, x_{d-1}, 1)$ 的线段。这些方向包含单位球面中的一个开子集，而有限次旋转即可覆盖所有方向。令 $(z_1, \cdots, z_d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的一个点。由于这些对 (x_j, y_j) 是独立选取的，集合 K 与平面 $z_d = t$ 的交集为 $P_t(E_1) \times \cdots \times P_t(E_{d-1})$。因此，由 Besicovitch–Federer 定理和 Fubini 定理可像之前一样得到 $|K| = 0$ 。为了得到 $|K(\delta)|$ 的所需估计，我们将选取投影长度较小的随机平面康托集。

构造康托集时，我们从正方形 $E_0 = [0,1]^2$ 开始。然后将每个正方形细分成一个 4×4 网格。在它的四个垂直列中，各保留一个正方形，并从四个正方形中均匀随机选取。经过 n 步后，我们得到 4^n 个边长为 4^{-n} 的正方形。令它们的并集为 E^n。（见图 1）集合 E^n 的 x 投影具有满测度。定义

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E^n.$$

令 $\mathcal{E}$ 为所有此类集合 E的集合。

我们将这一构造与 Peres 和 Solomyak 的随机康托集 [11, 定理 2.2]进行比较。他们把单位正方形分成四个相等的小区域。在每个小区域中，他们独立地从四个边长为 $1/4$的小正方形中选取一个，每个小正方形被选中的概率相同。（见图 2）对于$0 \leq \theta \leq \pi$，令 proj_θ 表示投影到经过原点且方向为 θ的直线上的正交投影。平面集合 A 的 Favard 长度为

$$\mathrm{Fav}(A) = \int_0^{\pi} |\,\mathrm{proj}_\theta\, A|\, d\theta.$$

令 F^n 为经过 n 步后保留下来的正方形的并集。Peres 和 Solomyak 在 [11, (6.3)] 中证明，对于每个方向 θ， E^n 的正交投影长度的期望满足

$$\mathbb{E}\big[|\,\mathrm{proj}_\theta\, F^n|\big] \lesssim 1/n,$$

其中常数与 θ 和 n无关。对 θ 积分可得他们的 Favard 长度估计$\mathbb{E}[\mathrm{Fav}(F^n)] \lesssim 1/n$。他们的证明适用于我们在方向$0 \leq t \leq 1$ 上每列选取一个正方形的情形，并给出

$$\mathbb{E}[|P_t(E^n)|] \lesssim 1/n, \qquad \text{for all, } 0 \leq t \leq 1. \tag{4}$$

由于完全相同的论证同样适用，这里不再重复证明。 e.

定理 *1.1* 的证明。取相互独立的康托集 $E_1, \ldots, E_{d-1} \in \mathcal{E}$，并按式 (3) 定义集合 K。

记 $X_{j,n}(t) = |P_t(E_j^n)|$。取 $4^{-n-1} < \delta \leq 4^{-n}$。设 $(z_1, \cdots z_{d-1}, t) \in K(\delta)$ 且 $0 \leq t \leq 1$，则对于某个 $(x_j, y_j) \in E_j$ 且 $|t' - t| \leq \delta$，有 $|z_j - (t' x_j + y_j)| \leq \delta$。由于 $x_j \in [0,1]^2$, z_j 位于 2δ 的$P_t(E_j) \subset P_t(E_j^n)$ 内。集合 $P_t(E_j^n)$ 包含长度为 4^{-n} 的正方形的投影。因此， $P_t(E_j^n)$ 中的每个极大区间长度至少为 4^{-n}。在每个端点处添加 2δ ，其长度至多增加到原来的五倍。 $K(\delta)$ 中满足 $z_d \neq [0,1]$ 的部分的体积为 $O(\delta)$，因为 $K \subset [0,2]^{d-1} \times [0,1]$。因此

$$|K(\delta)| \leq O(\delta) + 5^q \int_0^1 \prod_{j=1}^{q} |P_t(E_j^n)|\, dt. \tag{5}$$

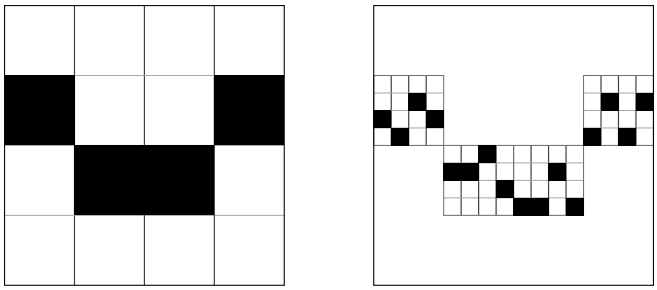

图 1：我们的康托尔集。在其四个列中的每一列保留一个正方形。

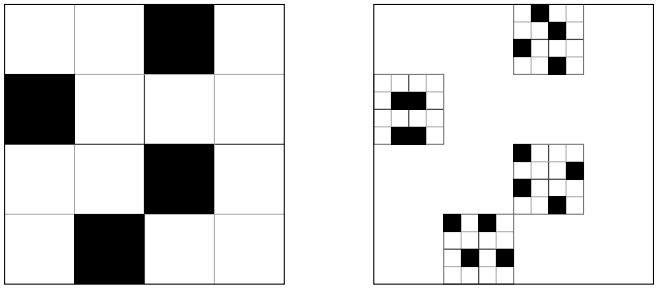

图 2：佩雷斯-索洛米亚克康托尔集。在其四个象限中的每个象限保留一个小正方形。

Let

$$I_n := \int_0^1 \prod_{j=1}^{q} |P_t(E_j^n)|\, dt.$$

利用 (4) 以及集合 E_j 的独立性，我们得到 I_n 的期望为 $\lesssim (1/n)^{d-1}$。因此，$|K(\delta)| \lesssim$ |的期望值为 log $\delta|^{-(d-1)}$。我们希望证明，对于某个固定集合 K，$|K(\delta)|$ 在所有充分小的 δ 下都具有所需的界。

固定 t。假设我们在每个 $d-1$ 集合 E_j 中已经选择了截至第 n 步的正方形，使得$I_n \leq (2C/n)^{d-1}$。现在我们将选择从第 $n+1$ 步到第 $2n$步的正方形。对于每个 E_j，其中的 4^n 个正方形是彼此独立填充的。因此，我们是在尺度为4^{-n}时进行相同的随机选择。所以，在每个这样的正方形中，经过这 n 步后投影的期望长度至多为 $\sim 4^{-n}/n$。由于共有 4^n 个正方形，我们得到

$$\mathbb{E}[|P_t(E_j^{2n})|\,|E_j^n \text{ is given}] \leq 4^n \cdot 4^{-n} \frac{C}{n} = \frac{C}{n}. \tag{6}$$

由集合 E_j的独立性，我们有

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{q} |P_t(E_j^{2n})|\, E_j^n \text{ is given for all } j\right] = \prod_{j=1}^{d-1} \mathbb{E}[|P_t(E_j^{2n})|\,|E_j^n \text{ is given for all } j] \leq \left(\frac{C}{n}\right)^{d-1}.$$

在 t 中进行积分并交换积分与期望的顺序，可得

$$\mathbb{E}[I_{2n}\,|E_j^n \text{ is given for all } j] \leq \left(\frac{C}{n}\right)^{d-1}.$$

因此，我们可以从 $n+1$ 到步长 $2n$ 选择正方形，使得 $I_{2n} \le (C/n)^{d-1}$. 。我们固定这些正方形，接下来的步骤取自 $2n+1$ 和 $4n$。从 $n=1$ 开始，当 n 是 2 的幂时，我们估计了 I_n。令 $m \in \mathbb{N}$ 为任意步长，并选择一个 2 的幂 n，使得 $n \le m < 2n$。我们有

$$P_t(E_j^m) \subset P_t(E_j^n).$$

在第 n 步，我们有 $I_n \le (2C/n)^{d-1}$。对 j 求积，并对 t 积分，得到 $I_m \le I_n$。由于 $m < 2n$，可得

$$I_m \le (2C/n)^{d-1} \le (4C/m)^{d-1}.$$

最后，对每个充分小的 δ，选取满足 $4^{-n-1} < \delta \le 4^{-n}$ 的 n，并使用 (5) 得到

$$|K(\delta)| \lesssim_d I_n \lesssim (1/n)^{d-1} \lesssim \big(\log(1/\delta)\big)^{-(d-1)}.$$

这就证明了定理 1.1。

概率为一的论证。我们再次固定最初的 n 步。对每个选定的正方形Q_i，将 Q_i 扩大为单位正方形，并令 X_{Q_i} 表示经过接下来的 n 步后所得集合的投影长度。上面的论证 (6) 表明，$|P_t(E_j^{2n})|$ 不超过这些 4^n 个相互独立长度的平均值，即

$$|P_t(E_j^{2n})| \le 4^{-n} \sum_{i=1}^{4^n} X_{Q_i} \qquad \text{and} \qquad \mathbb{E}[4^{-n} \sum_{i=1}^{4^n} X_{Q_i}] \le \frac{C}{n}.$$

令 $A = C+1$。利用霍夫丁不等式，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|P_t(E_j^{2n})| > A/n \mid E_j^n \text{ is given}\} &\le \mathbb{P}\{4^{-n} \sum_{i=1}^{4^n} X_{Q_i} > A/n\} \\
&\le \mathbb{P}\{4^{-n} \sum_{i=1}^{4^n} (X_{Q_i} - \mathbb{E}[X_{Q_i}]) > 1/n\} \\
&\le \exp\Big(\frac{-4^n}{2n^2}\Big).
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了平凡估计 $X_{Q_i} \le 2$。现在令 $B_n \in [0,1]$ 为满足至少有一个投影长度 $|P_t(E_j^{2n})|$ 大于 A/n 的 t 的集合。我们有

$$I_{2n} \le \int_{t \in B_n} \prod_{j=1}^{q} |P_t(E_j^{2n})|\, dt + \int_{t \neq B_n} \prod_{j=1}^{q} |P_t(E_j^{2n})|\, dt 2^{(d-1)} \le \Big(\frac{A}{n}\Big)^{d-1} + 2^{d-1}|B_n|. \tag{7}$$

我们还有

$$\mathbb{P}\{t \in B_n \mid E_j^n \text{ is given}\} \le \sum_{i=1}^{d-1} \mathbb{P}\{|P_t(E_j^{2n})| > A/n \mid E_j^n \text{ is given}\} \le (d-1)\exp\Big(\frac{-4^n}{2n^2}\Big)$$

积分并取期望得

$$\begin{aligned}
|B_n| = \int_0^1 1_{\{t \in B_n\}}\, dt \implies \mathbb{E}[|B_n| \mid E_j^n \text{ is given}] &= \int_0^1 \mathbb{P}\{t \in B_n \mid E_j^n \text{ is given}\}\, dt \\
&\le (d-1)\exp\Big(\frac{-4^n}{2n^2}\Big).
\end{aligned}$$

因此，根据马尔可夫不等式，

$$\mathbb{P}\{|B_n| > n^{-(d-1)} \mid E_j^n \text{ is given}\} \le (d-1)n^{(d-1)} \exp\left(\frac{-4^n}{2n^2}\right).$$

当 n 遍历 2 的幂时，右端收敛。由博雷尔-坎泰利引理，几乎必然地，对每个充分大的此类 n，都有 $|B_n| \le n^{-(d-1)}$ 。因此，由 (7) 可知，几乎必然有 $I_{2n} \le (A^{(d-1)} + 2^{(d-1)})n^{-(d-1)}$。现在，运用与上文相同的嵌套论证，可得对所有充分大的 $m \in \mathbb{N}$， I_m 的界。

□

3 截断尼科迪姆集

回顾截断尼科迪姆集 N_ϵ 的定义（2），其中 $\epsilon > 0$。

定理 *1.2* 的证明。我们将 $[0,1]^2$ 划分为高度为 ϵ 的窄条带。我们将在每隔一个条带中选择一条由点组成的水平直线（以及与之对应的线段）。首先，为简便起见，引入一些记号。

在高度为 h 处，属于 N 的点构成集合

$$N_h = \{p \in [0,1] : (p,h) \in N\}.$$

根据 Fubini 定理，对于几乎处处的 h， $|N_h| = 0$ 和 $|[0,1] \setminus N_h| = 1$。令 D_h 为集合

$$D_h = \{(p,h) : p \in [0,1] \setminus N_h\}.$$

根据 N_ϵ 的定义，线段 $(p,\ h) + t(z(p,\ h),\ 1)$ $\epsilon \le t \le 1$ 位于 N_ϵ 中。令 Φ_h 为一个映射，将点 $(p,\ h)$ 映射到其所在直线的 x- 截距和斜率参数，

$$\Phi_h(p,h) = \big(p - hz(p,h),\ z(p,h)\big) \text{ and } E_N = \{\Phi_h(p,h) : (p,h) \in [0,1]^2\}.$$

因此， E_N 是穿过正方形中所有点的直线参数（截距和斜率）的集合。设 $(w,\ z)$ 表示 x-截距和斜率参数，其对应的直线与高度 y 相交于 x 坐标 $P_y(w,\ z) = w + yz$。

令 $m = \lfloor 1/(2\varepsilon) \rfloor$，于是 $1/(4\varepsilon) \le m \le 1/(2\varepsilon)$。对于 $0 \le i < m$，选取 $h_i \in (2i\varepsilon,\ (2i+1)\varepsilon)$，使得直线 $\{p :\ (p,\ h_i) \in N\}$ 的长度为零 $z_i(p) = z(p,\ h_i)$ 是可测的。由于 $|N_\epsilon| = 0$，根据 Fubini 定理，几乎所有 h_i 都满足这两个条件。

假设 $h_i < h_j$。来自点 $(p,\ h_i)$ 的直线 $\in D_{h_i}$ 向上移动距离 $h_j - h_i$ 后到达高度 h_j，也就是说 $t = h_j - h_i$。我们从交替条带中选取了 h_i，因此对于$i < j$，有 $\varepsilon < h_j - h_i < 1$。因此，该点属于 N_ϵ，而 $D_{h_j} \cap N = \varnothing.$。所以这两个直线族没有共同的直线，因为一条共同的直线会在同一点与高度 h_j 相交，而我们有

$$\Phi_{h_i}(D_{h_i}) \cap \Phi_{h_j}(D_{h_j}) = \varnothing.$$

在固定高度 h_i 处，函数 $z_i(p)$ 在长度为 1 的集合 $[0,1] \setminus N_{h_i}$ 上可测。根据卢津定理，我们可以保留一个长度大于 $1/2$ 的紧子集 $F_i \subset [0,1] \setminus N_{h_i}$，使得 z_i 在其上连续。因此， $p - h_i z_i(p)$ 也连续，于是我们得到紧集

$$P_i = \Phi_{h_i}(F_i \times \{h_i\}) \subseteq \Phi_{h_i}(D_{h_i}).$$

对于两个不同的高度 h_i 和 h_j，相应的紧集 P_i 和 P_j 不相交，因此它们之间的 L^1 距离非零。我们选取足够小的 $0 < \kappa \le 1$，使得

$$|w - w'| + |z - z'| \ge \kappa \qquad ((w,z) \in P_i,\ (w',z') \in P_j,\ i \ne j).$$

现在固定 $0 < \delta < \min(1/16, \kappa/4)$。在每个 F_i中取一个极大 δ-分离集 $p_{i,1} < \cdots < p_{i,n_i}$。由于 $|F_i| \geq 1/2$，我们有 $n_i \sim \delta^{-1}$。令 $z_{i,k} = z_i(p_{i,k})$ 和 $w_{i,k} = p_{i,k} - h_i z_{i,k}$，并令

$$T_{i,k} = \{(x, y) : h_i + \varepsilon \leq y \leq h_i + 1, \quad |x - w_{i,k} - y z_{i,k}| < \delta\}.$$

在每个高度 $y \geq h_i + \varepsilon$ 处，点 $(w_{i,k} + y z_{i,k}, y)$ 属于 N_ε 中的线段。管段 $T_{i,k}$ 上的每个点到该点的距离都不超过 δ，因此 $T_{i,k}$ 属于 $N_\varepsilon(\delta)$。令函数 f_i 和 f 为

$$f_i = \sum_k \mathbf{1}_{T_{i,k}}, \qquad f = \sum_i f_i.$$

每个管 $T_{i,k}$ 的宽度为 2δ，高度为 $1 - \varepsilon$。因此

$$\int f_i = 2\delta n_i (1 - \varepsilon) \gtrsim 1 - \varepsilon, \text{ and } \int f \gtrsim m(1 - \varepsilon). \tag{8}$$

现在我们来控制两条带的重叠程度。取两根管 T 和 T'，其中心线分别为 $x = w + yz$ 和 $x = w' + yz'$，并假设它们在高度 y_0 处相交。那么$|w - w' + y_0(z - z')| \leq 2\delta$。因此，

$$\left| y - \frac{w' - w}{z - z'} \right| < \frac{2\delta}{|z - z'|}.$$

因此，$T \cap T'$ 中的每个点都位于一个长度至多为 $4\delta/|z - z'|$的高度范围内。在每个高度处，交集的宽度至多为 2δ，所以

$$|T \cap T'| \leq \frac{8\delta^2}{|z - z'|}. \tag{9}$$

固定 h_i，并考虑经过点 $p_{i,k}$ 和 $p_{i,l}$ 的管。令 $r = |k - l|$。假设这些管在高度 $h_i + t$ 处相交，其中 $\varepsilon \leq t \leq 1$。因此

$$\big|(p_{i,k} - p_{i,l}) + t(z_{i,k} - z_{i,l})\big| < 2\delta.$$

利用三角不等式，我们有

$$r\delta \leq |p_{i,k} - p_{i,l}| \leq 2\delta + t|z_{i,k} - z_{i,l}| \leq 2\delta + |z_{i,k} - z_{i,l}|.$$

如果 $r \geq 4$，那么 $|z_{i,\,k} - z_{i,\,l}| \geq r\delta/2$。将其代入（9），可将管的重叠限制为$16\delta/r$。对于 $r = 1$，2、3，我们使用平凡界，即整根管的面积，该面积为 $2\delta(1 - \varepsilon) \leq 2\delta$。因此，$16\delta/r$ 是每个 $r \geq 1$ 的上界。所以我们有

$$\begin{aligned} \int f_i^2 = \sum_k \sum_l |T_{i,k} \cap T_{i,l}| &\leq \sum_k \big(2\delta + 16\delta \sum_{|l-k| \geq 1} \frac{1}{|l - k|}\big) \\ &\leq \big(2\delta + 32\delta \sum_r^{n_i} \frac{1}{r}\big) \lesssim n_i\delta(1 + \log n_i) \lesssim \log(1/\delta). \end{aligned} \tag{10}$$

将上述不等式与（8）结合，再使用柯西–施瓦茨不等式可得

$$1 \lesssim (\int f_i)^2 \leq |\bigcup_k T_{i,k}| \int f_i^2 \implies |\bigcup_k T_{i,k}| \geq (\log(1/\delta))^{-1}.$$

现在取经过点 p_i、k 的两条管，以及一条以 p_j、k' 为基准的管，其中 $i \neq j$。它们的直线参数分别属于不相交的集合 P_i 和 P_j。令 $\Delta w = w - w'$ 和 $\Delta z = z - z'$，则有 $|\Delta w| + |\Delta z| \geq \kappa$ 和 $|\Delta w + y\Delta z| \leq 2\delta$。设这些管在高度 y 处相交。由于 h_i、$t \in [0,1]$，所以 $0 \leq y \leq 2$。因此，

$$\kappa \leq |\Delta w| + |\Delta z| = |(\Delta w + y\Delta z) - y\Delta z| + |\Delta z| \leq |\Delta w + y\Delta z| + (y+1)|\Delta z| \leq 2\delta + 3|\Delta z|.$$

这给出 $\kappa \leq 2\delta + 3|\Delta z|$。我们选取了 $\delta < \kappa/4$，因此 $|\Delta z| \geq \kappa/6$。由 (9)，管状邻域的交集至多有 $48\delta^2/\kappa$。因此

$$\int f_i f_j = \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} |T_{i,k} \cap T_{j,l}| \lesssim \frac{1}{\delta^2} \frac{\delta^2}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}.$$

将此与 (10) 结合，得到

$$\int f^2 = \sum_i \int f_i^2 + \sum_{i \neq j} \int f_i f_j \lesssim m(\log(1/\delta)) + m^2/\kappa.$$

当 δ 减小时，log(1/δ)增大，而 m/κ 保持不变。因此，对于每个充分小的 δ，都有 log(1/δ) $\geq m/\kappa$，且上面的右端为 $\lesssim m$log(1/δ)。充分小的尺度取决于 κ 和 m，因而取决于 ϵ 和集合 N。再次应用柯西 – 施瓦茨不等式和 (8)，得到

$$m^2 \lesssim \Big(\int f \Big)^2 \leq |\bigcup_i \bigcup_k T_{i,k}| \int f^2 \lesssim m \log(1/\delta).$$

因此，

$$\epsilon^{-1} \log(1/\delta)^{-1} \lesssim |\bigcup_i \bigcup_k T_{i,k}| \leq N_\epsilon(\delta).$$

□

4 Nikodym 集合中的 Kakeya 族

固定一个基准高度 h，并考虑映射

$$T_h(x,y) = \left(\frac{x}{y-h}, \frac{1}{y-h} \right), \qquad y > h.$$

在经过 (p, h) 的线段上，我们有 $y = h + t$和 $x = p + tz$(p, h)。除以 t 得到 $x/t = p/t + z$(p, h)。因此，以 $t' = 1/t$ 作为新的高度，像落在线 ($pt' + z$(p, h) t') $1 \leq t' \leq 2$ 上。

取 $1/2 \leq t \leq 1$。由于 $t = y - h$ 有下界，T_h 在该条带的每个有界部分上都是 Lipschitz 的。线段位于零测集 N 中，因此它们的像的测度为零。此外，t' 遍历 $[1,2],$，对每个 $p \in [0,1]$ 都得到一条方向为 (p, 1) 的直线。这些线段的长度至少为一，并且覆盖一段方向弧。由此得到一个测度为零的平面 Kakeya 集。

我们还可以从管的重叠估计中看到这种联系。对于固定的高度，如果两个管来自 δ-分离列表中相距 r 个位置的点，那么它们的交集面积至多为 $\sim \delta/r$。因此，当我们对这一族中的重叠进行求和时，会得到与平面 Kakeya 论证中相同的和式 $\sum_{r \leq 1/\delta} 1/r$，以及因子 log(1/δ)。对于定理 1.2 中的界，我们使用了大约$1/\varepsilon$ 个水平直线族。其中大约有 $1/\varepsilon$条选定的直线。为了得到因子 $1/\varepsilon$，我们需要理解来自不同条带的直线族之间可能有多大程度的重叠。关键在于

证明中所选取的直线参数紧集彼此分离。当 δ 趋于零时，两个不同直线族之间的重叠保持有界。这就是所有选定高度都会对下界作出贡献的原因。

对于原始去心线段，也有一个密度性质，其中 t 可以趋近于零。取一个高度的可数稠密集 $H \subset [0,1]$。对于每个 $h \in H$ 和每个 $p \in [0,1]$，点 $(p + tz(p,\ h)\ h + t)$ 在 $t \downarrow 0$时趋近于 $(p,\ h)$。因此，这些族的并集的闭包包含 $[0,1] \times H$，从而包含整个正方形。从这个意义上说，这些族沿正方形稠密排列，并且每个族在其自身高度处经过坐标变换后都会给出一个 Kakeya 族。

为了看出这些直线参数与 Kakeya 构造中的直线参数有何不同，考虑经过 $[0,1]^2$的完整去心直线。回想一下，$E_N = \{(p - hz(p,\ h)\ z(p,\ h) : (p,\ h) \in [0,1]^2\}$ 和$P_t(w,\ z) = w + tz$。因此

$$[0,1] \subseteq P_t(E_N) \qquad \text{for every } t \in [0,1].$$

在弧 $0 < \arctan t < \pi/4$ 上，E_n 的投影覆盖整个区间。特别地，$\dim_{\mathrm{H}} E_N \geq 1$。对于 $t > 1$，$P_t(E_N)$ 包含于高度为 t 的 N 中。由于 N 具有零面积，Fubini 定理给出：对于几乎处处的 $t > 1$，$|P_t(E_N)| = 0$。因此在第二段弧 $\pi/4 < \arctan t < \pi/2$ 上，投影在几乎每个方向上的长度都为零。由 Marstrand 投影定理，$\dim_{\mathrm{H}} E_N = 1$；由 Besicovitch–Federer 定理，我们看到 E_N 是纯不可整流的，并且 $\mathcal{H}^1(E_N) = \infty$。此外，$E_N$ 不是 σ-有限的。

这体现了两种平面构造之间的差异。在第 2 节的 Kakeya 构造中，直线参数集 E 可以是纯不可整流的，并具有有限的 $\mathcal{H}^1$ 测度。为了得到每个斜率 $x \in [0,1]$，我们只需使 E 在 x 轴上的投影包含 $[0,1]$。对于 Nikodym 集，各点填满一个正方形，因此在 每个 高度 $t \in [0,1]$ 处，投影 $P_t(E_N)$ 都包含 $[0,1]$。这些高度给出一个投影方向区间。正是这一要求迫使纯不可整流集 E_N 具有非 σ- 有限的 $\mathcal{H}^1$ 测度。

投影论证还解释了为什么在构造 Nikodym 集时会出现威尼斯百叶窗。这两条弧说明了威尼斯百叶窗所起的作用。威尼斯百叶窗的思路是通过之字形构造排列许多短线段，使它们的投影在第一条弧上仍覆盖所需的区间，同时增加这些投影在第二条弧上的重叠，从而在极限情况下，对于第二条弧上几乎每个方向，投影的长度都为零。

致谢

感谢陶哲轩提出本文研究的两个问题，并感谢他所进行的有益讨论。

参考文献

[1] A. S. Besicovitch，《关于 Kakeya问题及一个类似问题》，《数学杂志》27（1928），312-320。[2] H. Wang 和 J. Zahl，《凸集并的体积估计及三维中的Kakeya集猜想》，arXiv:2502.17655（2025）。[3] H. Wang 和 J. Zahl，《黏性Kakeya集与黏性Kakeya猜想》，《美国数学会杂志》39（2026），515-585。[4] H. Wang 和 J. Zahl，《 $\mathbb{R}^3$中Kakeya集的Assouad维数》，《数学发明》241（2025），153-206。

[5]C. K. Lai 和 A. E. Wong, 《一个勒贝格测度为零的非黏性Kakeya集》, arXiv:2506.18142。[6] A. C´órdoba, 《Kakeya 极大函数与球面求和乘子》, 《美国数学杂志》99（1977）, 1-22。[7] U. Keich, 《关于Kakeya 极大函数的 L^p 界及 $\mathbb{R}^2$中的闵可夫斯基维数》, 《伦敦数学会通报》31（1999）, 213-221。[8] R. J. Fern´ández-Delgado 和 M. de la Salle, 《任意维数中Kakeya集的构造》, arXiv:2607.14824（2026）。[9] O. Nikodym, 《关于所有点均可沿直线到达的平面集合的测度》, 《基础数学》10（1927）, 116-168。[10] K. J. Falconer, 《具有指定投影的集合与Nikodym 集》, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）53（1986）, 48-64。[11] Y. Peres 和 B. Solomyak, 《布丰投针落在平面康托集附近的概率有多大? 》, 《太平洋数学杂志》204（2002）, 473-496。Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, 520 PortolaPlaza, Los Angeles, CA 90095, USA.电子邮箱: iqra@ucla.edu。