arXiv:2611.30628v1 [math.NT] 23 Nov 2026

全纯模形式的量子方差与 Benjamini-Schramm 收敛

KEMIN QIU

摘要。我们研究在 Benjamini-Schramm 意义下收敛到双曲平面的紧双曲曲面序列上、固定权的全纯模形式的量子方差。我们首先证明，即使对于单射半径具有一致下界且具有一致谱隙的序列，量子遍历性对任意选取的标准正交基也未必成立。该反例借助覆盖塔构造，并源于自守核中的恒等项贡献。

我们进而证明，从基的选取角度看，这一障碍是例外的。对于全纯模形式的 Haar 随机正交归一基，量子方差以趋于 1 的概率一致收敛到零，该一致性对所有上确界范数有界的可观测量成立。证明将投影乘法算子的希尔伯特-施密特范数估计与量子方差的 Haar 期望、特殊酉群上的测度集中以及对可观测量空间的有限维近似结合起来。

1. 引言

1.1. 相关工作。 量子遍历性研究的是测地流具有遍历性的紧黎曼流形上，拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数的渐近分布。Šnirel'man [5], Colin de Verdière [6]和 Zelditch [7] 的经典定理断言，在紧致负曲率流形上，当拉普拉斯特征函数对应的特征值趋于无穷时，几乎所有特征函数都会趋于等分布。特别是，对于紧双曲曲面，Zelditch 证明了当特征值趋于无穷时，大多数特征函数的质量会收敛到均匀测度。

Le Masson 和 Sahlsten [4], 研究了另一种渐近情形，他们证明：对于一列在 Benjamini 和 Schramm 意义下收敛到双曲平面的紧双曲曲面，固定谱窗内的特征函数满足量子遍历性定理。在这种几何收敛条件下，结合一致谱隙和单射半径下界，他们证明固定谱窗内特征函数的量子方差趋于零。他们的证明建立在 Brooks、Le Masson 和 Lindenstrauss[14] 早期关于离散图的研究中提出的波传播方法之上。关键步骤是用希尔伯特-施密特范数来控制量子方差

一个与特征基的选择无关的可观测量。这一视角启发了我们工作的第一部分：我们同样用一个与这些可观测量相关的算子的希尔伯特-施密特范数，对全纯模形式的量子方差给出上界。

在全纯情形中，Rudnick 和 Sarnak [8]为 Hecke 特征形式提出了量子唯一遍历性的类似概念。对于模曲面，权方面相应的质量等分布定理由 Holowinsky 和 Soundararajan [9]证明。Nelson [10]则在层方面得到了相关的等分布结果。

随机标准正交基为量子遍历性提供了另一种框架。Zelditch 证明了，在 S^2 上，球谐函数的 Haar 随机标准正交基是量子遍历的 [11]。随后，他将这一结果推广到高维希尔伯特空间序列的广泛框架中。他证明，对一个固定参考基应用 Haar 分布酉矩阵所得到的随机标准正交基，几乎必然是量子遍历的。该框架中的一个关键要素，是计算相对于酉群上 Haar 测度的量子方差矩；这一计算使用了 Weingarten 公式。我们的命题 7.1 在计算期望量子方差时采用了相同的方法。

1.2. 主要结果。 令 $\mathbb{D}$ 为配备双曲度量的庞加莱圆盘，令 $X=\Gamma\backslash\mathbb{D}$ 为紧双曲曲面。对于固定整数 $k>2$，令 $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ 表示 Γ 上权为 k 的全纯模形式所构成的有限维空间，并赋予彼得森内积（定义见第 2 节）。令

$$d_k=\dim\mathcal{M}_k(\Gamma).$$

设 $\{f_j\}_{j=1}^{d_k}$ 是 $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ 的标准正交基，$a\in L^\infty(X)$ 是一个可观测量，则定义 a 关于此基的量子方差为

$$\frac{1}{d_k}\sum_{j=1}^{d_k}\left|\langle f_j,af_j\rangle_k-⨍_X a d\mathrm{Vol}_X\right|^2. \tag{1.1}$$

这里 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_k$ 是彼得森内积，而 ffl 表示我们将积分除以 X 的体积。由于将 a 替换为

$$a-⨍_X a d\mathrm{Vol}_X$$

doe不会改变量子方差，因此我们可以只考虑满足以下条件的可观测量

$$\int_X a d\mathrm{Vol}_X=0.$$

此时，我们可以将量子方差 (1.1) 写为

$$\frac{1}{d_k}\sum_{j=1}^{d_k}\left|\langle f_j,af_j\rangle_k\right|^2 \tag{1.2}$$

我们关注一致有界可观测量在体积趋于无穷时量子方差的变化。若可观测量序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足，其中 $a_n\in L^\infty(X_n)$，

$$\|a_n\|_\infty\le C$$

对于某个常数 C，我们可以将 a_n 替换为 a_n/C，这会使量子方差按 C^{-2} 缩放，但不影响它是否趋于零。因此，全文中不失一般性地假设

$$\sup_n\|a_n\|_\infty\le 1.$$

沿用 Le Masson 和 Sahlsten [4], 的方法，我们考虑一列紧双曲曲面 $X_n=\Gamma_n\backslash\mathbb{D}$，它们在 Benjamini 和 Schramm 意义下收敛到 $\mathbb{D}$。我们用 InjRad$_X(z)$ 表示点 $z\in X$ 处的单射半径，并记 InjRad(X) $=\inf_{z\in X}$ InjRad$_X(z)$。如果对于任意 $R>0$，一列紧双曲曲面 $X_n=\Gamma_n\backslash\mathbb{D}$ 在 Benjamini-Schramm 意义下收敛到 $\mathbb{D}$，则称其

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Vol}\left(\left\{z\in X_n:\mathrm{InjRad}_{X_n}(z)<R\right\}\right)}{\mathrm{Vol}\,(X_n)}=0.$$

Le Masson 和 Sahlsten 证明，对于固定谱窗内的 Maass 形式，当曲面在 Benjamini-Schramm 意义下收敛到 $\mathbb{D}$ 时，量子方差趋于零。自然会问，对于全纯模形式，若权重保持固定而底层曲面发生变化，是否也有类似结论。本文发现，情况并非总是如此。

定理 1.1. 存在一列紧双曲曲面 $X_n=\Gamma_n\backslash\mathbb{D}$，按 *Benjamini* 和 *Schramm* 的意义收敛到 $\mathbb{D}$，满足

$$\mathrm{InjRad}\,(X_n)\ge r_0>0,$$

对所有 n 均成立，其中 r_0 是一个常数。对每个 n，都可以选取一组标准正交基

$$\mathcal{B}_{n,k}=\left\{f_{n,1},\dots,f_{n,d_{n,k}}\right\}$$

关于 $\mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ 以及一个可观测量 a_n，其满足

$$\|a_n\|_\infty\le 1,$$

使得

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{d_{n,k}} \sum_{j=1}^{d_{n,k}} \left| \langle f_{n,j}, a_n f_{n,j} \rangle - \fint a_n d\mathrm{Vol}_{X_n} \right|^2 > 0,$$

其中

$$d_{n,k} = \dim \mathcal{M}_k(\Gamma_n).$$

我们在第 6 节中利用一个覆盖塔构造了这个反例。此外，构造该反例所用的覆盖塔可以选取为具有一致谱隙，正如注 6.1 中所述。因此，即使在 Le Masson 和 Sahlsten[4] 的一致谱隙假设下，这个反例依然成立。正如我们在第 5 节中所解释的，阻碍量子方差收敛的是希尔伯特-施密特范数中的恒等项贡献。

因此，定理 1.1 中所展示的量子遍历性失效取决于基的选择。尽管存在这样的坏基，我们在本文第二部分证明，大多数基都是量子遍历的。为精确表述这一点，固定 $\mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ 的一个参考基，

$$\mathcal{E}_{n,k} = \{e_{n,1}, \dots e_{n,d_{n,k}}\}.$$

对于一个可观测量 $a_n \in L^\infty(X_n)$ 和 $U \in$ 特殊酉群 $(d_{n,k})$，记

$$\mathcal{V}_{n,k}(U, a_n) := \frac{1}{d_{n,k}} \sum_{j=1}^{d_{n,k}} \left| \langle U e_{n,j}, a_n U e_{n,j} \rangle - \fint a_n d\mathrm{Vol}_{X_n} \right|^2.$$

令$\mu_{n,k}$ 表示 特殊酉群 SU $(d_{n,k})$ 上的归一化哈尔概率测度，其中 SU(d) 是由 f $d \times d$ 酉的 行列式为 1 的矩阵组成的群。

定理 1.2。设 $X_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{D}$ 是一列紧双曲曲面，并且按照 *Benjamini* 和 *Schramm* 的意义收敛于 $\mathbb{D}$，且假设

$$\mathrm{InjRad}(X_n) \geq r_0 > 0,$$

对每个 n 属于 $\mathbb{N}$。固定 $k > 2$，令 $\mu_{n,k}$ 表示 $\mathrm{SU}(d_{n,k})$上的归一化哈尔概率测度。则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\mu_{n,k}\left(\left\{ U \in \mathrm{SU}(d_{n,k}) : \sup_{\|a_n\|_\infty \leq 1} \mathcal{V}_{n,k}(U, a_n) \leq \varepsilon \right\} \right) \to 1$$

如 $n \to \infty$。

定理 1.2 表明，随着 Haar 概率趋近于 1，对于所有上确界范数不超过 1 的可观测量，量子方差都趋于 0。特别是，该结果同时适用于所有这类可观测量，而非仅适用于某个固定的可观测量。

定理 1.2 的证明结合了 Haar 随机基下量子方差的期望、Gromov-Milman 集中不等式，以及针对球面分解低频部分的有限网论证。证明了高频贡献可以忽略，而剩余的几何误差在 Benjamini–Schramm 收敛下趋于 0。

1.3. **论文结构**。这两个结果均采用共同的希尔伯特-施密特框架证明，但恒等项贡献在确定性情形和随机基情形中扮演着截然相反的角色。

在第 2 节中，我们介绍几何和谱背景。接着，在第 3 节中，我们通过引入从 $\Gamma\backslash\mathbb{D}$ 到 $\Gamma\backslash G$的酉提升，在 $\Gamma\backslash G$ 上重新表述这个问题。随后，我们在第 4 节中引入全纯投影 Q_k，并用 $Q_k A Q_k$的希尔伯特-施密特范数给出量子方差的上界。然后将所得的希尔伯特-施密特范数分解为恒等项贡献和非恒等项贡献。第 5 节给出了这一显式分解。接着，我们利用恒等项贡献构造一列基，使量子遍历性失效，从而证明定理 1.1。

接下来我们转向 Haar 随机基。第 7 节计算期望量子方差，第 8 节将这一估计与测度集中以及有限维低频近似相结合，从而为大多数基建立一致的量子遍历性，并证明定理 1.2。

致谢。我要感谢 Michael Magee 将我引入这一项目，并感谢他提出的许多有益讨论和建议。我还要感谢 Will Hide 仔细阅读手稿并提出宝贵意见。

2. 设置与记号

2.1. **双曲曲面**。设

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

为赋有双曲度量的庞加莱圆盘

$$ds^2 = \frac{4\left|dz\right|^2}{\left(1-\left|z\right|^2\right)^2}.$$

相应的体积形式为

$$d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}(z) = \frac{4dxdy}{\left(1-\left|z\right|^2\right)^2},$$

其中 $z = x + iy$。我们将 $z, w \in \mathbb{D}$ 之间的双曲距离记为 $d_{\mathbb{D}}(z, w)$。设

$$G = \mathrm{SU}(1,1) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \beta(g) \\ \overline{\beta(g)} & \overline{\alpha(g)} \end{pmatrix} : \left|\alpha(g)\right|^2 - \left|\beta(g)\right|^2 = 1 \right\}$$

通过莫比乌斯变换作用于 $\mathbb{D}$

$$g \cdot z = \frac{\alpha(g)z + \beta(g)}{\overline{\beta(g)}z + \overline{\alpha(g)}}.$$

该作用是传递的，且原点 $0 \in \mathbb{D}$ 的稳定子为

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

因此我们可以将其识别为

$$\mathbb{D} \cong G/K.$$

对于无挠余紧福克斯群子群 $\Gamma < G$，令

$$X = \Gamma\backslash\mathbb{D}, \qquad Y = \Gamma\backslash G.$$

体积形式 $d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}$ 是 Γ-不变的，并下降为 X上的体积形式，记为 $d\mathrm{Vol}_X$。对于 $z \in X$，定义 z 处的单射半径为

$$\mathrm{InjRad}_X(z) = \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Gamma - \{\mathrm{id}\}} d_{\mathbb{D}}\left(\tilde{z}, \gamma\tilde{z}\right),$$

其中 $\tilde{z} \in \mathbb{D}$ 是 z的任意一个提升。

对于下面的一些表示论计算，采用上半平面模型会比较方便

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

凯莱变换

$$\mathcal{C} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}, \qquad \mathcal{C}(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

当 $\mathbb{H}$ 配备双曲度量时，它是一个等距映射

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

相应的体积形式为

$$d\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}}(z) = \frac{dxdy}{y^2}.$$

Let

$$C = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

设其为表示凯莱变换的矩阵。然后，经过 C 的共轭作用定义了李群之间的一个同构

$$\mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \qquad \text{by } g \mapsto CgC^{-1}.$$

在这一对应下， $\mathbb{D}$和 $\mathbb{H}$上的作用满足

$$\mathcal{C}(g \cdot z) = \left(CgC^{-1}\right) \cdot \mathcal{C}(z).$$

2.2. 全纯模形式。 $\mathbb{D}$上的全纯函数 f 是权为 k 的 Γ 的全纯模形式，若

$$f(g \cdot z) = j(g,z)^k f(z),$$

对所有 $g \in \Gamma$，其中

$$j(g,z) = \overline{\beta}z + \overline{\alpha}, \qquad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

对于 $k > 2$，令 $\mathcal{M}_k(\Gamma)$表示 Γ上权为 k 的全纯模形式空间。该空间是有限维的，并配有彼得森内积

$$\langle f, g \rangle_k = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{D}} \overline{f(z)} g(z) \left(1 - |z|^2\right)^k d\mathrm{Vol}_X(z).$$

由于因子 $\left(1-|z|^2\right)^k$ 补偿了全纯模形式的变换，这个内积定义良好。其维数由黎曼-罗赫定理和高斯-博内公式给出，对于 $k > 2$,

$$d_k = \frac{k-1}{4\pi}\mathrm{Vol}(X). \tag{2.1}$$

2.3. ()的谱分解。由于 X 是紧的， X上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 具有纯离散谱。我们将其特征值（按重数计）记为

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty.$$

对于每个不同的特征值 λ，令 E_λ 表示相应的特征空间。那么

$$L^2(X) = \widehat{\bigoplus}_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Delta)} E_\lambda,$$

其中，求和表示对不同特征值对应的正交希尔伯特空间直和。

在将 $L^2(X)$与 $L^2(Y)$的右 K-不变子空间等同之后，具有$\lambda_j \geq 1/4$的特征空间对应于球面主系列表示，具有 $0 < \lambda_j < 1/4$ 的特征空间对应于互补系列表示，而特征空间 E_{λ_0} 对应于平凡表示。

3. Unitary Lift to $\Gamma\backslash G$

令 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{D}, k)$表示可测函数 f 的希尔伯特空间： $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 满足 g

$$f(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)^k f(z), \qquad \text{for } \gamma \in \Gamma,$$

赋予彼得森内积。令 $L^2(\Gamma\backslash G, k)$表示可测函数$\phi$ 的空间： $G \to \mathbb{C}$ 满足

$$\phi(\gamma g \kappa_\theta) = e^{ik\theta}\phi(g), \qquad \text{for } \gamma \in \Gamma, g \in G \text{ and } \kappa_\theta \in K,$$

and

$$\int_{\Gamma\backslash G} |\phi(g)|^2 dg < \infty.$$

我们将 G 上的 Haar 测度归一化，使得记作

$$g = g_z \cdot \kappa_\theta, \qquad g_z \cdot 0 = z, \tag{3.1}$$

则有

$$dg = \frac{4dxdy}{\left(1-|z|^2\right)^2}\cdot\frac{d\theta}{2\pi}, \tag{3.2}$$

则， $L^2(\Gamma\backslash G,\ k)$ 与 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{D},\ k)$ 酉同构。一个显式的酉同构由下式给出 b y

$$\sigma_k : L^2(\Gamma\backslash\mathbb{D}, k) \to L^2(\Gamma\backslash G, k),$$

其中

$$\left(\sigma_k f\right)(g) = \overline{\alpha(g)}^{-k} f\left(g\cdot 0\right),$$

其逆映射为

$$\left(\sigma_k^{-1}\phi\right)(z) = j(g,0)^k \phi(g),$$

其中 g 是满足 $g\cdot 0 = z$ 的任意元素。映射 σ_k 给出了加权空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{D},\ k)$ 与 K 型 k 子空间 $L^2(\Gamma\backslash G,\ k)$ 之间的酉同一化。限制到全纯子空间后，这与全纯离散级数的标准圆盘实现一致；参见 Knapp[1,第 VI 章，第 §1] 节。

于是，对每个 Γ_n，令

$$\psi_{n,j} = \sigma_k f_{n,j},$$

并将可观测量提升为 $\Gamma_n\backslash G$ 上的右 K-不变函数，定义为

$$A_n(g) = a_n(g\cdot 0). \tag{3.3}$$

Then

$$\sigma_k\left(a_n f_{n,j}\right) = A_n\psi_{n,j}.$$

由于 σ_k 是酉的

$$\left\langle f_{n,j}, a_n f_{n,j}\right\rangle_k = \left\langle \psi_{n,j}, A_n\psi_{n,j}\right\rangle_{L^2(\Gamma_n\backslash G)}.$$

因此，对于均值为零的可观测量，量子方差可写为

$$\frac{1}{d_{n,k}}\sum_{j=1}^{d_{n,k}} \left|\left\langle \psi_{n,j}, A_n\psi_{n,j}\right\rangle\right|^2. \tag{3.4}$$

4. 全纯投影

定义

$$q_k : G\to\mathbb{C},\qquad q_k(g) = \overline{\alpha(g)}^{-k},$$

并且，对于 $\phi\in L^2(G)$,

$$\left(Q_k\phi\right)(x) = \frac{k-1}{4\pi}\int_G q_k\left(y^{-1}x\right)\phi(y)dy.$$

算子 Q_k 是加权伯格曼投影的群实现。特别地，

$$Q_k^2 = Q_k,\qquad Q_k^* = Q_k.$$

由于 Q_k 通过在 G上的核进行右卷积来定义，同一个算子对任意 n也作用于 $L^2(\Gamma_n\backslash G)$。将其视为作用在 $L^2(\Gamma_n\backslash G)$上的算子时，其像恰好是 $\sigma_k\left(\mathcal{M}_k\left(\Gamma_n\right)\right)$。此外，$Q_k$ 在该子空间上充当恒等算子。由于 Q_k 是自伴的，我们可以将（3.4）写成

$$\frac{1}{d_{n,k}}\sum_{j=1}^{d_{n,k}} \left|\left\langle \psi_{n,j}, Q_k A_n Q_k\psi_{n,j}\right\rangle\right|^2. \tag{4.1}$$

我们可以用 $Q_k A_n Q_k$ 在 $\Gamma_n\backslash G$上的希尔伯特-施密特范数来界定（4.1），即

$$\frac{1}{d_{n,k}}\sum_{j=1}^{d_{n,k}} \left|\left\langle \psi_{n,j}, Q_k A_n Q_k\psi_{n,j}\right\rangle\right|^2 \le \frac{1}{d_{n,k}}\left\|Q_k A_n Q_k\right\|_{\mathrm{HS}}^2. \tag{4.2}$$

5. 希尔伯特-施密特范数

Q_k 在 $\Gamma\backslash G$ 上的核是自守伯格曼核

$$B_k^\Gamma(x,y)=\frac{k-1}{4\pi}\sum_{\gamma\in\Gamma}q_k\left(y^{-1}\gamma x\right).$$

假设 A 是定义在 $\Gamma\backslash\mathbb{D}$ 上的某个函数在商映射 $\Gamma\backslash G\to\Gamma\backslash\mathbb{D}$ 下的拉回。那么， Q_kAQ_k 在 $\Gamma\backslash G$ 上的核可以表示为

$$K_A(x,y)=\int_{\Gamma\backslash G}B_k^\Gamma(x,z)A(z)B_k^\Gamma(z,y)dz.$$

那么，它在 $\Gamma\backslash G$ 上的希尔伯特-施密特范数可以表示为

$$\begin{aligned}\|Q_kAQ_k\|_{\mathrm{HS}}^2&=\int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G}\left|\int_{\Gamma\backslash G}B_k^\Gamma(x,z)A(z)B_k^\Gamma(z,y)dz\right|^2dxdy\\&=\int_{(\Gamma\backslash G)^4}B_k^\Gamma(x,z)A(z)B_k^\Gamma(z,y)B_k^\Gamma(y,z')\overline{A(z')}B_k^\Gamma(z',x)dz'dzdxdy\\&=\int_{\Gamma\backslash G\times\Gamma\backslash G}A(z)\overline{A(z')}\left|B_k^\Gamma(z,z')\right|^2dz'dz,\end{aligned}$$

其中，最后一个等号由 $Q_k^2=Q_k$. 得出

我们可以将 $\left|B_k^\Gamma(x,y)\right|^2$ 展开为

$$\left|B_k^\Gamma(x,y)\right|^2=\left(\frac{k-1}{4\pi}\right)^2\sum_{\delta,\eta\in\Gamma}q_k\left(y^{-1}\delta x\right)\overline{q_k\left(y^{-1}\eta x\right)},$$

令 $\gamma=\delta\eta^{-1}$，并作变量替换 $x\mapsto\eta x$。由于 A 是左 Γ-不变的，关于 x 展开积分可得

$$\|Q_kAQ_k\|_{\mathrm{HS}}^2=\left(\frac{k-1}{4\pi}\right)^2\int_{\mathcal{F}}\int_G\sum_{\gamma\in\Gamma}A(x)\overline{A(y)}q_k\left(y^{-1}\gamma x\right)\overline{q_k\left(y^{-1}x\right)}dxdy,$$

其中 $\mathcal{F}$ 是 G 上 Γ 的基本域。于是

$$\|Q_kAQ_k\|_{\mathrm{HS}}^2=\left(\frac{k-1}{4\pi}\right)^2\left(I_e+\sum_{\gamma\neq e}I_\gamma\right),\tag{5.1}$$

其中

$$I_\gamma=\int_{\mathcal{F}}\int_G A(x)\overline{A(y)}q_k\left(y^{-1}\gamma x\right)\overline{q_k(y^{-1}x)}dxdy.\tag{5.2}$$

5.1. 非单位元贡献。我们首先估计 Γ 中非单位元的贡献。由 (5.2) 可知

$$\left|\sum_{\gamma\neq e}I_\gamma\right|\leq\|A\|_\infty^2\sum_{\gamma\neq e}\int_{\mathcal{F}}\int_G\left|q_k\left(y^{-1}\gamma x\right)q_k(x^{-1}y)\right|dxdy\tag{5.3}$$

引理 5.1。设

$$r_\gamma(y)=d_{\mathbb{D}}\left(y\cdot0,\gamma y\cdot0\right).$$

于是，

$$\int_G\left|q_k(y^{-1}\gamma x)q_k(x^{-1}y)\right|dx\lesssim_k\left(1+r_\gamma(y)\right)e^{-kr_\gamma(y)/2}.$$

证明。 由于 $g\cdot 0=\beta(g)/\overline{\alpha(g)}$ 和 $|\alpha(g)|^2-|\beta(g)|^2=1$，我们得到

$$|\alpha(g)|=\left(1-|g\cdot 0|^2\right)^{-1/2}.$$

因此

$$|q_k(g)|=\left(\cosh\frac{d_{\mathbb{D}}(0,g\cdot 0)}{2}\right)^{-k}.$$

由于对所有 $t\in\mathbb{R}$，$\cosh t\geq \frac{e^t}{2}$，

$$|q_k(g)|\leq 2^k e^{-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(0,g\cdot 0)} \tag{5.4}$$

这意味着

$$\left|q_k(y^{-1}\gamma x)q_k(x^{-1}y)\right|\leq 4^k\exp\left[-\frac{k}{2}\left(d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)+d_{\mathbb{D}}\left(z,y_0\right)\right)\right]$$

其中，$y_0=y\cdot 0$ 和 $z=x\cdot 0$ 是 (3.1) 中 x 的 $\mathbb{D}$ 坐标。于是，

$$\int_G\left|q_k(y^{-1}\gamma x)q_k(x^{-1}y)\right|dx\leq\int_{\mathbb{D}}4^k\exp\left[-\frac{k}{2}\left(d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)+d_{\mathbb{D}}(z,y_0)\right)\right]d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}(z). \tag{5.5}$$

设 ℓ_γ 为经过 y_0 和 $\gamma^{-1}y_0$ 的完整测地线，并按弧长参数化，使得

$$\ell_\gamma(0)=y_0,\qquad \ell_\gamma\left(r_\gamma(y)\right)=\gamma^{-1}y_0.$$

我们使用相对于 ℓ_γ 的 Fermi 坐标（s，t），其中 s 是 z 在 ℓ_γ 上的正交投影的带符号弧长坐标，以 y_0 为起点测量；t 是 z 到 ℓ_γ 的带符号垂直距离。在这些坐标下，

$$d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}(z)=\cosh t\,ds\,dt.$$

根据双曲直角公式

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(z,y_0)=\cosh s\cosh t,\ \cosh d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)=\cosh\left(r_\gamma(y)-s\right)\cosh t.$$

这意味着

$$d_{\mathbb{D}}\left(z,y_0\right)+d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)\geq|s|+|r_\gamma(y)-s|+2|t|-C,$$

对于某个常数 C。于是对于 $s\in[0,r_\gamma(y)]$，

$$d_{\mathbb{D}}\left(z,y_0\right)+d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)\geq r_\gamma(y)+2|t|-C.$$

对于 $s>r_\gamma(y)$，

$$d_{\mathbb{D}}(z,y_0)+d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)\geq 2s-r_\gamma(y)+2|t|-C=r_\gamma(y)+2\left(s-r_\gamma(y)\right)+2|t|-C.$$

对于 $s<0$，

$$d_{\mathbb{D}}\left(z,y_0\right)+d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)\geq r_\gamma(y)-2s+2|t|-C.$$

这意味着，在 Fermi 坐标中，我们可以将 (5.5) 的右侧界定为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}}\exp\left[-\frac{k}{2}\left(d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma^{-1}y_0\right)+d_{\mathbb{D}}(z,y_0)\right)\right]dz\\&\qquad\lesssim\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{k}{2}r_\gamma(y)-k|t|\right)\left(\int_{-\infty}^{0}e^{ks}ds+\int_0^{r_\gamma(y)}ds+\int_{r_\gamma(y)}^{\infty}e^{k(r_\gamma(y)-s)}ds\right)\cosh t\,dt.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\int_G\left|q_k(y^{-1}\gamma x)q_k(x^{-1}y)\right|dx&\lesssim\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{k}{2}r_\gamma(y)-k|t|\right)\left(\frac{2}{k}+r_\gamma(y)\right)\cosh t\,dt\\&\lesssim_k\left(1+r_\gamma(y)\right)e^{-kr_\gamma(y)/2}.\end{aligned}$$

□

命题 5.2。 设 $X=\Gamma\backslash\mathbb{D}$ 是一个满足 $\mathrm{InjRad}(X)\geq r_0>0$的紧双曲曲面。对于任意 $R>0$ 和 $k>2$，有

$$\left|\sum_{\gamma\neq e} I_\gamma\right| \leq C(k,r_0)\left\|A\right\|_\infty^2\left[\sum_{m\geq 2R}(m+2)e^{m-\frac{k}{2}m}\cdot \mathrm{Vol}(X)+\mathrm{Vol}\left(\{z\in F:\mathrm{InjRad}_X(z)\leq R\}\right)\right],$$

其中， F 是 Γ 在 $\mathbb{D}$上的基本域， $X=\Gamma\backslash\mathbb{D}$ ，而 C（k， r_0）是仅依赖于k 和 r_0的常数。

证明。 令 $p\colon G\to\mathbb{D}$ 为商映射 $G\to G/K$ 与同胚 $G/K\to\mathbb{D}$.的复合。于是我们有

$$p^{-1}(F)=\mathcal{F},$$

利用 (3.1) 中的坐标，对于右 K-不变函数 f ，我们有

$$\int_{\mathcal{F}} f(g)dg=\int_F f(g_z)\,d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}z.$$

由 (5.3) 和引理 5.1，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\gamma\neq e} I_\gamma\right| &\lesssim_k \sum_{\gamma\neq e}\left\|A\right\|_\infty^2\int_{\mathcal{F}}(1+r_\gamma(y))\,e^{-kr_\gamma(y)/2}dy \\ &=\sum_{\gamma\neq e}\left\|A\right\|_\infty^2\int_F(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right)dz.\end{aligned}\tag{5.6}$$

最后一个等式成立是因为$r_\gamma(y)$是右 K-不变的。

Let

$$D(R)=\{z\in F:\mathrm{InjRad}_X(z)>R\}.$$

我们将几何积分拆分为来自 $D(R)$ 和 $D(R)^c$ 的贡献。

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\neq e}\int_F(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right)dz &=\int_{D(R)}\sum_{\gamma\neq e}(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right)dz \\ &\quad+\int_{D(R)^c}\sum_{\gamma\neq e}(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right)dz.\end{aligned}$$

Let

$$N_z(m)=\#\{\gamma\in\Gamma-\{e\}:m\leq d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)<m+1\}.$$

设 $r_0>0$ 是 X 的单射半径下界，则对于互不相同的 γ_1， $\gamma_2\in\Gamma$，

$$d_{\mathbb{D}}(\gamma_1 z,\gamma_2 z)=d_{\mathbb{D}}\left(z,\gamma_1^{-1}\gamma_2 z\right)\geq 2r_0.$$

因此，球 $B(\gamma z,\ r_0/2)$ 两两不相交。对于每个由 $N_z(m)$ 计数的 γ，这些球都包含在 $B\left(z,\ m+1+\frac{r_0}{2}\right)$ 中。因此

$$N_z(m)\,\mathrm{Vol}\left(B\left(\frac{r_0}{2}\right)\right)\leq \mathrm{Vol}\left(B\left(m+1+\frac{r_0}{2}\right)\right).$$

这意味着存在一个依赖于 r_0 的常数，使得

$$N_z(m)\leq\frac{\cosh\left(m+1+\frac{r_0}{2}\right)-1}{\cosh\left(\frac{r_0}{2}\right)-1}\leq C_1(r_0)\,e^m.\tag{5.7}$$

那么对于任意 z，我们有

$$\sum_{\gamma\neq e}(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right)\leq\sum_{m=0}^{\infty}N_z(m)\,(m+2)\,e^{-km/2}.\tag{5.8}$$

由于对于 $z \in D(R)$, $N_z(m) = 0$ 对 $m < 2R-1$ 成立，因此这意味着

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\neq e}(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right) &\leq \sum_{m\geq 2R-1} C_1(r_0)(m+2)e^{m-km/2}\\ &= C_1(r_0)e^{k/2-1}\sum_{m\geq 2R}(m+1)e^{m-km/2}\\ &\leq C_1(r_0)e^{k/2-1}\sum_{m\geq 2R}(m+2)e^{m-km/2}\end{aligned}$$

其中右侧级数在 $k > 2$ 时收敛。于是存在一个常数 $C_2(k, r_0)$，它仅依赖于 k 和 r_0，

$$\int_{D(R)}\sum_{\gamma\neq e}(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right)dz \leq C_2(k,r_0)\sum_{m\geq 2R}(m+2)e^{m-km/2}\mathrm{Vol}(X). \tag{5.9}$$

同样，存在一个常数 $C_3(k, r_0)$，

$$\begin{aligned}\int_{D(R)^c}\sum_{\gamma\neq e}(1+d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z))\exp\left(-\frac{k}{2}d_{\mathbb{D}}(z,\gamma z)\right)dz&\\ \leq C_3(k,r_0)\left(\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)e^{m-km/2}\right)\mathrm{Vol}\left(\{z\in F:\mathrm{InjRad}_X(z)\leq R\}\right).&\end{aligned} \tag{5.10}$$

结合 (5.9) 和 (5.10) 即完成证明。 □

由命题 5.2 可直接得到以下推论。

推论 5.3. 设

$$X_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{D}$$

以 *Benjamini-Schramm* 的意义收敛于 $\mathbb{D}$，并假设存在 $r_0 > 0$ 使得

$$\mathrm{InjRad}(X_n) \geq r_0$$

对所有 n。若 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 L^∞-范数下一致有界，则

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(X_n)}\left|\sum_{\gamma\neq e} I_{n,\gamma}\right| \to 0 \qquad as\ n\to\infty.$$

5.2. **恒等元贡献**。对于恒等元项，

$$I_e = \int_{\mathcal{F}}\int_G A(x)\overline{A(y)}\left|q_k\left(y^{-1}x\right)\right|^2 dxdy.$$

记

$$h_k(g) = |q_k(g)|^2,$$

并令 $\rho(h_k)$ 表示作用于 $L(\Gamma\backslash G)$ 上的算子，[2]其作用为

$$(\rho(h_k)f)(y) = \int_G h_k(x)\rho(x)f(y)dx = \int_G h_k(x)f(yx)dx.$$

于是我们可以将恒等元项表示为

$$I_e = \langle A, \rho(h_k)A\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)}. \tag{5.11}$$

由于 A 来自 $L^2(X)$，我们可以使用第2.3节中的谱分解，将 A 写成其球面分量之和。由于 A 均值为零，它与平凡表示正交。因此

$$A = \sum_{\sigma\not\simeq\mathbf{1}}\sum_{a=1}^{m(\sigma,\Gamma)} A_{\sigma,a}, \tag{5.12}$$

其中 $A_{\sigma,\ a}$ 表示 A 在球表示 σ的第 a个副本中的分量。

在凯莱变换 $G \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 下，我们采用 Repka [2] 引入的球面主系列与互补系列的实现。令

$$M = \{\pm I\}, \qquad K = \mathrm{SO}(2),$$

并令 D 和 N 分别表示正对角矩阵子群和上三角幺幺子群。令

$$h_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in D, \qquad n_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N.$$

Set

$$K^+ = \left\{ \kappa_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : 0 \le \theta < \pi \right\}.$$

那么，每个 $g \in G$ 都可以唯一地写成如下形式

$$g = m(g) e^{H(g)} N(g) \kappa(g),$$

其中 $m(g) \in M$， $\kappa(g) \in K^+$， $N(g) \in N$，且 $H(g) = \mathrm{diag}\left(t(g), -t(g)\right)$.

定义

$$\mu\left(h_t\right) = e^{2t}, \qquad \eta_s\left(m h_t n\right) = e^{st},$$

这里我们取 M 的平凡特征。将这些函数按如下方式延拓到 G

$$\mu(g) = \mu\left(e^{H(g)}\right), \qquad \eta_s(g) = \eta_s\left(m(g) e^{H(g)} N(g)\right).$$

Let

$$\pi_s = \mathrm{Ind}_{MDN}^{G} \eta_s.$$

该表示在 $\mathcal{H}_s = L^2(K^+)$ 上的作用为

$$\left(\pi_s(g) f\right)(\kappa_0) = \eta_s\left(\kappa_0 g\right) \mu\left(\kappa_0 g\right)^{1/2} f\left(\kappa(\kappa_0 g)\right). \tag{5.13}$$

对于 $s \in i\mathbb{R}$， π_s 是酉的，且属于主系列。对于 $-1 < s < 0$，我们在 $\{\phi_{2m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 的线性张成上赋予内积

$$\left\langle \phi_{2m}, \phi_{2n} \right\rangle_{u,s} = \delta_{m,n} \begin{cases} 1, & m = 0, \\ \prod_{j=1}^{|m|} \frac{2j-1-s}{2j-1+s} & m \neq 0, \end{cases} \tag{5.14}$$

其中

$$\phi_{2m}\left(\kappa_\theta\right) = e^{2mi\theta},$$

并且 $\{\phi_{2m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(K^+)$ 关于通常的 L^2-内积的标准正交基。令 $\mathcal{H}_s^u$ 为关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{u,\ s}$的希尔伯特空间完备化。同一作用 π_s 延拓为 $\mathcal{H}_s^u$上的酉表示，记为 π_s^u。这就是互补系列表示。在主系列和互补系列中， K-不变子空间均为一维，并由以下向量张成

$$\phi_0 \equiv 1.$$

引理 5.4. 设 $\mathcal{H}_s$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的球面主系列或互补系列分量。其中 n

$$\rho\left(h_k\right) \mathcal{H}_s^K \subseteq \mathcal{H}_s^K,$$

其中 $\mathcal{H}_s^K$ 表示 K-不变子空间。在特别地，由于

$$\dim \mathcal{H}_s^K = 1,$$

存在 $c_k(s) \in \mathbb{C}$ 使得

$$\rho\left(h_k\right) v = c_k(s) v, \qquad v \in \mathcal{H}_s^K.$$

证明。 设 $v \in \mathcal{H}_s^K$。由于 $\mathcal{H}_s$ 在 G 作用下封闭，对于每个 g

$$h_k(g)\rho(g)v \in \mathcal{H}_s.$$

由于 $\mathcal{H}_s$ 是完备的,

$$\rho\left(h_k\right)v = \int_G h_k(g)\rho(g)vdg \in \mathcal{H}_s.$$

对于 $\kappa \in K$,

$$\begin{aligned}\rho\left(\kappa\right)\rho\left(h_k\right)v &= \int_G h_k(g)\rho\left(\kappa g\right)vdg \\ &= \int_G h_k\left(\kappa^{-1}g\right)\rho(g)vdg \\ &= \int_G h_k\left(g\right)\rho\left(g\right)vdg \\ &= \rho\left(h_k\right)v.\end{aligned}$$

因此它具有 K-不变性。 □

然后利用 A在（5.12）中的谱分解

$$\rho\left(h_k\right)A = \sum_{\sigma_s \not\simeq \mathbf{1}} \sum_{a=1}^{m(\sigma_s,\Gamma)} \rho\left(h_k\right)A_{\sigma_s,a} = \sum_{\sigma_s \not\simeq \mathbf{1}} \sum_{a=1}^{m(\sigma_s,\Gamma)} c_k(s)A_{\sigma_s,a},$$

其中，在主系列情形下， σ_s 同构于表示 π_s ，而在互补系列情形下同构于 π_s^u。于是由（5.11）和正交性,

$$I_e = \sum_{\sigma_s \not\simeq \mathbf{1}} \sum_{a=1}^{m(\sigma_s,\Gamma)} c_k(s)\left\|A_{\sigma_s,a}\right\|^2. \tag{5.15}$$

命题 5.5。 设 σ_s 为具有 $s \in i\mathbb{R}$的主系列表示，或具有 $-1 < s < 0$的互补系列表示。那么，

$$c_k\left(s\right) = \int_G h_k(g)\left\langle e_s, \sigma_s(g)e_s\right\rangle dg, \tag{5.16}$$

其中， e_s 是在同构下， $\mathcal{H}_s$ 或 $\mathcal{H}_s^u$ 中 1的像。这个常数由下式给出:

$$c_k(s) = 4\pi\frac{\Gamma\left(k-\frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(k\right)^2}.$$

证明。由于

$$c_k(s) = \left\langle e_s, \rho\left(h_k\right)e_s\right\rangle,$$

第一部分显然。为计算此式，我们考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的 Cartan 分解，即

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = KDK.$$

g 在此分解下的坐标为

$$g = \kappa_\phi a_r \kappa_\theta, \qquad a_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix},$$

相应地，关于此坐标的 Haar 测度为

$$dg = \sinh r\frac{d\theta}{2\pi}d\phi dr.$$

由于 h_k 是 K-双不变的，且 e_s 是 K-不变的，我们可以将（5.16）表示为

$$c_k(s) = 2\pi\int_0^\infty \left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{-2k}\left\langle e_s, \sigma_s\left(a_r\right)e_s\right\rangle \sinh r dr.$$

利用酉同构，若 σ_s 属于主系列，则

$$\langle e_s, \sigma_s(a_r)\, e_s\rangle = \langle 1, \pi_s(a_r)\, 1\rangle_{L^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi_s(a_r)\, 1)(\kappa_\theta)\, d\theta.$$

如果 σ_s 是互补系列，我们可以将 $\pi_s(a_r)\,1$展开为 $\{\phi_{2m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 之和，

$$\pi_s(a_r)\, 1 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{2m}(r)\phi_{2m}.$$

(5.14) 中的正交关系意味着

$$\langle 1, \pi_s(a_r)\, 1\rangle_{u,s} = b_0(r) = \langle 1, \pi_s(a_r)\, 1\rangle_{L^2}.$$

因此，对于所有 s，我们可以写成

$$c_k(s) = 2\pi\int_0^\infty \left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{-2k} \langle 1, \pi_s(a_r)\, 1\rangle_{L^2} \sinh r dr.$$

由 (5.13)，我们有

$$(\pi_s(a_r)\, 1)(\kappa_0) = \mu(\kappa_0 a_r)^{1/2}\, \eta_s(\kappa_0 a_r).$$

利用 $\kappa_\theta a_r$ 的伊wasawa 分解，我们得到

$$(\pi_s(a_r)\, 1)(\kappa_\theta) = \left(e^r \sin^2\theta + e^{-r}\cos^2\theta\right)^{-\frac{1+s}{2}} = (\cosh r - \sinh r\cos 2\theta)^{-\frac{1+s}{2}}.$$

于是,

$$c_k(s) = 2\int_0^\infty\int_0^\pi \left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{-2k} (\cosh r - \sinh r\cos 2\theta)^{-\frac{1+s}{2}} \sinh r d\theta dr.$$

Set

$$a = \frac{1+s}{2}, \qquad u = \tanh^2\frac{r}{2}.$$

Then

$$\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{-2k} = (1-u)^k,$$

and

$$\cosh r - \sinh r\cos 2\theta = \frac{1+u-2\sqrt{u}\cos 2\theta}{1-u}.$$

此外,

$$\sinh r dr = \frac{2du}{(1-u)^2}.$$

因此

$$c_k(s) = 4\int_0^1\int_0^\pi (1-u)^{k+a-2}\left(1+u-2\sqrt{u}\cos 2\theta\right)^{-a} d\theta du.$$

Now

$$1+u-2\sqrt{u}\cos 2\theta = \left(1-\sqrt{u}e^{2i\theta}\right)\left(1-\sqrt{u}e^{-2i\theta}\right).$$

利用二项式展开,

$$(1-z)^{-a} = \sum_{m=0}^\infty \frac{(a)_m}{m!} z^m, \qquad |z|<1,$$

我们得到

$$\int_0^\pi \left(1+u-2\sqrt{u}\cos 2\theta\right)^{-a} d\theta = \int_0^\pi \sum_{m,n\geq 0} \frac{(a)_m (a)_n}{m!n!} u^{(m+n)/2} e^{2i(m-n)\theta} d\theta.$$

由于

$$\int_0^\pi e^{2i(m-n)\theta} d\theta = \begin{cases}\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n,\end{cases}$$

由此可得

$$\int_0^\pi \left(1+u-2\sqrt{u}\cos 2\theta\right)^{-a} d\theta = \pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m^2}{(m!)^2} u^m.$$

因此

$$c_k(s) = 4\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m^2}{(m!)^2} \int_0^1 u^m (1-u)^{k+a-2} du.$$

根据贝塔积分公式,

$$\int_0^1 u^m (1-u)^{k+a-2} du = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(k+a-1)}{\Gamma(m+k+a)}.$$

Thus

$$\begin{aligned} c_k(s) &= 4\pi \frac{\Gamma(k+a-1)}{\Gamma(k+a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m^2}{m!\,(k+a)_m} \\ &= 4\pi \frac{\Gamma(k+a-1)\Gamma(k-a)}{\Gamma(k)^2}, \end{aligned}$$

其中最后一个等式由 Gauss求和公式得出。令

$$a = \frac{1+s}{2}$$

即可得到所需结果。 □

6. Construction of Counterexample

设 $\Gamma_0 < G$ 为一个无挠协紧子群。取一列递减的有限指数正规子群

$$\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots, \qquad [\Gamma_0 : \Gamma_n] < \infty, \qquad \Gamma_n \lhd \Gamma_0,$$

使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \{e\}.$$

由于 $\Gamma_n \subset \Gamma_0$，我们有

$$\mathrm{InjRad}(X_n) \geq \mathrm{InjRad}(X_0) > 0.$$

由于 X_0 是紧的， Γ_0 中平移长度不超过 $2R$的非平凡共轭类只有有限多个。令 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ 为这些共轭类的代表元。由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \{e\},$$

当 n充分大时，元素 γ_1、.....、γ_N均不属于 Γ_n。由于 Γ_n是 Γ_0中的正规子群，任何 γ_i 的共轭元都不属于 Γ_n。因此，对于所有充分大的 n， Γ_n 中不含平移长度不超过 $2R$的非平凡元素。因此 $\mathrm{InjRad}(X_n) > R$。这意味着

$$\frac{\mathrm{Vol}\left\{z \in X_n : \mathrm{InjRad}_{X_n}(z) < R\right\}}{\mathrm{Vol}(X_n)} \to 0.$$

由于 R 是任意的， X_n 在 Benjamini–Schramm 意义下收敛到 $\mathbb{D}$ 。令

$$p_n : X_n \to X_0$$

为覆盖映射。选取一个非零实值拉普拉斯特征函数 a_0 , 定义在 X_0 上，并将其归一化，使得$\|a_0\|_\infty = 1$，其特征值为 $\lambda = \frac{1+t^2}{4} > \frac{1}{4}$。接着我们定义 ~~$a_n$~~ $= a_0 \circ p_n$，于是 a_n 也是拉普拉斯算子的特征函数，谱参数为 t。因此，由 (5.15) 可知， a_n 的恒等项贡献为

$$I_e = c_k(it)\,\|a_n\|_2^2.$$

由于 $a_n = a_0 \circ p_n$,

$$\|a_n\|_2^2 = \|a_0\|_2^2 \cdot \deg p_n = \|a_0\|_2^2 \cdot \frac{\mathrm{Vol}\,(X_n)}{\mathrm{Vol}\,(X_0)}.$$

此外，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 也一致有界于

$$\|a_n\|_\infty = \|a_0\|_\infty = 1.$$

于是，由推论 5.3 和 (5.1)， $Q_k A_n Q_k$的希尔伯特-施密特范数（其中 A_n 是按照 (3.3) 将a_n 拉回到 $\Gamma_n\backslash G$上的结果）为

$$\|Q_k A_n Q_k\|_{\mathrm{HS}}^2 = \left(\frac{k-1}{4\pi}\right)^2 c_k\,(it)\,\|a_0\|_2^2 \cdot \frac{\mathrm{Vol}\,(X_n)}{\mathrm{Vol}\,(X_0)} + o_{k,r_0}\left(\mathrm{Vol}\,(X_n)\right). \tag{6.1}$$

由于我们假设 a_0 为实数， A_n 也为实数，因此 $Q_k A_n Q_k$ 是自伴的。由于 $\sigma_k(\mathcal{M}_k\,(\Gamma_n))$ 是有限维的，谱定理蕴含 $Q_k A_n Q_k$ 可对角化。我们选取$\psi_{n,\ j}$ 作为 $Q_k A_n Q_k$ 的特征基，使得

$$\sum_{j=1}^{d_{n,k}} |\langle \psi_{n,j}, A_n \psi_{n,j}\rangle|^2 = \|Q_k A_n Q_k\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

由于 a_n 具有非零特征值， A_n 与平凡表示正交。等价地， A_n 均值为零。于是，由 (2.1) 可得 A_n 关于$\{\psi_{n,j}\}_{j=1}^{d_{n,\ k}}$ 的量子方差为

$$\frac{1}{d_{n,k}} \sum_{j=1}^{d_{n,k}} |\langle \psi_{n,j}, A_n \psi_{n,j}\rangle|^2 = \frac{k-1}{4\pi} c_k(it) \frac{\|a_0\|_2^2}{\mathrm{Vol}\,(X_0)} + o_{k,r_0}(1).$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{d_{n,k}} \sum_{j=1}^{d_{n,k}} |\langle \psi_{n,j}, A_n \psi_{n,j}\rangle|^2 \to \frac{k-1}{4\pi} c_k(it) \frac{\|a_0\|_2^2}{\mathrm{Vol}\,(X_0)}.$$

这就证明了定理 1.1。

注 6.1. 此外，上述塔还可以选取为具有一致谱隙。事实上，我们可以令 Γ_0 为余紧算术格，并令 (Γ_n) 为交集平凡的有限指数同余子群嵌套塔。根据 Selberg 的 $3/16$ 定理 [17], 以及 Jacquet-Langlands 对应 [16], ，相应的紧双曲曲面 $X_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{D}$ 满足

$$\lambda_1\,(X_n) \geq \frac{3}{16}$$

一致地 在 n 中。因此，即使假设具有一致谱隙，这个反例依然成立 n.

7. Expectation Over Haar-Random Bases

给定一个 Γ，令

$$d = \dim \mathcal{M}_k\,(\Gamma).$$

固定 $\sigma_k(\mathcal{M}_k(\Gamma))$ 的标准正交基

$$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_d\}.$$

对于 $U \in$特殊酉群(d)，令

$$\psi_j^U = U e_j, \qquad 1 \leq j \leq d,$$

并定义

$$\mathcal{V}_{\Gamma,k}\,(U, A) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \left\langle \psi_j^U, A\psi_j^U \right\rangle - \fint A \right|^2.$$

在 SU (d) 上赋予归一化哈尔概率测度。

命题 7.1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个有限维复希尔伯特空间，其 维数$\mathcal{H} = d$ 为 $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ，并设其上有一个线性算子。固定一组标准正交基

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_d\}\,.$$

对于 $U \in$ 特殊酉群$(\mathcal{H})$，在 特殊酉群 $(\mathcal{H})$ 上赋予归一化哈尔概率测度后，我们有

$$\mathbb{E}_U\left[\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}|\langle Ue_j, TUe_j\rangle|^2\right] = \frac{\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\mathrm{Tr}T|^2}{d\,(d+1)}.$$

证明。 $d = 1$ 的情形显然成立，因此我们假设 $d \geq 2$。对每个固定的 j，随机向量 Ue_j 在 $\mathcal{H}$的单位球面上均匀分布。由于 U (*d*) 和特殊酉群 (*d*) 都在 $d \geq 2$的单位球面上具有传递作用，因此来自任一群的 Haar 分布矩阵都会将任意固定的单位向量映射为均匀分布的单位向量。设 v 为一个均匀分布的单位向量，并记

$$v = \sum_{a=1}^{d} v_a e_a.$$

Then

$$\langle v, Tv\rangle = \sum_{a,b=1}^{d} T_{ab}\overline{v_a}v_b.$$

因此

$$|\langle v, Tv\rangle|^2 = \sum_{a,b,c,e} T_{ab}\overline{T_{ce}}v_b\overline{v_a}v_c\overline{v_e}.$$

根据 Weinga rten 公式（Collins 和 Śniady） [18,推论 2.4], ， v 的四阶矩满足

$$\mathbb{E}\left[v_b\overline{v_a}v_c\overline{v_e}\right] = \frac{\delta_{ab}\delta_{ce} + \delta_{be}\delta_{ca}}{d(d+1)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v\left[|\langle v, Tv\rangle|^2\right] &= \frac{1}{d(d+1)}\sum_{a,b,c,e} T_{ab}\overline{T_{ce}}\left(\delta_{ab}\delta_{ce} + \delta_{be}\delta_{ca}\right)\\ &= \frac{1}{d(d+1)}\left[\sum_{a,c} T_{aa}\overline{T_{cc}} + \sum_{a,b} T_{ab}\overline{T_{ab}}\right]\\ &= \frac{|\mathrm{Tr}T|^2 + \|T\|_{\mathrm{HS}}^2}{d(d+1)}.\end{aligned}$$

因此，根据期望的线性性质，我们有

$$\mathbb{E}_U\left[\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}|\langle Ue_j, TUe_j\rangle|^2\right] = \frac{\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\mathrm{Tr}T|^2}{d\,(d+1)}.$$

□

推论7.2。设

$$X_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{D}$$

是一列曲面，在 *Benjamini–Schramm* 意义下收敛到 $\mathbb{D}$ ，并假设

$$\mathrm{InjRad}\,(X_n) \geq r_0 > 0$$

关于 n一致。令

$$\rho_n = \inf_{R>0}\left[\sum_{m\geq 2R} e^{(1-k/2)m} + \frac{\mathrm{Vol}\left(\left\{z \in X_n : \mathrm{InjRad}_{X_n} z \leq R\right\}\right)}{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{X_n})}\right].$$

那么，当 $n \to \infty$. 时， A_n 。此外，对于所有满足条件的均值为零的可观测量，一致地有

$$\|A_n\|_\infty \leq 1,$$

我们有

$$\mathbb{E}_U\left[\mathcal{V}_{n,k}\left(U, A_n\right)\right] \lesssim_{k,r_0} \frac{1}{d_{n,k}} + \rho_n^2.$$

这里$\mathcal{V}_{n,k}(U, A_n) = \mathcal{V}_{\Gamma_n,k}(U, A_n)$ 。

证明。 我们将命题 7.1 应用于以下情形

$$\mathcal{H} = \sigma_k\left(\mathcal{M}_k\left(\Gamma_n\right)\right), \qquad T = Q_k A_n Q_k.$$

Then

$$\mathbb{E}_U\left[\mathcal{V}_{n,k}\left(U, A_n\right)\right] = \frac{\|Q_k A_n Q_k\|_{\mathrm{HS}}^2 + \left|\mathrm{Tr}\left(Q_k A_n Q_k\right)\right|^2}{d_{n,k}\left(d_{n,k}+1\right)}.$$

希尔伯特-施密特范数项按 (5.1) 的方式书写。对于非恒等元项，由 (2.1) 和推论 5.3 可得 $o_{k,r_0}(d_{n,k})$。对于恒等元项，由于 σ_s 是酉的且 $\|e_s\| = 1$,

$$|\langle e_s, \sigma_s(g) e_s\rangle| \leq 1.$$

然后，考察 (5.16) 中 $c_k(s)$ 的公式，可得

$$\begin{aligned} |c_k(s)| &\leq \int_G h_k(g) dg \\ &= \int_G q_k(g) q_k\left(g^{-1}\right) dg. \end{aligned}$$

由于 $Q_k^2 = Q_k$，通过比较核，我们有

$$\frac{k-1}{4\pi} \int_G q_k\left(z^{-1}x\right) q_k\left(y^{-1}z\right) dz = q_k\left(y^{-1}x\right).$$

然后，取 $y = x = e$，我们有

$$|c_k(s)| \leq \frac{4\pi}{k-1}. \tag{7.1}$$

然后，（5.15）意味着

$$I_e \leq \frac{4\pi}{k-1}\|A_n\|_2^2 \leq \frac{4\pi}{k-1}\mathrm{Vol}\left(X_n\right).$$

因此，（2.1）意味着

$$\|Q_k A_n Q_k\|_{\mathrm{HS}}^2 = O_{k,r_0}\left(d_{n,k}\right).$$

对于迹项，我们可以将其表示为

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(Q_k A_n Q_k\right) &= \int_{\Gamma_n \backslash G} A_n(x) B_k^{\Gamma_n}(x,x) dx \\ &= \frac{k-1}{4\pi} \int_{\Gamma_n \backslash G} A_n\left(x\right) \sum_{\gamma \in \Gamma_n} q_k\left(x^{-1}\gamma x\right) dx. \end{aligned}$$

由于 $A_n(x)$ 是均值为零的，它与平凡表示正交。由于 Q_k 在 $\sigma_k\left(\mathcal{M}_k(\Gamma)\right)$ 上作为恒等算子作用，并湮灭 $\left(\sigma_k(\mathcal{M}_k(\Gamma))\right)^\perp$，我们有

$$B_k^\Gamma(x,y) = \sum_{j=1}^{d_k} \psi_j(x)\overline{\psi_j(y)}.$$

$B_k^{\Gamma_n}(x,x)$ 的平凡表示分量为

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\left(X_n\right)} \int_{\Gamma_n \backslash G} B_k^{\Gamma_n}(x,x) dx = \frac{1}{\mathrm{Vol}\left(X_n\right)} \int_{\Gamma_n \backslash G} \sum_{j=1}^{d_{n,k}} \left|\psi_{n,j}\left(x\right)\right|^2 dx = \frac{d_{n,k}}{\mathrm{Vol}\left(X_n\right)} = \frac{k-1}{4\pi}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(Q_k A_n Q_k\right) &= \int_{\Gamma_n\backslash G} A_n(x)\left(\frac{k-1}{4\pi}\sum_{\gamma\in\Gamma_n} q_k\left(x^{-1}\gamma x\right) - \frac{k-1}{4\pi}\right)dx \\ &= \frac{k-1}{4\pi}\int_{\Gamma_n\backslash G} A_n(x)\sum_{\gamma\neq e} q_k\left(x^{-1}\gamma x\right)dx.\end{aligned}$$

利用 (5.4) 中对 q_k 的上界，

$$\left|\mathrm{Tr}\left(Q_k A_n Q_k\right)\right| \lesssim_k \|A_n\|_\infty \int_{F_n}\sum_{\gamma\neq e} e^{-kr_\gamma(z)/2} d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}(z).$$

令 $D(R)$ 与命题 5.2 中的相同。则对于 $z\in D(R)$，

$$\sum_{\gamma\neq e} e^{-kr_\gamma(z)/2} \lesssim_{k,r_0} \sum_{m\geq 2R} e^{(1-k/2)m}. \tag{7.2}$$

当 $k>2$ 时该式收敛。因此

$$\int_{D(R)}\sum_{\gamma\neq e} e^{-kr_\gamma(z)/2} d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}(z) \lesssim_{k,r_0} \mathrm{Vol}\left(X_n\right)\sum_{m\geq 2R} e^{(1-k/2)m}.$$

对于 $z\in D(R)^c$，我们有一般上界

$$\sum_{\gamma\neq e} e^{-kr_\gamma(z)/2} \lesssim_{k,r_0} \sum_{m\geq 0} e^{(1-k/2)m}. \tag{7.3}$$

因此

$$\int_{D(R)^c}\sum_{\gamma\neq e} e^{-kr_\gamma(z)/2} d\mathrm{Vol}_{\mathbb{D}}(z) \lesssim_{k,r_0} \mathrm{Vol}\left(D(R)^c\right).$$

因此，

$$\left|\mathrm{Tr}\left(Q_k A_n Q_k\right)\right| \lesssim_{k,r_0} \|A_n\|_\infty \left[\mathrm{Vol}\left(X_n\right)\sum_{m\geq 2R} e^{(1-k/2)m} + \mathrm{Vol}\left(\left\{z\in X_n : \mathrm{InjRad}_{X_n}(z)\leq R\right\}\right)\right].$$

对 $R>0$ 取下确界，得到

$$\left|\mathrm{Tr}\left(Q_k A_n Q_k\right)\right| \lesssim_{k,r_0} \mathrm{Vol}\left(X_n\right)\rho_n \lesssim_{k,r_0} d_{n,k}\rho_n.$$

因此

$$\mathbb{E}_U\left[\mathcal{V}_{n,k}\left(U, A_n\right)\right] \lesssim_{k,r_0} \frac{1}{d_{n,k}} + \rho_n^2,$$

这就证明了该结论。 □

8. Haar 随机基上的集中性

推论7.2表明，对于每个可观测量序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，都存在一个正交归一基序列，使得相应的量子方差趋于 0。因此，一个自然的问题是，是否存在一个单一的正交归一基序列，使得对于每个可观测量序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，量子方差都同时趋于 0。本节将证明确实如此。我们首先建立一个依赖于参数选择的一般估计。然后，通过选择合适的参数，证明定理 1.2。

命题 8.1。 设 $X_n=\Gamma_n\backslash\mathbb{D}$ 是一列在 *Benjamini–Schramm* 意义下收敛于 $\mathbb{D}$ 的紧双曲曲面，并且

$$\mathrm{InjRad}\left(X_n\right)\geq r_0>0$$

关于 n 一致。固定 $k>2$。存在常数 $C_1, C_2>0$，它们仅依赖于 k 和 r_0，使得对于每一种选择，

$$T_n>0, \qquad \delta_n>0, \qquad \varepsilon_n>0,$$

存在一个可测集 $\Omega_n \subset$ 特殊酉群 $(d_{n,k})$ 满足

$$\mu_{n,k}(\Omega_n) \geq 1 - \sqrt{2}\left(1 + \frac{2}{\delta_n}\right)^{2m_n(T_n)} \exp\left(-\frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4}\right),$$

其中， m_n（T_n）表示 X_n上满足 $\lambda \leq 1/4 + T_n^2$的非零特征值的数量，并按重数计数。此外，存在一个序列（τ_n），当 $n \to \infty$ 时满足 $\tau_n \to 0$，使得对于每个$U \in \Omega_n$ 以及每个满足 $\|A_n\|_\infty \leq 1$的均值为零的可观测量 A_n，

$$\mathcal{V}_{n,k}(U, A_n) \leq 2C_1\left(\frac{1}{d_{n,k}} + \rho_n^2\right) + \frac{8\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}} + 2C_2\left(\delta_n^2 + \left(1 + T_n^{2k-2}\right)e^{-\pi T_n/2} + \tau_n\right).$$

命题 8.1 给出了一个用三个辅助参数 T_n、 δ_n、 ε_n表示的量子方差定量估计。为推导定理 1.2，我们必须选择这些参数，使得 Ω_n 的 Haar 测度趋于 1，同时量子方差的上界在所有有界的均值为零的可观测量上一致趋于 0。由于 ρ_n， $\tau_n \to 0$，只需满足

$$2m_n(T_n)\log\left(1 + \frac{2}{\delta_n}\right) - \frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4} \to -\infty,$$

and

$$\delta_n \to 0, \qquad T_n \to \infty, \qquad \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}} \to 0.$$

为选择合适的参数，我们需要用 $d_{n,\ k}$来控制 $m_n(T)$。我们通过修改引理 5.22 中的闭测地线计数估计，调整 Bergeron [15, §5.4.1] 中 Weyl 定律的证明。这给出了 $m_n(T)$的如下界。

引理 8.2. 设 $X_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{D}$ 是满足以下条件的一列紧双曲曲面

$$\mathrm{InjRad}(X_n) \geq r_0 > 0$$

对所有 n 属于 $\mathbb{N}$。于是

$$m_n(T) \lesssim_{r_0} \mathrm{Vol}(X_n)\left(1 + T^2\right),$$

当 $T \to \infty$ 时， $m_n(T)$ 如上所定义。

证明. 我们采用命题 5.2 中的打包论证。由于 InjRad(X_n) $\geq r_0 > 0$，对每个 $z \in \mathbb{D}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\#\{\gamma \in \Gamma_n : d_{\mathbb{D}}(z, \gamma z) \leq L\} = O_{r_0}\left(e^L\right). \tag{8.1}$$

我们利用这一估计得到 Bergeron 的引理 5.22 的一个一致版本。选取 X_n 中点集 $\{p_1, \ldots, p_{N_n}\}$ 的一个极大 $r_0/2$-分离集。由于以这些点为中心、半径为 $r_0/4$ 的球互不相交，我们有

$$N_n \lesssim_{r_0} \mathrm{Vol}(X_n).$$

为每个 p_i 固定一个提升 $\tilde{p}_i \in \mathbb{D}$。每条长度至多为 L 的有向闭测地线 γ，都经过距某个 p_i 不超过 $r_0/2$ 的位置。选取这样的一个 p_i，并取一条连接 p_i 与 γ 的最短路径。沿此路径前行，经过 γ，再沿反向路径返回，便得到一个以 p_i 为基点的环，它与 γ 自由同伦，长度至多为 $L + r_0$。该环从 $\tilde{p}_i$ 出发的提升终止于某个 $g_\gamma \in \Gamma_n$ 所对应的 $g_\gamma\tilde{p}_i$，因此 $d_{\mathbb{D}}(\tilde{p}_i, g_\gamma\tilde{p}_i) \leq L + r_0$。对每个固定的 i，属于不同自由同伦类的测地线对应于不同共轭类中的元素 g_γ，故这些元素互不相同。在每个 $\tilde{p}_i$ 处应用 (8.1)，并对 i 求和，得到

$$\#\{\gamma \in G(X_n) : \ell(\gamma) \leq L\} \lesssim_{r_0} \mathrm{Vol}(X_n)\, e^L, \tag{8.2}$$

其中， $G(X_n)$ 表示有向闭测地线，包括其迭代。

现在我们沿用 Bergeron 的论证。对于 $\delta > 0$，我们将 Selberg迹公式应用于可容许对

$$h(r) = e^{-\delta r^2}, \qquad g(x) = (4\pi\delta)^{-1/2}\, e^{-x^2/4\delta},$$

从而得到

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\delta r_{n,j}^2} = \frac{\operatorname{Vol}(X_n)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r e^{-\delta r^2} \tanh(\pi r)\, dr + (4\pi\delta)^{-1/2} \sum_{\gamma \in G(X_n)} \frac{\ell(\gamma_0)}{2\sinh(\ell(\gamma)/2)} e^{-\ell(\gamma)^2/4\delta}, \tag{8.3}$$

其中 $\lambda_{n,\,j} = 1/4 + r_{n,\,j}^2$，且 γ_0 是 γ 所对应的本原闭测地线。由于 $\ell(\gamma) \geq 2r_0$，由 (8.2) 中的一致测地线计数估计可得

$$(4\pi\delta)^{-1/2} \sum_{\gamma \in G(X_n)} \frac{\ell(\gamma_0)}{2\sinh(\ell(\gamma)/2)} e^{-\ell(\gamma)^2/4\delta} = O_{r_0}\left(\operatorname{Vol}(X_n)\, \delta^{-1/2} e^{-r_0^2/2\delta}\right),$$

对于每个固定的 n，当 $\delta \to 0$ 时，该式趋于 0。与 Bergeron 一样，利用分部积分可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r e^{-\delta r^2} \tanh(\pi r)\, dr = \frac{1}{\delta} + O(1).$$

因此，将这两项相加后，可将 (8.3) 改写为

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(X_n)} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\delta r_{n,j}^2} = \frac{1}{4\pi\delta} + O_{r_0}(1).$$

由于我们不需要像 Weyl 定律那样得到 $m_n(T)$ 的渐近公式，因此不应用 Karamata 塔伯定理，而采用以下论证

$$m_n(T)\, e^{-\delta T^2} \leq \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\delta r_{n,j}^2},$$

于是，当 $\delta > 0$ 充分小时，

$$\frac{m_n(T)}{\operatorname{Vol}(X_n)} \leq e^{\delta T^2} \left(\frac{1}{4\pi\delta} + O_{r_0}(1)\right)$$

现在我们选择 $\delta = \frac{1}{1+T^2}$，使得 $\delta \to 0$ as $T \to \infty$，并得到

$$\frac{m_n(T)}{\operatorname{Vol}(X_n)} \leq e^{\frac{T^2}{1+T^2}} \left(\frac{1+T^2}{4\pi} + O_{r_0}(1)\right) \leq e \left(\frac{1+T^2}{4\pi} + O_{r_0}(1)\right) \lesssim_{r_0} 1 + T^2.$$

这就证明了所需的界。 □

现在，通过选择适当的参数，我们可以证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。 根据引理 8.2 以及 (2.1) 中的维数公式，我们得到

$$m_n(T) \lesssim_{k,r_0} d_{n,k}\left(1 + T^2\right)$$

关于 n 一致地成立。一种可能的参数选择是

$$T_n = d_{n,k}^{1/8}, \qquad \delta_n = d_{n,k}^{-1/8}, \qquad \varepsilon_n = d_{n,k}^{1/4}.$$

事实上，在这种情况下，

$$2m_n(T_n) \log\left(1 + \frac{2}{\delta_n}\right) \lesssim_{k,r_0} d_{n,k}^{5/4} \log d_{n,k}, \tag{8.4}$$

而

$$\frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4} = \frac{1}{4} d_{n,k}^{3/2}.$$

因此，对于所有足够大的 n，

$$2m_n(T_n) \log\left(1 + \frac{2}{\delta_n}\right) - \frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4} \leq C_{k,r_0} d_{n,k}^{5/4} \log d_{n,k} - \frac{1}{4} d_{n,k}^{3/2} \leq -\frac{1}{8} d_{n,k}^{3/2}, \tag{8.5}$$

其中，这里 C_{k,r_0} 是依赖于 (8.4) 中的 k 和 r_0 的常数。后者在 $n \to \infty$时趋于 $-\infty$ 。因此

$$\mu_{n,k}(\Omega_n) \to 1.$$

此外,

$$\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}} = d_{n,k}^{-1/4}, \qquad \delta_n^2 = d_{n,k}^{-1/4},$$

而

$$\left(1 + T_n^{2k-2}\right) e^{-\pi T_n/2} \to 0.$$

由于 $\rho_n \to 0$ 和 $\tau_n \to 0$，命题 8.1 中的上界趋于零。对于任意满足 $\|a_n\|_\infty \le 1$ 的可观测量$a_n \in L^\infty($ $X_n)$，令

$$b_n = \frac{1}{2}\left(a_n - \fint_{X_n} a_n d\mathrm{Vol}_{X_n}\right).$$

于是 b_n 均值为零，且 $\|b_n\|_\infty \le 1$。将其到 $\Gamma_n\backslash G$ 的提升记为 B_n，则有

$$\mathcal{V}_{n,k}(U, a_n) = 4\mathcal{V}_{n,k}(U, B_n).$$

将命题 8.1 应用于 B_n，因此得到

$$\sup_{\|a_n\|_\infty \le 1} \mathcal{V}_{n,k}(U, a_n) \to 0$$

对于所有 $U \in \Omega_n$。结合 $\mu_{n,\,k}(\Omega_n) \to 1$，即得定理 1.2。 □

推论 8.3 (几乎必然收敛)。在定理 *1.2* 的假设下，进一步假设

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{8} d_{n,k}^{3/2}\right) < \infty,$$

令 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be* 为一列相互独立的 ***Haar*** 分布随机矩阵，且 $U_n \in$ 特殊酉群 $(d_{n,k})$。 n

$$\sup_{\|A_n\|_\infty \le 1} \mathcal{V}_{n,k}(U_n, A_n) \to 0$$

相对于乘积 *Haar* 测度几乎必然成立，其中上确界取遍所有可观测量A_n，这些可观测量是由 $a_n \in L^\infty(X_n)$ 提升而来，定义见 *(3.3)*。

这直接由上述参数的选取以及第一个 Borel–Cantelli 引理得出。

剩下的任务是证明命题 8.1。我们先将可观测量分解为低频和高频分量，然后为 Haar 随机基建立所需的集中估计。

8.1. **低频与高频分解**。设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{D}$是一个满足 InjRad$(X) \ge r_0 > 0$的紧双曲曲面，且 $A \in L^\infty(\Gamma\backslash G)^K$ 是一个均值为零的可观测量。利用 (5.12) 中的球面分解，我们可以写成

$$A = A_{\mathrm{comp}} + \sum_j A_{it_j},$$

其中， A_{comp} 表示互补级数分量之和， A_{it_j} 表示对应于谱参数为 t_j.的球面主系列表示的分量

对于 $T > 0$，令 $\mathscr{P}(T)$ 表示 $L^2(\Gamma\backslash G)^K$ 的子空间，该子空间由所有互补级数分量以及谱参数为 $|t| \le T$ 的主系列分量组成。令

$$P_T : L^2(\Gamma\backslash G)^K \to \mathscr{P}(T)$$

为 L^2正交投影。于是,

$$P_T A = A_{\mathrm{comp}} + \sum_{|t_j|\le T} A_{it_j}, \qquad (1 - P_T)A = \sum_{|t_j|>T} A_{it_j}.$$

Then

$$A = P_T A + (1 - P_T)A. \tag{8.6}$$

第 5 节中计算的希尔伯特-施密特范数给出

$$\mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A) \lesssim_k \frac{1}{d_k}\left(I_e + \sum_{\gamma\neq e} I_\gamma\right).$$

根据命题 5.2，非单位元贡献满足

$$\left|\sum_{\gamma\neq e} I_\gamma\right| \lesssim_{k,r_0} \|A\|_\infty^2 \left[\sum_{m\geq 2R} (m+1)e^{m-\frac{k}{2}m}\cdot \mathrm{Vol}(X) + \mathrm{Vol}\left(\{z\in F : \mathrm{InjRad}_X(z)\leq R\}\right)\right]$$

根据（5.15），恒等元贡献为

$$I_e = \sum_{\sigma_s\neq \mathbf{1}} \sum_{a=1}^{m(\sigma_s,\Gamma)} c_k(s)\left\|A_{\sigma_s,a}\right\|^2.$$

对于低频空间中出现的每个球面酉表示，由（7.1）可得，

$$|c_k(s)| \leq \frac{4\pi}{k-1}.$$

接下来我们计算 $c_k(it)$ 对于 $t>T$ 的一个上界。由于根据命题 5.5，我们有

$$c_k(it) = 4\pi \frac{\left|\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+\frac{it}{2}\right)\right|^2}{\Gamma(k)^2}.$$

利用伽马函数的递推关系以及

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{it}{2}\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi t/2)},$$

我们得到

$$c_k(it) = \frac{4^{2-k}\pi^2}{((k-1)!)^2}\frac{\prod_{j=0}^{k-2}\left(t^2+(2j+1)^2\right)}{\cosh(\pi t/2)}.$$

因此，对于 $|t|>T$，存在 C_k 使得

$$|c_k(it)| \leq C_k\left(1+T^{2k-2}\right)e^{-\pi T/2} = \eta_k(T).$$

特别地

$$\eta_k(T)\to 0 \qquad \text{as } T\to\infty.$$

利用 (8.6) 中的分解，我们可以将恒等元项估计为

$$I_e \lesssim_k \|P_T A\|_2^2 + \eta_k(T)\|A\|_2^2.$$

因此，由 (2.1) 可得，

$$\mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A) \lesssim_{k,r_0} \frac{\|P_T A\|_2^2}{\mathrm{Vol}(X)} + \eta_k(T)\|A\|_\infty^2 + \mathrm{GeomErr}_X(R)\|A\|_\infty^2. \tag{8.7}$$

Here

$$\mathrm{GeomErr}_X(R) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(X)}\left(\sum_{m\geq 2R}(m+1)e^{m-\frac{k}{2}m}\cdot\mathrm{Vol}(X) + \mathrm{Vol}\left(\{z\in F:\mathrm{InjRad}_X(z)\leq R\}\right)\right)$$

因此，由 Benjamini-Schramm 收敛可得，

$$\inf_{R>0}\mathrm{GeomErr}_{X_n}(R)\to 0, \qquad \text{as } n\to\infty.$$

此外，$\eta_k(T)\to 0$ 当 $T\to\infty$。因此，除这两个误差项外，量子方差由低频分量 $P_T A$ 的 L^2-范数控制。

引理 8.4. 设 $A, B \in L^\infty(\Gamma\backslash G)^K$ 均为均值为零。则

$$\left|\mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A)^{1/2} - \mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,B)^{1/2}\right| \le \mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A-B)^{1/2}.$$

因此，如果

$$\|A\|_\infty, \|B\|_\infty \le 1,$$

那么将估计式 *(8.7)* 应用于 $A-B$,

$$\left|\mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A)^{1/2} - \mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,B)^{1/2}\right| \lesssim_{k,r_0} \left(\frac{\|P_T(A-B)\|_2^2}{\mathrm{Vol}(X)} + \eta_k(T) + \mathrm{GeomErr}_X(R)\right)^{1/2}.$$

证明。 </style}第一个不等式直接由 l^2 中的三角不等式得出。接着，利用

$$\|A-B\|_\infty \le 2$$

即可得出结论。 □

8.2. **格罗莫夫-米尔曼集中**。 接下来，我们针对与一个固定有界可观测量相关的量子方差，得到一个集中估计。这可以通过格罗莫夫和米尔曼的集中定理 [3, §1.2，备注 2]，再结合有限网论证来实现。

定理 8.5 (格罗莫夫-米尔曼)。 设 X 为一个闭连通黎曼流形，并令 μ 表示 X上的归一化黎曼体积测度。定义

$$R(X) := \inf_{\|\tau\|=1} \mathrm{Ric}(\tau,\tau),$$

其中，下确界取遍 X上的所有单位切向量 τ 。设 $A \subset X$ 为一个可测子集，满足

$$\mu(A) \ge \frac{1}{2},$$

并将 $N_\varepsilon(A)$ 记为 A的 ε-邻域。若 $R(X) > 0$，则

$$\mu(N_\varepsilon(A)) \ge 1 - \sqrt{2}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 R(X)}{2}\right).$$

我们将此定理应用于 $X =$ 特殊酉群$(d_{n,\ k})$，并赋予其由希尔伯特-施密特内积诱导的双不变黎曼度量

$$\langle X, Y\rangle = -\mathrm{Tr}(XY).$$

归一化黎曼体积测度与归一化哈尔概率测度重合$\mu_{n,\ k}$。我们令

$$A = E_{A_n} = \{U \in \mathrm{SU}(d_{n,k}) : \mathcal{V}_{n,k}(U, A_n) \le m_{A_n}\},$$

其中 m_{A_n} 是函数 $U \mapsto \mathcal{V}_{n,\ k}(U,\ A_n)$的中位数。在这种情况下，

$$R(\mathrm{SU}(d_{n,k})) = \frac{d_{n,k}}{2}.$$

于是我们有

$$\mu_{n,k}(N_\varepsilon(E_{A_n})) \ge 1 - \sqrt{2}\exp\left(-\frac{d_{n,k}\varepsilon^2}{4}\right). \tag{8.8}$$

8.3. **量子方差关于基的选择的 Lipschitz 连续性。**

引理 8.6. 设 $U, V \in$ 特殊酉群 (d_k)，并设 $A \in L^\infty(\Gamma\backslash G)$ 为一个满足 $\|A\|_\infty \le 1$ 的均值为零的可观测量，

$$\left|\mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A) - \mathcal{V}_{\Gamma,k}(V,A)\right| \le \frac{4}{\sqrt{d_k}} d_{\mathrm{SU}(d_k)}(U,V),$$

其中 $d_{\mathrm{SU}(d_k)}$ 是与希尔伯特–施密特度量对应的黎曼距离。

证明。 为方便起见，我们记

$$u_j = \psi_j^U, \qquad v_j = \psi_j^V.$$

Then

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A) - \mathcal{V}_{\Gamma,k}(V,A)\right| &\le \frac{1}{d_k}\sum_{j=1}^{d_k}\left|\left|\langle u_j, Au_j\rangle\right|^2 - \left|\langle v_j, Av_j\rangle\right|^2\right| \\ &\le \frac{2}{d_k}\sum_{j=1}^{d_k}\left|\langle u_j, Au_j\rangle - \langle v_j, Av_j\rangle\right|,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由三角不等式以及 x^2 在 $[0,1]$上是 Lipschitz 函数且 Lipschitz 常数为 2 这一事实得出。

As

$$\begin{aligned}\left|\langle u_j, Au_j\rangle - \langle v_j, Av_j\rangle\right| &\le \left|\langle (u_j - v_j), Au_j\rangle\right| + \left|\langle v_j, A(u_j - v_j)\rangle\right| \\ &\le \|A\|_\infty \|u_j\| \|u_j - v_j\| + \|A\|_\infty \|v_j\| \|u_j - v_j\| \\ &\le 2\|u_j - v_j\|,\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A) - \mathcal{V}_{\Gamma,k}(V,A)\right| &\le \frac{4}{d_k}\sum_{j=1}^{d_k}\|u_j - v_j\| \\ &= \frac{4}{d_k}\sum_{j=1}^{d_k}\|(U-V)e_j\| \\ &\le \frac{4}{\sqrt{d_k}}\left(\sum_{j=1}^{d_k}\|(U-V)e_j\|^2\right)^{1/2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{d_k}}\|U-V\|_{\mathrm{HS}} \\ &\le \frac{4}{\sqrt{d_k}} d_{\mathrm{SU}(d_k)}(U,V).\end{aligned}$$

□

对于 $U \in N_{\varepsilon_n}(E_{A_n})$，存在 $V \in E_{A_n}$ 使得

$$d_{\mathrm{SU}(d_{n,k})}(U,V) < \varepsilon_n.$$

引理 8.6 意味着

$$\mathcal{V}_{n,k}(U,A_n) \le \mathcal{V}_{n,k}(V,A_n) + \frac{4}{\sqrt{d_{n,k}}}\varepsilon_n \le m_{A_n} + \frac{4}{\sqrt{d_{n,k}}}\varepsilon_n.$$

因此，

$$\left\{U \in \mathrm{SU}(d_{n,k}) : \mathcal{V}_{n,k}(U,A_n) \le m_{A_n} + \frac{4}{\sqrt{d_{n,k}}}\varepsilon_n\right\} \supseteq N_{\varepsilon_n}(E_{A_n}). \tag{8.9}$$

8.4. 低频可观测量的 δ-网。 由于 X 是紧的， $\mathscr{P}(T)$ 是有限维的。令$m(T)$ 表示满足 $\lambda \leq \frac{1}{4}+T^2$ 的非零拉普拉斯特征值的个数（按重数计）。我们有

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{P}(T)=\#\left\{j:0<\lambda_j\leq\frac{1}{4}+\frac{T^2}{4}\right\}\leq m(T).$$

我们考虑集合

$$\mathscr{A}(T)=\{P_TA:A\text{ is mean-zero and }\|A\|_\infty\leq 1\}\subset\mathscr{P}(T).$$

下面的初等覆盖引理将使我们能够把对有界可观测量的一致估计，化为对有限个可观测量的估计。

引理 8.7。 对于每个 $\delta>0$，都存在一个有限集

$$\mathcal{N}(T,\delta)=\{B_1,\dots,B_N\}\subset\mathscr{A}(T)$$

使得，对于每个满足 $\|A\|_\infty\leq 1$ 的均值为零的 A，都存在 $B_i\in\mathcal{N}(T,\ \delta)$ 满足

$$\|P_TA-B_i\|_2\leq\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2},\qquad X=\Gamma\backslash\mathbb{D}.$$

此外，

$$N\leq\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{2m(T)}.$$

证明。 由于 P_T 是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上的正交投影，

$$\|P_TA\|_2\leq\|A\|_2.$$

对于 $\|A\|_\infty\leq 1$,

$$\|A\|_2^2\leq\mathrm{Vol}(X),$$

从而

$$\|P_TA\|_2\leq\mathrm{Vol}(X)^{1/2}.$$

因此

$$\mathscr{A}(T)\subset B_{\mathscr{P}(T)}\left(0,\mathrm{Vol}(X)^{1/2}\right).$$

取一个极大的 $\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}$-分离子集

$$\mathcal{N}(T,\delta)=\{B_1,\dots,B_N\}\subset\mathscr{A}(T).$$

由极大性　因此， $\mathcal{N}(T,\delta)$ 是 $\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}$-网，适用于 $\mathscr{A}(T)$。事实上，若存在 $B\in\mathscr{A}(T)$ 使得

$$\|B-B_i\|_2>\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}$$

对每个 i 都成立，那么就可以将 B 加入 $\mathcal{N}(T,\delta)$，这与极大性矛盾。

接下来只需对 N 作出界估计。由于这些点 B_i 两两之间的距离至少为 $\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}$，故 L^2-球

$$B\left(B_i,\frac{\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}}{2}\right),\qquad 1\leq i\leq N,$$

两两　不相交。此外，由于 $\|B_i\|_2\leq\mathrm{Vol}(X)^{1/2}$，这些球中的每一个都包含于

$$B_{\mathscr{P}(T)}\left(0,\mathrm{Vol}(X)^{1/2}+\frac{\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}}{2}\right).$$

$\mathscr{P}(T)$ 的实维数为 $2\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{P}(T)\ \leq 2m(T)$。比较这些互不相交的球的体积与包含它们的球的体积，可得

$$N\leq\left(\frac{\mathrm{Vol}(X)^{1/2}+\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}/2}{\delta\mathrm{Vol}(X)^{1/2}/2}\right)^{2\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{P}(T)}=\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{2\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{P}(T)}\leq\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{2m(T)}.$$

这证明了该引理。 □

由于每个 $B_i \in \mathscr{A}(T)$，我们可以选取一个均值为零的可观测量 A_i，使其满足 $\|A_i\|_\infty \le 1$ 和 $P_T A_i = B_i$。因此，对于每个满足 $\|A\|_\infty \le 1$ 的均值为零的 A，都存在 A_i，使得

$$\|P_T (A - A_i)\|_2 \le \delta \mathrm{Vol}(X)^{1/2}.$$

应用引理 8.4 中的估计，我们得到

$$\left| \mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A)^{1/2} - \mathcal{V}_{\Gamma,k}(U,A_i)^{1/2} \right| \lesssim_{k,r_0} \left(\delta^2 + \eta_k(T) + \mathrm{GeomErr}_X(R)\right)^{1/2}. \tag{8.10}$$

8.5. **在有限网上的一致集中**。令

$$\mathcal{N}_n(T_n, \delta_n) = \{P_{n,T_n} A_{n,1}, \dots, P_{n,T_n} A_{n,N_n}\}$$

为上一小节构造的有限网，其中

$$\|A_{n,i}\|_\infty \le 1$$

对每个 $1 \le i \le N_n$ 均成立。于是由引理 8.7，

$$N_n \le \left(1 + \frac{2}{\delta_n}\right)^{2m_n(T_n)}, \tag{8.11}$$

其中 $m_n(T_n)$ 表示满足 $\lambda \le 1/4 + T_n^2$ 于 $\Gamma_n \backslash \mathbb{D}$ 上的拉普拉斯算子的非零特征值的个数（按重数计）。回顾一下，$m_{A_{n,i}}$ 是函数的中位数

$$U \mapsto \mathcal{V}_{n,k}(U, A_{n,i})$$

在特殊酉群 $(d_{n,k})$ 上。由于 $\mathcal{V}_{n,k}(U,A_{n,i}) \ge 0$，我们有

$$m_{A_{n,i}} \le 2\mathbb{E}_U \left[\mathcal{V}_{n,k}(U, A_{n,i})\right].$$

由推论7.2，存在一个常数 $C_1 = C_1(k, r_0) > 0,$，它与 n 和 i 无关，使得

$$m_{A_{n,i}} \le C_1 \left(\frac{1}{d_{n,k}} + \rho_n^2\right). \tag{8.12}$$

由 (8.8) 和 (8.9)，对每个 i，我们有

$$\mu_{n,k}\left\{U \in \mathrm{SU}(d_{n,k}) : \mathcal{V}_{n,k}(U, A_{n,i}) \le m_{A_{n,i}} + \frac{4}{\sqrt{d_{n,k}}}\varepsilon_n\right\} \ge 1 - \sqrt{2}\exp\left(-\frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4}\right).$$

(8.12) 中位数的一致上界意味着，若对每个 i，U 满足

$$\mathcal{V}_{n,k}(U, A_{n,i}) \le m_{A_{n,i}} + \frac{4}{\sqrt{d_{n,k}}}\varepsilon_n,$$

那么对所有 i

$$\mathcal{V}_{n,k}(U, A_{n,i}) \le C_1 \left(\frac{1}{d_{n,k}} + \rho_n^2\right) + \frac{4\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}}. \tag{8.13}$$

因此，

$$\mu_{n,k}\left\{U \in \mathrm{SU}(d_{n,k}) : \mathcal{V}_{n,k}(U, A_{n,i}) \le C_1 \left(\frac{1}{d_{n,k}} + \rho_n^2\right) + \frac{4\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}}\right\} \ge 1 - \sqrt{2}\exp\left(-\frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4}\right).$$

现在，我们将这个估计同时应用于所有可观测量 $A_{n,i}$。定义

$$\Omega_n = \bigcap_{i=1}^{N_n} \left\{U \in \mathrm{SU}(d_{n,k}) : \mathcal{V}_{n,k}(U, A_{n,i}) \le C_1 \left(\frac{1}{d_{n,k}} + \rho_n^2\right) + \frac{4\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}}\right\}.$$

根据联合界，

$$1-\mu_{n,k}(\Omega_n)\le\sum_{i=1}^{N_n}\mu_{n,k}\left\{U\in\mathrm{SU}(d_{n,k}):\mathcal{V}_{n,k}(U,A_{n,i})>C_1\left(\frac{1}{d_{n,k}}+\rho_n^2\right)+\frac{4\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}}\right\}$$
$$\le\sqrt{2}N_n\exp\left(-\frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4}\right).$$

利用对有限网基数的估计，我们得到

$$\mu_{n,k}(\Omega_n)\ge1-\sqrt{2}\left(1+\frac{2}{\delta_n}\right)^{2m_n(T_n)}\exp\left(-\frac{d_{n,k}\varepsilon_n^2}{4}\right). \tag{8.14}$$

8.6. 从有限网扩展到所有可观测量。 令 $U\in\Omega_n$，并令 A_n 为满足 $\|A_n\|_\infty\le1$. 的任意均值为零的可观测量。于是引理 8.7 表明，存在 $A_{n,\,i}$ 满足$\|A_{n,\,i}\|_\infty\le1$使得

$$\|P_{n,T_n}(A_n-A_{n,i})\|_2\le\delta_n\mathrm{Vol}(X_n)^{1/2}.$$

根据（8.10），存在 $C_2=C_2($ k, $r_0)$使得

$$\left|\mathcal{V}_{n,k}(U,A_n)^{1/2}-\mathcal{V}_{n,k}(U,A_{n,i})^{1/2}\right|\le\left[C_2\left(\delta_n^2+\eta_k(T_n)+\mathrm{GeomErr}_{X_n}(R)\right)\right]^{1/2}.$$

利用（8.13）中对 $\mathcal{V}_{n,\,k}(U,\,A_{n,\,i})$ 的上界，对于 $U\in\Omega_n$,

$$\mathcal{V}_{n,k}(U,A_n)^{1/2}\le\left[C_1\left(\frac{1}{d_{n,k}}+\rho_n^2\right)+\frac{4\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}}\right]^{1/2}+\left[C_2\left(\delta_n^2+\eta_k(T_n)+\mathrm{GeomErr}_{X_n}(R)\right)\right]^{1/2}.$$

于是，两边平方可得

$$\mathcal{V}_{n,k}(U,A_n)\le\left(\left[C_1\left(\frac{1}{d_{n,k}}+\rho_n^2\right)+\frac{4\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}}\right]^{1/2}+\left[C_2\left(\delta_n^2+\eta_k(T_n)+\mathrm{GeomErr}_{X_n}(R)\right)\right]^{1/2}\right)^2$$
$$\le2C_1\left(\frac{1}{d_{n,k}}+\rho_n^2\right)+\frac{8\varepsilon_n}{\sqrt{d_{n,k}}}+2C_2\left(\delta_n^2+\eta_k(T_n)+\mathrm{GeomErr}_{X_n}(R)\right). \tag{8.15}$$

Set

$$\tau_n=\inf_{R>0}\mathrm{GeomErr}_{X_n}(R).$$

根据 Benjamini-Schramm 收敛，$\tau_n\to0$。这证明了命题 8.1。

Statement on the Use of Artificial Intelligence

在准备本文期间，作者使用了 ChatGPT（GPT-5.6 Sol）来提升稿件的语言可读性和表达，并就...
...的计算进行了数学讨论

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\left(\cosh\frac{r}{2}\right)^{-2k}(\cosh r-\sinh r\cos2\theta)^{-\frac{1+s}{2}}\sinh r\,d\theta dr$$

以及命题 7.1。

参考文献

[1] A. W. Knapp。半单群表示论：基于实例的概述。普林斯顿大学出版社，1986。[2] J. Repka。$SL_2(\mathbb{R})$酉表示的张量积。《美国数学杂志》，100(4):747–774，1978。[3] M. Gromov 和 V. D. Milman。等周不等式的一个拓扑应用。《美国数学杂志》，105(4):843–854，1983。[4] E. Le Masson 和 T. Sahlsten。双曲曲面的量子遍历性与 Benjamini–Schramm 收敛。*Duke* 数学杂志，166(18):3425–3460，2017。[5] A. I. Šnirel'man。特征函数的遍历性质。《数学科学进展》，29(6):181–182，1974。[6] Y. Colin de Verdière。遍历性与拉普拉斯算子的特征函数。C《数学物理通讯》，102(3):497–502，1985。

[7] S. Zelditch。紧双曲曲面上特征函数的均匀分布。*Duke* 数学杂志，55 941，1987 4 919( ): – 。[8] Z. Rudnick 和 P. Sarnak。算术双曲流形本征态的行为。《数学物理通讯》，161(1):195–213，1994。[9] R. Holowinsky 和 K. Soundararajan。Hecke 特征形式的质量等分布。数学年刊，172(2):1517–1528，2010。[10] P. D. Nelson。尖点形式在层方面的等分布。*Duke* 数学杂志，160(1):23–57，2011。[11] S. Zelditch。球面上的量子遍历性。《数学物理通讯》，146(1):61–71，1992。[12] S. Zelditch。高维空间随机正交归一基的量子遍历性。《伦敦皇家学会哲学汇刊》 A，372(2007):20120511，2014。[13] E. Lindenstrauss。不变测度与算术量子唯一遍历性。数学年刊219，2006 163 1 165，( ): – 。[14] S. Brooks、E. Le Masson 和 E. Lindenstrauss。球面上的量子遍历性与平均算子。国际数学研究通知，2016(19):6034–6064，2016。[15] N. Bergeron，双曲曲面的谱，Universitext，施普林格，2016。[16] H. Jacquet 和 R. P. Langlands，*GL(2)* 上的自守形式，数学讲义，第114卷，施普林格出版社，柏林–纽约，1970。[17] A. Selberg。模形式傅里叶系数的估计。纯数学专题讨论会论文集，VIII:1–15，1965。[18] B. Collins 和 P. Śniady。关于酉群、正交群和辛群上 Haar 测度的积分。《数学物理通讯》，264(3):773–795，2006。

英国牛津莫德林学院，OX1 4AU电子邮箱：
kemin.qiu@magd.ox.ac.uk