arXiv:2611.30644v1 [math.NT] 23 Nov 2026

关于 Jacob Tsimerman 的工作

Jonathan Pila *

摘要。 Jacob Tsimerman 于 2026 年 7 月 23 日在费城举行的国际数学家大会上荣获菲尔兹奖，获奖理由是：“他将 o-极小性重新确立为算术几何与复代数几何的一种基本方法，并为证明许多核心猜想作出了贡献，其中包括关于周期映射像的代数性的 Griffiths猜想，以及关于 Siegel模簇的 André-Oort猜想。”本文将介绍这项工作。

1 引言。 Jacob 因其对 o-极小性的贡献，以及对解决包括 Griffiths猜想和 André-Oort猜想在内的核心问题所作出的贡献而受到表彰，具体如上所述。

André-Oort猜想是一种丢番图有限性猜想，其思想源于（并仿照）关于阿贝尔簇子簇上的挠点的 Manin-Mumford猜想（Raynaud定理 [122, 123]）。它综合了 André [1]（针对志村簇中的曲线）和 Oort [94]（针对 $\mathcal{A}_g$ 的子簇）提出的猜想。志村簇是一类特殊的算术簇。它们包含一类特殊点，推广了椭圆曲线模空间中的 CM 点，并具有丰富的算术性质。André-Oort猜想研究志村簇上特殊点的算术性质。

Griffiths代数性猜想 [65], 提出于1970年，涉及一个源自Griffiths关于霍奇结构变分的奠基性工作的基本问题。该猜想断言周期映射的像具有代数性，并且相关性质也具有代数性；这是一个处于代数几何与复几何交界处的问题。

o-极小性是模型论的一个分支，研究实几何中的温和结构。它起源于20世纪80年代初，当时van den Dries [41] 探讨了Tarski关于实指数函数模型论的一个可判定性问题。van den Dries所提炼出的有限性性质，后来由Pillay和 Steinhorn [118]在一般框架下加以发展。此类结构中可定义集的关键结构定理由Knight-Pillay-Steinhorn [79]证明。几何对象（ $\mathbb{R}^n$中的/上的集合与函数）若“在某个o-极小结构中可定义”，便具有非常强的温和性。但要证明特定的集合与函数生成一个o-极小结构，是实分析中相当特殊且通常极其困难的问题；我们将在此处研究的结构具有o-极小性，这源于Gabrielov [54], Wilkie [145], 以及van den Dries-Miller的工作。

[45]证明所关注的函数在这一结构中是可定义的，同样极具挑战性。

上述主题看起来彼此相距甚远。一方面是 Pila-Wilkie 计数定理 [116],，另一方面是 Peterzil-Starchenko [105], 在 o-极小结构中关于复几何的强有力结果；它们提供了灵活的工具，可用于研究志村簇和霍奇理论时出现的复几何对象。在 Jacob 手中，这些工具已被证明对取得算术和几何方面的成果都起到了决定性作用。

Jacob 被引用的许多著作都围绕这些领域之间的相互作用展开。但我想一开始就强调，Jacob 的贡献涵盖了这种相互作用中若干截然不同的方面。事实上，Jacob 及其合作者在将 o-极小性应用于算术和霍奇理论问题时涉及的（至少）四个不同方面，都取得了根本性的进展。（这里我不详细说明哪些工作是与谁合作完成的；下文将完整注明出处。）它们是：

(1) 证明特殊点的重要算术性质，并将其与 o-极小技术和函数超越性结果相结合，从而证明 Siegel 模形式簇的 André–Oort 猜想，事实上还在一般情形下证明了该猜想；

（2）建立 André-Oort 所需的适当函数超越性结果（部分通过 o-极小性，部分通过其他方式），并进一步超越这些结果，以确保函数版本的 André-Grothendieck 周期猜想；

*牛津大学 (jonathan.pila@maths.ox.ac.uk)

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

（3）推导可定义性结果，将更多对象纳入 o-极小领域，其中尤其包括变分霍奇理论的自然对象；

(4) 开展“o-极小 GAGA”研究，这是经典 Serre 的 GAGA 的对应理论 [129]，，它或许可以（结合（3））应用于霍奇理论领域，并导出对 Griffiths 猜想的证明。

接下来，我将介绍这些主题，并描述 Jacob 的工作为我们带来的美妙而壮观的成果。关于另一种视角，见 [134]。

2 André-Oort猜想的背景。为了阐明这一猜想，我们首先考察更广泛的丢番图背景。丢番图几何首先研究整数或有理数域中代数方程组的解。一般而言，整数解的存在性已知在算法上是不可判定的（最近，根据 OpenAI [98]，有理点的情形也同样如此）。一个（可能）更容易理解、对我们而言也更方便的问题是：

哪些复代数簇具有 *Zariski* 稠密集的有理点？

当 V 是代数曲线（即一维复代数簇）时，Mordell [91] 提出了一个猜想，并由 Faltings [51]加以证明：只有亏格为 0 或 1 的曲线才可能拥有 Zariski 稠密（即无限）的有理点集。亏格为 0 或 1 的曲线可能拥有也可能不拥有无穷多个有理点；不过，在某个 $\mathbb{Q}$的有限扩张上，它一定会拥有无穷多个有理点。如果问：哪些曲线在 $\mathbb{Q}$ 的某个有限扩张（即某个数域）上拥有 Zariski 稠密的点集，答案（由 Faltings [51]给出）是：

在曲线中，只有亏格为 $g < 2$ 的曲线才可能在某个数域上拥有 *Zariski* 稠密的有理点集 .

对于维数为 2 或更高的簇，上述问题仍基本上是开放的。Bombieri 猜想一般型曲面不具有 Zariski 稠密的有理点集，而 Bombieri-Lang 猜想断言，在其由几何方式定义的“特殊集”之外，一个簇是 *Mordell* 型 的（即对于任意固定的有限生成域，其中只有有限多个有理点）。（如此表述后，这个问题似乎在一定程度上抵抗不可判定性现象。）Faltings [52] 回答了上述关于阿贝尔簇的子簇的问题：

在阿贝尔簇的子簇中,只有阿贝尔子簇及其平移可以具有这一性质 .

阿贝尔簇 A 定义在 $\mathbb{C}$ 上时，可以表示为 $\mathbb{C}^n$的商空间，其中 $n =$ 维数为 A，再模去一个格。这样一来，A 上的阿贝尔群结构（继承自 $\mathbb{C}^n$中的加法）就清晰可见了。格的除法点在 A中给出挠点，因此从解析角度看这些挠点是稠密的。Manin-Mumford猜想探讨以下问题：

设 A 是一个阿贝尔簇。哪些子簇 $V \subset A$ 具有 *Zariski* 稠密的挠点集？

答案归于 Raynaud [122, 123]:

这类 V 是 p 恰好是“挠陪集”，即阿贝尔子簇按挠点作的平移 .

请注意，我们通过 Faltings“大”定理转向 Manin-Mumford，虽然便于论述，但并不符合历史事实。Manin-Mumford猜想最初于 20 世纪 60 年代提出，研究的是嵌入其雅可比簇中的曲线。Lang 随后提出了“莫德尔-朗”猜想，将 Mordell 猜想和 Manin-Mumford猜想统一并推广；该猜想后来由 Faltings 证明（结合了 Hindry、Laurent、McQuillen、Raynaud 和 Vojta 的结果，以及他们所证明的更一般版本），见 [93]。

3 André-Oort猜想。志村簇是某些非常特殊的准射影簇，定义在 $\mathbb{Q}$ 上（具有典范性），它们作为（适当霍奇结构的）模空间出现，是算术几何和 Langlands纲领中的核心对象。最初的例子由 Shimura[131, 132] 定义并研究，而现代定义则归功于 Deligne [39]。关于精确定义，一个便于参考的资料是 [37]。

典型的例子有 *Siegel*模簇 $\mathcal{A}_g$，$g = 1$，2，.....，它们是维数为 g 的主极化复阿贝尔簇的模空间，由 Siegel [133] 研究。早在 $\mathcal{A}_1 = \mathbb{A}^1$，作为模函数 $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 的像（也因此被称为 模曲线 $Y(1)$）的对象，就已经展现出丰富而优美的算术理论；该模函数通过椭圆曲线的 j 不变量对定义在 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线进行参数化，而这套理论围绕着它的“特殊点”展开。

一个志村簇赋有一组特殊点。这些 $\mathbb{Q}$点是对应于具有“最多对称性”对象的模。$\mathcal{A}_1$ 的特殊点是拥有除乘以 $m \in \mathbb{Z}$之外的其他自同态的椭圆曲线的 j不变量；这样的椭圆曲线被称为具有复乘，而它们的 j不变量在经典上称为奇异模数，并且与类域论密切相关。一个

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

定义在 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线 E 可以实现为 $\mathbb{C}$ 按格 $\Lambda\backslash\mathbb{C}$ 取商空间，其中该格可以归一化为 $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$的形式，其中 $\tau \in \mathbb{H}$。于是， E的 j不变量为 $j(E) = j(\tau)$，并且当且仅当 $[\mathbb{Q}(\tau): \mathbb{Q}] = 2$时，它是一个奇异模数。二次点在解析意义下稠密于 $\mathbb{H}$中，因此奇异模数在解析意义下稠密于 $\mathcal{A}_1$中。

一般来说，志村簇 S 也可以表示为某个适当的厄米对称空间$\mathbb{H}_S$ 对其双全纯自同构群的一个算术子群取商所得的商空间，并且其特殊点集在解析意义下稠密。在 $S = \mathcal{A}_g$ 的情形中，所参数化的对象是维数为 g 的阿贝尔簇，而“特殊”对象则是 CM（复乘）阿贝尔簇。对于简单的 A，这意味着 A 的自同态环是一个 CM 域中的整环，该域在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 $2g$ （因此其大小尽可能大）；在非简单的情形中则需要谨慎处理。André-Oort猜想探讨的是以下问题：

设 S 是一个志村簇。哪些子簇 $V \subset S$ 含有 *Zariski* 稠密的特殊点集？

除了特殊点之外，志村簇 S 还包含一类更广泛的特殊子簇。这些是“志村子簇”，其作为志村簇的结构与 S 的结构相容（见 [37]）。特殊点恰好是维数为零的特殊子簇。若特殊子簇 $T \subset S$ 的维数为正，则其上属于 S 的特殊点集在 Zariski 意义下稠密（甚至在解析意义下也稠密）。与 Manin-Mumford 猜想类似，André-Oort猜想预言，这些是唯一具有这种性质的子簇。这里需要说明的是，簇将与其复点集等同，并且假定子簇在其所在空间中是闭的。

3.1. 猜想。 (André-Oort [1, 94]) 设 S 是一个志村簇。子簇 $V \subset S$ 具有 Zariski 稠密的特殊点集，当且仅当它是一个特殊子簇。

对于一维志村簇，André-Oort猜想显然成立。朝这一猜想迈出的首个非平凡进展，是 André [2], 针对 $S = \mathcal{A}_1^2 = (\mathbb{A}^1)^2$中的一条曲线证明的。

3.2. 定理。 (André [2]) *André-Oort*猜想对 $\mathcal{A}_1^2$成立。

$\mathcal{A}_1^2$ 中的特殊点是由奇异模数构成的数对 (σ_1, σ_2)。除特殊点和 S之外，特殊子簇还包括：形如 $\{(\sigma, y) : y \in \mathbb{A}^1\}$ 的“纵向”直线，其中 σ 是一个奇异模数；“横向”直线 $\{(x, \sigma) : x \in \mathbb{A}^1\}$；以及由经典模多项式定义的模曲线 $\Phi_N(x, y) = 0$。这些是形如 $v = gu$ 的曲线在映射 $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(u, v) \mapsto (j(u), j(v))$ 下的像，其中 $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$通过分式线性变换作用（“$+$”表示行列式为正）。

大约在同一时期，Edixhoven [48] 给出了同一结果的另一种证明，但以广义黎曼猜想为条件；后来又将其推广到 $\mathcal{A}_1^n$ [49]。Klingler、Ullmo 和 Yafaev [78, 142]通过一系列论文进一步推进了这一研究路线，最终在广义黎曼猜想成立的条件下，完全证明了该猜想。在这些进展中，特殊子簇的等分布结果 [32, 33, 34, 151]发挥了关键作用。参见 [146]。

另一种方法借助“o-极小结构”理论，得以得到无条件的结果，并促成了 Jacob 对 $\mathcal{A}_g$ 的 André-Oort 猜想的证明。

4 o-极小性。 o-极小性的概念源自对实指数函数的模型论研究。

回顾一下，按照模型论的含义，结构由一个集合 M（即该结构的“论域”）以及定义在 M 上的一些指定“结构”组成，其中包括：一些常量 $c_i \in M$，例如 $i \in I$；函数f_j: $M^{n(j)} \to M, j \in J$（元数为 n: $J \to \mathbb{N}_{\geq 1}$）；以及关系 $R_k \subset M^{m(k)}, k \in K$（元数为 m: $K \to \mathbb{N}_{\geq 1}$）。（指标集 I, J, K 是任意的，也可以为空。）记作

$$\mathcal{M} = (M, c_i, f_j, R_k\}$$

用来表示该结构（其中我省略了指标集）。例如，$(\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1)$ 表示实数作为有序域的结构。

与一个结构相对应的是一种（一阶）语言，它包含具有相同指标集和元数的常量、函数和关系符号。形式上，人们会区分语言的符号与它们在该语言结构中的解释，但通常并未严格遵守这一点。除了与结构相对应的符号外，该语言还具有变量符号 $x, y, \ldots, x_1, x_2, \ldots$、逻辑符号 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$和 $=$，以及括号（以确保唯一可读性）。

语言的公式在语法上定义，但也可以非正式地描述为该语言中的“有意义的字符串”。其中出现的变量可能受量词约束，也可能不受约束（$\forall$ 或 $\exists$）；没有

版权所有 © 2026 本文的版权归作者所有

自由变量的公式称为句子。因此，句子 ϕ 可以理解为一个断言，它在给定的语言结构 $\mathcal{M}$ 中可能成立，也可能不成立。若成立，则记作 $\mathcal{M} \models \phi$。

若 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个公式，其中的自由变量为 $x_1, \ldots, x_n$，则集合

$$Z = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in M : \mathcal{M} \models \phi(x)\}$$

是结构 $\mathcal{M}$ 中的一个可定义集 。关于模型论的基本设定，见 [86]。

Tarski [136] 证明了结构 $(\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1)$ 是可判定的；也就是说，他给出了这些句子的判定过程。注意，此处纳入 $<$ 并无必要，因为关系 $x < y$ 可在 $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$ 中由公式 $\exists t(\neg t = 0 \wedge y = x + t^2)$ 定义，因此将其纳入并不会改变所能表达的内容（即可定义集相同）。但 o-极小结构是依定义 有序结构的扩张，因此我们倾向于将其明确纳入。

Tarski的判定过程用于确定给定句子在 $\mathbb{R}$ 中是否成立，其中符号 $+, \times, 0, 1$ 按通常方式加以解释。复域 $(\mathbb{C}, +, \times, 0, 1)$ 同样是可判定的，但这更为容易：根据Chevalley定理，此类判定可归结为理想成员关系问题。然而，有理数域是不可判定的[124]。这比有理数的Hilbert第十问题更容易，因为句子可以涉及量词，远比丢番图方程组丰富得多。

Tarski [136] 曾问，结构 $\mathbb{R}_{\exp} = (\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1, \exp)$ 是否可判定，其中 exp 表示实指数映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。相比之下，结构 $\mathbb{R}_{\sin} = (\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1, \sin)$ 是不可判定的，因为它定义了整数（结构 $(\mathbb{C}, +, \times, 0, 1, \exp)$ 也如此，其中 exp 是复指数函数）。

在这一问题的背景下，van den Dries [41] 剖析了 Tarski 关于 $(\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1)$ 的研究脉络，并指出其中一个可能推广的方面，是可定义集所具有的驯良性质，具体而言，就是能够进行柱状分解。柱状分解这一概念源自 Collins [35] 关于实数域判定算法的研究。van den Dries 将这一关键条件概括为后来成为 o-极小结构关键定义性质的条件，并称之为“有限型”；他预期 $\mathbb{R}_{\exp}$（的理论）具有这一性质。

下一步由 Pillay 和 Steinhorn [118, 119]完成，他们在一般情形下研究了“有限型”条件，并将这些结构命名为“o-极小”（即“整环-极小”：它们是在具有整环的情况下“极小”结构的类似物）。他们与 Knight [79] 共同证明了关键的单元分解定理。这证明了“o-极小”和“强o-极小”这两个概念是一致的。（相比之下，极小结构并不等同于强极小结构；后者在“稳定”模型论中发挥了关键作用，例如 Morley 证明 Los猜想时便是如此。）o-极小结构中可定义集所具有的极强良性性质都源于这一定理（例如，可定义函数是连续的，甚至除了有限多个点外还是可微的，并且在族中是一致的，等等；参见例如 [43, 46]）。

o-极小性的背景是一个 $\mathcal{R}$ 扩张稠密线性序且无端点的结构（$R, <$）。这意味着， $\mathcal{R}$ 上的结构包括一个整环，在该整环下，其论域 R 具有稠密线性序，既没有最大元素，也没有最小元素，并且可能还带有其他结构。这种 $\mathcal{R}$ 通常表示为 $\mathcal{R} = (R, <, \ldots\ldots)$。

4.1. 定义。 设 $\mathcal{R} = (R, <, \ldots\ldots)$ 是一个扩张了稠密线性序（$R, <$）且无端点的结构。那么，如果 R 的每个可定义子集都是有限个点和开区间（可能无界区间）的并， $\mathcal{R}$就称为*o*-极小的。

注意，在o-极小性中，通常将可定义集视为“带参数”可定义的，这意味着可以使用论域中的所有常量作为定义集合时的参数；在上述定义中我们也如此处理。因此，在实数域的结构（$\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1$）中，此意义下的可定义集就是所有半代数集，而按照严格的可定义性定义（仅使用结构中的常量），得到的则只有在 $\mathbb{R}$中定义于 $\mathbb{Q}$的代数闭包上的半代数集。应用中的底层整环通常是（$\mathbb{R}, <$），但对理论而言，在更一般的背景下展开研究十分重要。

然而，若要使其具有趣味性和实用性，就应当存在超越 $(\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1)$ 本身这一原型所提供的丰富而灵活的 o-极小结构，而理论的主要目标则是结构 $\mathbb{R}_{\exp}$。第一个例子已经十分丰富，它由受限解析函数的结构给出，通常记作$\mathbb{R}_{\mathrm{an}} = (\mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1, f_i, i \in I)$，其中对每个函数 f_i： $B \to \mathbb{R}$，结构中都有一个符号 f_i；这里 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是某个$n \geq 1$的紧盒，并且 f_i 可延拓为 B 某个开邻域上的实解析函数。在该结构中，包含 f_i 在 B 上的限制（在其外部将其设为 0）。van den Dries [42] 指出， $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ 的 o-极小性是 Gabrielov 的一个著名定理的推论，该定理断言，亚解析集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的补集是亚解析集。

该结构包括将 e^x 限制在任意紧区间上的情形，但（根据 Lojasiewicz 的一个定理）并不包括实指数函数的完整图像。 $\mathbb{R}_{\exp}$ 的 o-极小性由 Wilkie [145] 证明（他

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

确实证明了它是模型完备的，即每个可定义集都是某个无量词可定义集的投影，而 o-极小性则由 Khovanskii 理论 [74] 关于“少项式”的理论推出）。

结合这些结构，van den Dries 和Miller [45] 证明了，包含 e^x 的完整图像、从而扩张 $\mathbb{R}_{\text{an}}$的结构 $\mathbb{R}_{\text{an exp}}$ 是 o-极小的； [44] 给出了第二个证明（后来人们证明， $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ 上的任意 o-极小结构的“Pfaffian 闭包”仍然是 o-极小的： [135], ，而且这总是包含 exp）。

4.2. 定理。 (van denDries-Miller [45]) 结构 $\mathbb{R}_{\text{an exp}}$ 是 *o*-极小的。

截至目前，结构 $\mathbb{R}_{\text{an exp}}$ 已足以应对志村簇和霍奇理论中的所有应用。关于其他一些结构（例如其中诸如 $\Gamma(x)$ $\zeta(x)$这样的函数在适当限制下是可定义的），参见 [47]。此外，还存在不相容的 o-极小结构（即两个 o-极小结构的并生成一个并非 o-极小的结构 [125]）。因此，尽管 o-极小性有时被视为实现 Grothendieck 关于“温和拓扑”的愿景 [68] ，但它并未提供一种“规范的”此类实现。关于 o-极小性的标准参考文献是 van den Dries 的著作 [43] 。 [46]汇集了许多其他有用的性质。

5 o-极小结构中的点计数。o-极小性通过可定义集中的有理点计数结果及其在丢番图问题中的应用，与André-Oort猜想建立了联系。o-极小结构为温和实集上的点计数结果提供了一个自然的框架。

设 $Z \subset \mathbb{R}^n$。我们希望研究 Z 上的有理点，而它通常将不是（半）代数的。比如，如果 Z 是某个超越实解析集，我们可能会预期其上的有理点相当稀疏。不过，诸如 $y = 2^x$ 的图像这样的例子表明，有理点也可能是无限的。因此，我们可能会寻求这样的结果：根据点的数量随其高度增长的方式，说明这些点是稀疏的。我们进一步注意到，一个（实）维数至少为 2 的超越实解析集可能包含正维的半代数集，例如直线或线段；从高度密度的意义上说，这些半代数集可能包含相当多的有理点。例如，$z = x^y$ 在 $[1,2]^2$，上的图像就是如此。类比丢番图几何中“特殊集”的概念，一个合理的目标结果可以是证明：在适当温和的实集上，除去这类半代数子集之外，有理点是稀疏的。为了陈述一个精确的结果，我们先作出一些定义。

5.1. 定义。有理数 $q = a/b$ 的高度，其中 a， $b \in \mathbb{Z}$， $b \geq 1$，且 $\gcd(a, b) = 1$，定义为$H(q) = \max(|a|, b)$。 n 元组 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 的高度定义为 $H(x) = \max H(x_i)$

5.2. 定义。集合 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 的代数部分定义为所有连通的正维半代数子集 $A \subset Z$ 的并集。其补集 $Z - Z^{\text{alg}}$ 是 Z 的超越部分。

最简单的形式下，点计数结果只需排除 Z 的代数部分。代数部分可以视为丢番图几何中特殊集的粗略类比。

5.3. 定义。 Z 的计数函数为函数

$$N(Z, H) = \#\{x \in Z : x \in \mathbb{Q}^n, H(x) \leq H\}.$$

5.4. 定理。(Pila-Wi lkie [116])。 设 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 是 *o*-极小结构中的一个可定义集，且 $\epsilon > 0$。那么

$$N(Z - Z^{\text{alg}}, H) \leq c(Z, \epsilon) H^{\epsilon}$$

对于某个正常数 $c(Z, \epsilon)$。

这一结果可以通过多种方式加以细化。首先，隐含常数对任意可定义族的集合都是一致的。这意味着形如 Z_t, $t \in \mathbb{R}^m$ 的集合，它们是某个可定义集$Z \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$向 $\mathbb{R}^m$ 的投影的纤维。这种一致性源自 o-极小结构中可定义集的单元分解定理，在证明中至关重要；证明的核心是一个针对可定义集的参数化定理，它推广了 Yomdin 和 Gromov [67, 147, 148]关于半代数集的类似结果。

其次，一个 对于固定次数为 [108]的代数点，也有同形式的估计：其中一 ts

$$N(Z, d, H) = \#\{x \in Z : [\mathbb{Q}(x_i) : \mathbb{Q}] \leq d, H(x_i) \leq H, i = 1, \ldots, n\}$$

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

其中 H 表示 $\mathbb{Q}$ 上的乘法韦伊高度，并且对于可定义集 Z，有

$$N(Z - Z^{\mathrm{alg}}, d, H) \leq c(Z, d, \epsilon)H^{\epsilon}.$$

第三，虽然这种表述排除了代数部分，但可以给出一个包含代数部分的更精细版本，其实质是说明，在高度不超过 H 的范围内，有理点可由代数部分的 $c(Z,\ d,\ \epsilon)H^{\epsilon}$ 个“分支”以及点 [108]所涵盖。

第四，虽然在一般的 o-极小结构中，计数估计是无效的，且无法得到实质性改进（见 [107]），但如果将范围限制在更“受控”的 o-极小结构中，例如其基本生成函数满足适当微分方程的结构，则已有结果给出了有效和/或多对数上界 [19, 22, 20]。

计数定理通过所谓的 Pila-Zannier策略，在 o-极小性与算术问题之间架起了初步桥梁。该策略于 [117] 提出，旨在为 Manin-Mumford猜想提供一种新的证明，之后也成功应用于 Zilber-Pink猜想的若干情形，例如 [88, 89] [152, 26, 121]。关于这一猜想的一般论述，见 [110, 150]。下一节将说明这一策略如何处理 André-Oort背景，以及使其奏效所需的要素。

6 o-极小性与 André-Oort猜想。志村簇S 由厄米对称域 $\mathbb{H}_S$通过一致化 $u\colon\ \mathbb{H}_S \to S$ 得到，并且该一致化在一个合适的、作用于 $\mathbb{H}_S$的自同构算术群 Γ 下保持不变。这提供了点计数策略可应用的基本要素：我们可以在 $\mathbb{C}^n$中 $n=$维的 Harish-Chandra 嵌入下，将 $\mathbb{H}_S$ 实现为一个开半代数子集，从而赋予它一个自然的 $\mathbb{Q}$-结构；在此结构中，特殊点的原像是代数的，且次数有界（事实上，每个原像都是 $\mathbb{H}_S$ 中某个 $g \in G(\mathbb{Q})$的唯一不动点，其中 G 是起支配作用的实代数 $\mathbb{Q}$-群（例如， $S = \mathcal{A}_g$对应 $G =$Sp$_{2g}$）； [38], p5。

下文中，尽管严格来说不存在正维数的“代数子簇 $V \subset \mathbb{H}_S$”，但为了行文方便，我们仍会使用这一说法。例如，在最简单的情形 $S = Y(1)^n$ 中，我们有 $\mathbb{H}_S = \mathbb{H}^n$ ，其中 $\mathbb{H}$ 是复上半平面。 $\mathbb{C}^n$ 中的正维数代数子集必在某个因子上占优，因此不可能包含于 $\mathbb{H}^n$。因此，我们约定，中的代数子簇是指某个（真正的）代数子簇 $V \subset \mathbb{C}^n$的一个连通分支 $\mathbb{H}_S \cap V$。

我们现在还必须引入弱特殊子簇这一概念。弱特殊子簇包括特殊子簇，并且按照 [141], 可将其刻画为满足以下条件的子簇： $W \subset S$ 的某个分支（等价地，每个分支）是代数的（在上述意义下）。它们就是“双代数的”子簇。它们也可以刻画为 [92]全测地子簇。弱特殊子簇是特殊子簇，当且仅当它包含一个特殊点。

Ullmo [140] 提出了四个要素；要成功运用点计数策略来证明某个 Shimura 簇的 André-Oort 猜想，这些要素是充分的 S。

1. 在某个基本域 $F_S \subset \mathbb{H}_S$ 上， u 关于 Γ的作用是可定义的。2. 对于特殊点 $P \in S$在 F_S 中的原像的高度，给出一个合适的上界。3.“Ax-Lindemann”：对于代数子簇 $A \subset \mathbb{H}_S$， $u(A)$的 Zariski 闭包是弱特殊子簇。4. 对于特殊点的伽罗瓦轨道大小，给出一个合适的下界。

第 2 项和第 4 项是用参数 $\Delta(P)$ 表示的，该参数衡量特殊点的“复杂度”。稍后会进一步介绍，但伽罗瓦共轭特殊点具有相同的复杂度。因此，在第 2 项中，需要乘法高度 $H(Q)$（其中 $Q \in F_S$with $u(Q) = P$）满足 $H(Q) \leq c\Delta(P)^{\delta}$，其中某些正的常量 $c,\ \delta$ 仅依赖于 S；而在第 4 项中，需要

$$[\mathbb{Q}(P) : \mathbb{Q}] \geq c'\Delta(P)^{\delta'}$$

其中某个正的常量 $c',\ \delta'$ 仅依赖于 S。

现在设 $V \subset S$ 是一个代数子簇。我们可以假设 V 定义在数域 K 上（注意，Shimura 簇是定义在某个数域上的_(规范地）簇）。事实上， V 中所有定义在 $\mathbb{Q}$ 上的点都属于某个定义在数域 $V' \subset V$ 上的子簇。记 $Z = u^{-1}(V) \cap F_S$。根据 1，这是一个可定义集。假设 V 包含一个特殊点 P。那么 P 至少有 $c'\Delta(P)^{\delta'}/[K\colon\ \mathbb{Q}]$ 个 P' 的共轭元也属于 V，并且是特殊的（具有相同的复杂度 Δ）。这些点在 u 下于 F_S 中的原像具有某个有界次数 $d = d(S)$，且高度至多为 $c\Delta(P)^{\delta}$，并且至少有 $c'\Delta^{\delta}$ 个这样的原像。若记 $H = c\Delta^{\delta}$，则我们因此在 Z 中至少有 $c''H^{\delta/\delta'}$ 个点，它们具有某个固定的次数和高度 $H(Q) \leq H$。

版权所有 © 2026 本文的版权归作者所有

应用计数定理并取某个 $\epsilon < \delta/\delta'$，我们发现，当 Δ 足够大时， P 在 K 上的大多数（事实上我们将看到是全部）共轭元 P' 都属于某个正维特殊子簇 $T \subset V$。为此，我们需要使用第 3 项 Ax-Lindemann。根据计数定理， Q' 中的大多数点都将位于 Z 的代数部分中。这是正维 实 半代数子集 $A \subset Z$ 的并。然而，由于 $u^{-1}(V)$ 是复解析的，这样的 A 至少在每个光滑点的局部都包含于某个复代数子簇 $B \subset u^{-1}(V)$ 中，其含义如上所述。

根据 Ax-Lindemann， $u(B)$ 的 Zariski 闭包是弱特殊子簇，并且它是 V 的一个子簇。因此，我们发现， P 在 K 上的“绝大多数”共轭元 P' 都位于某个正维弱特殊子簇 $T \subset V$ 中。又由于 P' 是特殊点，我们看到 T 是特殊点。由于特殊子簇在伽罗瓦共轭下保持不变，我们得出结论： P 在 K 上的所有共轭元都包含于某个正维特殊子簇中。

这已经表明， V 只包含有限多个特殊点，这些特殊点不包含于 V 中所含的更大特殊子簇内，而论证通过归纳法即可完成。对于归纳法，需要证明包含于 V 中的极大弱特殊子簇只来自有限多个族，并且它们由某个适当参数空间的一个子簇参数化，而该参数空间本身是一个 Shimura 簇。这一点并不难，但我们不再详述。

接下来，我先阐述在志村簇的背景下确立条目 1 和 2 的工作，然后再详细介绍 Jacob 对条目 3 和 4 的贡献。为此，需要为Γ 在 $\mathbb{H}_S$ 上的作用选取合适的基本集（或基本域）；对于 Siegel模簇，自然的选择是 Siegel F_g基本集合，这是 Siegel [133]引入的。

在最简单的情形 $Y(1)$及其笛卡尔幂中，可定义性归结为证明 j-函数在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{(}Z)$ 对上半平面的作用所对应的标准基本域上是可定义的。由于基本域位于一个竖直条带内，且与实轴保持一定距离，因此$\mathbb{R}_{\mathrm{an\ exp}}$ 中的可定义性可由 q-展开推出；如 [102]中所述，该展开在 $|q| \leq c < 1$时收敛。

对于更高维的 Siegel模簇，可定义性需要对给出射影嵌入的 θ 函数进行细致研究；这项工作由 Peterzil-Starchenko [106]完成。

6.1. 定理。 (Peterzil-Starchenko [106])存在一个开集 $U \subset \mathbb{H}_g$，包含 F_g，使得限制映射u： $\mathbb{H}_g \to \mathcal{A}_g$ 到 U 在 *o*-极小结构 $\mathbb{R}_{\mathrm{an\ exp}}$中是可定义的。

该定理通过对任意给定固定极化类型的阿贝尔簇万有族证明相应命题而得以证明（使用带特征的两组变量 $\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](z,\ \tau)$ 中的 theta 函数）。对于一般的志村簇，相应的可定义性命题归功于 Klingler-Ullmo-Yafaev [77]。这需要对环面紧化的相关机制进行仔细分析。对于混合志村簇，该结果归功于 Gao [55]。

转到第 2 项，对于 $\mathcal{A}_g$ 中的特殊点，我们的复杂度度量 $\Delta(x)$将取对应阿贝尔簇的自同态环的中心的判别式的绝对值。在$\mathcal{A}_1 = Y(1)$的情形下，可以从证明标准基本域确实是一个基本域的论证中初等地提取出一个合适的界（例如见 Serre [130]）。即使对于 Siegel模簇，这也相当非平凡，并且归功于 Jacob 的博士论文，该论文发表于 [112]。

6.2. 定理。 (Tsimerman [112]) 存在正实数 $c = c(g)$ $\delta = \delta(g)$ 使得如果 $x \in \mathcal{A}_g$ 是一个特殊点，且 $z \in F_g$ 满足 $u(z) = x$，那么

$$H(z) \leq c\Delta(x)^{\delta}.$$

Daw-Orr [38]为任意志村簇建立了这一结果的推广。这是定量约化理论中的一项结果。

关于有效性，简单说几句。针对 André-Oort猜想的点计数方法有两个无效性来源。首先，如上所述， [116]中的点计数结果通常是无效的。不过，Binyamini 已通过引入“对数诺特函数”（含幂运算）的 [20] 结构$\mathbb{R}_{\mathrm{LN\ exp}}$ 使其变得有效；该结构涵盖了将点计数方法用于 André-Oort 所需的所有集合。第二个无效性来源是特殊点伽罗瓦轨道大小的下界，它依赖于著名的、对虚二次域类数而言无效的朗道-西格尔下界。直到最近，已知的有效 André-Oort猜想结果仅有 $\mathcal{A}_1^2$：Kühne [80, 81] 和 Bilu-Masser-Zannier [18], 独立证明了相关结果；Binyamini-Masser [21]则针对希尔伯特模曲面上的非紧曲线（以及稍广泛的情形）证明了相关结果。

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

不过，最近 OpenAI [97], 通过证明 Landau-Siegel零点的有效不存在性，使这些下界普遍变得有效，参见例如这篇面向大众的介绍 [61]。早先 Edixhoven-Klingler-Ullmo-Yafaev 对 André-Oort猜想的研究以广义黎曼猜想为条件，同样需要特殊点伽罗瓦轨道的良好下界，此外还需要 CM 域中小分裂素数的适当上界。现在也已证明，这些结果可由量子黎曼假设推出，参见 [53]。

7 Schanuel 猜想与 Ax-Schanuel。我们暂且离题，介绍关于复指数函数超越性质的经典 Schanuel猜想，以及由 Ax [5] 证明的函数版本。

设 $K \subset L$ 为域。我们用 $\mathrm{tr.deg.}_K L$ 表示 L 在 K 上的超越次数，即一个超越基的基数。

7.1. 猜想。（Schanuel；见 [83], 第30-31页）设 z_1，……，$z_n \in \mathbb{C}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。则

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}) \geq n.$$

Schanuel 的表述精妙地概括了复指数函数的算术性质。对于一般的 $n \geq 2$，它仍未解决。在所有 $z_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ 的特殊情形下，可得到林德曼-魏尔斯特拉斯定理（有时称为林德曼定理）。

7.2. 定理。（林德曼-魏尔斯特拉斯，参见例如 [83]）设 z_1，……，$z_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。则 e^{z_1}，……，e^{z_n} 在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关。

函数版本（据 [5] 所述，也由 Schanuel 提出）由 Ax [5] 证明。文中还给出了若干变体，包括形式幂级数版本和微分域版本。在此，陈述复数情形下的一个等价版本较为方便。令 $u\colon \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^\times)^n$ 为复指数函数的 n 重笛卡尔积，其图为 $D_n \subset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^\times)^n$。

7.3. 定理。（经典 Ax-Schanuel；复数版本 [138]）设 $V \subset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^\times)^n$ 是一个不可约代数子簇，且 U 是 $V \cap D_n$ 的一个连通不可约分支。那么

$$\dim_{\mathbb{C}} V \geq \dim_{\mathbb{C}} U + n$$

*unl*它从 U 到 $\mathbb{C}^n$ 的投影包含于某个严格 $\mathbb{Q}$-线性子空间的平移中。

如果不等式不成立，这意味着交分支 U 的维数异常地大；其在 $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^\times)^n$ 中的余维“应当是” $\mathrm{codim} D_n + \mathrm{codim} V$。定理断言，这类非典型交总是可以由双代数子簇的介入来“解释”（即某个 $\mathbb{Q}$-线性子空间的平移）。半阿贝尔簇的相应结果归功于 Ax [6]。事实上，他的论证更一般地适用于“近似半阿贝尔簇” [17]，并在 [114] 中推广到所有交换代数群（其中在 [115]中还应用于秩一黎曼-希尔伯特对应）。

以下这个特殊情形讨论代数簇在幂运算下的像，即经典的“Ax-Lindemann”。

7.4. 定理。(经典 Ax-Lindemann) 设 $W \subset \mathbb{C}^n$ 是一个复代数簇。那么 $u(W)$ 在 $(\mathbb{C}^\times)^n$ 中 ***Zariski*** 稠密，除非 W 包含于一个真 $\mathbb{Q}$-线性子空间的平移中。因此，若 $u(W) \subset V$ 对某个代数簇 $V \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ 成立，则存在一个 $\mathbb{Q}$- 线性子空间的平移 L，使得 $W \subset L$ 且 $u(L) \subset V$。

8 函数超越性：Ax-Lindemann。在将 André-Oort 的点计数策略应用于志村簇 S 时，所引出的问题是：

对于哪些代数子簇 $W \subset \mathbb{H}_S$，$u(W)$ 在 S 中不是 ***Zariski*** 稠密的；具体而言，何时有 $u(W) \subset V$?

这个结论是对上述经典 Ax-Lindemann 定理的直接推广；这类包含关系总是由弱特殊（“双代数的”）子簇的介入来解释。相关结果通过一系列论文得以证明，首先是模函数的笛卡尔积情形 [109], ，接着是 [112] 在$\mathcal{A}_2$上的情形，以及 Ullmo-Yafaev 证明的紧情形 [144]。$\mathcal{A}_g$的情形对于后来 Jacob 确认 André-Oort 猜想至关重要，也给出了所有这些结论的统一形式。

8.1. 定理。(Ax-Lindemann 定理（适用于 $\mathcal{A}_g$；Pila-Tsimerman [113]）设 $S = A_g$ 为 ***Siegel***模簇，$\mathbb{H}_S = \mathbb{H}_g$ 为 ***Siegel***上半空间，且 $u\colon \mathbb{H}_S \to S$ 为一致化映射。设 $W \subset \mathbb{H}_S$、$V \subset S$ 为代数簇。

若 $u(W) \subset V$ 那么存在一个弱特殊子簇 $L \subset \mathbb{H}_S$ 使得 $W \subset L$ 且 $u(L) \subset V$.

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

志村簇（甚至算术簇）的一般情形归功于 Klingler-Ullmo-Yafaev [77]，他们在同一篇论文中确立了所需的可定义性。将结果推广到混合志村簇则归功于 Gao [55]。所有这些 Ax-林德曼结果的证明都运用了点计数。

9 函数超越性：Ax-肖恩埃尔推广。尽管 André-Oort 并不要求这些结果，但寻求推广完整的 Ax-肖恩埃尔陈述是很自然的。除了其陈述本身具有自然性之外，它们还获得了若干应用。它们是更一般情形下 Zilber-Pink 猜想的点计数方法所必需的，在其中所发挥的作用类似于 Ax-Lindemann 在 André-Oort 中的作用。它们还进一步应用于模空间中整数点的稀疏性结果 [85, 84, 16], 、沙博蒂-金方法 [73],以及贝蒂映射退化性的研究 [3, 58] （贝蒂映射在与莫德尔-朗相关的一致性结果中发挥着关键作用 [59]）。在 [69] 中，它们被用于确定志村簇的紧子簇可能具有的最大维数 $\mathcal{A}_g$；在 [114] 中，则被用于研究初等可积性的推广问题。

与 Ax-Lindemann 一样，Ax-Schanuel 结果也由不同作者通过一系列逐步推广的工作建立起来。关于志村簇的一般结果归功于 Mok-Pila-Tsimerman [90]。Gao 将其推广到了万有阿贝尔簇的混合情形 [57] （另见 [56]）。

9.1. 定理。（志村簇的 Ax-Schanuel 定理；[90]）设 $u\colon \mathbb{H}_S \to S$ 是一个志村簇的一致化映射，$D \subset \mathbb{H}_S \times S$ 是其图像。设 $V \subset \mathbb{H}_S \times S$ 是一个不可约代数子簇，且 U 是 $V \cap D_S$ 的一个连通不可约分支。那么

$$\dim_{\mathbb{C}} V \geq \dim_{\mathbb{C}} U + \dim S$$

除非 U 在 S 上的投影包含于某个严格弱特殊子簇。

Bakker-Tsimerman 将其推广到纯极化整霍奇结构变分 [13]（另见 [14]）。在霍奇理论框架中，不存在一个“向下”映射至目标代数簇的一致化映射，而是存在一个“向上”的周期映射 ϕ，它从变分的基底 X 映入周期空间（见下文 §13）。此处自然的环境空间是由相关“弱芒福德-泰特域” D 除以 π_1 的单值表示 X 的像 Γ 所得的商空间 $\Gamma\backslash D$；结论是，非典型交分支可由自然的方式加以解释，此处对应的是“真弱芒福德-泰特子簇”。

9.2. 定理。（霍奇结构变分的 Ax–Schanuel；[13]）。在上述设定中，设 $V \subset X \times D$ 为一个代数子簇，设 $X_D \subset X \times D$ 为由商映射 $D \to \Gamma\backslash D$ 与周期映射 $\phi\colon\ X \to \Gamma\backslash D$得到的纤维积。设 U 是 $V \cap X_D$ 的一个不可约解析分支，使得

$$\operatorname{codim}_{X\times D} U < \operatorname{codim}_{X\times \widehat{D}} V + \operatorname{codim}_{X\times D} X_D.$$

那么，U 在 X 上的投影包含于一个真弱 *Mumford–Tate* 子簇中。

该方法沿用了 [90], 的方法，但在寻找合适的基本集、建立可定义性以及获得体积估计方面存在严重困难。混合Hodge结构变分的推广归功于 Gao-Klingler [60]和 Chiu [30] （以及带导数的情形 [31]）。

此时，通过点计数证明此类定理的方法已被 Blazquez-Sanz–Casale–Freitag–Nagloo [24]提出的一种更自然（也更一般）的技术所取代。沿着上述结果思路的一个非常一般的 Ax-Schanuel 结果，是 André-Grothendieck 周期猜想的函数版本（通过这两种技术均可证明），归功于 Bakker-Tsimerman [15]。

10 个特殊点的伽罗瓦轨道。一种适合通过点计数证明 $\mathcal{A}_1^n$ 的 André-Oort猜想的伽罗瓦下界，来自数论中最经典的结果之一。

如果一条椭圆曲线具有复乘，那么它的自同态环就是某个二次虚数域中的一个整环。（在非 CM 情形下，自同态环为 $\mathbb{Z}$。）令 σ 为与判别式为 Δ 的整环 $\mathcal{O}$ 相关联的奇异模数（该判别式唯一刻画这个整环）。经典结果表明，在这种情况下，所有针对 $\mathcal{O}$ 的 CM 点都是伽罗瓦共轭元，并且伽罗瓦轨道与该整环的类群一一对应。对于给定域中的极大整环，即其整数环，这就是该域的类数。根据 Landau-Siegel 定理（如今已可有效化）

$$[\mathbb{Q}(\sigma) : \mathbb{Q}] \geq c(\epsilon)\Delta(\sigma)^{1/2-\epsilon},$$

其中 $\Delta(\sigma)$是 $\mathcal{O}$的判别式的绝对值。

版权所有 © 2026 本文的版权归作者所有

但对于其他志村簇，与类数的联系更加复杂，也更难提取伽罗瓦轨道界。对于 $\mathcal{A}_g$ 更高 g而言，CM 点上的伽罗瓦作用已经是通过反身型范数实现的，因此所需的估计涉及两个类群之间映射的像的大小。Edixhoven [50] 此前曾提出过一个具有所需形式的界，作为一个问题。

所需的界由 Ullmo-Yafaev [143] 针对 $g \leq 3$ 以及 Tsimerman [137] 在 $g = 6$ 的情形下证明（在广义黎曼猜想成立时，两种情形下对所有 g 也都成立）。这一结果完成了 $\mathcal{A}_g^n$ 上 $g \leq 6$ [140]的 André-Oort 猜想证明。但该论证需要进行组合分析，而其复杂度会随着 g的增加而提高。

11 特殊点的高度与伽罗瓦轨道。 进一步而言，特殊点的高度界发挥着至关重要的作用。这与群簇情形中对应问题里的高度界所起的作用相呼应。

因此，在研究 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$中曲线的不太可能的交时，Bombieri-Masser-Zannier [25]关键性地证明了“恰好可能”的交满足有界高度陈述。在随后的工作中 [26], , 他们结合自己版本的 Zilber-Pink猜想，提出了一般性的“有界高度猜想”。Habegger 在乘法情形 [70] 以及阿贝尔簇情形 [71]下都证明了有界高度猜想。这些结果（直到 OpenAI [95] 声称完成了关于 $\mathbb{Q}$上的阿贝尔簇的 Zilber-Pink猜想的完整证明）构成了这些情形下关于 Zilber-Pink猜想的最一般结果。 [26]指出了志村簇情形中“有界高度”的失效（事实上，早在那时，奇异模数就不像半阿贝尔簇的挠点那样具有有界高度）。 [72]提出了关于“可能的交”的弱有界高度猜想。

证明 André-Oort 所需的关键结果是，**对数**韦伊高度（即 $h(x) = \log H(x)$，其中$H(x)$ 是上文引入的乘法韦伊高度）对于一个**特殊点** $x \in \mathcal{A}_g$ 而言是“判别式可忽略的”，也就是说

$$h(x) \leq c(g, \epsilon)\Delta(x)^{\epsilon}$$

对于某个 $c(g, \epsilon)$，对所有正的 ϵ 都成立。

Tsimerman [139] 指出，上述结论可由刚刚证明的平均科尔梅兹猜想推出。Colmez[36] 针对复乘阿贝尔簇的法尔廷斯高度提出了一个精确的猜想。该猜想在一般情形下仍未解决，但其平均版本已由 Andreatta-Goren-Howard-Madapusi Pera [4] 以及 Yuan- Zhang [149]分别证明。（平均值是判别式可忽略的，而法尔廷斯高度在 $\mathcal{A}_g$上有下界； [27], 显式下界见 [99]）。利用 Masser-Wüstholz 的同源估计，一个巧妙的论证继而表明，特殊点的伽罗瓦轨道大小至少是其判别式的某个正幂。

11.1. 定理。 ([139]) 设 g 为正整数。存在 c_g、$\delta_g > 0$，使得若 Φ 是 *CM* 域 E的本原 *CM* 型，且若 A 是维数为 g 、自同态环等于完整整数环 $\mathcal{O}_E$ 且 *CM* 型为 Φ的阿贝尔簇，则其模域 $\mathbb{Q}(A)$ A 满足

$$[\mathbb{Q}(A) : Q] \geq c_g |\mathrm{Disc}(E)|^{\delta_g}.$$

由此可以推导出一般 CM 点的一个界，这为证明 $\mathcal{A}_g$的 André-Oort猜想补上了最后一块拼图。

11.2. 定理。 (Tsimerman [139])对 $\mathcal{A}_g$，*André-Oort*猜想成立。

对于一般的志村簇，我们已经看到，所需的要素 1、2、3 均已获得。截至 2018 年，一般志村簇上特殊点的伽罗瓦轨道下界仍未解决。尽管形式上不属于菲尔兹奖委员会所引述的工作，我们仍提及后续进展，这些进展最终促成了完整证明 André-Oort猜想的宣布 [111] 。

对于一般的志村簇，其点并不参数化阿贝尔簇（甚至据目前所知，也不参数化代数簇）。因此，在得到伽罗瓦轨道下界时至关重要的两种工具都无法使用。具体而言，我们缺少法尔廷斯高度和同源估计。

Binyamini-Schmidt-Yafaev 绕过了缺少同源估计这一问题。特殊点在一致化 $u\colon \mathbb{H}_S \to S$ 的图像 D_S 上产生代数点。它们的次数不再有界。根据 Schmidt 的一个想法（该想法由 [128] 用于挠点），若能在高度和次数两个方面，对 D_S （当然限于一个基本域内）中的代数点得到足够精确的（多对数）计数界，再结合已知此类点“很多”这一事实，就可以推出次数下界。（ D_S 的代数部分为空，因此次数和高度必须满足上界。）一个精确的计数

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

适用于一般志村簇情形的结果由 Binyamini [20]，提出；他与 Yafaev [23] 将其付诸实施，证明若 S 上特殊点的高度“可忽略于判别式”，则可推出适当的伽罗瓦轨道下界。

论文 [111] 随后确立了高度界。这利用了这样一个事实：一般志村簇上的某些特殊点可以与 $\mathcal{A}_g$ 上的特殊点联系起来；通过仔细控制，可以据此在任意志村簇的特殊点上构造一种“几乎典范”的高度，并且该高度的判别式可忽略。高度界最终仍然依赖于平均科尔梅兹猜想的证明。

12 o-极小复几何。 在一系列论文中，Peterzil 和 Starchenko 在 o-极小结构 [100, 101, 103, 104] 的框架下发展了复分析，相关综述见 [105]。

这是一项美丽而非凡的发展：绕数取代了幂级数的使用，因为幂级数在一般情况下并不存在。o-极小结构的论域通常并不是实数，而是一个可能非阿基米德的实闭域（因而不具备局部紧性）。然而，在单变量情形下，仍然可以恢复所有标准性质（最大值原理、开映射、柯西-黎曼关系、无穷次可微性以及恒等原理）。

在多变量情形下，Peterzil 和 Starchenko 建立了若干重要经典结果的 o-极小类比，包括 Chow 定理、Remmert-Stein 定理和可去奇点定理。一般而言，这些 o-极小类比在环境结构为 $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ 时包含经典陈述，实际上还以可定义性取代了适当性假设。

12.1. 定理。 (“可定义 Remmert-Stein 定理”； [104]。另见 [103])。设 M 是一个可定义复流形， E 是 M的一个可定义复解析子集。若 A 是 $M-E$的一个可定义复解析子集，则其闭包 A 是 M的一个复解析子集。

以下结果是对 Peterzil-Starchenko 所陈述结果的轻微推广。

12.2. 定理。 (“可定义 Chow 定理”； [104], [90]) 设 Y 是一个准射影代数簇，且 $A\subset Y$ 在 Y 中是可定义的、复解析的并且闭的。那么 A 是代数的。

根据上述以及下文的可定义性结果，这些强有力的陈述适用于 Shimura 簇的（适当限制的）一致化映射，更一般地，也适用于霍奇结构变分的周期映射。

13 霍奇理论。 霍奇理论的主要对象是与适当复流形相关联的霍奇结构 。它记录了拓扑数据与复结构相互作用所产生的线性代数数据。我们将只考虑光滑射影复代数簇的情形。

贝蒂上同调群张量到 $\mathbb{C}$ 后，保留了一个整结构。此类簇的光滑德拉姆上同调群 $H^k(X,\ \mathbb{C})$ 具有霍奇分解，即分解为子空间 $H^{p,\ q}$ 其指标取遍非负整数 $p,\ q$ 且满足 $p+q=k$ 的直和分解；这些子空间由具有类型 $(p,\ q)$ 的微分形式张成，也就是说，在局部可表示为 p 的楔积之和，其中 dz_i 和 q 分别来自 dz_j。它们满足 $H^{p,\ q}$ 是 $H^{q,\ p}$的复共轭。这些数据给出了与 X 相关联的权 k $\mathbb{Z}$-霍奇结构 $V_{\mathbb{Z}}$。此外，由交积（以及射影嵌入）还得到一个极化 Q，它是定义在 $H^k(X,\ \mathbb{C})$ 上的双线性形式，具有适当的（反）对称性和正定性。

与这种权为 k、极化的 $\mathbb{Z}$-Hodge结构相关的数据，自然由相应的周期域参数化；该周期域是适当旗簇 D 的一个开子集 D。虽然 D 是复射影簇，但子集 D 由正性条件定义。周期域是 G/M 的商空间，即 $G=\mathbf{G}(\mathbb{R})^+$ 的单位元连通分支；这里，{style id='19'}G{/style}$(\mathbb{R})$ 是某个连通半单线性代数群 $\mathbb{Q}$-群$\mathbf{G}$ 的单位元连通分支，而 M 是一个紧子群（通常不是极大的）。这类Hodge结构的同构类型由周期空间实现，即对某个算术群 Γ 取商空间 $\Gamma\backslash D$。

原型例子是Siegel上半空间。

$$\mathcal{A}_g=\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_g=\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/U(g).$$

但在这里，紧子群 $U(g)$ 是极大的，而商空间 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_g$ 是一个代数簇，事实上是一个志村簇（所有志村簇都以这种方式出现）；但一般而言，周期空间没有代数结构 [66]。每个具有相同拓扑类型的光滑射影代数簇 X 都会给出一个极化的权 $k\mathbb{Z}$-霍奇结构，其中 k 取适当范围内的值，并对应于该空间中的一个点。

版权所有 © 2026 本文的版权归作者所有

我们讨论的基本对象是“霍奇结构变分”，由 Griffiths [62, 63, 64]发展而来，综述见 [65]。设 $\mathcal{X} \to S$ 是代数簇的一个态射，其一般纤维是光滑且射影的。假设基底 S 是准射影的；通过将其缩小，我们可以假设所有纤维都是光滑且射影的。于是，纤维 $\mathcal{X}_s$，$s \in S$ 作为实流形彼此同胚，我们可以将 $\mathcal{X} \to S$ 看作底层光滑紧实流形上的复结构变动族，从而给出一个极化 $V \to S$的 $\mathbb{Z}$-霍奇结构族。这些结构在基底上构成一个丛，带有全纯变化的滤过、正则平坦联络，并满足 Griffiths横截性。随后也可以对它们进行抽象考察。由族 $\mathcal{X} \to S$ 产生的变分称为几何变分。

例如，取阿贝尔簇的万有族 $\mathcal{X}_g \to \mathcal{A}_g$ 在 $\mathcal{A}_g$ 上（略去某些适当的级结构），则周期作为基底上的多值函数，将 $\mathcal{A}_g$ 映射到 Siegel上半空间 $\mathbb{H}_g$。单值化是 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ 的某个同余子群（取决于级结构），取商后便得到一个典型的霍奇结构变分。尽管是典型例子，这个变分仍然极为特殊，因为周期映射是满射，而商映射是商域与 $\mathcal{A}_g$ 之间的双全纯映射。（带有级结构时：在 $\mathcal{A}_g$ 本身上，从 $\mathbb{H}_g$ 出发的映射是分歧的。）所有志村簇都具有这一性质（尽管在霍奇猜想尚未得到证明的情况下，目前尚不知道它们是否都参数化了代数簇族）。

一般而言，族 $\mathcal{X} \to S$ 会产生一个映入周期域的周期映射。如果 S 不是单连通的，该映射通常是多值的；对单值化取商后，便得到进入周期空间 $\Gamma\backslash D$的周期映射 。通常，周期映射不是满射，而是具有较高余维的映射。并且一般来说，周期空间没有代数结构。然而，Griffiths 猜想（在真情形下） [65] 周期映射的像是代数的，并且还具有包括 Griffiths丛是半丰丛在内的进一步性质。

13.1. 猜想。（Griffiths, [65] (10.5)“自守形式的存在性”）给定 $\phi\colon\ S \to \Gamma\backslash D$ 如上， S 的像 $\phi(S)$是一个代数簇。

Griffiths 证明了当像是紧的时该猜想成立，Sommese 随后证明了当奇点是孤立的时该猜想也成立。

与极化霍奇结构变分 V相关的霍奇轨迹 $\mathrm{HL}(S,\ V) \subset S$ 是满足以下条件的点$s \in S$ 的集合：对于 V_s，出现了例外霍奇张量（即相对于霍奇分解具有纯型的 $\mathbb{Z}$-类）。容易看出，轨迹 $\mathrm{HL}(S,\ V)$ 是 S中不可约复解析子簇的可数并，称为与 V相关的 S 特殊子簇 。如果 $V = R^k f_* \mathbb{Q}$ 对于一个光滑适当态射 $f\colon\ \mathcal{X} \to S$，霍奇猜想意味着 V_s 中的例外霍奇张量来自某个积 $\mathcal{X}_s^N$中的例外代数循环。由此可以推得， S 的每个特殊子簇（霍奇轨迹的分支）都是代数的。Cattani-Deligne-Kaplan [29],无条件地证明了这一性质，这一开创性结果被视为支持霍奇猜想的重要证据。

13.2. 定理。(Cattani-Deligne-Kaplan [29])与 V 相关联的 S 的特殊子簇都是代数的，也就是说，霍奇轨迹 $\mathrm{HL}(S, V)$ 是 S 中可数个闭不可约代数子簇的并。

如果 S 是志村簇，那么霍奇轨迹恰好是特殊子簇的轨迹，并且（通常）是由有理数域 $\mathbb{Q}$上定义的可数无穷个代数子簇组成。霍奇轨迹的分支通常是否由 $\mathbb{Q}$ 定义（当变分由该域定义时），仍是一个未解问题。根据 [76] ，一般而言，这可由零维分支的结果推出。因此，尽管“不太可能的交”框架和 Zilber-Pink猜想（包括 André-Oort猜想）已推广到光滑复拟射影基底上（可容许、分级极化的）混合霍奇结构变分的霍奇轨迹 [75],，迄今的研究结果主要涉及几何方面，其中 Ax-Schanuel结果发挥着重要作用。

14 o-极小性与霍奇理论。o-极小方法在霍奇理论中的潜在用途，很早便在其发展过程中得到强调，因为这一框架能够容纳诸如对数函数这样的映射；这些映射既不是代数的，在奇点处也不是半解析的：参见 [46] 和 [127]中的相关评论。然而，似乎只有在 Peterzil-Starchenko 发展出这些框架下的复几何、提出他们的“可定义 Chow 定理”，并由 Jacob 及其合作者将其深入发展为“o-极小 GAGA”之后，更深层次的应用才得以实现。

首先我们回到可定义性问题。周期空间是一个（在 $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ 中）可定义的流形，但由霍奇结构变分给出的映射进入该空间时具有高度超越性。在 [12], 中，Bakker-Klingler-Tsimerman 证明了周期映射是可定义的（在$\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ 指数中）。

版权所有 © 2026 本文的版权归作者所有

14.1. 定理。 (Bakker-Klingler-Tsimerman [12])设 V 是定义在光滑复拟射影簇 S上的权为 k 的极化纯霍奇结构变分。设 $\Phi_S\colon\ S \to \Gamma\backslash D$ 是与 V相关联的周期映射，其中 Γ 是一个包含单值化的（整齐）算术群。那么 Φ_S 在 $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ 指数中是可定义的。

这是一个精妙的结果，其关键依赖于 Schmid SL_2-轨道定理 [126] 以及霍奇范数的渐近性质。作为可定义性结果和 Peterzil-Starchenko 的“可定义 Chow 定理”的直接推论，他们得到了霍奇轨迹代数性的另一种证明（Cattani-Deligne-Kaplan 定理）。Bakker-Brunebarbe-Klingler-Tsimerman [10] 将霍奇位点分支的可定义性和拟射影性推广到了混合周期映射的情形（从而重新得到 Brosnan-Pearlstein-Schnell [28]将 Cattani-Deligne-Kaplan 定理推广到这一情形的结果）。

证明 Griffiths 猜想需要在 o-极小语境中发展一种 GAGA 原理，作为 Serre 开创性 GAGA [129]的类比。Bakker-Brunebarbe-Tsimerman 在 [8],中完成了这一工作，并为 o-极小语境提供了一种灵活而强大的工具。

14.2. 定理。 (Bakker-Brunebarbe-Tsimerman [8])。 设 $\mathcal{R}$ 是实数域上的一个 *o*-极小结构。设X 是 $\mathbb{C}$上的有限型分离代数空间， X^{def} 是与之关联的可定义解析空间。那么可定义化函子 $(-)^{\mathrm{def}}\colon \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{def}})$ 是全忠实且正合的，其本质像对子对象和商对象封闭。

因此，特别地，代数凝聚层的可定义凝聚子层都是代数的。

请注意， X 不要求在 $\mathbb{C}$上是真，但与 Serre 的经典 GAGA 不同，并非每个可定义凝聚层都是代数的。关于混合情形的推广，见 [7]。

结合 o-极小 GAGA 与 Artin 的代数化定理，作者证明了代数簇的真可定义像是代数的。这使他们得以推导出周期像是代数的，从而证实了Griffiths的猜想。

14.3. 定理。(Bakker-Brunebarbe-Tsimerman [8]) 设 X 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的有限型约化分离代数空间，且 $\phi\colon X^{\mathrm{an}} \to \Gamma\backslash D$ 是一个周期映射。那么

(1) ϕ 唯一地分解为 $\phi = \iota \circ f^{\mathrm{an}}$，其中 $f\colon\ X \to Y$ 是约化有限型代数空间之间的支配映射，而 $\iota\colon\ Y^{\mathrm{an}} \to \Gamma\backslash D$ 是解析空间的闭浸入；

(2) 限制在 Y 上的 *Griffiths* $\mathbb{Q}$-丛 L 是某个丰代数 $\mathbb{Q}$-丛的解析化；特别地， Y 是一个准射影簇。

除了阐明变分霍奇理论的基础方面之外，这些结果还推动了进一步的重要进展。其中包括构造周期像的环面紧化（Deng-Tsimerman [40]）和 Baily-Borel 紧化（Bakker-Filipazzi-Mauri-Tsimerman [11]），并得到相应的丰性结果；在经典情形下，这两种紧化对于算术商都是至关重要的对象。后者还通过 b-半丰性猜想，在双有理几何方面具有重要应用。此外，线性 Shafarevich 猜想得到证实，并为任意簇构造了代数 Shafarevich 态射（Bakker-Brunebarbe-Tsimerman [9]）。

15 其他工作。 Jacob 还有许多其他精彩成果，我在此未予涉及；这些成果与引文中的工作并无直接联系。详见 arXiv 和 MatSciNet。

16 结论。 Jacob 的工作确实确立了 o-极小性作为霍奇理论和算术几何的重要基础：霍奇理论是温和的，其影响意义深远。

致谢。 衷心感谢 Ben Bakker 和 Jacob Tsimerman 对早期草稿提出意见并予以修正。其余所有错误和不当之处均由作者负责。本文写于我作为访问学者期间：先是在普林斯顿的高等研究院，随后是在雷霍沃特的魏茨曼科学研究所。非常感谢这两家研究所给予我的热情接待、卓越环境和慷慨的经费支持。在 IAS，我得到 Charles Simonyi 捐赠基金的支持；在 WIS，我得到 Magnus Konow 为纪念其母亲 Olga Konow Rappaport 而设立的研究资助，以及欧盟（ERC、SharpOS，101087910）的支持。

参考文献

[1] Y. Andr é，*G*-函数与几何，数学专题 E13，Vieweg，不伦瑞克，198 9.

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

[2]*Y. André*，《非模平面代数曲线上奇异模不变量对的有限性》，纯粹与应用数学杂志 *505 (1998)，203–208*。[3] *Y. André*、*P. Corvaja* 和 *U. Zannier*，附录作者 *Z. Gao*，《与阿贝尔概形截面相关的贝蒂映射》，*Invent. Math. 222 (2020)，161–202*。[4] *F. Andreatta*、*E. Goren*、*B. Howard* 和 *K. Madapusi Pera*，《具有复乘的阿贝尔簇的法尔廷斯高度》，数学年刊 *187 (2018)，391–531*。[5] *J. Ax*，《关于 *Schanuel* 猜想》，数学年刊 *93 (1971)，252–268*。[6] *J. Ax*，《微分代数几何若干主题 *I*：代数群的解析子群》，美国数学杂志 *94 (1972)，1195–120*。[7] *B. Bakker*、*Y. Brunebarbe* 和 *J. Tsimerman*，《混合周期映射像的拟射影性》，纯粹与应用数学杂志 *804 (2023)，1970-219*。[8] *B. Bakker*、*Y. Brunebarbe* 和 *J. Tsimerman*，《*o*-极小 *GAGA* 与 *Griffiths* 猜想》，*Invent. Math. 232 (2023)，163–228*。[9] *B. Bakker*、*Y. Brunebarbe* 和 *J. Tsimerman*，《拟射影簇的线性 *Shafarevich* 猜想及 *Shafarevich* 态射的代数性》，*arXiv:2408.16441 (2024)*。[10] *B. Bakker*、*Y. Brunebarbe*、*B. Klingler* 和 *J. Tsimerman*，《混合周期映射的可定义性》，*Journal of the European Mathematical Society 26 (2024)，2191-2209*。[11] *B. Bakker*、*S. Filipazzi*、*M. Mauri* 和 *J. Tsimerman*，《周期像的 *Baily-Borel* 紧化与 b-半丰沛猜想》，*arXiv:2508.19215 (2025)*。[12] *B. Bakker*、*B. Klingler* 和 *J. Tsimerman*，《算术商空间的温和拓扑与 *Hodge* 位点的代数性》，*Journal of the American Mathematical Society 33 (2020)，917-939*。[13]*B. Bakker* 和 *J. Tsimerman*，《霍奇结构变分的 *Ax-Schanuel* 猜想》，*Inventiones mathematicae 217 (2019)，77-94*。[14]*B. Bakker* 和 *J. Tsimerman*，《*Ax-Schanuel* 猜想讲义》，《对数对的算术几何与模空间的双曲性：蒙特利尔双曲性》，*M-H. Nicole* 编，*1-68*，*CRM* 短期课程，*Springer*，*2020*。[15]*B. Bakker* 和 *J. Tsimerman*，《周期的函数超越性与几何 *André-Grothendieck* 周期猜想》，*Forum of Mathematics Sigma 13 (2025)*，论文编号 *e97*。[16] *G. Baldi*、*B. Klingler* 和 *E. Ullmo*，《关于几何 *Zilber-Pink* 定理与 *Lawrence-Venkatesh* 方法》，*Expo. Math. 41 (2023)，718–722*。[17] *D. Bertrand*，《函数域上非等常椭圆曲线的 *Schanuel* 猜想》，《代数与分析应用的模型论》第一卷（*Newton* 研究所，剑桥，*2005*），*41-62*。*Z. Chatzidakis*、*D. Macpherson*、*A. Pillay* 和 *A. Wilkie* 编，*LMS* 讲义 *349*，*CUP*，剑桥，*2008*。[18] *Y. Bilu*、*D. Masser* 和 *U. Zannier*，《平面曲线上 *CM* 点的有效“*André* 定理”》，*Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 154 (2013)，145–152*。[19] *G. Binyamini*，《数域上的叶层点计数》，*Forum of Mathematics, Pi 10 (2022)，e6*。[20] *G. Binyamini*，《对数诺特函数》，*arXiv:2405.16963*。[21] *G. Binyamini* 和 *D. Masser*，《*Hilbert* 模簇中非紧曲线的有效 *André–Oort* 猜想》，*C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 359 (2021)，313–321*。[22] *G. Binyamini*、*D. Novikov* 和 *B. Zak*，《*Pfaff* 结构的 *Wilkie* 猜想》，数学年刊（第 *2* 辑） *199 (2024)，795–821*。

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

[23] G. Binyamini、H. Schmidt 和 A. Yafaev，志村簇中特殊点的伽罗瓦轨道下界：一种点计数方法，《数学年刊》**385**（2023），961–973。[24] D. Blázquez-Sanz、G. Casale、J. Freitag 和 J. Nagloo，*Ax–Schanuel* 的微分方法 *I*，arXiv:2102.03384 和《数学年刊》，待刊。[25] E. Bombieri、D. Masser 和 U. Zannier，曲线与乘法群的代数子群的交，国际数学研究通知 **1999**，1119–1140。[26] E. Bombieri、D. Masser 和 U. Zannier，异常子簇——结构定理及其应用，国际数学研究通知 **2007**，文章编号 rnm057，33页。[27] J.-B. Bost，阿贝尔簇的 *Arakelov*几何，算术几何会议论文集，技术报告，马克斯·普朗克数学研究所，波恩，第9651卷（1996）。[28] P. Brosnan、G. Pearlstein 和 C. Schnell，容许变分中 *Hodge*类的轨迹

$$f$$

混合Hodge结构，巴黎科学院数学报告 348 (2010), 657–660.[29] E. Cattani, P. Deligne, 和 A. Kaplan,《Hodge类的轨迹》，J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), 483–506.[30] K. C. T. Chiu，《混合Hodge结构变分的Ax-Schanuel》，Math. Ann. 391 (2025), 1681–1710.[31] K. C. T. Chiu，《混合周期映射的导数版Ax-Schanuel》，arXiv:2110.03489v3.[32] L. Clozel, H. Oh, 和 E. Ullmo，《Hecke算子与Hecke点的等分布》，Invent. Math.144 (2001), 327–351.[33] L. Clozel 和 E. Ullmo，《特殊子簇的等分布》，数学年刊 161 (2005), 1571–1588.[34] P. B. Cohen（现名 Tretkoff），《Siegel三维簇和 Hilbert 模簇上的双曲分布问题》，杜克数学杂志 129 (2005), 87–127.[35]G. E. Collins，《通过柱形代数分解对实闭域进行量词消去》，《自动机理论与形式语言》，第2届 G.I. 会议，Kaiserslautern，第134-183页，柏林，Springer-Verlag，1975.[36] P. Colmez,《具有复乘的阿贝尔簇的周期》，数学年刊 138 (1993), 625–683.[37] C. Daw，《通过 o-极小性证明安德烈–奥特猜想》，载于《o-极小性与丢番图几何》，129–158，G. O. Jones 和 A. J. Wilkie 编，伦敦数学会讲义系列 421，剑桥大学出版社，剑桥，2015.[38] C. Daw 和 M. Orr，《志村簇预特殊点的高度》，Math. Ann. 365 (2016), 1305–1357.[39] P. Deligne，《Shimura的工作》，Bourbaki研讨会，第23年（1970–71），报告389，数学讲义 244，123–165，Springer，柏林，1971.[40] H. Deng 和 J. Tsimerman，《周期映射的广义环面紧化》，arXiv:2506.10109 (2025).[41] L. van den Dries，《关于 Tarski 问题（$\mathbb{R}, +, \cdot, \exp$）的几点说明》，《逻辑学座谈会 ’82》，97–121，G. Lolli、G. Longo 和 A. Marcja 编，逻辑与数学基础研究 112，North Holland，阿姆斯特丹，1984.[42] L. van den Dries，《Tarski–Seidenberg定理的推广及若干不可定义性结果》，Bull. Am. Math. Soc. 15 (1986), 189–193.[43] L. van den Dries，《温和拓扑与 o-极小结构》，伦敦数学会讲义系列 248，剑桥大学出版社，剑桥，1998.

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

[44] *L. van den Dries, A. Macintyre,* 和 *D. Marker*，《带幂运算的受限解析域的初等理论》，数学年刊 *140 (1994), 183–205.*[45] *L. van den Dries* 和 *C. Miller*，《带受限解析函数的实指数域》，以色列数学杂志 *85 (1994), 19–56.*[46] *L. van den Dries* 和 *C. Miller*，《几何范畴与 *o*-极小结构》，杜克数学杂志 *84 (1996), 497–540.*[47] *L. van den Dries* 和 *P. Speissegger*，《带多重可和级数及指数函数的实数域》，*Proc. London Math. Soc. (3) 81 (2000), 513–565.*[48] *S. J. Edixhoven*，《两个模曲线乘积上的特殊点》，*Compos. Math. 114 (1998), 315–328.*[49] *S. J. Edixhoven*，《模曲线乘积上的特殊点》，杜克数学杂志 *126 (2005), 325–348.*[50] *S. J. Edixhoven, B. J. J. Moonen,* 和 *F. Oort*，《代数几何中的未决问题》，*Bull. Sci. Math. 125 (2001), 1–22.*[51] *G. Faltings*，《数域上阿贝尔簇的有限性定理》，*Invent. Math. 73 (1983), 349–366.*[52] *G. Faltings*，《阿贝尔簇上的丢番图逼近》，数学年刊 *133 (1991), 549–576.*[53] *C. Frei, E. Sofos, M. Widmer*，《拟黎曼猜想在类群和数域小生成元中的若干应用》，*arXiv:2610.18491v1*，*2026*年*10*月*13*日.[54] *A. Gabrielov*，《半解析集的投影》，*Funct. Anal. Appl. 2 (1968), 282–291.*[55] *Z. Gao*，《迈向混合志村簇的安德烈–奥特猜想：*Ax–*林德曼定理与特殊点伽罗瓦轨道的下界》，纯粹与应用数学杂志 *732 (2017), 85–146.*[56] *Z. Gao*，《扩张的混合 *Shimura*簇、双代数系统及若干 *Ax*型超越性结果》，*Forum Math. Sigma 7 (2019), e16, 65pp.*[57] *Z. Gao*，《泛阿贝尔簇上的混合*Ax–Schanuel*及其若干应用》，*Compos. Math. 156 (2020), 2263–2297.*[58] *Z. Gao*，《贝蒂映射的泛秩与不太可能的交》，*Compos. Math. 156 (2020), 2469–2509.*[59] *Z. Gao* 和 *P. Habegger*，《阿贝尔簇族中的高度与几何*Bogomolov*猜想》，数学年刊 *189 (2019), 527–604.*[60] *Z. Gao* 和 *B. Klingler*，《混合*Hodge*结构变分的 *Ax–Schanuel*猜想》，*Math. Ann. 388 (2024), 3847–3895.*[61] *B. J. Green*，《关于 *Landau-Siegel*零点》，*https://hexagonmath.org/2610.00311v2.*[62] *P. A. Griffiths*，《代数流形上的积分周期。*I.* 模簇的构造与性质》，美国数学杂志 *90 (1968), 568–626.*[63] *P. A. Griffiths*，《代数流形上的积分周期。*II.* 周期映射的局部研究》，美国数学杂志 *90 (1968), 805–865.*[64] *P. A. Griffiths*，《代数流形上的积分周期 *III*》，*Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 38 (1970) 125-180.*[65] *P. A. Griffiths*，《代数流形上的积分周期：主要结果综述及未决问题讨论》，*Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1970) 228-296.*[66] *P. A. Griffiths, C. Robles,* 和 *D. Toledo*，《非经典旗域的商空间不是代数的》，*Algebraic Geometry 1 (2014), 1–13.*

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

[67]M. 格罗莫夫，《熵、同调与半代数几何》 /继 Y. Yomdin 之后/，Bourbaki研讨会，1985–86 年，第 663 讲，Astérisque 145–146（1987），225–240。[68] A. 格罗滕迪克，《一份计划草图》，《几何伽罗瓦作用》，第 1 卷：围绕格罗滕迪克的《一份计划草图》，重印本第 5–48 页，附英文译文第 243–283 页，L. 施内普斯和 P. 洛沙克编，伦敦数学会讲义 242，剑桥大学出版社，剑桥，1997。[69] S. 格鲁舍夫斯基、G. 蒙代洛、R. 萨尔瓦蒂·曼尼和 J. Tsimerman，《复阿贝尔簇模空间的紧子簇》，arXiv:2404.06009（2024）。[70] P. Habegger，《关于有界高度猜想》，国际数学研究通知 2009，860–886。[71]P. Habegger，《阿贝尔簇的子簇与余维数相同的代数子群的交》，Invent. Math. 176（2009），405–447。[72] P. Habegger，《模曲线上的弱有界高度》，《数学学报》Vietnam 35（2010），43–69。[73] D. R. 哈斯特，《幂零阿贝尔映射的函数超越性》，Algebra Number Theory 15（2021），1565–1580。[74] A. G. 霍万斯基，《少项式》，《数学专著译丛》88，AMS，普罗维登斯，罗得岛州，1991。[75]B. Klingler，《Hodge 位点与非典型交：猜想、动机与复乘》，苏黎世联邦理工学院暑期学校论文集，J. 弗雷桑、D. 杰切夫、P. 约森和 R. Pink 编，《数学进展丛书》，比克豪泽，即将出版。[76] B. Klingler、A. 奥特维诺夫斯卡和 D. 乌尔巴尼克，《Hodge 位点的定义域》，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.（4）56（2023），1299–1312。[77] B. Klingler、E. Ullmo 和 A. Yafaev，《双曲 Ax–Lindemann-Weierstrass 猜想》，Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 123（2016），333–360。[78] B. Klingler 和 A. Yafaev，《安德烈–奥特猜想》，数学年刊 180（2014），867–925。[79] J. 奈特、A. Pillay 和 C. Steinhorn，《有序结构中的可定义集 II》，Trans. Am. Math. Soc. 295（1986），593–605。[80] L. 屈内，《一个 André–Oort 类型的有效结果》，数学年刊 176（2012），651–671。[81] L. 屈内，《一个 André–Oort 类型的有效结果 II》，Acta Arith. 161（2013），1–19。[82] S. 朗，《曲线上的除法点》，Ann. Mat. Pura Appl.（4）70（1965），229–234。[83] S. 朗，《超越数导论》，Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1966。[84]B. 劳伦斯和 W. 索温，《阿贝尔簇中超曲面的沙法列维奇猜想》，arXiv:2004.09046。[85] B. 劳伦斯和 A. 文卡特什，《通过 p-进周期映射研究丢番图问题》，Invent. Math. 221（2020），893–999。[86] D. Marker，《模型论：导论》，《数学研究生教材》217，Springer-Verlag，纽约，2002。[87] D. Masser 和 G. 伍斯特霍尔茨，《阿贝尔簇的同源估计及有限性定理》，数学年刊 137（1993），459–472。[88] D. Masser 和 U. Zannier，《挠异常点与椭圆曲线族》，C. R. Acad. Sci. Paris，Ser. I 346（2008），491–494；以及 Am. J. Math. 132（2010），1677–1691。

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

[89] D. Masser 和 U. Zannier，《挠点、佩尔方程及初等项中的积分》，《数学学报》225（2020），1157–1213。[90] N. Mok、J. Pila 和 J. Tsimerman，《Shimura 簇上的 Ax-Schanuel》，《数学年刊》189（2019），945–978。[91] L. J. Mordell，《关于三次和四次不定方程的有理数解》，Math. Proc. Cambridge Philos Soc. 21（1922），179–192。[92] B. J. J. Moonen，《Shimura 簇的线性性质 I》，J. Algebraic Geom. 7（1998），539–567。[93] F. Oort，《S. Lang猜想》的“一般情形”，《丢番图逼近与阿贝尔簇》，117–122 页，S. J. Edixhoven 和 J.-H. Evertse 编，《数学讲义》1566，Springer，柏林，1993。[94] F. Oort，《典范提升与稠密的 CM 点集》，《算术几何》，科尔托纳，1994，228–234 页，F. Catanese 编，《数学研讨会》，XXXVII，剑桥大学出版社，剑桥，1997。[95] OpenAI，《阿贝尔Zilber–Pink猜想》，预印本，日期为 2026 年 9 月 24 日。[96] OpenAI，《排除 Landau–Siegel零点的一致性》，未标日期的预印本，于 2026 年 10 月 6 日公开。[97] OpenAI，《拟黎曼猜想》，预印本，日期为 2026 年 10 月 5 日。[98] OpenAI，《有理数域上的希尔伯特第十问题》，预印本，于 2026 年 10 月 6 日公开，2026 年 10 月 8 日更新。[99] F. Pazuki，《theta高度与法尔廷斯高度》，《法国数学会通报》140（2012），第 1 号，19–49。[100] Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《代数闭域在 o-极小结构中的扩张》，Sel. Math. New Ser. 7（2001），409–445。[101]Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《代数闭域的扩张 II：多变量函数》，J. Math. Logic 3（2003），1–35。[102] Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《Weierstrass $\wp$函数及一维广义环面的统一可定义性》，Sel. Math. New Ser. 10（2004），525–550。[103] Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《非标准情形中的复解析几何》，《应用于代数与分析的模型论》，117–165 页，Z. Chatzidakis、D. Macpherson、A. Pillay 和 A. J. Wilkie 编，伦敦数学会讲义系列 $\underline{3}49$，剑桥大学出版社，剑桥，2008。[104] Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《复解析几何与解析几何范畴》，纯粹与应用数学杂志 626（2009），39–74。[105]Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《温和复几何与 o-极小性》，国际数学家大会论文集，海得拉巴，2010，第 2 卷，58–81 页，R. Bhatia、A. Pal、G. Rangarajan、V. Srinivas 和 M. Vanninathan 编，新德里，Hindustan Book Agency，2010。[106]Y. Peterzil 和 S. Starchenko，《受限theta函数与阿贝尔簇族的可定义性》，杜克数学杂志 162（2013），731–765。[107] J. Pila，《次解析曲面的伸缩上的整数点》，Q. J. Math. 55（2004），207–223。[108] J. Pila，《可定义集上的代数点》，Selecta Math.（N.S.）15（2009），151–170。[109] J. Pila，《o-极小性与 $\mathbb{C}^n$的 André-Oort猜想》，数学年刊 173（2011），1779–1840。[110] J. Pila，《点计数与 Zilber-Pink猜想》，剑桥数学专著 228，剑桥大学出版社，剑桥，2022。

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

[111] *J. Pila*、*A. Shankar* 和 *J. Tsimerman*，附录由 *H. Esnault* 和 *M. Groechenig* 撰写，《志村簇上的典范高度与 *André-Oort*猜想》，*arXiv:2109.08788*（*2021*）。[112]*J. Pila* 和 *J. Tsimerman*，《阿贝尔曲面模空间上的 *André-Oort*猜想》，《数学汇刊》*149*（*2013*），*204-216*。[113] *J. Pila* 和 *J. Tsimerman*，《关于 $\mathcal{A}_g$ 的 *Ax-Lindemann*》，《数学年刊》*179*（*2014*），*659-681*。[114] *J. Pila* 和 *J. Tsimerman*，《*Ax-Schanuel* 与例外可积性》，*arXiv:2202.04023*（*2022*）。[115]*J. Pila* 和 *J. Tsimerman*，《*Ax-Schanuel* 与秩一黎曼-希尔伯特对应》，*arXiv:2610.09714*（*2026*）。[116] *J. Pila* 和 *A. J. Wilkie*，《可定义集的有理点》，《杜克数学杂志》*133*（*2006*），*591–616*。[117] *J. Pila* 和 *U. Zannier*，《周期解析集中的有理点与 *Manin-Mumford*猜想》，*Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei-Mat. Appl. 19*（*2008*），*149–162*。[118]*A. Pillay* 和 *C. Steinhorn*，《有序结构中的可定义集》，《法国数学会公报》*11*（*1984*），*159–162*。[119] *A. Pillay* 和 *C. Steinhorn*，《有序结构中的可定义集 *I*》，*Trans. Am. Math. Soc. 295*（*1986*），*565–592*。[120] *A. Pillay* 和 *C. Steinhorn*，《有序结构中的可定义集 *III*》，*Trans. Am. Math. Soc. 309*（*1988*），*469–476*。[121] *R. Pink*，《*André-Oort*、*Manin-Mumford* 和莫德尔-朗猜想的一个共同推广》，手稿日期为*2005*年*4*月*17*日，可从作者网页获取。[122] *M. Raynaud*，《阿贝尔簇上的曲线与扭点》，*Invent. Math. 71*（*1983*），*207–233*。[123] *M. Raynaud*，《阿贝尔簇的子簇与扭点》，《算术与几何》，第*1*卷，*327–352*，数学进展丛书*35*，*M. Artin* 和 *J. Tate* 编，比克豪泽，波士顿，*1983*。[124] *J. Robinson*，《算术中的可定义性与判定问题》，*J. Symb. Log. 14*（*1949*），*98–114*。[125]*J.-P. Rolin*、*P. Speissegger* 和 *A. J. Wilkie*，《拟解析*Denjoy-Carleman*类与 *o*-极小性》，《美国数学会杂志》*16*（*2003*），*751–777*。[126] *W. Schmid*，《霍奇结构变分：周期映射的奇点》，*Invent. Math. 22*（*1973*），*211–319*。[127] *W. Schmid* 和 *K. Vilonen*，《可构造层的特征循环》，*Invent. Math. 124*（*1996*），第*1-3*期，*451–502*。[128] *H. Schmidt*，《计数有理点与伽罗瓦轨道的下界》，*Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei-Mat. Appl. 30*（*2019*），*497–509*。[129] *J.-P. Serre*，《代数几何与解析几何》，*Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6*（*1955/56*），*1–42*。[130] *J.-P. Serre*，《算术教程》，数学研究生教材*7*，*Springer*，纽约，*1973*。[131] *G. Shimura*，《极化阿贝尔簇的解析族与自守函数》，《数学年刊》*78*（*1963*），*149–192*。[132] *G. Shimura*，《类域与代数曲线的ζ函数的构造》，《数学年刊》*85*（*1967*），*58–159*。

版权所有 © 2026 本文版权归作者所有

[133] *C. L. Siegel*，《辛几何》，美国数学杂志*65*（*1943*），*1–86*。重印版：学术出版社，纽约-伦敦，*1964*。[134] *C. Simpson*，《超越代数几何》，本卷。[135] *P. Speissegger*，《*o*-极小结构的 *Pfaffian* 闭包》，纯粹与应用数学杂志*508*（*1999*），*189–211*。[136] *A. Tarski*，《初等代数与几何的判定方法》，第*2*版，修订版，兰德公司，伯克利，*1951*。[137] *J. Tsimerman*，《算术环面的 *Brauer-Siegel* 定理与特殊点伽罗瓦轨道的下界》，美国数学会杂志*25*（*2012*），*1091–1117*。[138] *J. Tsimerman*，《*Ax-Schanuel* 与 *o*-极小性》，载于《*o*-极小性与丢番图几何》，*216–221*，*G. O. Jones* 和 *A. J. Wilkie* 编，伦敦数学会讲义系列*421*，剑桥大学出版社，剑桥，*2015*。[139] *J. Tsimerman*，《关于 $\mathcal{A}_g$ 的 *André-Oort*猜想》，《数学年刊》*187*（*2018*），*379–390*。[140] *E. Ullmo*，《双曲 *Ax-Lindemann* 定理的若干应用》，《数学汇刊》*150*（*2014*），*175–190*。[141] *E. Ullmo* 和 *A. Yafaev*，《特殊子簇的一个刻画》，*Mathematika 57*（*2011*），*263–273*。[142] *E. Ullmo* 和 *A. Yafaev*，《特殊子簇的伽罗瓦轨道与等分布：迈向 *André-Oort*猜想》，《数学年刊》*180*（*2014*），*823–865*。[143] *E. Ullmo* 和 *A. Yafaev*，《复乘环面的类数与特殊点伽罗瓦轨道的下界》，《法国数学会公报》*143*（*2015*），*197–228*。[144] *E. Ullmo* 和 *A. Yafaev*，《余紧情形下的双曲 *Ax-Lindemann*》，《杜克数学杂志》*163*（*2014*），*433–463*。[145] *A. J. Wilkie*，《用受限*Pfaff*函数和指数函数扩张实数有序域的模型完备性结果》，《美国数学会杂志》*9*（*1996*），*1051–1094*。[146] *A. Yafaev*，《*André-Oort*猜想：综述》，*L*-函数与伽罗瓦表示，*381–406*，*D. Burns* 和 *K. Buzzard* 编，第*381–406*页，伦敦数学会讲义系列*320*，剑桥大学出版社，剑桥，*2007*。[147] *Y. Yomdin*，《体积增长与熵》，《以色列数学杂志》*57*（*1987*），*285–300*。[148] *Y. Yomdin*，《 C^k-半代数映射的消解：对〈体积增长与熵〉的补充》，《以色列数学杂志》*57*（*1987*），*301–317*。[149] *X. Yuan* 和 *S.-W. Zhang*，《平均科尔梅兹猜想》，《数学年刊》*187*（*2018*），*533–638*。[150] *U. Zannier*，《算术与几何中不太可能的交问题》，附录由 *D. Masser* 撰写，《数学年刊研究丛书》*181*，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，*2012*。[151] *S.-W. Zhang*，《四元数*Shimura*簇上 *CM* 点的等分布》，国际数学研究通知*2005*，*3657–3689*。[152] *B. Zilber*，《指数和方程与 *Schanuel*猜想》，《伦敦数学会杂志》（*2*）*65*（*2002*），*27–44*。

美国普林斯顿高等研究院、以色列雷霍沃特魏茨曼
科学研究所，以及英国牛津大学数学研究所。

版权所有 © 2026 本论文的版权归作者所有