arXiv:2611.30652v1 [math.RA] 23 Nov 2026

实塞德尼翁零因子的湮灭子之间的主角

肖特·科比苏

摘要

实塞德尼翁的每个非零零因子都会湮灭一个实四维平面。我们确定了具有给定八元数乘积轴的两个此类平面之间可能出现的主角。若两条轴之间的夹角为 θ and $k = \cos(\theta/2)$，则四个主余弦为 (p, p, q, q)，其中 $k^2 \le p \le k$ and $0 \le q \le p$。对于每一对固定的轴，该区域中的每一点都能实现。对于指定的一对零因子，我们给出一个关于两个混合不变量的二次公式。一种显式变形在保持两个四元数子代数及两条轴之间夹角不变的同时，改变湮灭子的主角。对零因子锥进行度量投影，可将这些公式转移到左乘法的最小奇异子空间。

1 固定轴问题

将一个非零零因子写成 $z = (u,\ v)$，其中 $\mathbb{S} = \mathbb{O} \oplus \mathbb{O}$。其分量是长度相等且相互正交的虚八元数。它们的乘积确定了一个单位虚八元数 $c_z = uv/|uv|$，我们称之为 z 的轴。令 $K_z = \{y \in \mathbb{S} :\ zy = 0\}$。对于单位零因子，左乘法 L_z 的奇异值平方分别为 0、1、2，其重数分别为 4、8、4 [1, 命题 7。4]。因此，每个因子单独的奇异值无法提供 K_z 与 K_w相对位置的任何信息。

对于两个实四维平面，我们在 $[0, \pi/2]$ 中按递增顺序排列它们的主角。它们的余弦值是两个标准正交基 [2]的内积矩阵的奇异值。特别地，它们反映了交维数（1 的重数）和正交性（所有余弦值均为零）。

定理 1（固定轴下的精确范围）。
固定单位元 c、$d \in \operatorname{Im} \mathbb{O}$，并令 $k = \sqrt{(1 + \langle c, d \rangle)/2}$。当 z、w 在满足 $c_z = c$ 和 $c_w = d$ 的单位零因子中变化时，K_z、K_w 的有序主余弦恰好遍历

$$\big\{(p, p, q, q) :\ k^2 \le p \le k, \quad 0 \le q \le p\big\}. \tag{1}$$

特别地，湮灭子正交等价于轴互为对跖。在垂直轴的情况下，最小主角的范围为 $\pi/4$ 至 $\pi/3$，而最大主角可达到 $\pi/2$。

2 湮灭子及其复结构

我们采用倍增约定

$$(a, b)(x, y) = (ax - \bar{y}b,\ ya + b\bar{x})$$

在每个凯莱–迪克森步骤中，以及两个直和项上的欧几里得内积。Biss、Christensen、Dugger 和 Isaksen 确定了 $L_z^* L_z$ [1, Thm. 7.2, Prop. 7.4] 的特征子空间。Reggiani 研究了归一化零因子

轨迹以及满足 $zw = 0$ [5] 的归一化对。Guterman 和 Zhilina 使用 Im $\mathbb{O}$ [3] 中的直线描述了零乘积图的连通分支。我们的对 z, w 是任意的，而定向轴区分了相等轴与对跖轴。Im $\mathbb{O}$ 中结合平面的主角出现在 Jost、Xin 和 Yang [4,Sec. 3] 的工作中。第 5 节给出了一个使这些平面本身保持不变的族。

令 H_z 为由 u、v 生成的四元数子代数。对于单位 $c \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$，记作$J_c h = ch$。当 $c = c_z$ 时，这个正交复结构保持 H_z 和 $H_z^{\perp}$ 不变。定义等距映射

$$F_c(h) = 2^{-1/2}(h, -J_c h), \qquad h \in \mathbb{O}.$$

[1, 命题 7.4], 的图公式在对 z 进行实数缩放后保持不变，写作

$$K_z = F_{c_z}(H_z^{\perp}). \tag{2}$$

在 ($\mathbb{O}$、J_c) 上，我们使用厄米内积 $[h, g]_c = \langle h、\ g\rangle + \mathrm{i}\langle J_c h、\ g\rangle$，其对 g 为线性的。令 $V_c = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1、\ c\}^{\perp}$。这是由 1 生成的复直线的复正交补。

引理 2。 对于固定的 c，满足 $c_z = c$ 的空间 $H_z^{\perp}$ 遍历复三维空间 V_c 中的所有复二维平面。

证明。 V_c 中的一个复二维平面在其中的复正交补由某个单位元 $a \in V_c$ 生成。元素 c、a 生成结合子代数 $H = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1、\ c、\ a、\ ca\}$。元素 $z = (a、\ ca)/\sqrt{2}$ 是一个单位零因子，且 $a(ca) = c$ 于 H 中。因此， $H_z = H$ 具有所规定的正交补。反之由 1、$c \in H_z$ 和 $J_c H_z = H_z$ 可得。 □

两个环境图之间的比较映射为

$$T = F_c^* F_d = \tfrac{1}{2}(I - J_c J_d), \qquad T J_d = J_c T, \qquad T^* T = k^2 I. \tag{3}$$

事实上， $J_c^* = -J_c$，而对虚数 x 的 $J_x^2 = -|x|^2 I$进行极化可得 $J_c J_d + J_d J_c = -2\langle c,\ d\rangle I$。特别地， $J_c J_d$ 通过 $h \mapsto c(dh)$作用，括号位置如所示。对于$k > 0$， $U = T/k$是从($\mathbb{O}$， J_d)到($\mathbb{O}$，J_c)的酉映射。

3 值域定理的证明

令 P_M 表示到 M上的实正交投影。当 M 是复子空间时，它也为厄米投影。记 $A = H_z^{\perp}$、 $B = H_w^{\perp}$。根据（2），所求的实主余弦是 $P_A T|_B$的奇异值。该映射是复线性的，因此每个复奇异值在 $\mathbb{R}$上出现两次。若 $k = 0$，则（3）给出（1）中的单元素。以下均假设 $k > 0$。

引理3。 $D = P_{V_c} U|_{V_d}$ 的复奇异值为1、1和 k。

证明。 在复四维空间（$\mathbb{O}$， J_c）中，超平面 V_c和 UV_d的单位法向量分别为1和 $U1$。由于 $T1 =$ （$1 - cd$）/2，其实部为 k^2，且沿 c的分量为零。因此 $[1, U1]_c = k$。两个复超平面之间的投影在它们的公共部分上是等距的。在由独立单位法向量张成的复二维空间中，它们的垂直单位方向的内积绝对值等于法向量的内积绝对值。这对 $k < 1$给出1、 1、 k。当 $k = 1$时，两个超平面重合。 □

定理 *1* 的证明。 根据引理 2，两个复平面 $A \subset V_c$ 和 $B \subset V_d$ 可以独立选取。根据引理3，我们可以使用奇异基，并将 D 视为

diag(1，1，k) 作用于 $\mathbb{C}^3$ 上。所需的复余弦是 k 乘以 $P_A D|_B$ 的奇异值。

后两个奇异值均不超过 1。由于 D 可逆，复二维平面 B 和 $D^{-1}A$ 的交集是一条直线或一个平面。对于交集中的任意单位元 x，$\|P_A Dx\| = \|Dx\| \geq k$。因此，较大的奇异值至少为 k。

反过来，给定 $k \leq s \leq 1$ 和 $0 \leq r \leq s$。取一个单位元 $v \in$ 张成$\mathbb{C}\{e_2, e_3\}$，使得$\|Dv\| = s$；通过在 e_2 和 e_3之间连续变化即可实现。取 $B =$ 张成$\mathbb{C}\{e_1, v\}$。在目标空间中令 $f = Dv/s$，并选取一个同时垂直于 e_1 和 f的单位元 g。令

$$A = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{f,\ re_1 + \sqrt{1-r^2}\, g\}.$$

在所示的标准正交基下，v, e_1 的投影像相互正交，长度分别为 s, r。乘以 k后，在整个 (1) 式中（包括边界）均有 $(p, q) = (ks, kr)$。

□

该证明是子矩阵奇异值交错在二维平面情形下的实例 [6]。八元数输入确定了三个环境奇异值，并通过实际的单位十六元数零因子实现了每个源平面和目标平面。

4 恢复指定对的角度

下面的公式使用来自输入四元数子代数的向量。每列只需计算两个复内积。选取单位 $a \in H_z \cap V_c$、$b \in H_w \cap V_d$，其中 $c = c_z$、$d = c_w$。例如，可以取每个零因子的归一化首个八元数分量。令 $(e_1, e_2) = (1, a)$ 以及 $(f_1, f_2) = (1, b)$。定义

$$M_{ij} = [e_i, T f_j]_c, \qquad S = \sum_{i,j=1}^{2} |M_{ij}|^2, \qquad P = |\det M|^2. \tag{4}$$

这些元素可以直接根据标记的四元数标架计算。对于 $e = e_i$和 $f = f_j$，展开式（3）得到

$$2M_{ij} = \langle e, f\rangle + \langle ce, df\rangle + \mathrm{i}\big(\langle ce, f\rangle - \langle e, df\rangle\big).$$

特别地 $M_{11} = k^2$。其他元素记录了涉及这两个标记标架的内积。

定理 4（成对公式）。
对于给定的一对，每个复维度计数一次的两个主余弦为

$$p^2 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}, \qquad q^2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}. \tag{5}$$

标量 S、P与 a、b 的选择无关，并且在同时进行八元数自同构时保持不变。

证明。所显示的基对于 H_z、H_w是酉的，因此 M表示 $P_{H_z} T|_{H_w}$。若$k > 0$，则将酉矩阵 U 相对于 $H_w \oplus H_w^{\perp}$ 和$H_z \oplus H_z^{\perp}$分解为方块，并将这些方块记为 U_{ij}。酉性给出

$$U_{11}U_{11}^{*} = I - U_{12}U_{12}^{*}, \qquad U_{22}^{*}U_{22} = I - U_{12}^{*}U_{12}.$$

由于 U_{12} 是方阵，等式两边具有相同的谱。因此，$M = kU_{11}$ 的奇异值与 kU_{22}的奇异值相同，而这些奇异值决定了湮灭子角。对于$k = 0$，T的两个块均为零。$M^{*}M$ 的特征多项式为 $X^2 - SX + P$。酉基变换保持这两者不变。八元数自同构保持乘法和实内积，因而保持（4）中的每一个构造。

□

推论 5（相同的子代数与相同的轴）。 如果 $H_z = H_w$，则四个主角均等于$\tfrac{1}{2}\arccos\langle c, d\rangle$。 如果 $c = d$，则余弦为（1、1、 m、 m），其中 $m = |[a, b]_c|$。特别地，对于相同的轴和子代数，交维数等于4；对于相同的轴和不同的子代数，等于2；对于不同的轴，等于0。

证明。 在第一种情况下，公共正交补同时被两个复结构保持，因而也被 T 保持。式 (3) 给出四个余弦 k。在第二种情况下， $T = I$ 和 $M = \mathrm{diag}(1,\ [a, b]_c)$。当且仅当 a， b 在 V_c 中生成同一条复直线时， $m = 1$。对于不同的轴 $p \le k < 1$。 □

5 具有固定四元数子代数的 Adeformation

从未标记的子代数和轴角中，可以读出 (4) 的多少内容？即使知道它们的联合信息，仍然存在连续的不确定性。

命题 6。 存在固定的 H、 $H' \subset \mathbb{O}$ 和轴 $c_t \in H$、 $d \in H'$，满足 $c_t \perp d$ *for* $0 \le t \le \pi/2$，使得

$$p^2 = (1 + \cos t)/4, \qquad q^2 = (1 - \cos t)/4. \tag{6}$$

在这一族中， $S = 1/2$ 始终成立，并且 $P = \sin^2(t)/16$。

证明。 将四元数与 $ij = k_0$ 倍增以构成 $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\ell$，使用第 2 节的乘法以及 $h\ell = (0,\ h)$。选择

$$H = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, i, j, k_0\}, \quad H' = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, i, \ell, i\ell\}, \quad c_t = i\cos t + j\sin t, \quad d = \ell.$$

引理 2 通过单位零因子实现了这些标记的子代数。在 $H^{\perp}$ 的有序实基 $(\ell,\ i\ell,\ j\ell,\ k_0\ell)$ 和 $(H')^{\perp}$ 的有序实基 $(j,\ k_0,\ j\ell,\ k_0\ell)$ 中，倍增得到矩阵

$$2P_{H^{\perp}}T|_{(H')^{\perp}} = \begin{pmatrix} -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 1 & 0 \\ -\cos t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例如 $J_d j = -j\ell$，因此 $2Tj = j - (\sin t)\ell - (\cos t)k_0\ell$。投影后得到第一列。将列 (1，4) 和 (2，3) 分组可得到两个正交块。将所显示的矩阵除以二后，每个块的奇异值平方的和为 $1/2$，乘积为 $\sin^2(t)/16$，从而得到 (6)。 □

在 $t = 0$ 处，实角为 $(\pi/4,\ \pi/4,\ \pi/2,\ \pi/2)$。在 $t = \pi/2$ 处，它们全都是 $\pi/3$。这些子代数始终交于 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1,\ i\}$。移动的轴相对于这条公共虚直线改变其位置。特别是，轴角以及四元数子代数之间的所有主角加在一起，仍不足以确定湮灭子角。

6 零因子锥附近的最小奇异方向

设 Z 为包含其顶点的零因子锥。对于 $x = (a_0 + u,\ b_0 + v)$，其中 $a_0,\ b_0 \in \mathbb{R}$ 且 $u,\ v \in \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$，设 $B_x = [u\ v]$ 为 $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ 的一个标准正交基。记 E_x 为 $L_x^* L_x$ 在其最小特征值处对应的特征子空间。

命题 7。 如果 B_x 的秩为二，则 x 在 Z 中有唯一的欧几里得最近点 $z(x)$。其所有实部均为零，且其虚部矩阵为

$$B_{z(x)} = \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2) B_x (B_x^{\mathsf{T}} B_x)^{-1/2},$$

其中 $s_1 \geq s_2 > 0$ 是 B_x 的奇异值。此外

$$E_x = K_{z(x)}, \qquad \operatorname{dist}(x, Z)^2 = a_0^2 + b_0^2 + \tfrac{1}{2}(s_1 - s_2)^2.$$

证明。 Z 中的虚矩阵具有 tQ 的形式，其中 $Q^{\mathsf{T}} Q = I_2$ 和 $t \geq 0$。在最小化 $\|B_x - tQ\|_F^2$ 时，$\operatorname{tr}(Q^{\mathsf{T}} B_x)$ 的最大值为 $s_1 + s_2$。事实上，对于瘦奇异值分解 $B_x = U \operatorname{diag}(s_1,\ s_2) V^{\mathsf{T}}$，它是 QV 和 U 对应单位列向量内积的正权和。取等要求 $QV = U$，由此确定唯一的最优标架。对剩余二次项进行最小化，得到 $t = (s_1 + s_2)/2$ 以及所述距离。

根据 [1, 命题 3.10 和定理 7.2], $E_x = F_c(H^{\perp})$，其中 H 由 $u,\ v$ 生成，且 $c = \operatorname{Im}(uv)/|\operatorname{Im}(uv)|$。由于 [1] 中的叉积为 $\operatorname{Im}(u\bar{v})$，符号与 (2) 一致。将 B_x 右乘一个正定二阶矩阵会保持其定向列空间。因此，它也保持 H 和 c，因为 $(u,\ v) \mapsto \operatorname{Im}(uv)$ 在虚输入上是交替双线性的。由此得到 $z(x)$ 的同一图像。 □

因此，对于两个秩为二的输入 $x,\ y$，定理 4 根据它们的虚部列计算 $E_x,\ E_y$ 的主角。作为示例，取命题 6 中的任意零因子，并分别向每个零因子的第一个八元数分量加入一个非零实标量。根据 [1,命题 3，10], 左乘法随后具有严格为正的最小奇异值，而最小奇异方向仍遵循（6）中的完整变化。对于秩至多为一的输入，所有奇异值都相等 [1, 命题 3.10 和 7。1]此时，最小奇异空间的维数为十六。

参考文献

[1] D. K. Biss、J. D. Christensen、Dugger 和 D. C. Isaksen, 《凯莱–迪克松代数的特征理论》, *Forum Math.***21** （2009）, 833–851。[2] Å. Björck 和 G. H. Golub, 《计算线性子空间之间夹角的数值方法》, *Math. Comp.***27** （1973）, 579–594。[3] A. E. Guterman 和 S. A. Zhilina, 《十六元数代数的关系图》, *J.Math. Sci.* **255**（2021）, 254–270。[4] J. Jost、Y.Xin 和 L. Yang, 《具有常Jordan角的子流形与 Lawson–Osserman 锥的刚性》, *Asian J. Math.* **22** （2018）, 75–110。[5] S. Reggiani, 《十六元数零因子的几何》, arXiv:2411.18881（2024）。[6] R. C. Thompson, 《主子矩阵 IX. 子矩阵奇异值的交错不等式》, *Linear Algebra Appl.* **5** （1972）, 1–12。