arXiv:2611.30663v1 [math.AP] 23 Nov 2026

标量守恒律的时间局部二次泛函

EGOR BAITENOV 和 STEFANO MODENA

Abstract. 我们为标量守恒律构造了一个 Glimm 型泛函。该泛函关于初始数据的全变差是二次的，能够控制相互作用过程中波前速度的变化。与文献中已有的具有类似性质的泛函不同，它完全是时间局部的，也就是说，它仅取决于（近似）解的当前剖面，而不取决于其过去或未来的演化。

1. Introduction

考虑 $n \times n$ 守恒律系统

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

对于未知量 $u\colon\ [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$，其初始数据

$$u|_{t=0} = \bar{u}. \tag{2}$$

这里的通量函数

$$f : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{3}$$

光滑，且二阶导数一致有界，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集，并且 f 仅假设为严格双曲。[1] 我们将不对[2] 施加任何 f 类似凸性的假设。在 Bianchini–Bressan [6], 理论下，存在一个子集$\mathcal{D} \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\ \mathbb{R}^n)$，其中包含所有全变差充分小且左状态为 $u(-\infty)$ 属于给定紧集 $K \subset\Omega$ 的有界变差映射，以及一个 Lipschitz 半群

$$S\colon [0,+\infty) \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \quad (t,\bar{u}) \mapsto S_t\bar{u},$$

使得对于每个 $\bar{u} \in \mathcal{D}$, $u(t,\ x)\colon = (S_t\bar{u})(x)$ 是方程 1) 的消失黏性解，其初始数据为（2）。

本文（针对标量守恒律，$n = 1$）以及配套论文 [2]（针对守恒律系统，$n \geqslant 1$）的主要目标，是证明以下定理。此处暂以相当非正式的方式表述（与下述各点（i）–（iv）相对应的严格表述将在后面的定理 2.8–2.10和2.13中分别给出）。

主定理。 存在一个局部时间泛函

$$\Upsilon\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},$$

使得

Date:2026年11月24日。[1] *Strict hyperbolicity* 表示矩阵 $\nabla f(u)$ 具有 n 互异实特征值 $\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_n(u)$，对每个 $u \in \Omega$ 均成立。[2]例如，真正非线性（GNL）或线性退化（LD）。

(i) 二次界：$\Upsilon(u) = \mathcal{O}(1)\mathrm{TV}(u)^2$ *(*即 Υ 关于其自变量的全变差是二次的*)*，[3]*(ii)* 相互作用估计：每次波前之间发生相互作用时，Υ 都会减小，且其减小量界定了参与相互作用的波前的速度变化；*(iii)* 持续性：$\Upsilon(S_t u) = \Upsilon(u)$，若 u 是分段常数（跃变在空间上均匀分离），且 t 足够小。

此外，
(iv) Υ 满足以下附加性质：逼近性质、对黎曼割的单调性、李雅普诺夫性质、下半连续性、对状态曲线扰动的稳定性，以及对状态曲线重新参数化的不变性。

“波前之间的相互作用”和速度变化”这两个概念将在第1.1 节作非正式介绍，并在第2.3 节作严格定义。

文献中已有满足上述第（i）、（ii）和（iii）点某种形式的守恒律系统二次泛函（[1, 9, 10,11, 21]）。我们的泛函的主要新颖之处在于它局部依赖时间。下文第1.4 节将讨论“局部依赖时间”这一表述的含义及其重要性。

第（iv）点列出的附加性质，也是 Υ 的时间局部性所带来的结果（尽管并非显然）。

本文针对标量情形（即 $n = 1$）建立理论，定义局部时间泛函 Υ 并证明其满足上述要点（i）–（iii）。在姊妹论文 [2], 中，我们针对任意 n建立一般理论，将 Υ的定义推广到系统情形，并证明上述所有要点（i）–（iii）以及（iv）。[4]

我们选择将标量分析与系统分析分开，是因为我们构造的主要思想纯粹是标量的。推广到系统本质上是将这类标量思想与众所周知的相互作用估计相结合。因此，我们希望本文这篇标量论文能够以尽可能清晰的方式阐明构造的核心；否则，在系统情形下，这些核心可能会隐藏在技术细节之后。

在本引言的其余部分，我们将讨论相互作用估计和相互作用泛函在双曲守恒律系统理论中的相关性，并特别强调局部时间泛函的重要性。尽管本文其余部分只讨论标量情形，但在本引言中，我们仍将讨论保持在一般系统层面。

1.1.基本问题：估计近似解中的相互作用。在双曲守恒律解的分析中，核心问题之一是理解由于通量 f 的非线性，不同波前之间的相互作用如何影响波的强度或速度。

更确切地说，假设给定一个近似解 u^ε，例如通过波前跟踪或 Glimm格式构造，其中 ε表示近似参数。这样的近似解由

---

[3]（标准）记号 $A = \mathcal{O}(1)B$，$A \leqslant \mathcal{O}(1)B$ 表示 $A \leqslant CB$ 存在某个常数$C > 0$，它仅取决于（式1）中的通量函数。[4]请注意，（iv）中列出的性质在标量情形下也成立 $n = 1$（见第2.6节），但我们直接在一般系统情形下证明这些性质 $n \geqslant 1$，见 [2]。

（局部）有限个波前组成，它们在离散点集 $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，$P_j = (t_j,\ x_j)$ 处相互作用，这些点位于（$t,\ x$）平面内。我们将以不严格的方式使用术语波前，指黎曼问题的解（或近似解）。在每个相互作用点 P_j，参与相互作用的波前会发生强度和速度的变化，我们分别用 Δs（表示强度变化）和 $\Delta\sigma$（表示速度变化）来记。稍后将给出这些量的精确定义（至少在标量情形下）。为简单起见，我们还假设 $t_j \neq t_{j'}$ 当且仅当 $j \neq j'$，即每个时刻至多发生一次相互作用。

在近似解中“估计相互作用”的问题，本质上在于证明形如

$$\sum_j \Delta s(P_j) \leqslant C(f, \mathrm{TV}(\bar{u})), \tag{4a}$$

$$\sum_j \Delta\sigma(P_j) \leqslant C(f, \mathrm{TV}(\bar{u})), \tag{4b}$$

其中 $C(f,\ \mathrm{TV}(\bar{u}))$ 表示一个常数，它取决于通量 f 和初始数据 $\bar{u}$ 的全变差，但与近似参数 ε 无关。

第一个估计（关于强度变化的估计）对于证明例如近似解的全变差具有（关于 ε一致的）界至关重要，从而可得 L^1 紧性。第二个估计（关于速度变化的估计）一方面与确定性版本的 Glimm 格式 [17, 12]的一致性有关；另一方面，它也有助于获得额外的紧性性质，我们将在第1.4 节对此作更详细的讨论。

现在我们给出标量情形下相互作用过程中强度变化 $\Delta s(P_j)$ 和速度变化 $\Delta\sigma(P_j)$ 的定义（在系统情形下，定义更为技术化）。固定 (t,x) 平面上的一点 P_j，不同波前在此发生相互作用，见图 1(a)–1(b)。不失一般性，可以假设相互作用前有两个波前，分别连接 u^L 与 u^M、u^M 与 u^R，其中 u^L、u^M、$u^R \in \mathbb{R}$；相互作用后则只有一个波前连接 u^L 与 u^R。

存在两种基本情形：两个相互作用的波前具有相同符号（不妨设 $u^L \leqslant u^M \leqslant u^R$），或者具有相反符号（不妨设 $u^L \leqslant u^R \leqslant u^M$），见图 1(c)–1(d)。

相互作用前后强度的变化为

$$\Delta s(P_j) := \Delta s(u^L, u^M, u^R),$$

其中

$$\Delta s(u^L, u^M, u^R) := |u^L - u^M| + |u^M - u^R| - |u^L - u^R| \tag{5}$$

即相互作用前后全变差的（局部）差值。注意，在标量情形下，对于同号相互作用，$\Delta s(P_j) = 0$；而对于异号相互作用，$\Delta s(P_j) \geqslant 0$（这在系统情形下不再成立）。

相互作用过程中速度变化是以下量

$$\Delta\sigma(P_j) := \Delta\sigma(u^L, u^M, u^R),$$

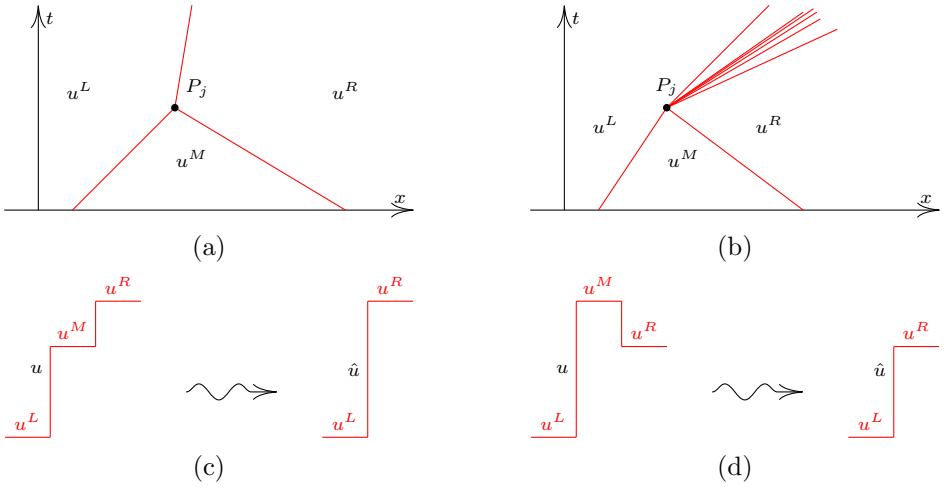


FIGURE 1.

其中， $\Delta\sigma(u^L,\ u^M,\ u^R)$在同号相互作用和异号相互作用的情形下定义不同，具体如下：

$$\Delta\sigma(u^L,u^M,u^R) := \left\|\sigma^{\text{after}} - \sigma^{\text{before}}\right\|_{L^1([u^L,u^R])}, \tag{6}$$

其中

$$\sigma^{\text{after}} = D\operatorname*{\mathbf{conv}}_{[u^L,u^R]} f, \quad \sigma^{\text{before}} = \begin{cases} D\operatorname*{\mathbf{conv}}_{[u^L,u^M]} f \cup D\operatorname*{\mathbf{conv}}_{[u^M,u^R]} f, & u^L \leqslant u^M \leqslant u^R, \\ D\operatorname*{\mathbf{conv}}_{[u^L,u^M]} f\Big|_{[u^L,u^R]}, & u^L \leqslant u^R \leqslant u^M. \end{cases}$$

注意，在求解黎曼问题时（例如在 u^L 与 u^R 之间），凸包络的导数 $D\ \mathbf{conv}_{[u^L,u^R]} f$（在负跳跃的情况下则为凹包络）对应于该解所包含的各种跃变、稀疏波和接触间断的速度。因此， $\Delta\sigma(u^L,\ u^M,\ u^R)$ 可以看作“速度”函数之间的 L^1 距离。

例 1.1。 假设在点 P_j 处，两个（正）激波发生相互作用：第一个激波连接 u^L 与 u^M ，并以速度 σ' 传播；第二个激波连接 u^M 与 u^R ，并以速度 σ'' 传播。在相互作用点处，两个激波合并，形成一个连接 u^L 与 u^R 、并以速度 σ 传播的新激波。这个新激波可以看作两个入射激波 (u^L,u^M) 和 (u^M,u^R) 的叠加；它们的速度分别从 σ'（分别为 σ''）变为 σ。速度变化为

$$\Delta\sigma(P_j) := \Delta\sigma(u^L,u^M,u^R) = |\sigma'-\sigma|\cdot|u^M-u^L| + |\sigma''-\sigma|\cdot|u^R-u^L|.$$

1.2. **Glimm计划**。 在其开创性论文 [16], 中，Glimm提出了一套证明（4）中估计的一般策略。该策略可应用于任何通过拼接黎曼问题的局部解并处理相互作用来构造近似解的格式（例如Glimm格式或波前跟踪）。下面简要介绍这一策略。

相互作用 可以用非常一般的术语来定义（与具体的近似格式无关），如下所示：存在两个映射 $u = u(x), \hat{u} = \hat{u}(x) \in \mathcal{D}$

（我们可以将 u 和 $\hat{u}$ 分别看作相互作用发生前后的近似解）。两个映射 u、$\hat{u}$ 在区间 (α,β) 之外重合。在 (α,β) 上，u 和 $\hat{u}$ 都是分段常数。映射 u 在 (α,β) 上恰有两个跳跃，即分别位于 u^L 与 u^M 之间以及 u^M 与 u^R 之间，而映射 $\hat{u}$ 在 u^L、u^R 之间只有一个跳跃，见第 12 页图 6。

如前所述，对于每次相互作用，我们可以关联强度变化$\Delta s(u^L,\ u^M,\ u^R)$ 以及参与该相互作用的波前的速度变化 $\Delta\sigma(u^L,\ u^M,\ u^R)$（如上文在标量情形下的 (5)、(6) 中所做的那样）。

Glimm策略证明 (4) 的方法是寻找一个相互作用泛函$Q\colon\ \mathcal{D}\to\mathbb{R}$，使其具有以下性质：

(i) 对每个 $v\in\mathcal{D}$，$Q(v)$ 均非负，且有一个依赖于 f 和 TV(v) 的常数作为其上界：

$$0\leqslant Q(v)\leqslant C(f,\mathrm{TV}(v)).$$

(ii) 在每次相互作用中（沿用上文的记号），Q 均减小，且其减小量界定了强度变化

$$\Delta s(u^L,u^M,u^R)\leqslant Q(u)-Q(\hat{u}) \tag{7a}$$

或速度变化

$$\Delta\sigma(u^L,u^M,u^R)\leqslant Q(u)-Q(\hat{u}), \tag{7b}$$

参与相互作用的两个波前 $(u^L,\ u^M)$、$(u^M,\ u^R)$，取决于要证明两个估计式 (4a)–(4b) 中的哪一个。

(iii) 对于一个近似解 u^ε，只要没有发生相互作用，映射 $t\mapsto Q(u^\varepsilon(t))$ 就是常数。[5]

注意，上述三项（第 (ii) 项中包含 (7b)）对应于第 1 页主定理中的第 (i)–(iii) 点。

一旦找到了这样的相互作用泛函，通过望远镜求和论证即可得知：给定一个近似解 $u^\varepsilon(t,x)$（例如通过波前跟踪或 Glimm格式构造），映射 $t\mapsto Q(u^\varepsilon(t))$ 单调不增，而强度的总变化量 $\sum_j\Delta s(P_j)$（或速度的总变化量 $\sum_j\Delta\sigma(P_j)$）有界于 $Q(0)=Q(u^\varepsilon(0))\leqslant C(f,\mathrm{TV}(u^\varepsilon(0)))\leqslant C(f,\mathrm{TV}(\bar{u}))$，从而证明了 (4)。

Glimm策略成功证明了 GNL/LD 情形下强度变化（4a）和速度变化（4b）的估计（[16, 17], 另见著作 [13] 及其中的参考文献），并证明了一般情形（不作 GNL/LD 假设）下强度变化（4a）的估计，参见 [5, 3]以及 [6], 其中证明了消失黏性近似下强度变化的估计。

一般情形（不作 GNL/LD 假设）下速度变化（4b）的估计则是另一回事。

1.3. **一般情形下的速度变化**。速度变化的估计（4b）已在 [11, 21]（另见 [12, 10, 9]）中证明，适用于通过 Glimm格式构造的（1）的近似解（不过，同样的证明也适用于波前跟踪解），其策略与前几节所述的 Glimm 策略类似。

[5]要点（iii）实际上是 Q 相互作用减少的推论：事实上，移动分段常值函数的一个跳跃，可以看作该跳跃与一个零跳跃之间的相互作用。

然而，在上述文献中， [11, 21], 作者并未构造具有上述性质 (i)–(iii) 的相互作用泛函 $Q\colon\ \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ 相反，对于任意给定的近似解 $u^\varepsilon(t,x)$，作者构造了一个泛函 $\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}(t)$，它具有与上述 (i)–(iii) 类似的性质：特别是， $\mathfrak{Q}(0)\leqslant C(f,\mathrm{TV}(\bar u))$；在每个相互作用时刻 $\Delta\sigma(P_j)\leqslant\mathfrak{Q}(t_j^-)-\mathfrak{Q}(t_j^+)$，并且在没有相互作用发生时，$\mathfrak{Q}$ 保持不变，因此可得 (4b)。

与第 1.2 节所述的 Glimm策略不同，这种关于 [11, 21] 的泛函 $\mathfrak{Q}(t)$ 无法写成某个 $Q\colon\ \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ 的 $Q(u^\varepsilon(t))$ 形式；换言之， $\mathfrak{Q}(t)$ 的定义在时间上具有高度非局部性。原因在于，泛函 $\mathfrak{Q}$ 在时刻 t 的取值，不仅取决于映射 $u^\varepsilon(t,\cdot)\in\mathcal{D}$，还取决于 $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ 上的整个近似解 u^ε，这需要借助一种非平凡的波追踪算法；该算法在任意时刻都会考虑波的全部过去和未来历史。[6] 特别地， $\mathfrak{Q}(t)$ 依赖于近似参数 ε （尽管它具有与 ε 无关的一致界），也依赖于近似解中相互作用发生的顺序 u^ε。

如果目标仅仅是证明（4b），就显然不存在这个问题，正如 [11, 21] 中的情形。然而， $\mathfrak{Q}$ 在时间上的非局部性还存在若干缺点，我们将在下一节列出并讨论1.4。

本文的目标正是填补这一空白，并构造一个泛函

$$\Upsilon\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}$$

具有性质（i）、（ii）（其中速度变化满足估计（7b））以及上述（iii），并且完全具有时间局部性，也就是说，特别地， Υ（u）对每个 $u\in\mathcal{D}$ 都有定义（不仅适用于分段常值映射），且其定义不依赖于特定的逼近方案。

这一事实，即 Υ 在时间上是纯粹局部的，类似于 Glimm 和 Bianchini–Bressan 的经典泛函（[16, 5, 3]），并且不同于为证明（7b）而在 [11, 21], 中所使用的泛函，是本文最重要的贡献。

1.4. 为什么时间局部泛函具有相关性？ Υ的时间局部性具有若干优势。

首先， （ Υ）中15的定义比 [11, 21], 中的泛函定义更加清晰、简洁；在后者中（即使在标量情形 [9, 21]下），也需要预先构造一个详细的波追踪算法（在所提及的文献中也称为波枚举或拉格朗日表示）。

其次，我们的新泛函 Υ 定义在半群定义域中的每个映射 $\mathcal{D}$上，而 [11, 21] 中的泛函定义在近似解上，因此，特别是只适用于符合 Glimm 格式或波前跟踪设定的分段常值映射。 [11, 21] 中的泛函没有一般的有界变差对应物，因为它们的定义基于波追踪，而这种波追踪只能在近似解上显式构造，在近似解中，相互作用集中在 (t,x)-平面中的有限个点上。与此相反，我们的新泛函 Υ可以沿半群轨迹计算，而且沿这些轨迹单调递减。我们认为，这一事实可进一步用于分析方程 (1)–(2) 的精确解的更精细性质。

从另一个角度来看，提出发展一种守恒律的拉格朗日表示（作为特征线方法的扩展）这一思想的是

[6]准确地说，在 [11] 中， $\mathfrak{Q}(t)$ 取决于 $u^\varepsilon|_{[0,t]\times\mathbb{R}}$，而在 [21] 中，它取决于 $u^\varepsilon|_{[t,+\infty)\times\mathbb{R}}$。

Dafermos [15] 针对 GNL/LD系统。近年来，对于标量守恒律（包括多维情形），Bianchini 和 Marconi [7, 8], Bianchini、Bonicatto 和 Marconi [4] 以及 Marconi[18, 19]。

另一方面，对于守恒律系统， [20, 22], 中提出了拉格朗日表示的一个初步版本，但其中的分析相当复杂，部分原因在于缺少一种局部时间泛函来约束相互作用中的速度变化。因此，我们的新泛函 Υ 应当能够弥补这一不足，从而使守恒律系统的拉格朗日表示更容易构造。我们计划在未来的工作中推进这一研究计划。

最后，我们对黏性守恒律系统作一注。

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \nu \partial_{xx} u, \qquad \nu > 0. \tag{8}$$

Bianchini–Bressan 泛函 [5, 3], 是在无黏情形下定义的，它很容易推广，以约束式（8）中“黏性波前”的强度变化，如 [6] 所示。

文献 [11, 21], 中的泛函用于约束无黏情形下的速度变化，其定义基于波追踪算法。显然，它们几乎不可能推广到黏性守恒律，因为对于式（8）的解，并不清楚如何“追踪”黏性波前。

我们的新泛函 Υ 没有直接对应的黏性版本。不过，我们认为， Υ具有时间局部性这一事实，有助于更清楚地说明为什么无黏系统中波前的速度变化有界，因此，如果想要在方程 (8) 的解中界定黏性波前的速度变化（或某些相关量），它或许能提供一些见解。当考虑的是物理黏性而非人工黏性 $\nu\partial_{xx}u$时，这样的估计或许有助于证明消失黏性逼近的收敛性（不过这纯属一厢情愿） [6]。

1.5. 论文结构与记号。第 2 节给出新相互作用泛函 Υ （基于代价这一基本概念）的定义，并陈述主定理中 (i)–(iv) 各项对应的严格表述。第 3 节是论文的核心，我们将在此证明代价的基本性质。第 4 节证明主定理的 (i)–(ii) 项。第 5 节证明主定理的 (iii) 项。附录A包含一个公式（定理 A.1），该公式用确定性程序来表示代价。附录中的内容并非论文其余部分所必需，但有助于进一步理解代价的结构。

我们使用以下记号：

- $\mathbf{conv}_{[a,c]} f$ 表示函数 f 在线段 $[a,c]$上的凸包络；
- 对于 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$， $g\colon [b,c]\to\mathbb{R}$，我们记

$$f \cup g\colon [a,c]\to\mathbb{R}, \quad (f\cup g)(y) = \begin{cases} f(y), & y\in[a,b), \\ g(y), & y\in[b,c]; \end{cases}$$

- u_x 表示有界变差函数 u的导数（视为测度）；
- $\mathbf{1}_A$ 表示 $A\subset\mathbb{R}$；
- $\mu\big|_A\colon\ B\mapsto\mu(A\cap B)$ 表示拉东测度 μ 在博雷尔集 A 上的限制；
- $\sqcup$ 对于不交并；
- $g^{\pm} := \frac{1}{2}(|g|\pm g)$ 分别表示函数 g 的正部分（负部分）；
- $\partial^{\pm}$ 对于右（分别为左）导数；

- $C^{1,\ 1}([a,c])$ 表示从 $[a,c]$ 到导数为 Lipschitz连续的连续可微映射的集合；
- **振荡**$_{[a,c]}\, g =$ 上确界$_{[a,c]}\, g -$ 下确界$_{[a,c]}\, g$;
- $\psi_\sharp \mu$ 测度 μ 经映射 ψ推前所得的测度。

2. Definition of Υ and rigorous statements

从现在起，我们只关注标量情形 $n=1$。系统（$n>1$）的分析见姊妹论文 [2]。特别地，我们假设半群 S_t 的定义域为

$$\mathcal{D} = \mathrm{BV}(\mathbb{R};\overline{\Omega}),$$

其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ 是开集。我们不失一般性地假设 $\mathcal{D}$ 中的映射是右连续的。$\mathcal{D}$ 也将是我们的泛函 Υ的定义域。本节将给出 Υ的精确定义，并严格陈述其主要性质。

2.1. 代价的定义。 我们从本文最重要的定义开始，即代价函数的概念。

我们主要关注 $C^1{}_{,1}$-正则性，这些函数的研究动机来自其在守恒律中的应用。不过，定义 2.1、 2.3 和 2.4对连续函数也有意义。在附录 A中，我们进一步探讨**代价**在 C^0-正则性框架下的结构。

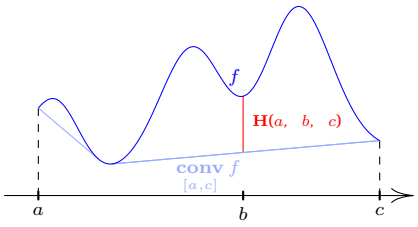


Figure 2. 定义2.1。

我们首先需要定义两个辅助量。

定义 2.1。 设 $a \leqslant b \leqslant c$ 和 $f \in C^1{}_{,1}([a,c])$。定义高度 为

$$\mathbf{H}_f(a,b,c) = f(b) - \Big(\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f\Big)(b). \tag{9}$$

定义。2.1 见图2。

注 2.2。 量 $\mathbf{H}f(a,\ b,\ c)$ 与标量情形中 $\Delta\sigma$ 的定义有关（并由其 प्रेर发）；见下文 (16)–(17)。

定义 2.3. 令 $a \leqslant c$ 和 $f \in C^1{}_{,1}([a,c])$。假设 $b_1, \ldots, b_m \in [a,c]$。我们递归地定义区间 $[a,c]$ 关于合并 $(b_i)_{i=1}^m$ 的合并代价 如下：

(10)

$$\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) = \begin{cases} \mathbf{H}_f(a,b_1,c), & m=1, \\ \mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^{m-1}) + \mathbf{H}_f(b_m^{\mathrm{left}}, b_m, b_m^{\mathrm{right}}), & m>1, \end{cases}$$

其中

$$
\begin{aligned}
b_j^{\text{left}} &= \max\Big(\{a\} \cup \Big(\{b_i\}_{i=1}^{j-1} \cap [a, b_j]\Big)\Big), \\
b_j^{\text{right}} &= \min\Big(\{c\} \cup \Big(\{b_i\}_{i=1}^{j-1} \cap [b_j, c]\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{11}
$$

注意，一般而言，**代价**$_f([a,c],\ (b_i)_{i=1}^m)$ 取决于点的顺序 b_i。图3给出了一个例子。展开递归，我们还可以得到一个更

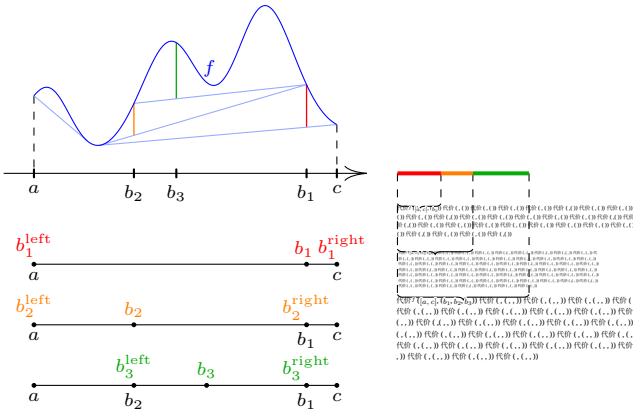


FIGURE 3. 合并代价的定义。

显式表达式

$$
\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{H}_f(b_i^{\text{left}}, b_i, b_i^{\text{right}}). \tag{12}
$$

最后，我们可以引入代价函数**代价**。

定义2.4。令 $a \leqslant c$ 和 $f \in C^{1,\ 1}([a,c])$。我们将代价函数定义为

$$
\mathbf{cost}_f(a,c) = \sup\Big\{ \mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) \colon\ m \in \mathbb{N},\ (b_i)_{i=1}^m \subset [a,c] \Big\}. \tag{13}
$$

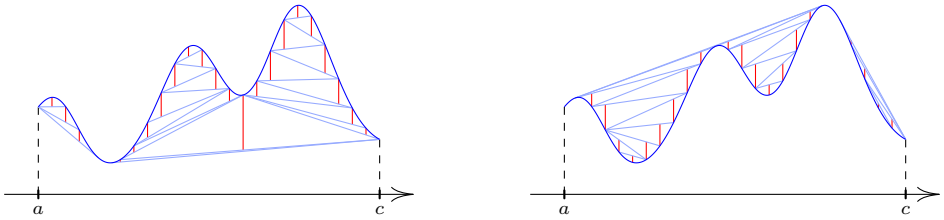
同时定义 **代价**$_f(c,a)$ $=$**代价**$_{-f}(a,c)$。

我们将证明（命题3.5）

$$
\mathbf{cost}_f(a,c) \leqslant \frac{1}{4} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right\|_{L^\infty} |c-a|^2, \tag{14}
$$

因此，特别是，**代价**$_f(a,\ b)$ 始终是有限量。为便于理解，我们在图 4中给出了准最优构型的示意图。

注 2.5。 鉴于守恒律，定义*2.4* 可以理解为计算由同号相互作用引起的速度总潜在变化，该变化“隐藏”在跳跃 $[a,c]$中。



(a) (b)

FIGURE 4. 准最优合并：(a) 对于 **代价**$f(a,\ c)$；(b) 对于 **代价**$f(c,\ a)$。

2.2. **相互作用泛函的定义** Υ。 现在我们可以定义新的相互作用泛函 Υ。

定义 2.6（新相互作用泛函）。 我们定义 $\Upsilon\colon\ \mathcal{D}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 如下

$$\Upsilon(u)=\frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}\mathrm{TV}(u)^2-\underbrace{\sum_{|u_x|(\{x\})>0}\mathbf{cost}_f(u_-(x),u_+(x))}_{=:\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)}. \tag{15}$$

事实是，Υ 是良定义的（即它将 $\mathcal{D}$ 映射到 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$），并且它是一个二次泛函（关于 $\mathrm{TV}(u)$），这些将在定理 2.8中证明。

我们强调，**代价**$f(u_-(x)\ u_+(x))$ 是一个在空间和时间上都完全局部的量，这意味着它仅取决于点 x 处 u 的左极限和右极限，而与其他因素无关：特别地，它在空间上是局部的，因为它不取决于 u 的其他跃变或连续点；它在时间上也是局部的，因为它不取决于从 u 出发的（近似）解。

我们的泛函 Υ 旨在界定速度变化。若 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)$，即 Υ中的“代价”部分，在 u 没有跃变时为零，这与以下事实一致：沿着标量守恒律（1）的解，波前仅在存在跃变之处才会改变速度。否则，特征线以恒定速度移动。

在接下来的几节中，我们将陈述 Υ的主要性质，分别对应于第i）–（iii）以及（iv）–（iv），这些性质列于第主要定理 页的1中。

注 *2.7*。代价$f(a,c)$和 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)$的定义，与 [14, 定义 *2.6*、*2.7*]中 $\mathcal{A}(a,c)$和 $\mathcal{D}(u)$的定义分别有些相似。本文中，代价用于控制速度变化 $\Delta\sigma(P_j)$（记号同第*1.1*节），而 [14] 中的 $\mathcal{A}(a,c)$则用于控制相互作用过程中熵耗散 $\Delta\mathcal{D}(P_j)$的变化。

关键区别在于，在 [14] 中需要控制的量，即 $\Delta\mathcal{D}$（P_j），根据定义是与 u 相关的某个泛函（即总熵耗散 $\mathcal{D}$（u））在相互作用前后的差值。

相反，在我们的情形中，不存在自然的泛函，使得 $\Delta\sigma$（P_j）能够表示为该泛函在相互作用前后的差值。

本文完成的主要工作，正是构造一个泛函（即 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$），使其在同号相互作用中的正变差为 $\Delta\sigma(P_j)$ 提供一个上界；同时，其在异号相互作用中的负变差受 $\mathrm{TV}(u)^2$ 的下降量所界定。

2.3. **非负性与二次上界**。 第一个结果指出 Υ 是二次的 （相对于 TV(u)），且非负。这对应于主定理中的第（i）点。虽然上界很容易得到，但非负性并不显然，因为 Υ 是两个非负量之差。

定理 2.8 (非负性与二次上界)。 对所有 $u \in \mathcal{D}$,

$$0 \leqslant \Upsilon(u) \leqslant \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right\|_{L^\infty} \frac{1}{4} \operatorname{TV}(u)^2.$$

证明见第 4.1 节。

2.4. **相互作用估计**。 第二个结果是 Υ 的主要性质，即相互作用估计。它表明，相互作用过程中波前速度的变化由 Υ 的减小所界定。这对应于 主定理中的第 (ii) 点，差别仅在一个无关紧要的乘法因子 1 2 （另见（7b）） 。

首先，我们严格引入量 $\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R)$，它表示黎曼问题 (u^L, u^M) 与 (u^M, u^R) 相互作用时涉及的波前速度变化。为定义该量，我们需要根据三个值 u^L, u^M, u^R 的顺序区分六种情况（见图 5）。我们已在两种情况 $u^L \leqslant u^M \leqslant u^R$ 和 $u^L \leqslant u^R \leqslant u^M$ 下，通过式 (6) 定义了 $\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R)$。注意，式 (6) 等价于

$$\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R) = \begin{cases} 2\mathbf{H}_f(u^L, u^M, u^R), & \text{if } u^L \leqslant u^M \leqslant u^R, \\ \mathbf{H}_f(u^L, u^R, u^M), & \text{if } u^L \leqslant u^R \leqslant u^M. \end{cases} \tag{16}$$

类似地，在其余四种情形下，我们定义 $\Delta\sigma(u^L,\ u^M,\ u^R)$ 如下:

$$\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R) = \begin{cases} \mathbf{H}_f(u^M, u^L, u^R), & \text{if } u^M \leqslant u^L \leqslant u^R, \\ \mathbf{H}_{-f}(u^M, u^R, u^L), & \text{if } u^M \leqslant u^R \leqslant u^L, \\ \mathbf{H}_{-f}(u^R, u^L, u^M), & \text{if } u^R \leqslant u^L \leqslant u^M, \\ 2\mathbf{H}_{-f}(u^R, u^M, u^L), & \text{if } u^R \leqslant u^M \leqslant u^L. \end{cases} \tag{17}$$

注意，在同号相互作用 中（即两个跃变 $(u^L,\ u^M)$ 和 $(u^M,\ u^R)$ 同号时），$\Delta\sigma$ 等于高度的两倍；而在异号相互作用 中，$\Delta\sigma$ 等于高度。粗略地说，这是因为在异号相互作用中，一些“波”会相互抵消，因此需要控制速度变化的波也更少。

定理 2.9 （相互作用估计）。 设 $u, \hat{u} \in \mathcal{D}$。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个开区间。假设

(a) $u\,(x) = \hat{u}\,(x)$ 对 $x \notin I$ 成立，*(b)* 在 I 上，$u, \hat{u}$ 均为分段常数，*(c)* 在 I 上，u 恰有两次跃变，分别从 u^L 到 u^M 和从 u^M 到 u^R ；而 $\hat{u}$ 恰有一次跃变，从 u^L 到 u^R。

Then

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R) \leqslant \Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u}). \tag{18}$$

定理 2.9 的证明见第 4.2–4.3 节。

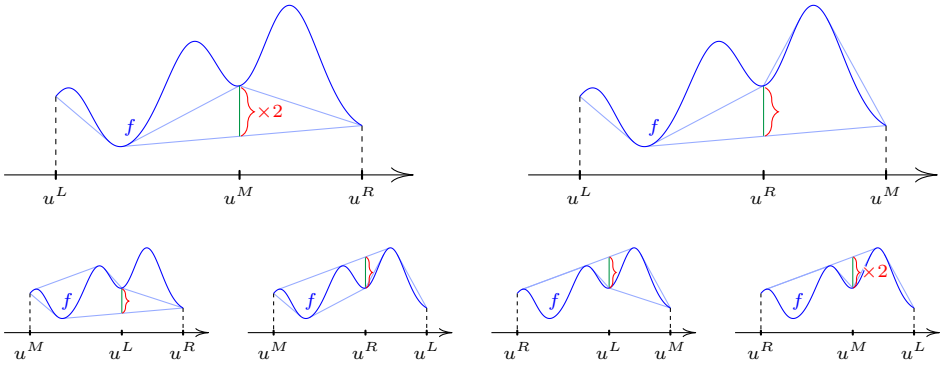


FIGURE 5. $\Delta\sigma$的定义。

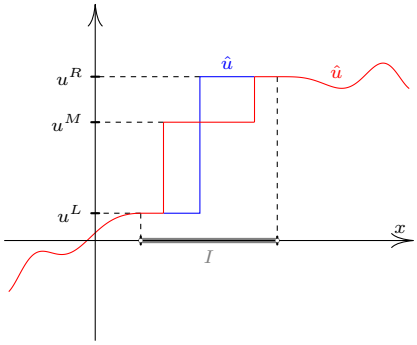


FIGURE 6. 定理2.9。

2.5. Υ **若没有发生相互作用，则保持不变。** 的第三个性质 Υ对应于主定理中的第 iii 点。

定理 2.10 （Υ （没有相互作用时为常数）。设 $u \in \mathcal{D}$ 为分段常数，且相邻跳跃点之间的距离有下界 $L_0 > 0$。那么对于所有 $t \in [0, t_0)$ ，

$$\Upsilon(S_t u) = \Upsilon(u),$$

with

$$t_0 := \frac{L_0}{\underset{[\inf u, \sup u]}{\mathbf{osc}} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)}$$

证明见第 5节。

2.6. **的其他性质** Υ。现在我们列出与 Υ相对应的其他性质，参见主定理，第（iv）点。本文不证明这些性质。（更一般的系统情形下的）证明见姊妹论文 [2]。之所以这样安排，是因为这些并非 Υ的主要性质，因此在这种情况下，我们认为不分别给出两个证明（分别针对标量情形和系统情形）更为妥当。

我们首先介绍作用于 BV($\mathbb{R};\mathbb{R}$) 上的两个算子，即**裁剪**和**切割**，其目的是用分段常值函数逼近给定的 $u \in$ BV($\mathbb{R};\mathbb{R}$)。**裁剪**

去除给定区间之外的所有全变差。**切割**将u 在给定的两两不相交的相邻区间 $\{I_i\}_{i=1}^m$ 上的变差压缩为位于点 $x_i \in I_i$ 处的单个跃变。

定义 2.11。 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空区间。对于 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathbb{R})$，我们将裁剪 **裁剪**$_I(u)$ 定义为映射 $v \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathbb{R})$，使得

$$v_x = v_x\big|_I = u_x\big|_I \quad \text{and } v = u \text{ a.e. on } I.$$

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间。我们用 $\mathcal{P}(I)$ 表示 I划分为子区间的所有有限划分的集合。

定义 2.12。 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{P}(I)$。我们称集合 $X = \{x_i\}_{i=1}^m$与 $\mathcal{F}$ 相容，当且仅当 $x_i \in I_i$。在这种情况下，对于 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathbb{R})$，我们将黎曼截断 **切割**$_{\mathcal{F},\,X}(u)$ 定义为映射 $\hat{}u$，使得

$$\hat{u}(-\infty) = u(-\infty) \text{ and } \hat{u}_x = u_x - u_x\big|_I + \sum_{i=1}^m u_x(I_i)\delta_{x_i}.$$

若 $\mathcal{F} = \{I\}$ 和 $X = \{\hat{}x\}$，则称黎曼截断是简单的，并记为**切割**$_{I,\,\hat{}x}(u)$。

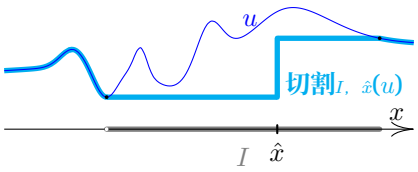


FIGURE 7. 一个（简单的）黎曼截断。

注意，对于 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathbb{R})$， Υ**(切割**$_{\mathcal{F},\,X}(u)$**)** 的值不取决于 X 的具体选择。因此，我们将简写为 Υ**(切割**$_{\mathcal{F},\,\bullet}(u)$**)**。

现在，我们可以严谨地陈述与主定理第（iv）点相对应的性质。

定理 2.13。 泛函 Υ 还具有以下性质。

(a) 关于**裁剪**的逼近：设 $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ 满足$\inf\,\Theta = -\infty$、$\sup\Theta = +\infty$。对于每个 $u \in \mathcal{D}$，

$$\Upsilon(u) = \sup_{\substack{I\subseteq\mathbb{R}\\ \inf I,\sup I\in\Theta}} \Upsilon(\mathbf{Crop}_I(u)).$$

(b) 关于**切割**的逼近：设 $\Theta \subseteq I$ 在 I 中稠密。那么，对于每个 $u \in \mathcal{D}$，

$$\Upsilon(u) = \sup\Big\{\Upsilon\big(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u)\big) : \mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I)\Big\},$$

其中 $\mathcal{P}_\Theta(I) = \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}(I)$ 满足 $\forall J \in \mathcal{F}$，$\inf\,J$， $\sup J \in \Theta \cup \{\inf\,I,\ \sup I\}\big\}$。

(c) 跨黎曼割的单调性：设 $u \in \mathcal{D}$。令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间，且$\hat{}x \in I$。则 Υ(**切割**$_{I,\,\hat{}x}(u)) \leqslant \Upsilon(u)$。

(d) 李雅普诺夫性质：对于每个 $\bar{u} \in \mathcal{D}$， $t \mapsto \Upsilon(S_t\bar{u})$ 均为非递增。

(e) 下半连续性：如果 $u_m \to u$ 属于 L^1_{loc}，则 $\Upsilon(u) \leqslant$下极限$_m\,\Upsilon(u_m)$。

(f) 关于状态曲线扰动的稳定性：设 $u \in \mathcal{D}$，并设 $\Phi\colon \Omega \to \Omega$ 为 *Lipschitz* 连续函数。则

$$|\Upsilon(u) - \Upsilon(\Phi(u))| = \mathcal{O}(1)(1+M^2)M \left\|\Phi - \mathrm{id}\right\|_{W^{1,\infty}},$$

其中 $M := \max\{\mathrm{TV}(u),\ \mathrm{TV}(\Phi \circ u)\}$ 以及 $\mathrm{id}(p) \equiv p$。

(g) 关于状态曲线重新参数化的不变性：设 $u \in \mathcal{D}$ 和 $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 严格递增。设 $\tilde{u} \in \mathcal{D}$ 满足 $\tilde{u}(-\infty) = u(-\infty)$ 且 $\tilde{u}_x = \psi_\sharp u_x$。那么 $\Upsilon(\tilde{u}) = \Upsilon(u)$。

注 2.14。我们来讨论定理 *2.13*中列出的各种性质。*(a)–(b)* 这些基本性质表明，$\Upsilon(u)$ 的值可以通过用分段常值映射逼近 u 得到，其中变化局限于紧集。*(c)–(e)* 这些是双曲守恒律文献中相互作用泛函常见的性质。我们声称，我们的 Υ 也满足这些性质。它们与“Υ 在相互作用过程中递减”这一事实相符（定理 *2.9*）。*(f)–(g)* 这些陈述表明，Υ 在对因变量（分别为自变量）重新参数化时保持稳定（分别为不变）。

3. Cost function

本节是本文的核心。我们已在 **第 2.1 节**中定义了2.1。现在我们来证明它的主要性质。代价函数**代价** 是我们新定义的相互作用泛函 Υ中最初始且最相关的部分。引言中陈述的 Υ 所有性质，均可由本节证明的**代价**的性质推出。

在第 3.1 节中，我们证明代价界，这将是定理 2.8 证明的主要组成部分。在第 3.2 节中，我们证明代价的一个超可加估计和一个次可加估计，这将是定理 2.9 中相互作用估计证明的基本工具。在第 3.3 节中，我们证明代价的持久性，这将是定理 2.10 证明的核心。在第 3.4 节中，我们证明代价$\mathfrak{c}(a,c)$的定义对于函数 f 以及区间 $[a,c]$的扰动都是稳定的。本文并未用到这一最后性质，但它是姊妹论文 [2]中系统分析的基础。最后，在第 3.5 节中，我们展示代价的一个有趣的附加性质（实际上，主定理的证明并不需要它），即相对于通量的一致收敛，代价具有下半连续性。

3.1. **代价界**。本节我们将证明，**代价**$\mathfrak{c}(a,c)$ 可用区间 $[a,c]$的长度以及 L^1 范数（分别为 L^∞ 范数）来界定，即由 f 的二阶导数给出界，见命题 3.4（分别见命题 3.5）。关于 L^1 范数的估计，是下文第 3.4 节讨论稳定性性质所需的；而关于 L^∞ 范数的估计，则是定理 2.8证明的核心。

我们先针对 $a \leqslant b \leqslant c$ 引入辅助函数

$$\triangle_{a,b,c}(x) = \begin{cases} \frac{(c-b)(x-a)}{c-a}, & x \in [a,b], \\ \frac{(b-a)(c-x)}{c-a}, & x \in [b,c], \\ 0, & x \notin [a,c], \end{cases} \tag{19}$$

见图 8(a)，我们现在用它来界定 $\mathbf{H}(a,b,c)$。（若 $a = c$，我们令$\triangle_{a,b,c} = 0$。）



FIGURE 8. （a）函数 $\triangle_{a,\,b,\,c}$；（b）命题 3.1 的证明。

命题 3.1. 若 $a \leqslant b \leqslant c$ 且 $f \in C^{1,1}([a,c])$，则

$$\mathbf{H}_f(a,b,c) \leqslant \int_a^c \triangle_{a,b,c}(x) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}(b-a)(c-b)\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}. \tag{20}$$

证明。第二个不等式可直接由恒等式推出

$$\|\triangle_{a,b,c}\|_{L^1} = \frac{1}{2}(b-a)(c-b).$$

我们来证明第一个不等式。假设 $\mathbf{H}f(a,\ b,\ c) > 0$（即 $f(b) > \text{凸}_{[a,c]} f(b)$），否则结论显然成立。

首先考虑 $f > \text{凸}_{[a,c]} f$ 在整个区间 $(a,\ c)$ 上的情形。在这种情况下

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_f(a,b,c) &= f(b) - \operatorname*{\mathbf{conv}}_{[a,c]} f(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)\right] \\ &= \frac{c-b}{c-a}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,dx - \frac{b-a}{c-a}\int_b^c \frac{\partial f}{\partial x}\,dx \\ &= \int_a^c \frac{\partial \triangle_{a,b,c}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx = -\int_a^c \triangle_{a,b,c}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx \leqslant \int_a^c \triangle_{a,b,c}(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-(x)\,dx,\end{aligned}$$

其中在倒数第二个等式中，我们利用了 $\Delta_{a,\ b,\ c}$ 在 $(a,\ b)$ 上的导数恒等于 $(c-b)/(c-a)$，类似地，它在 $(b,\ c)$ 上恒等于 $-(b-a)/(c-a)$；而在最后一个等式中，我们进行了分部积分。

现在假设 $(a_1,\ c_1) \subset [a,c]$ 是包含 b 且满足 $f > \text{凸}_{[a,c]} f$ 于 $(a_1,\ c_1)$ 的极大区间。那么

$$\mathbf{H}_f(a,b,c) = \mathbf{H}_f(a_1,b,c_1) \leqslant \int_a^c \triangle_{a_1,b,c_1}(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-(x)\,dx.$$

正如我们刚才所证明的。由于 $a \leqslant a_1 \leqslant c_1 \leqslant c$，可得 $\triangle_{a_1,\ b,\ c_1}(x) \leqslant \triangle_{a,\ b,\ c}(x)$（见图 8(b)），证明完毕。□

现在我们将利用命题 3.1 为**代价**泛函建立一个界。其策略是使用函数 $\triangle_{a,\ b,\ c}$ 代替量 $\mathbf{H}f(a,\ b,\ c)$，模仿定义 2.3 中的合并代价构造，并推导出它们总和的逐点界。

记

$$\cap(x) = \begin{cases} x - x\log(2x), & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ \cap(1-x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 0, & x \notin (0,1), \end{cases} \qquad \cap_{a,c}(x) = (c-a)\cdot \cap\left(\frac{x-a}{c-a}\right).$$

引理 3.2. 设 a, c, $(b_i)_{i=1}^m$, $(b_i^{\text{left}})_{i=1}^m$, $(b_i^{\text{right}})_{i=1}^m$ 如定义 2.3所述。则对每个$x \in [a,c]$,

$$\sum_{i=1}^{m} \triangle_{b_i^{\text{left}},b_i,b_i^{\text{right}}}(x) \leqslant \cap_{a,c}(x) \tag{21}$$

（见图9（a）中的示例）。

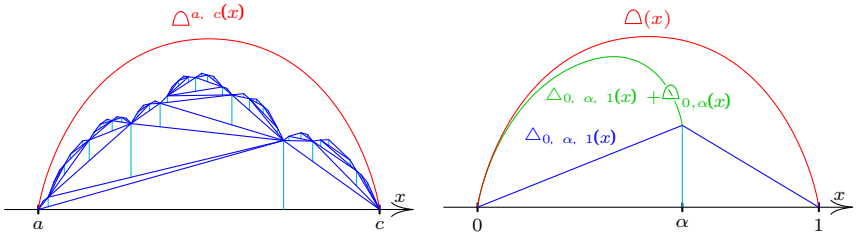


FIGURE 9. 引理3.2。

证明。取 $\alpha \in (0,1)$。有

$$\frac{\partial^2 \cap(x)}{\partial x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \in (0,\frac{1}{2}], \\ -\frac{1}{1-x}, & x \in [\frac{1}{2},1), \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 \cap_{0,\alpha}(x)}{\partial x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \in (0,\frac{\alpha}{2}], \\ -\frac{1}{\alpha-x}, & x \in [\frac{\alpha}{2},1), \end{cases}$$

见图 10(a)，因此函数 $-\cap_{0,\alpha}$ 在 $[0,\alpha]$ 上是凸的。此外，在$x=0$处，$-\cap_{0,\alpha}$的值等于 0，其右导数等于 $\log\frac{1}{\alpha} > 1-\alpha$，这意味着

$$\cap_{0,\alpha}(x) + \triangle_{0,\alpha,1}(x) \leqslant \cap(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha,$$

见图 9（b）。由对称性和缩放，对于每个 $\alpha < \beta < \gamma$ 都有

$$\triangle_{\alpha,\beta,\gamma}(x) \leqslant \cap_{\alpha,\gamma}(x) - \cap_{\alpha,\beta}(x) - \cap_{\beta,\gamma}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

将此不等式应用于（α、β、γ）=（b_i^{left}、b_i、b_i^{right}），$i=1$, ..., m, 我们通过望远镜求和估计（21）的左端，从而化为

$$\cap_{a,c}(x) - \cap_{a,b_{(1)}}(x) - \cap_{b_{(1)},b_{(2)}}(x) - \ldots - \cap_{b_{(m)},c}(x) \leqslant \cap_{a,c}(x),$$

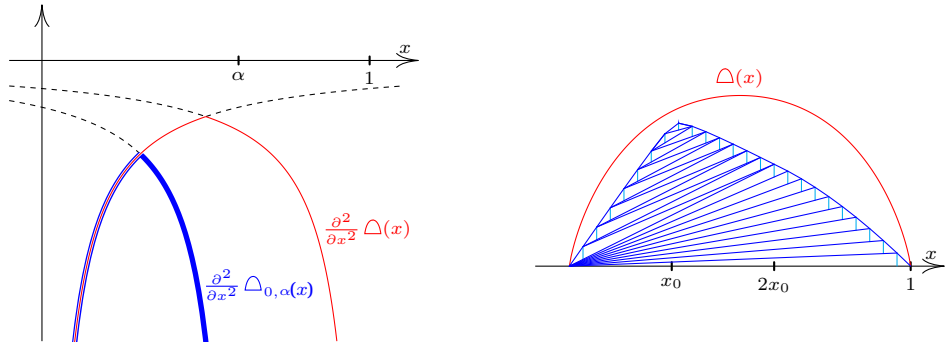
其中，$b_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant b_{(m)}$ 表示对 b_1、.....、b_m 的重新排列。 □

注 3.3。 对于固定的 $x = x_0 \in [a,c]$，估计式（21）是渐近尖锐的。对于 $a=0$、$c=1$、$x_0 \leqslant \frac{1}{2}$ 的情形，准最优划分序列如图 10（b）所示。在极限情况下，该构造自然导出函数 $\cap$。

现在我们可以建立 L^1 的代价上界。

命题 3.4。 设 $a < c$ 和 $f \in C^{1,\,1}([a,c])$，则

$$\mathbf{cost}_f(a,c) \leqslant \int_a^c \cap_{a,c}(x) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}(c-a)\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^1}. \tag{22}$$



(a) (b)

FIGURE 10. (a) 至引理3.2；(b) 至注3.3。

证明。 应用式（12）中合并代价的另一种定义以及命题 3.1中的第一个不等式，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{H}_f(b_i^{\text{left}}, b_i, b_i^{\text{right}}) \leqslant \sum_{i=1}^m \int_{b_i^{\text{left}}}^{b_i^{\text{right}}} \triangle_{b_i^{\text{left}},b_i,b_i^{\text{right}}}(x) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-(x)\,dx \\ &= \int_a^c \sum_{i=1}^m \triangle_{b_i^{\text{left}},b_i,b_i^{\text{right}}}(x) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-(x)\,dx.\end{aligned}$$

现在对被积函数应用引理3.2，然后使用恒等式 $\|\cap_{a,\,c}\|_{L^\infty} = \frac{c-a}{2}$。 —— □

我们还给出了一个关于二阶导数的 L^∞-范数的直接估计。

命题3.5。设 $a<c$ 和 $f\in C^{1,\,1}([a,c])$，则

$$\mathbf{cost}_f(a,c) \leqslant \frac{1}{4}(c-a)^2 \left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}. \tag{23}$$

证明。 设 a，c，$\{b_i\}_{i=1}^m$，$\{b_i^{\text{left}}\}_{i=1}^m$，$\{b_i^{\text{right}}\}_{i=1}^m$ 如定义 2.3所述。由命题3.1中的第二个不等式可得

$$\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) \leqslant \frac{1}{2}\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^\infty} \sum_{i=1}^m (b_i - b_i^{\text{left}})(b_i^{\text{right}} - b_i).$$

将求和中的第 i 项改写为 $\frac{1}{2}\left[(b_i^{\text{right}} - b_i^{\text{left}})^2 - (b_i - b_i^{\text{left}})^2 - (b_i^{\text{right}} - b_i)^2\right]$，即可得到一个望远镜求和，其上界为 $\frac{1}{2}(c-a)^2$，与引理 3.2的证明类似。 □

备注 3.6。 *(1)* 可以从命题*3.5* 推出一个类似的结论，但常数较差（$\frac{1}{2}$而非 $\frac{1}{4}$），具体可由命题 *3.4*得到。

(2) 命题 *3.4* 和命题 *3.5* 中的常数是最优的。事实上，考虑

$$g(x) = -x^2, \quad h_n(x) = \begin{cases} -|x|, & x \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \\ -\frac{nx^2}{2} - \frac{1}{2n}, & x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \end{cases}$$

于是，利用附录中的定理 *A.1* ，可得

$$\mathbf{cost}_g(-1,1)=2, \qquad \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right\|_{L^\infty([-1,1])}=2,$$

$$\mathbf{cost}_{h_n}(-1,1)=2-\frac{1}{n}, \quad \left\|\frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2}\right\|_{L^1([-1,1])}=2,$$

从而命题 *3.5* 成立，并且命题*3.4* 在$n\to\infty$时渐近成立。

3.2. **类相互作用估计**。我们证明了一个关于**代价**$f(a,\ c)$的超可加和次可加估计。我们将这些界称为类相互作用估计，因为我们将使用

- 超可加界（命题 3.7）来断言，在同号相互作用中，泛函的下降 Υ 控制相互作用中所涉及波前的速度变化；
- 次可加界（命题 3.8）来断言，在异号相互作用中，$\mathcal{Q}_{\text{代价}}$可能增加，但其增加量由抵消波的数量（最多差一个乘法常数）控制，因此也由 TV_2的下降控制，从而总体上 Υ 在异号相互作用中也会下降。

因此，本节已经包含了证明定理 2.9 所需的思想。

命题 3.7。如果 $a\leqslant b\leqslant c$ 且 $f\in C^{1,\ 1}([a,c])$，那么

$$\mathbf{cost}_f(a,c)\geqslant \mathbf{cost}_f(a,b)+\mathbf{cost}_f(b,c)+\mathbf{H}_f(a,b,c). \tag{24}$$

证明。取任意由 $[a,b]$ 和 $[b,c]$产生的合并，将它们合并，首先加入合并b，最后应用**代价**$f(a,\ c)$的定义。□

现在我们证明一个次可加估计。

命题 3.8。若 $a\leqslant b\leqslant c$ 且 $f\in C^{1,\ 1}([a,c])$，则

$$\mathbf{cost}_f(a,c)\leqslant \mathbf{cost}_f(a,b)+\mathbf{cost}_f(b,c)+\frac{1}{2}(b-a)(c-b)\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}. \tag{25}$$

为证明命题3.8，我们需要以下引理，该引理见图11。

引理 3.9。如果 $a\leqslant b_1\leqslant b\leqslant c$、$a<b$ 和 $f\in C^{1,\ 1}([a,c])$ 那么

$$\mathbf{H}_f(a,b_1,c)-\mathbf{H}_f(a,b_1,b)\leqslant\frac{b_1-a}{b-a}\mathbf{H}_f(a,b,c).$$

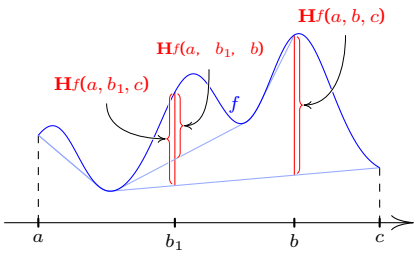


FIGURE 11. 引理3.9。

证明。 不难看出，函数 $g = \text{凸}_{[a,b]} f - \text{凸}_{[a,c]} f$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数（证明参见，例如 [11，命题 A。4]）。于是，

$$\mathbf{H}_f(a,b_1,c) - \mathbf{H}_f(a,b_1,b) = g(b_1) \leqslant \frac{b-b_1}{b-a} g(a) + \frac{b_1-a}{b-a} g(b).$$

现在注意到 $g(a) = 0$ 和 $g(b) = \mathbf{H}f(a, b, c)$。 □

命题 *3.8* 的证明。 设 $\{b_i\}_{i=1}^m \subset [a,c]$ 为一列点。我们对 m 进行归纳，证明

$$\begin{aligned}(26)\qquad &\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m)\\ &\leqslant \mathbf{cost}_f(a,b) + \mathbf{cost}_f(b,c) + \frac{1}{2}(b-a)(c-b)\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

结论显然由（26）得出。

归纳的基础情形， $m = 0$。无需证明。

归纳步骤。 不失一般性，假设 $a < b < c$ 和 $b_1 \in (a, b]$。令 $(b_i')_{i=1}^{m'}$和 $(b_i'')_{i=1}^{m''}$ 分别为 $(b_i)_{i=2}^m$ 中由小于b_1 和不小于 b_1的点组成的子序列。于是，

$$\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) = \mathbf{H}(a,b_1,c) + \mathbf{cost}_f([a,b_1],(b_i')_{i=1}^{m'}) + \mathbf{cost}_f([b_1,c],(b_i'')_{i=1}^{m''}).$$

由引理 3.9可对右端的第一项进行估计；第二项由 $\mathbf{代价}f(a,b_1)$ 估计；第三项则由归纳假设估计。因此，

$$\begin{aligned}\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) \leqslant &\mathbf{H}_f(a,b_1,b) + \frac{b_1-a}{b-a}\mathbf{H}_f(a,b,c) + \mathbf{cost}_f(a,b_1)\\ &+ \mathbf{cost}_f(b_1,b) + \mathbf{cost}_f(b,c) + \frac{1}{2}(b-b_1)(c-b)\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

注意到

- $\mathbf{H}_f(a,b_1,b) + \mathbf{cost}_f(a,b_1) + \mathbf{cost}_f(b_1,b) \leqslant \mathbf{cost}_f(a,b)$ by Prop. 3.7,
- $\mathbf{H}_f(a,b,c) \leqslant \frac{1}{2}(b-a)(c-b)\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}$ by Prop. 3.1,

证明得以完成。 □

3.3. **持久性**。 现在我们证明，$\mathbf{代价}f(a,c)$ 实际上仅集中在 (a,c) 中可数的极大开区间族上，其中$f > \mathbf{conv}_{[a,c]} f$。这一性质将确保泛函 Υ 沿着黎曼问题的一个解保持不变，并因此也将推出定理 2.10。

定义 3.10。 设 $f \in C([a,c])$。我们将 f 上方的桥族 $[a,c]$ 记为 $\mathbf{Br}f(a,c)$，它是满足 $f > \mathbf{conv}_{[a,c]} f$的极大开区间组成的可数族，见图 *12*。

命题 3.11。设 $a \leqslant c$ 和 $f \in C^{1,\,1}([a,c])$。则

$$\mathbf{cost}_f(a,c) = \sum_{(p,q)\in\mathbf{Br}(a,c)} \mathbf{cost}_f(p,q).$$

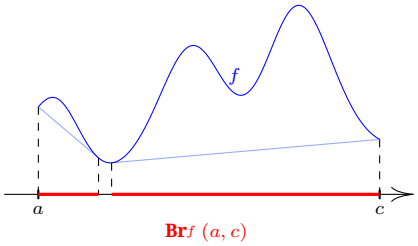


FIGURE 12. 桥的定义 $\mathbf{Br}f(a,\ c)$。

证明。 不等式“$\geqslant$”由**代价**（命题3.7）的超可加性可得。现在证明“”。对于每个，定义函数，$_q(x)\ = p\mathbf{1}_{(-\infty,p]}(x) + x\mathbf{1}_{(p,q)}(x) + q\mathbf{1}_{[q,+\infty)}(x),\quad x \in \mathbb{R}$。直接检验可知，对于任意 $(p,\ q)\ \in \mathbf{Br}f(a,\ c)$，$x,\ y,\ z \in [a,c]$, $x \leqslant y \leqslant z$，可得

$$\mathbf{H}_f(\pi_{p,q}(x), \pi_{p,q}(y), \pi_{p,q}(z)) = \begin{cases} \mathbf{H}_f(x,y,z), & y \in (p,q) \\ 0, & y \notin (p,q). \end{cases} \tag{27}$$

现在固定 $x,\ y,\ z \in [a,c],\ x \leqslant y \leqslant z$。要么 y 不属于任何桥，此时$\mathbf{H}f(x,\ y,\ z)\ = 0$；要么它属于某个唯一的桥。在这两种情况下，利用（27），可得

$$\mathbf{H}_f(x,y,z) = \sum_{(p,q)\in \mathbf{Br}_f(a,c)} \mathbf{H}_f(\pi_{p,q}(x), \pi_{p,q}(y), \pi_{p,q}(z)). \tag{28}$$

现在选取一个合并序列 $(b_i)_{i=1}^m \subset [a,c]$。对于每个 i，按（*11*）定义 $b_i^{\text{left}},\ b_i^{\text{right}}$。对于任意 $(p,\ q)\ \in \mathbf{Br}f(a,\ c)$，考虑新的合并序列 $(\pi_{p,\ q}(b_i))_{i=1}^m \subset [p,q]$，并类似地定义 $(\pi_{p,\ q}(b_i))^{\text{left}},\ (\pi_{p,\ q}(b_i))^{\text{right}}$。注意到

$$\pi_{p,q}(b_i^{\text{left}}) = (\pi_{p,q}(b_i))^{\text{left}}, \qquad \pi_{p,q}(b_i^{\text{right}}) = (\pi_{p,q}(b_i))^{\text{right}}. \tag{29}$$

将（12）中的合并代价定义与（28）结合起来，并利用（29），可得

$$\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) = \sum_{(p,q)\in \mathbf{Br}_f(a,c)} \mathbf{cost}_f([p,q],(\pi_{p,q}(b_i))_{i=1}^m) \leqslant \sum_{(p,q)\in \mathbf{Br}_f(a,c)} \mathbf{cost}_f(p,q),$$

由此可得命题陈述中的不等式“$\leqslant$”。 □

3.4. **关于通量二阶导数的稳定性估计**。 最后，我们证明 **代价**$f(a,\ c)$ 的一些稳定性估计。特别地，我们证明关于函数 f 的稳定性，命题 3.13；关于区间 $(a,\ c)$ 的稳定性，命题 3.14；以及关于 f 和关于 $(a,\ c)$ 的“组合”稳定性，命题 3.15。本文并未用到这些性质，但它们表明 **代价** 的定义相当稳健，因此 **代价** 也可用于定义 Υ，包括我们在 [2] 中处理系统的情形。

首先，我们证明以下关于**代价**的“三角不等式”。

引理 3.12. 若 $a \leqslant c$ 且 $f,\ g \in C^{1,\ 1}([a,c])$，则 **代价**$f+g(a,\ c)\ \leqslant$**代价**$f(a,\ c)\ +$**代价**$g$ $(a,\ c)$。

证明。对于任意线段 I，$\text{conv}_I(f+g)\ \geqslant \text{conv}_I f + \text{conv}_I g$。因此，对于任意$x \leqslant y \leqslant z$, $x,y,z \in [a,c]$，$\text{H}f+g(x,y,z)\ \leqslant \text{H}f(x,y,z)\ + \text{H}g(x,y,z)$。根据代价的定义，即得证。□

现在我们推导出关于通量函数扰动的**代价** 稳定性估计。

命题 3.13. 若 $a<c$ 且 $f,\ g\in C^{1,\ 1}([a,c])$，则

$$\left|\mathbf{cost}_f(a,c)-\mathbf{cost}_g(a,c)\right|\leqslant\frac{1}{2}(c-a)\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right\|_{L^1}. \tag{30}$$

证明。由引理 3.12 得到 $-$代价$_{g-f}(a,c)\ \leqslant$代价$_f(a,c)\ -$代价$_g(a,c)\ \leqslant$代价$_{f-g}(a,c)$。然后应用命题 3.4，得出 $g-f$和 $f-g$。□

现在我们给出关于区间变化的稳定性估计。我们强调，该估计的动机来自异号相互作用，并且与命题 3.8 密切相关。

命题 3.14. 设 $a\leqslant b\leqslant c,\quad f\in C^{1,\ 1}([a,c])$。则

$$\mathbf{cost}_f(a,b)\leqslant\mathbf{cost}_f(a,c)\leqslant\mathbf{cost}_f(a,b)+\frac{1}{2}\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}\left(\frac{b+c}{2}-a\right)(c-b).$$

证明。左侧不等式由超可加估计（命题 3.7）显然成立。对于右侧，利用次可加估计（命题 3.8）和二次界（命题 3.5），我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{cost}_f(a,c)&\leqslant\mathbf{cost}_f(a,b)+\mathbf{cost}_f(b,c)+\frac{1}{2}\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}(c-b)(b-a)\leqslant\\&\leqslant\mathbf{cost}_f(a,b)+\left\|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^-\right\|_{L^\infty}\left(\frac{1}{4}(c-b)^2+\frac{1}{2}(c-b)(b-a)\right).\end{aligned}$$

□

最后，我们给出一个关于通量和区间同时变化的稳定性估计。这是系统情形下的自然设定。

命题 3.15。设 $a,b_1,b_2\in\mathbb{R}$。记 $I_i=[$最小值$\{a,b_i\},$最大值$\{a,b_i\}]$，$i=1,2$。假设 $f_i\in C^{1,\ 1}(I_i),\ i=1,2$。则

$$\begin{aligned}&\left|\mathbf{cost}_{f_1}(a,b_1)-\mathbf{cost}_{f_2}(a,b_2)\right|\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{2}\left|I_1\cap I_2\right|\cdot\left\|\frac{\partial^2 f_1}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(I_1\cap I_2)}+\\&+\frac{1}{2}\max\left\{\left\|\frac{\partial^2 f_1}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty},\left\|\frac{\partial^2 f_2}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}\right\}\cdot\frac{|I_1|+|I_2|}{2}\cdot|b_2-b_1|.\end{aligned}$$

证明。若 $a=b_1$ 或 $a=b_2$，结论可由命题 3.5 得出。若 $b_1=b_2$，则问题归结为命题 3.13。

若 $a,\ b_1,\ b_2$ 互不相同，不失一般性，只需考虑两种情况：$a<b_1<b_2$ 和 $b_1<a<b_2$。

情形 $a<b_1<b_2$。首先，我们有 $I_1\cap I_2=I_1$ 并且

$$\left|\mathbf{cost}_{f_1}(a,b_1)-\mathbf{cost}_{f_2}(a,b_1)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|I_1\cap I_2\right|\cdot\left\|\frac{\partial^2 f_1}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(I_1\cap I_2)}$$

根据命题 3.13。于是，根据命题 3.14，

$$\left|\mathbf{cost}_{f_2}(a,b_1)-\mathbf{cost}_{f_2}(a,b_2)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 f_2}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}\cdot\frac{|I_1|+|I_2|}{2}\cdot(b_2-b_1).$$

情形 $b_1 < a < b_2$。根据命题 3.5，有

$$\left|\mathbf{cost}_{f_1}(a,b_1) - \mathbf{cost}_{f_2}(a,b_2)\right| \leqslant \max\{\mathbf{cost}_{f_1}(a,b_1), \mathbf{cost}_{f_2}(a,b_2)\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\max\left\{\left\|\frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty}, \left\|\frac{\partial^2 f_2}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty}\right\}(|I_1|+|I_2|)^2. \qquad \square$$

3.5. **关于通量一致收敛的下半连续性。** 以下结果本身也很有趣，但仅在第A节中使用，即在定理 A.1的证明中。

引理 3.16. 设 $f_n, f \in C([a,c])$ 一致收敛于 $f_n \to f$。则

$$\mathbf{cost}_f([a,c]) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbf{cost}_{f_n}([a,c]).$$

证明。 根据定义，对于所有 $a \leqslant p \leqslant b \leqslant q \leqslant c$，都有 $\mathbf{H}_{f_n}(p,b,q) \to \mathbf{H}_f(p,b,q)$。因此，$\mathbf{代价}_{f_n}([a,c],(b_j)_j) \to \mathbf{代价}_f([a,c],(b_j)_j)$，由此即可得出结论。$\square$

4. Nonnegativity, quadratic bound and interaction estimate for scalar conservation laws

我们现在将在第 4.1 节证明定理 2.8，并将在第 4.2 节和第 4.2节证明 4.3。更确切地说，我们仅在以下两种情形下证明定理2.9： $u^L \leqslant u^M \leqslant u^R$和 $u^L \leqslant u^R \leqslant u^M$，分别对应同号相互作用（第 4.2节）和异号相互作用（第 4.3节）。其余四种情形（见（17））可以完全类似地处理。

4.1. 非负性与二次上界。

标量情形下定理 2.8 的证明。 由 **代价**的非负性，我们立即得到 $\Upsilon(u) \leqslant \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty} \mathrm{TV}(u)^2$。然后，对（15）中的每个**代价** 项应用命题 3.5，得到

$$\Upsilon(u) \geqslant \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty}\left[\frac{1}{4}\mathrm{TV}(u)^2 - \frac{1}{4}\sum_{|u_x|(\{x\})>0}(u_-(x)-u_+(x))^2\right]$$
$$\geqslant \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty}\left[\frac{1}{4}\mathrm{TV}(u)^2 - \frac{1}{4}\mathrm{TV}(u)\sum_{|u_x|(\{x\})>0}|u_-(x)-u_+(x)|\right] \geqslant 0. \qquad \square$$

4.2. 同号相互作用。

标量情形下定理 2.9 的证明， $u^L \leqslant u^M \leqslant u^R$。 我们采用记号$a = u^L$， $b = u^R$，$c = u^M$。注意到 $\mathrm{TV}(u) = \mathrm{TV}(\hat{u})$。于是

$$\Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u}) = \mathbf{cost}_f(a,c) - \mathbf{cost}_f(a,b) - \mathbf{cost}_f(b,c) \geqslant \mathbf{H}_f(a,b,c) \tag{31}$$
$$= \frac{1}{2}\Delta\sigma(a,b,c). \tag{32}$$

其中不等式源于命题3.7。 $\square$

4.3. **异号相互作用**。

标量情形下定理2.9 的证明， $u^L \leqslant u^R \leqslant u^M$。我们先讨论证明的思路。在异号相互作用中，全变差的平方会减小，而且其减小量事实上足以单独控制 $\Delta\sigma$ 。然而，泛函 Υ中还有负的**代价**部分，该部分以某种意义累积了同号相互作用导致的速度变化，并且这一部分会增加于异号相互作用处。代价**代价**（源自命题3.8）的非平凡性质在于，这一增加同样受全变差平方减少量的控制。因此，我们两次利用全变差的减少量，见下面的（34）和（35）。

与同号相互作用的情形不同，这里我们采用记号 $a = u^L, b = u^R, c = u^M$。首先，注意到 $\mathrm{TV}(u)+\mathrm{TV}(\hat{u}) \geqslant 2(c-a), \mathrm{TV}(u)-\mathrm{TV}(\hat{u}) = 2(c-b)$，因此

$$\mathrm{TV}(u)^2 - \mathrm{TV}(\hat{u})^2 \geqslant 4(c-a)(c-b) \geqslant 4(b-a)(c-b). \tag{33}$$

根据命题 3.1 和（33），我们得到

$$\begin{aligned}\Delta\sigma(a,c,b) = \mathbf{H}_f(a,c,b) &\leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(c-b)(b-a)\\ &\overset{(33)}{\leqslant} \frac{1}{8}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(\mathrm{TV}(u)^2 - \mathrm{TV}(\hat{u})^2).\end{aligned} \tag{34}$$

接下来，将命题 3.8 应用于 **代价**$f(a,c)$，并将命题 3.5 应用于 **代价**$f(b,c)$ 和 **代价**$f(c,b)$，我们得到 **代价** 部分 Υ的变化的下界：

$$\begin{aligned}&\mathbf{cost}_f(a,b) - \mathbf{cost}_f(a,c) - \mathbf{cost}_f(c,b)\\ &\geqslant -\mathbf{cost}_f(b,c) - \mathbf{cost}_f(c,b) - \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(c-b)(b-a)\\ &\geqslant -\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(c-b)(c-a) \overset{(33)}{\geqslant} -\frac{1}{8}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(\mathrm{TV}(u)^2 - \mathrm{TV}(\hat{u})^2).\end{aligned} \tag{35}$$

Finally, we obtain

$$\begin{aligned}\Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u}) = &\overbrace{\frac{1}{8}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(\mathrm{TV}(u)^2 - \mathrm{TV}(\hat{u})^2)}^{\overset{(34)}{\geqslant}\Delta\sigma(a,c,b)}\\ &+ \underbrace{\frac{1}{8}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(\mathrm{TV}(u)^2 - \mathrm{TV}(\hat{u})^2) + \mathbf{cost}_f(a,b) - \mathbf{cost}_f(a,c) - \mathbf{cost}_f(c,b)}_{\overset{(35)}{\geqslant} 0}\end{aligned}$$

that concludes the proof. □

5. Υ IS CONSTANT IF NO INTERACTION TAKES PLACE

本节我们证明定理 2.10。证明实际上是以下命题的推论。

命题 5.1。考虑初始数据为以下形式的黎曼问题

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} a, & x < 0\\ c, & x \geqslant 0.\end{cases}$$

于是，对所有 $t > 0$，都有 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(S_t\bar{u}) = \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\bar{u})$。

证明。不失一般性，假设 $a < c$。令 $t > 0$，记为 $v = S_t \bar{u}$。

函数 $\bar{u}$ 只有一个跳跃点 $x = 0$。由命题 3.11，可得

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\bar{u}) = \mathbf{cost}_f(\bar{u}_-(0), \bar{u}_+(0)) = \mathbf{cost}_f(a,c) = \sum_{(p,q)\in \mathbf{Br}_f(a,c)} \mathbf{cost}_f(p,q). \tag{36}$$

现在记 $\mathcal{S}_\lambda = \left\{(p,\ q) \in \mathbf{Br}_f(a,\ c)\colon \frac{f(q)-f(p)}{q-p} = \lambda\right\}$，$\lambda \in \mathbb{R}$。注意，对于除可数多个 λ 之外的所有 $\mathcal{S}_\lambda = \varnothing$，以及

$$\mathbf{Br}_f(a,c) = \bigsqcup_\lambda \mathcal{S}_\lambda. \tag{37}$$

根据黎曼问题解的定义，对于 x的每个 v跳跃点，有 $\mathbf{Br}_f(v_-(x),\ v_+(x)) = \mathcal{S}_{x/t}$因此再次由命题 3.11

$$\mathbf{cost}_f(v_-(x), v_+(x)) = \sum_{(p,q)\in\mathcal{S}_{x/t}} \mathbf{cost}_f(p,q), \tag{38}$$

而对于 x的连续点 v，**代价**$_f(v_-(x)\ v_+(x)) = 0$且 $\mathcal{S}_{x/t} = \varnothing$，因此（38）也成立。对所有 x将（37）求和，并与（36）比较，即得结论。□

定理的证明 *2.10*。考虑 u 的两个相邻跃变。源自第一个跃变的任意速度与源自第二个跃变的任意速度之差至多为

$$\operatorname*{\mathbf{osc}}_{[\inf u, \sup u]} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right).$$

此外，这些跃变在空间上至少相隔 L_0。因此，在时间 t_0 之前，从不同点出发（在零时刻）的波前不会相互作用。因此，对所有 $t < t_0$，$\mathrm{TV}(S_t\bar{u}) = \mathrm{TV}(\bar{u})$，并且根据命题 5.1，还有 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(S_t\bar{u}) = \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\bar{u})$。□

Appendix A. A semi-explicit integral formula for 代价

我们在第 2.1 节中定义了 $\mathbf{H}_f(a,b,c)$、代价$_f([a,c], (b_j)_j)$、代价$_f(a,c)$，适用于 $f \in C^1([a,c])$。请注意，在较弱的假设 $f \in C([a,c])$ 下，这些定义本身仍然有意义（但第3节中证明的性质并非全部如此）。

现在我们证明一个公式（定理 A.1），该公式用一个确定性过程来表示量 **代价**$_f(a, c)$，$f \in C([a,c])$（在定义 2.4 中将其定义为上确界），并由此提供了一种构造性地计算 **代价**的方法。本文中并未用到这个公式，[7] 但我们认为它本身很有趣。

因此，令 $f \in C([a,c])$。我们定义辅助量

$$\operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f) := \sum_{I\in\mathbf{Br}_f(a,c)} |I|^2. \tag{39}$$

注意，**应力**$_{[a,c]}(f) \leqslant (c-a)^2$。我们有如下

定理 A.1。设 $f \in C([a,c])$。那么

$$\mathbf{cost}_f(a,c) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f(x) + \kappa x^2)\, d\kappa. \tag{40}$$

[7]除注 3.6 关于 **代价** 的界中常数的最优性外。

注意，上面的被积函数关于 κ是 $f \in C^{1,\ 1}([a,c])$，如果$\kappa \geqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty}$，被积函数为零。[8]对于一般的连续函数 f，对所有 $\kappa \in [0,+\infty)$，被积函数都可能非零。

注 A.2. 在当前假设下 $f \in C([a,c])$，**代价** 现在可能为无穷大，这与命题*3.4* 和命题*3.5*不同，在后两者中假设 $f \in C^{1,\ 1}([a,c])$。例如，考虑图 f 中的函数 *13*。有 $f \in C([0,1])$，且**代价**$_{[0,1]}\, f$ 有下界，该下界为虚线线段长度之和$\sum_n 1/n = +\infty$。定理 *A.1* 也考虑到了这种可能性。

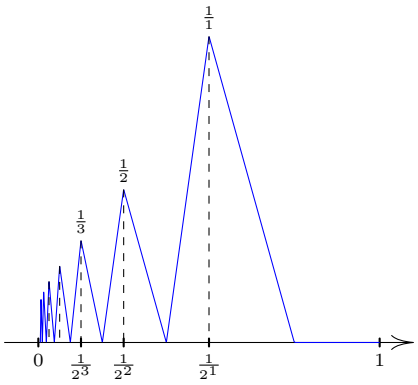


FIGURE 13. 关于注A.2。

证明策略是先研究简化的离散问题（第A.1节），其中函数 f 是分段线性的，并且相对于其节点的合并成本在所有节点排序中取最大值。然后，我们通过令节点集的精细度趋于极限继续进行（第 A.2节）。

A.1. **分段线性近似。** 对于 $X = \{x_1 < \ldots < x_m\}$，用 **PL(*X*)** 表示所有分段线性函数 $\varphi\colon\ [x_1, x_m] \to \mathbb{R}$ 其节点为 $\{x_i\}_i$，即其图像由直线段组成的连续函数，这些线段的端点位于直线 $x = x_j$上。现在我们定义（39）的离散类比。

定义 A.3。 设 $X = \{x_1 < \ldots < x_m\}$ 和 $\varphi \in \mathrm{PL}(X)$。令

$$\mathop{\mathbf{stress}}_{X}(\varphi) = \sum_{\substack{(x_i, x_{i+s}) \in \\ \mathbf{Br}_\varphi(x_1, x_m)}} \Big[(x_{i+s} - x_i)^2 - \sum_{j=1}^{s} (x_{i+j} - x_{i+j-1})^2\Big].$$

我们还引入函数 $x \mapsto x^2$ 的分段线性插值 $\square_X$，即

$$\square_X \in \mathrm{PL}(X), \quad \square_X(x_j) = x_j^2, \quad \text{for } X = \{x_1 < \cdots < x_m\}.$$

本节旨在证明以下结果。

[8]这为命题 3.5 提供了另一种证明。

命题 A.4. 设 $X = \{x_1 < \ldots < x_m\}$, $\varphi \in \mathrm{PL}(X)$。设 $(b_j)_{j=1}^{m-2}$ 是$(x_i)_{i=2}^{m-1}$ 的一个排列。那么

$$\mathbf{cost}_{\varphi}([x_1, x_m], (b_j)_{j=1}^{m-2}) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathop{\mathbf{stress}}_{X}(\varphi + \kappa\Box_X)\, d\kappa.$$

此外，存在一个排列使等式成立。（最优排列由下文引理 *A.10* 中的贪心算法给出。）

注 A.5. 可以看出，命题*A.4* 让人想起定理*A.1* ，而定义*A.3* 则比(39)略微复杂一些。特别是，桥内基本线段的平方会被扣除。可以将此非正式地理解为排除不可达区域：在命题*A.4*的离散情形中，我们只允许从 X进行合并。

首先，我们证明一个简单的辅助引理。

引理 A.6. 设 $X \subset \mathbb{R}$ 为有限集，且 $\varphi \in \mathrm{PL}(X)$。令 $a < b < c$ 为 X 的任意三个元素，并令 $b \in (p, q) \in \mathbf{Br}\varphi(a, c)$。则

$$(q-b)(b-p) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\mathop{\mathbf{stress}}_{X\cap[a,c]}(\varphi) - \mathop{\mathbf{stress}}_{X\cap[a,b]}(\varphi) - \mathop{\mathbf{stress}}_{X\cap[b,c]}(\varphi)\Big).$$

证明。注意，右侧括号内的表达式实际上是若干区间长度的平方的代数和。经过所有抵消后，它化简为以下形式

$(q-p)^2 -$ 位于 $[p,b]$ 内的若干不相交子区间长度的平方和，位于 $[b,q]$ 内的若干不相交子区间长度的平方和.

右侧方框中的量分别由上界 $(b-p)^2$ 和 $(q-b)^2$，控制，由此得证。□

引理 A.7. 设 $X \subset \mathbb{R}$ 为有限集且 $\varphi \in \mathrm{PL}(X)$。设 $a < b < c$ 为 X 中任意三个元素。那么对每个 κ，存在右导数 $\partial_\kappa^+ \mathbf{H}\varphi+\kappa\Box_X(a, b, c)$，并且

(i) *if* $\mathbf{H}_{\varphi+\kappa\Box_X}(a,b,c) = 0$, *then* $\partial_\kappa^+ \mathbf{H}_{\varphi+\kappa\Box_X}(a,b,c) = 0$;
(ii) *if* $\mathbf{H}_{\varphi+\kappa\Box_X}(a,b,c) > 0$, *then* $\partial_\kappa^+ \mathbf{H}_{\varphi+\kappa\Box_X}(a,b,c) = -(q-b)(b-p)$, *where the interval* $(p,q) \in \mathbf{Br}_{\varphi+\kappa\Box_X}(a,c)$ *is the unique bridge such that* $b \in (p,q)$.

证明。注意，如果对某个 $\kappa = \kappa_0$，$\mathrm{H}\varphi+\kappa\Box_X(a,b,c)$ 为零，那么对每个 $\kappa > \kappa_0$，它也为零。这就证明了 (i)。现在证明 (ii)。由于 $\varphi, \Box_X \in \mathrm{PL}(X)$，区间 (p,q) 对于 $\varphi + (\kappa+\delta)\Box_X$ 仍然是一个桥，即 $b \in (p,q) \in \mathrm{Br}\varphi+(\kappa+\delta)\Box_X(a,c)$，当$\delta > 0$ 足够小时成立。因此，对于 $f \in \{\varphi + \kappa\Box_X, \varphi + (\kappa+\delta)\Box_X\}$，有

$$\mathbf{H}_f(a,b,c) = \mathbf{H}_f(p,b,q) = f(b) - \tfrac{q-b}{q-p}f(p) - \tfrac{b-p}{q-p}f(q),$$

因此

$$\mathbf{H}_{\varphi+(\kappa+\delta)\Box_X}(a,b,c) - \mathbf{H}_{\varphi+\kappa\Box_X}(a,b,c) = \delta\Big[\Box_X(b) - \tfrac{q-b}{q-p}\Box_X(p) - \tfrac{b-p}{q-p}\Box_X(q)\Big]$$
$$= -\delta(q-b)(b-p),$$

其中，最后一个等式成立是因为 $p, b, q \in X$。 □

引理 A.8。 在引理*A.7*的

$$\begin{aligned}0 &\geqslant \partial_\kappa^+ \mathbf{H}_{\varphi+\kappa\square_X}(a,b,c)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\Big(\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[a,b]}(\varphi+\kappa\square_X)+\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[b,c]}(\varphi+\kappa\square_X)-\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[a,c]}(\varphi+\kappa\square_X)\Big).\end{aligned}$$

证明。 结合引理 A.7与引理 A.6。 □

引理 A.9。 令 $X=\{x_1<\ldots<x_m\}$, $\varphi\in\mathrm{PL}(X)$。令 $(b_j)_{j=1}^{m-2}$ 为$(x_i)_{i=2}^{m-1}$ 的任意排列。则右导数存在

$$\partial_\kappa^+ \mathbf{cost}_{\varphi+\kappa\square_X}([x_1,x_m],(b_j)_{j=1}^{m-2}) \geqslant -\frac{1}{2}\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X}(\varphi+\kappa\square_X). \tag{41}$$

证明。 利用公式 (12) 和引理A.8，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_\kappa^+ \mathbf{cost}_{\varphi+\kappa\square_X}([x_1,x_m],(b_j)_{j=1}^{m-2}) &= \sum_{j=1}^{m-2}\partial_\kappa^+\mathbf{H}_{\varphi+\kappa\square_X}(b_j^{\mathrm{left}},b_j,b_j^{\mathrm{right}})\\ \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-2}\Big(&\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[b_j^{\mathrm{left}},b_j]}+\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[b_j,b_j^{\mathrm{right}}]}-\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[b_j^{\mathrm{left}},b_j^{\mathrm{right}}]}\Big)(\varphi+\kappa\square_X),\end{aligned}$$

其中 b_j^{left}， b_j^{right} 如定义2.3所述。通过望远镜求和技巧，仿照引理 3.2证明中的计算，可将后一个和化简为

$$\Big[\operatorname*{\mathbf{stress}}_{\{x_1,x_2\}}+\ldots+\operatorname*{\mathbf{stress}}_{\{x_{m-1},x_m\}}-\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X}\Big](\varphi+\kappa\square_X),$$

其中除最后一项外，所有项都消失了。证明完毕。 □

在下面的引理 A.10 和 A.11 中，我们证明了某种排序分别满足引理 A.8和 A.9中的不等式。

引理 A.10。 设 $X=\{x_1<\ldots<x_m\}$, $\varphi\in\mathrm{PL}(X)$。令 $(b_j)_{j=1}^{m-2}$ 为 $(x_i)_{i=2}^{m-1}$ 的排列，该排列通过以下贪心算法得到：

- 我们归纳地选择 b_1、…、b_{m-2};
- 在第 j^{th} 步，选择 b_j，使得量

$$\frac{\mathbf{H}_\varphi\left(b_j^{\mathrm{left}},b_j,b_j^{\mathrm{right}}\right)}{(b_j^{\mathrm{right}}-b_j)(b_j-b_j^{\mathrm{left}})} \tag{42}$$

在所有可能的剩余选择中取最小值，其中 b_j^{left}， b_j^{right} 如定义 *2.3*所示。

Then

$$\begin{aligned}&\partial_\kappa^+\mathbf{H}_{\varphi+\kappa\square_X}\left(b_j^{\mathrm{left}},b_j,b_j^{\mathrm{right}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\Big(\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[b_j^{\mathrm{left}},b_j]}+\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[b_j,b_j^{\mathrm{right}}]}-\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X\cap[b_j^{\mathrm{left}},b_j^{\mathrm{right}}]}\Big)(\varphi+\kappa\square_X).\end{aligned} \tag{43}$$

证明。 固定 $\kappa\geqslant 0$。首先假设（43）的右端等于 0。则引理 A.8表明左端也等于 0。

现在假设（43）的右端为负。则 $\mathbf{H}_{\varphi+\kappa\square_X}\left(b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}}\right) > 0$，从而 $\mathbf{H}\varphi(b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}}) > 0$。根据 b_j的“贪心”选择，对所有$x \in X \cap (b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}})$ 我们都有

$$\frac{\varphi(x) - \left(\mathbf{conv}_{[b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}}]}\varphi\right)(x)}{(b_j^{\text{right}} - x)(x - b_j^{\text{left}})} \geqslant \frac{\mathbf{H}_{\varphi}\left(b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}}\right)}{(b_j^{\text{right}} - b_j)(b_j - b_j^{\text{left}})}$$

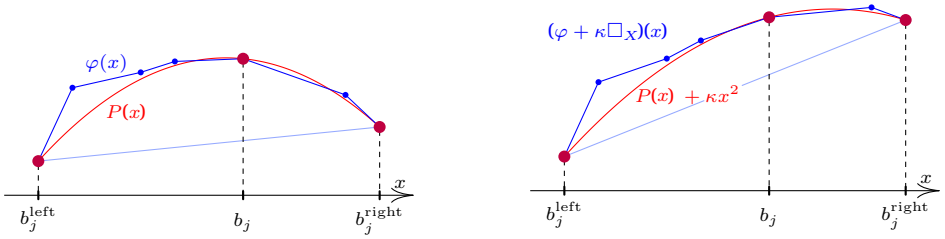
i.e.

$$\varphi(x) \geqslant \left(\underset{[b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}}]}{\mathbf{conv}}\varphi\right)(x) + \frac{\mathbf{H}_{\varphi}\left(b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}}\right)}{(b_j^{\text{right}} - b_j)(b_j - b_j^{\text{left}})}(b_j^{\text{right}} - x)(x - b_j^{\text{left}}), \tag{44}$$

等号在 $x = b_j$ 处成立。注意，在（44）中，等号对 $x = b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}}$ 也成立。由于（44）右端的第二项在内部节点 $X \cap (b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}})$ 上严格为正，函数 $\varphi \in \mathrm{PL}(X)$ 在 $X \cap (b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}})$ 上严格大于其凸包络，因此，$\mathbf{conv}^{[b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}}]}\varphi$ 是仿射函数。（44）的右端因此是一个二次函数，我们将其记为 $P(x)$，见图 14（a）。于是

$$(\varphi + \kappa\square_X)(x) \geqslant P(x) + \kappa x^2, \quad x \in X \cap [b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}}]. \tag{45}$$

等号对 $x = b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}}$ 成立。由于我们处于 $\mathbf{H}\varphi+\kappa\square_X(b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}})$ 情形



(a) (b)

FIGURE 14. 引理 A.10 的证明。

> 0，抛物线 $P(x) + \kappa x^2$ 是严格凹的，见图 14(b)。考虑到这一点，利用（45），我们可推出

$$\mathbf{Br}_{\varphi+\kappa\square_X}(b_j^{\text{left}}, b_j) = \{(b_j^{\text{left}}, b_j)\}, \quad \mathbf{Br}_{\varphi+\kappa\square_X}(b_j, b_j^{\text{right}}) = \{(b_j, b_j^{\text{right}})\}$$
$$\mathbf{Br}_{\varphi+\kappa\square_X}(b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}}) = \{(b_j^{\text{left}}, b_j^{\text{right}})\}.$$

结合引理 A.7 的第（ii）项，可得（43）。 □

引理 A.11。 设引理 *A.10* 的假设成立。那么

$$\partial_\kappa^+ \mathbf{cost}_{\varphi+\kappa\square_X}([x_1, x_m], (b_j)_{j=1}^{m-2}) = -\frac{1}{2}\underset{X}{\mathbf{stress}}(\varphi + \kappa\square_X). \tag{46}$$

证明。 仿照引理 A.9 的证明，将不等式替换为等式（根据引理A.10）。□

根据我们刚刚推导出的估计，现在可以得出命题A.4。

命题*A.4*的证明。 任取一个排列 $(b_j)_{j=1}^{m-2}$ $(x_i)_{i=2}^{m-1}$。注意到$\varphi+\kappa\Box_X$ 当 κ 足够大时是凸的，因此两个函数

$$F(\kappa) := \mathbf{cost}_{\varphi+\kappa\Box_X}([x_1,x_m],(b_j)_{j=1}^{m-2}), \quad G(\kappa) := \operatorname*{\mathbf{stress}}_X(\varphi+\kappa\Box_X)$$

当 κ 充分大时为零。根据构造， F 是连续的；此外，由于f， $\Box_X \in \mathrm{PL}(X)$， F 是分段线性的，而 G 是分段常数。因此

$$\mathbf{cost}_{\varphi}([x_1,x_m],(b_j)_{j=1}^{m-2}) = F(0) = -\int_0^{+\infty} \partial_\kappa^+ F(\kappa)\,d\kappa \overset{\text{Lemma A.9}}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} G(\kappa)\,d\kappa.$$

在特殊情形 $(b_j)_j$ 由引理 A.10中的贪心算法给出时，根据引理 A.11，我们得到“=”，而非“⩽”。□

A.2. **连续情形**。 下面我们先给出引理 A.12和A.13 中的**“离散”和“连续”应力**’（回顾（39）和定义 A.3）。

引理 A.12. 设 $a<c$和 $X_N=\{a=x_1^N<\ldots<x_{m_N}^N=c\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的有限子集，对每个 $N=1,\ 2$.....假设$\max_i (x_{i+1}^N - x_i^N) \to 0$当 $N\to\infty$时成立。设$f\in C([a,c])$，并令 f_N为 f在节点 X_N处的分段线性插值。那么，对每个 $\delta>0$

$$\liminf_{N\to\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_{X_N}(f_N) \geqslant \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f) \geqslant \limsup_{N\to\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_{X_N}(f_N+\delta\Box_{X_N}). \tag{47}$$

证明。 注意，根据定义 A.3 和（39），$\max_i (x_{i+1}^N - x_i^N) \to 0$ 意味着

$$\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X_N}(f_N) - \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f_N) \to 0, \quad \operatorname*{\mathbf{stress}}_{X_N}(f_N+\delta\Box_{X_N}) - \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f_N+\delta\Box_{X_N}) \to 0$$

由于 $N\to\infty$，因此我们将通过将离散应力 $\mathbf{stress}^{X_N}$ 替换为$\mathbf{stress}^{[a,c]}$，来证明（47）。

对于每个 $h\in C([a,c])$，记

$$d_h(x) = \operatorname{dist}\Big(x; [a,c]\setminus \bigcup_{I\in \mathbf{Br}_h(a,c)} I\Big).$$

注意

$$d_h(x) = \operatorname{dist}\left(x, \left\{y\colon h(y) = \big(\operatorname*{\mathbf{conv}}_{[a,c]} h\big)(y)\right\}\right) \tag{48a}$$

$$= \operatorname{dist}(x,\{y\colon d_h(y)=0\}) \tag{48b}$$

and

$$\operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(h) = 4\int_a^c d_h(x)\,dx. \tag{49}$$

我们将证明

$$\forall x\in[a,c]\colon \quad \liminf_{N\to\infty} d_{f_N}(x) \geqslant d_f(x) \geqslant \limsup_{N\to\infty} d_{f_N+\delta\Box_{X_N}}(x). \tag{50}$$

于是（49）和 Fatou 引理推出了（47）中的第一个不等式，而（49）和反向 Fatou引理结合界 $0\leqslant d_{(\cdot)}\leqslant c-a$则推出了（47）中的第二个不等式。

由于 $f_N\to f$一致地，因此我们也有 $f_N - \textbf{收敛}_{[a,c]}\, f_N \to f - \textbf{收敛}_{[a,c]}\, f$一致地成立，因此由（48a），可得（50）中的第一个不等式。

现在我们将证明，对于任意 $z \in [a,c]$ 满足 $d_f(z) = 0$，存在一个序列$z_N \to z$使得 $z_N \in X_N$并且 $d_{f_N+\delta\square_{X_N}}(z_N) = 0$。由（50）中的第二个不等式可由（48b）推出。

固定 $z \in [a,c]$, $d_f(z) = 0$。不失一般性，假设 $z = 0$和 $f(z) = 0$。存在一个数 $L \in \mathbb{R}$，使得对于所有 x，都有 $f(x) \geqslant Lx$。令 $g(x) = f(x) - Lx + \delta x^2$。对于每个 N，任选 $z_N \in X_N$作为 g在 X_N上的最小化点。

由于 g 是连续的，且 X_N 正在逼近每个点，因此 $g(z_N) \to 0$。根据定义，对于所有 x，都有 $g(x) \geqslant \delta x^2$。于是还有 $|z_N - z| = |z_N| \leqslant \delta^{-1/2}\sqrt{g(z_N)} \to 0$。

现在我们证明 $d_{f_N+\delta\square_{X_N}}(z_N) = 0$。由于 z_N是一个最小化点，对于每个$x \in X_N$，我们有以下不等式

$$\begin{array}{ccc} f(x) + \delta x^2 & \geqslant & f(z_N) + \delta z_N^2 + L(x - z_N) \\ \| & & \| \\ f_N(x) + \delta\square_{X_N}(x) & \geqslant & f_N(z_N) + \delta z_N^2 + L(x - z_N), \end{array} \tag{51}$$

因此，利用 f_N，$\square_{X_N} \in \mathrm{PL}(X_N)$，不等式 (51) 对每个$x \in [a,c]$都成立，且当 $x = z_N$ 时取等号。因此，(51) 右端是 $f_N + \delta\square_{X_N}$图像的一条支撑直线，从而证明了 $d_{f_N+\delta\square_{X_N}}(z_N) = 0$。 □

引理 A.13。 在与引理 *A.12*相同的设定下，对几乎处处的 $\kappa \in \mathbb{R}$，有

$$\operatorname*{\mathbf{stress}}_{X_N}(f_N + \kappa\square_{X_N}) \to \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f(x) + \kappa x^2).$$

证明。 令 $f_\kappa(x) = f(x) + \kappa x^2$。注意到 $\kappa \mapsto \mathbf{stress}^{[a,c]}(f_\kappa)$ 是非递增的。因此，对几乎处处的 $\kappa \in \mathbb{R}$，$\mathbf{stress}^{[a,c]}(f_{\kappa-\delta}) \to \mathbf{stress}^{[a,c]}(f_\kappa)$ 由 $\delta \searrow 0$可得。但对每个 κ 及 $\delta > 0$，根据引理 A.12，有

$$\begin{aligned} \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f_{\kappa-\delta}) &\geqslant \limsup_{N\to\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_{X_N}(f_N + \kappa\square_{X_N}) \\ &\geqslant \liminf_{N\to\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_{X_N}(f_N + \kappa\square_{X_N}) \geqslant \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f_\kappa). \end{aligned}$$ □

现在我们可以利用辅助引理 A.14 推导出定理 A.1中的所需公式。

引理 A.14。设 $X = \{a = x_1 < \ldots < x_m = c\}$ 和 $f \in C([a,c])$。令$f_X \in \mathrm{PL}(X)$为以 X 中的节点为节点的 f 的分段线性插值。那么

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_X(f_X + \kappa\square_X)\, d\kappa \leqslant \mathbf{cost}_f(a,c).$$

证明。令 $(b_j)_{j=1}^{m-2}$ 为由引理 A.10中的贪心算法应用于 $\varphi = f_X$所得的 $(x_i)_{i=2}^{m-1}$ 的排列。于是

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_X(f_X + \kappa\square_X)\, d\kappa = \mathbf{cost}_{f_X}([a,c]; (b_j)_{j=1}^{m-2}) \leqslant \mathbf{cost}_f([a,c]; (b_j)_{j=1}^{m-2}),$$

其中，上述不等式成立是因为对于所有 x、y、$z \in X$，$\mathbf{H}f_X(x,\ y,\ z) \leqslant \mathbf{H}f(x,\ y,\ z)$。根据**代价**$f(a,\ c)$的定义，即可得出结论。□

定理的证明 *A.1*。 我们得到如下不等式

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \operatorname*{\mathbf{stress}}_{[a,c]}(f(x) + \kappa x^2)\, d\kappa \leqslant \mathbf{cost}_f(a,c). \tag{52}$$

这是引理 A.13、 A.14以及 Fatou 引理的推论。

现在我们来证明反向不等式。首先假设，对于某些 $\kappa_0 > 0$,$f(x) + \kappa_0 x^2$ 是凸的。[9]

固定 $N \in \mathbb{N}$。选取有限个点 b_1, b_2, $\ldots \in [a,c]$，使得

$$\mathbf{cost}_f(a,c) < \mathbf{cost}_f([a,c],(b_j)_j) + 1/N. \tag{53}$$

不失一般性，我们可以假设：

(i) 对每个 $x \in [a,c]$，都存在 b_i 使得 $|x - b_i| < 1/N$。

(ii) 对每个 i，**凸包**$_{[b_i^{\text{left}}, b_i^{\text{right}}]}$ f 是仿射的，如果 $b_i^{\text{left}} < b_i^{\text{right}}$。

事实上，若 (i) 不成立，只需通过添加更多点来扩充序列 $(b_j)_j$。这只会使 (53) 中右端项变大。若 (ii) 不成立，取 p_i, q_i 使得 $b_i \in (p_i, q_i) \in \mathbf{Br} f(b_i^{\text{left}}, b_i^{\text{right}})$。于是将 p_i, q_i 插入序列 $(b_j)_j$ 中，置于 b_i之前。这样不会改变合并成本。

令 $X_N = \{b_j\}_j$，并令 $f_N \in \mathrm{PL}(X_N)$ 为 f 在节点 X_N 处的分段线性插值。根据上面的性质 (ii),

$$\mathbf{H}_f(b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}}) = \mathbf{H}_{f_N}(b_j^{\text{left}}, b_j, b_j^{\text{right}}) \tag{54}$$

因此也有

$$\begin{aligned}\mathbf{cost}_f(a,c) - \frac{1}{N} &\overset{(53)}{\leqslant} \mathbf{cost}_f([a,c],(b_j)_j) \overset{(54)}{=} \mathbf{cost}_{f_N}([a,c],(b_j)_j)\\ &\overset{\text{Prop. A.4}}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underset{X_N}{\mathbf{stress}}(f_N + \kappa \square_{X_N})\, d\kappa.\end{aligned}$$

注意，最后一项中的被积函数是$f(x) + \kappa x^2$的分段线性插值，当 $\kappa \geqslant \kappa_0$时它是凸的。因此，当$\kappa \geqslant \kappa_0$时，被积函数等于 0。于是，我们可以结合引理 A.13 （由于上面的 (i)，该引理适用）和控制收敛定理，得到

$$\mathbf{cost}_f(a,c) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underset{[a,c]}{\mathbf{stress}}(f(x) + \kappa x^2)\, d\kappa$$

这就完成了 $f(x) + \kappa_0 x^2$ 为凸时的证明。

现在考虑一般情形 $f \in C([a,c])$。令

$$f_\kappa(x) = f(x) + \kappa x^2, \quad g_\kappa(x) = \Big(\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_\kappa\Big)(x) - \kappa x^2 \leqslant f(x),$$

见图 15。我们断言

$$\underset{[a,c]}{\mathbf{stress}}(g_\kappa(x) + \kappa' x^2) = \begin{cases} \mathbf{stress}_{[a,c]}(f_{\kappa'}), & \kappa' < \kappa, \\ 0, & \kappa' \geqslant \kappa. \end{cases} \tag{55}$$

假设已证明（55）。由于 $g_\kappa(x) + \kappa x^2$ 是凸的，根据证明的第一部分，我们可以将定理 A.1 应用于 g_κ，并得到

$$\mathbf{cost}_{g_\kappa}(a,c) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underset{[a,c]}{\mathbf{stress}}(g_\kappa(x) + \kappa' x^2)\, d\kappa'. \tag{56}$$

[9]情况并非总是如此，例如，考虑 $f(x) = -|x|$ 在 $[-1,1]$上。

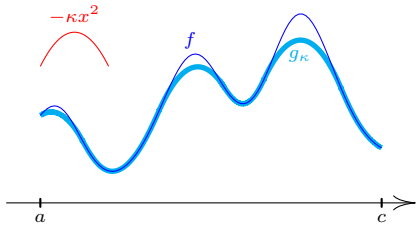


FIGURE 15. 关于 g_κ的定义。

我们有 $\|f-g_\kappa\|_{L^\infty} = \|f_\kappa - \text{凸}_{[a,c]} f_\kappa\|_{L^\infty} \xrightarrow{\kappa\to+\infty} 0$。事实上，设 ρ_ε 是一个磨光子，使得对于每个满足 $\deg(p) \leqslant 2$ 的多项式 p，都有 $p * \rho_\varepsilon = p$，因此$f_\kappa * \rho_\varepsilon = ($
$f * \rho_\varepsilon \quad = \quad * \quad +\kappa x^2$ 于: ρ_ε 因此 $_{2\ \varepsilon}\ f_\kappa$

$$f_\kappa - \underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_\kappa \leqslant 2\|\overbrace{f_\kappa - f_\kappa^\varepsilon}^{=f-f^\varepsilon}\|_{L^\infty} + \overbrace{f_\kappa^\varepsilon - \underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_\kappa^\varepsilon}^{=0 \text{ if } \kappa \geqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial\ f_\kappa}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}}$$

现在利用 **代价**关于一致收敛的下半连续性，以及引理 3.16 得到)

$$\mathbf{cost}_f(a,c) \leqslant \liminf_{\kappa\to+\infty} \mathbf{cost}_{g_\kappa}(a,c) \overset{(56)}{=} \liminf_{\kappa\to+\infty} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underset{[a,c]}{\mathbf{stress}}(g_\kappa(x)+\kappa' x^2)\, d\kappa'.$$

利用（55），我们得到与（52）相反的不等式，从而完成定理的证明。

剩下需要证明（55）。固定 $\kappa' \geqslant 0$。若 $\kappa' \geqslant \kappa$，$g_\kappa(x) + \kappa' x^2$ 是凸的，因此（55）成立。现在假设 $\kappa' < \kappa$。我们将推导出等式

$$\mathbf{Br}_{g_\kappa(x)+\kappa' x^2}(a,c) = \mathbf{Br}_{f_{\kappa'}}(a,c) \tag{57}$$

由此可得（55）。

首先，我们有

$$(\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_{\kappa'})(x) + (\kappa-\kappa')x^2 \leqslant f_{\kappa'}(x) + (\kappa-\kappa')x^2 = f_\kappa(x).$$

上式左端是凸的，因此

$$\big(\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_{\kappa'}\big)(x) \leqslant \big(\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_\kappa\big)(x) - (\kappa-\kappa')x^2 = \overbrace{g_\kappa(x)}^{\leqslant f(x)} + \kappa' x^2 \leqslant f_{\kappa'}(x),$$

因此，对所有项取凸$_{[a,c]}$，得到

$$\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}(g_\kappa(x)+\kappa' x^2) = \underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_{\kappa'}.$$

由于 $g_\kappa(x)+\kappa' x^2 \leqslant f_{\kappa'}(x)$，为了证明（57），现在只需证明以下蕴含关系

$$\forall x_0 \in [a,c]\colon \quad g_\kappa(x_0) + \kappa' x_0^2 = \underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}(f_{\kappa'})(x_0) \quad \Rightarrow \quad f_{\kappa'}(x_0) = \underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}(f_{\kappa'})(x_0).$$

因此，设 x_0 满足该蕴含关系的前提，则存在 L 使得

$$\forall x \in [a,c]\colon \quad g_\kappa(x) + \kappa' x^2 \geqslant g_\kappa(x_0) + \kappa' x_0^2 + L(x-x_0).$$

将 g_κ 的定义代入后一个不等式，得到

$$(\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_\kappa)(x) \geqslant (\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_\kappa)(x_0) + (\kappa-\kappa')(x^2-x_0^2) + L(x-x_0). \tag{58}$$

(58) 中的右端是开口向上的抛物线，它小于或等于 $\mathbf{conv}_{[a,c]} f_\kappa$，且当 $x = x_0$ 时取等号。因此，$\mathbf{conv}_{[a,c]} f_\kappa$ 在 x_0 的某邻域内不可能是仿射函数，故 $f_\kappa(x_0) = (\mathbf{conv}_{[a,c]} f_\kappa)(x_0)$。所以

$$f_\kappa(x) \geqslant (\underset{[a,c]}{\mathbf{conv}}\, f_\kappa)(x) \overset{(58)}{\geqslant} f_\kappa(x_0) + (\kappa - \kappa')(x^2 - x_0^2) + L(x - x_0)$$

因此$f_{\kappa'}(x) \geqslant f_{\kappa'}(x_0)+L(x-x_0)$。我们推导出$f_{\kappa'}(x_0) = \mathbf{凸包}_{[a,c]}(f_{\kappa'})(x_0)$。 □

注 A.15。我们在注*2.7* 中提到，**代价** 与 $\mathcal{A}$ 中的量 [14]之间存在某种类比。还可以证明，如果将 $|I|^2$ 替换为 $|I|^3$，那么定理*A.1* 中的公式恰好给出 $\mathcal{A}(a,c) = \left\| f - \mathbf{凸包}_{[a,c]} f \right\|_{L^1([a,c])}$，而不是$\mathbf{代价}_{[a,c]} f$。

References

[1] Fabio Ancona 和 Andrea Marson。《一般非线性双曲系统中Glimm格式的尖锐收敛速率》。*Communications in Mathematical Physics*，302(3):581–630，2011年1月。[2] Egor Baitenov 和 Stefano Modena。《双曲守恒律系统的代价泛函》。2026年。[3] Stefano Bianchini。《一般双曲系统的相互作用估计与Glimm泛函》。*Discrete and Continuous Dynamical Systems*，9(1):133–166，2003年。[4] Stefano Bianchini、Paolo Bonicatto 和 Elio Marconi。《标量多维守恒律的拉格朗日方法》，2017年。cvgmt预印本。[5] Stefano Bianchini 和 Alberto Bressan。《联系缩短曲线与黏性守恒律的Lyapunov泛函》。*Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*，51(4):649–662，2002年11月。[6] Stefano Bianchini 和 Alberto Bressan。《非线性双曲系统的消失黏性解》。*Annals of Mathematics*，161(1):223–342，2005年1月。[7] Stefano Bianchini 和 Elio Marconi。《标量守恒律中的熵集中》。*Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*，9(1):73–88，2016年。cvgmt预印本。[8] Stefano Bianchini 和 Elio Marconi。《一维空间中标量守恒律的 L^∞-熵解结构》。*Archive for Rational Mechanics and Analysis*，226(1):441–493，2017年6月。[9] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。《标量守恒律的一个二次泛函》。*Journal of Hyperbolic Differential Equations*，11(02):355–435，2014年6月。[10] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。《守恒律系统的二次相互作用泛函：一个案例研究》。*Bulletin of the Institute of Mathematics of Academia Sinica(New Series)*，9(3):487–546，2014年9月。[11] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。《一般守恒律系统的二次相互作用泛函》。*Communications in Mathematical Physics*，338(3):1075–1152，2015年5月。[12] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。《Glimm格式的收敛速率》。*Bulletin of the Institute of Mathematics of Academia Sinica (New Series)* 11 1 235 300, 2016 , ( ): – 3 月。[13] Alberto Bressan。《*Hyperbolic systems of conservation laws: the one-dimensional Cauchy problem* 2000 》。牛津大学出版社，。[14] Laura Caravenna。《基于熵的Glimm型泛函》。*Journal of Hyperbolic Differential Equations* 05 03 643 662, 2008 , ( ): – 9 月。[15] C. M. Dafermos。《守恒律双曲系统中的广义特征线》。*Archive for Rational Mechanics and Analysis*，107(2):127–155，1989年。[16] James Glimm。《非线性双曲方程组的大范围解》。*Communications on Pure and Applied Mathematics* 18 4 697 715, 1965 , ( ): – 11 月。[17] Tai-Ping Liu。《 Glimm 格式的确定性版本》。*Communications in Mathematical Physics* 57 2 135 148, 1977 , ( ): – 6 月。[18] Elio Marconi。《特殊定义域中 Aviles–Giga 泛函最小化点的刻画》。*Archive for Rational Mechanics and Analysis*，242(2):1289–1316，2021年8月。

[19] Elio Marconi。《具有有限熵产生的标量守恒律弱解的结构》。*Calculus of Variations and Partial Differential Equations*，61(1)，2022年1月。[20] Stefano Modena。《*Interaction functionals Glimm approximations and Lagrangian structure of BV solutions for Hyperbolic Systems of Conservation Laws*》。博士论文，的里雅斯特国际高等研究学院，2015年。[21] Stefano Modena。《守恒律系统的“向前时间”二次势函数》。*Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*，24(5)，2017年8月。[22] Stefano Modena。《守恒律系统的拉格朗日表示：综述》。载于 *Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems II. HYP 2016*，第237卷，*Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*，第335–347页。施普林格国际出版公司，2018年。

GSSI, I-67100 L'Aquila, Italy*Email address*: egor.baitenov@gssi.it, stefano.modena@gssi.it