arXiv:2611.30664v1 [math.AP] 23 Nov 2026

双曲守恒律系统的代价泛函

EGOR BAITENOV 和 STEFANO MODENA

Abstract. 对于双曲守恒律系统（不对通量作任何真正非线性或线性退化假设），我们构造了一个二次相互作用泛函，它控制相互作用过程中波前速度的变化，并且在时间上是局部的。这将 [3] 的分析从标量守恒律推广到 $n \times n$ 系统。

1. Introduction

我们考虑 $n \times n$ 守恒律系统

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

带有初始数据

$$u|_{t=0} = \bar{u}, \tag{2}$$

对于未知量 $u\colon [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$。这里 $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是给定的通量。我们假设 Ω 是开集，f 光滑，具有一致有界的二阶导数，并且严格双曲的，即对于每个 $u \in \Omega$，$\nabla f(u)$ 都具有 n 个互不相同的实特征值

$$\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_n(u).$$

N真 i性 linearity （GNL） or linear d退化 (LD) 假设 tion is made on f 。我们在 Bianchini 与 Bressan [7], 的消失黏性框架下工作，即存在一个子集 $\mathcal{D} \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$，它包含所有全变差充分小、且左状态 $u(-\infty)$ 属于某个固定紧集 $K \subset \Omega$ 的有界变差映射，以及一个 Lipschitz 半群

$$S\colon [0,+\infty) \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \qquad (t,\bar{u}) \mapsto S_t\bar{u}$$

使得对每一个 $\bar{u} \in \mathcal{D}$，$u(t,\ x) := S_t\bar{u}$ 是柯西问题（1）–（2）的（消失黏性）解。

我们证明如下两个主要定理，目前以相当非正式的方式陈述。它们断言存在一个泛函 Υ，并具有若干性质。第一个包含 Υ的基本 性质，第二个包含一份附加性质列表。

定理 A. 存在一个时间局部 泛函

$$\Upsilon\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},$$

使得

Date: 2026年11月24日。

(i) 二次界：$\Upsilon(u) = \mathcal{O}(1)$ 全变差$(u)^2$ *(*即 Υ 关于其自变量的全变差是二次的*)*，[1]*(ii)* 相互作用估计：每次 波前间相互作用 Υ 都会使其减小，且减小量限制了 速度变化 (涉及相互作用的波前的速度)，*(iii)* 持久性：$\Upsilon(S_t u) = \Upsilon(u)$，若 u 是分段常数（跳跃在空间上均匀分离），且 t 足够小。

定理 B。泛函 Υ 满足以下附加性质：

（*i*）黎曼切割：Υ 在黎曼切割两侧非递增。（*ii*）逼近：$\Upsilon(u) = \sup_v \Upsilon(v)$，其中上确界取遍所有 v 为 u的分段常数采样。（*iii*）稳定性：对于每个Φ: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ 利普希茨，$|\Upsilon(u) - \Upsilon(\Phi(u))| = \mathcal{O}(1)(1 + M^2)M \|\Phi - id\|_{W^{1,\infty}}$，其中 $M := \max\{TV(\bar{u}), TV(\Phi \circ u)\}$ 且 $id(p) \equiv p$。（*iv*）下半连续性：若 $u_m \to u$ 属于 L^1_{loc}，则 $\Upsilon(u) \leqslant \liminf_m \Upsilon(u_m)$。（*v*）李雅普诺夫性质：对于每个 $\bar{u} \in \mathcal{D}$，$t \mapsto \Upsilon(S_t \bar{u})$均非递增。（*vi*）不变性：$\Upsilon$ 在自变量的重新参数化下保持不变。

定理 A 在标量情形下得到了证明 $n = 1$ 发表于 [3] (其中 $\mathcal{D}$ = 有界变差$(\mathbb{R}; \Omega)$)。本文将标量理论推广到系统情形。关于构造 Υ 以及证明 定理 A 的核心思想本质上是标量的，且已包含在 [3]中。推广到系统主要涉及一些（往往并非易事的）技术细节。

定理 B 也曾在 [3] 中针对标量情形陈述，但当时未给出证明。本文还给出了 定理 B的完整证明；该定理既适用于标量情形 $n = 1$，也适用于一般系统情形 $n \geqslant 1$。

对 Υ的严谨定义以及定-理 A 和 定理 B中各项陈述的精确表述需要用到一些记号，因此推迟到第 3–10 节。

在本引言的其余部分，我们假设读者对波前、波前的强度 和速度，以及波前之间的相互作用 有大致了解，并简要讨论如何借助局部时间 泛函来控制相互作用中波前的速度变化 （定理 A）。我们还将评论定理 B中所列的性质。若要更全面地了解这些主题，请参阅 [3] 的引言。

1.1. **相互作用中的速度变化**。理解波前如何相互作用，是分析该系统的核心问题之一（1）。当两个（或更多）波前相互作用时，它们的强度和速度都会发生变化。

Glimm [15]，在守恒律系统理论中提出了一种经典方法：构造在相互作用过程中递减的相互作用泛函，其递减量可以界定参与相互作用的波前在强度和／或速度上的变化。

定理 A 给出了这样一个泛函，用于界定速度的变化，见条目 (ii)。条目 (i) 确保 $\Upsilon(u)$ 由 TV(u) 的平方一致有界，

---

[1]（标准）记号 $A = \mathcal{O}(1)B$, $A \leqslant \mathcal{O}(1)B$ 表示 $A \leqslant CB$ 存在某个常数 $C > 0$ 仅依赖于式（ f 1）中的通量函数。

而条目 (iii) 则保证 $t \mapsto \Upsilon(S_t \bar{u})$ 在没有相互作用发生时保持恒定。

结合条目（i）–（iii），运用标准技巧可证明，对于每个分段常数近似解 u（例如用 Glimm格式构造[2]）$t \mapsto \Upsilon(u(t, \cdot))$ 单调不增，因此，整个定义域 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ 上波前的全局速度变化一致有界，其上界为 $\mathcal{O}(1)$ 全变差（$u(0, \cdot)$）[2]。

关于 Glimm策略以及控制近似解中波前全局速度变化的重要性，详尽讨论请参阅 [3, 第 1.1–1.3] 节。

1.2. **关于时间局部性**。 文献中早已出现用于界定近似解中波前全局速度变化的泛函（[10, 17]以及 [2, 11, 9, 8]）。

的主要特点 Υ 在定理 A中，使其与 [10, 17] （以及上文提到的其他文献）中的泛函有很大不同。首先， $\Upsilon(u)$ 对每个 $u \in \mathcal{D}$ 都已定义（而不仅仅对分段常值映射定义；对于后者，可以构造波前追踪或 Glimm 近似解）。

其次，更重要的是， Υ 在定理 A中的泛函具有时间局部性，即对于任意给定的$u \in \mathcal{D}$，值 $\Upsilon(u)$ 仅取决于剖面 u，而不取决于从1）出发的（近似）解 u。

在 [10, 17]（以及上文提到的其他文献）中情况并非如此；为了沿着（近似）解追踪 u中的波前演化，需要开发波追踪算法，因此 [10, 17]中的泛函在时间上高度非局部。

关于对每个 $u \in \mathcal{D}$ 都有一个 局部时间 Υ的重要性，我们建议读者参阅 [3, 第 1 节。4]

1.3. **关于 Υ的附加性质**。 虽然定理 A包含了 Υ的基本性质，如前所述，我们在定理 B中列出了一些附加性质，这些性质在使用 Υ 分析（1）时很有用。

首先注意，对于在 [10, 17], 中构造的、用于界定速度变化的非局部泛函，定理 B 所列出的附加性质并不成立，这主要是因为这些性质甚至毫无意义：其中 [10, 17]的泛函在时间上是非局部的，并且只对分段常值映射有定义。

另一方面，文献中还有其他众所周知的李雅普诺夫泛函，用于界定相互作用前后波前强度的变化（而非速度的变化）；这些泛函对所有 $u \in \mathcal{D}$ 都有定义，且在时间上是局部的：例如， $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}} = \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}} + \frac{1}{4}\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$ Glimm 横向泛函 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}$ ([15], 另见 [13])之和，以及 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$ Bianchini 和 Bressan 提出的三次泛函（[6, 5]）；其定义将在后文回顾（见第3.3节）。对于这些李雅普诺夫泛函，定理 B中的类似性质均成立（另见 [4]）。

我们的泛函 Υ 对所有 $u \in \mathcal{D}$ 都有定义，且它具有局部时间性，这表明 Υ可能与 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ 具有相同的 “ 附加性质 ”。事实确实如此，这些附加性质列于定理 B 中。尽管定理 B 的结论自然而且在某种程度上可预期，但要严格证明它仍需付出一些努力。

现在我们简要评论条目（i）–（ii），而条目（iii）–（vi）应已可从陈述中清楚看出。

[2]对于波前追踪解 [12, 1], ，为确保其随时间衰减，必须稍作修改 Υ （见第 3 节），将非物理波纳入定义。

给定 $u \in \mathcal{D}$，一个 黎曼切割 $\mathbf{Cut}_{I,\,\hat{x}}$ 是这样一种操作：将 u 在给定区间 I 上的变化压缩为位于某个 $\hat{}$ 处的单个跳跃$x \in I$（见图 1）。黎曼切割可解释为 I 中所有波前的同时相互作用。条目（i）指出， Υ 在黎曼切割过程中递减，这与定理 A、条目（ii）一致。推论8.3将对这一性质作严格证明。

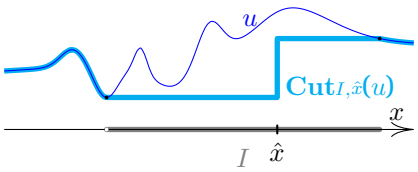


FIGURE 1. 黎曼切割。

第 (ii) 项中的逼近性质将在定理7.2和定理8.2中得到严格证明。定理 7.2指出，$\Upsilon(u) = \sup_v \Upsilon(v)$，其中上确界取遍所有通过裁剪 u 而得到的映射 v ，并且这些 v在任意大的紧集之外均为常数。另一方面，定理 8.2指出，$\Upsilon(u) = \sup_v \Upsilon(v)$，其中上确界取遍所有通过有限次黎曼切割从 u 得到的分段常值映射v 。

我们再次强调，定理 B并不适用于像以下这类非局部泛函 [10, 17]。例如，考虑上文列出的最简单性质，即自变量重新参数化下的不变性（第 (vi) 项）；对于我们的 Υ ，这一性质的证明非常自然。然而，对于 [10, 17]中的非局部泛函，不变性并不成立：事实上，取一个分段常值映射，稍微移动其中一个跳跃的位置。这本质上是对自变量进行重新参数化，但可能导致完全不同的近似演化（在波前追踪或 Glimm格式中），因此可能会显著影响那些取值取决于 $[0, +\infty$上波前整体演化的泛函。

1.4. **论文结构**。 与标量情形一样， [3], 构造 Υ中最重要的对象是**代价**函数。我们回顾**代价**的定义及其主要性质（已在 [3]中证明），见第2节。

第3 节专门严格定义 Υ。为此，我们还需要回顾黎曼问题的消失黏性解的构造，以及著名泛函 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}$ （在 [15]中引入）和 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$（在 [6, 5]中引入）的定义。

在第4节，我们证明二次界（定理4.1，对应于定理 A的第（i）项）。在第5节，我们精确定义波前间相互作用及相应的速度变化，从而能够严谨地陈述并证明主要的相互作用估计（定理5.3，对应于定理 A的第（ii）项）。命题5.14包含了证明的核心。在第6 节，我们证明持久性，即对于 $\bar{u}$ 分段常数的， $\Upsilon(S_t\bar{u})$ 在短时间内保持常数（准确地说，只要没有发生相互作用）（定理6.1，对应于定理 A的第（iii）项）。

第7、8 节旨在严谨地陈述并证明逼近性质（定理 B，第（ii）项）。更具体地说，在定义 7.1 中，我们引入映射的裁剪 u，并在定理7.2 中证明关于裁剪的逼近性质。

在定义8.1中，我们给出黎曼切割 的严格定义，并在定理8.2中证明关于切割的逼近性质。作为推论，我们还得到 Υ在黎曼切割两侧递减（推论8.3 对应于定理 B，第（i）项）。

在第9 节中，我们证明了 Υ 关于状态扰动的稳定性（9.1，对应于定理 B的第（iii）项）。

最后，在第10 节中，我们分别证明下半连续性、李雅普诺夫性质和不变性（分别见定理10.1、10.3、10.5，对应于定理 B的第（iv）、（v）、（vi）项）。

1.5. 记号。我们使用以下记号：

- δ_{kh} 表示克罗内克δ；
- $\lambda_k(u)$（$u \in \Omega$）表示矩阵 $A = Df(u)$ 的第 k 个特征值，排序方式为 $\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_n(u)$；
- $r_k(u)$ 和 $\ell_k(u)$（$u \in \Omega$）分别表示矩阵$A = Df(u)$ 的第 k 个右、左特征向量，其归一化条件为 $\langle r_k\,,\ r_k\rangle = 1, \langle \ell_{k'}\,,\ r_{k''}\rangle = \delta_{k'k''}$；
- **凸包**$_{[a,c]}\, g$（分别为 **凹包**$_{[a,c]}\, g$）表示函数 g 在区间段 $[a,c]$上的凸包（分别为凹包）；
- $\langle \ell,\ \ r\rangle$表示 $\mathbb{R}^n$中的标量积；
- u_x 表示函数 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ 的导数，并将其视为测度；
- $C_c(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$上的紧支撑连续函数；
- $\mathbf{I}(s) = \begin{cases} [0,s], & s \geqslant 0, \\ [s,0] & s < 0\,, \end{cases}$；
- 对于 $pq \geqslant 0$ 和 $g\colon \mathbf{I}(p) \to \mathbb{R}$，$h\colon p + \mathbf{I}(q) \to \mathbb{R}$，$g(p) = h(p)$ 我们记作

$$g \cup h\colon \mathbf{I}(p+q) \to \mathbb{R}, \quad (g \cup h)(y) = \begin{cases} g(y), & y \in \mathbf{I}(p), \\ h(y), & y \in p + \mathbf{I}(q); \end{cases} \tag{3}$$

- 对于 $pq < 0$ 和 $g\colon \mathbf{I}(p) \to \mathbb{R}$，$h\colon p + \mathbf{I}(q) \to \mathbb{R}$ 我们记作

$$g \triangle h\colon \mathbf{I}(p+q) \to \mathbb{R}, \quad g \triangle h = \begin{cases} g\big|_{\mathbf{I}(p+q)}, & |p| \geqslant |q|\,, \\ h\big|_{\mathbf{I}(p+q)}, & |p| < |q|\,; \end{cases} \tag{4}$$

- $\mu\big|_A\colon\ \ B \mapsto \mu(A \cap B)$ Radon 测度 μ 在博雷尔集 A 上的限制；
- $\operatorname{sgn}\mu$ 测度 μ 关于 $|\mu|$的拉东–尼科迪姆导数；
- **张成空间**$\{v_1, \ldots, v_m\}$向量 $\{v_i\}_{i=1}^m$ 的凸包；
- $\mathbf{1}_A$ 对于 $A \subset \mathbb{R}$ 的示性函数；
- $\bigsqcup$ 对于不交并；
- 对于任意区间 A, $A_+ := \{x\colon\ x > a$ 对于每个 $a \in A\}$, $A_- := \mathbb{R} \setminus A_+ \setminus A$；
- $\mathcal{L}(A)$ 和 $|A|$ 表示 $A \subset \mathbb{R}$ 的勒贝格测度；
- $\psi_\sharp\mu$ 表示测度 μ 经映射 ψ 的推前。

2. 代价 FUNCTION AND ITS PROPERTIES

与标量情形一样， Υ 的定义中的主要对象是 [3, 第 2]节引入的**代价**函数。现在我们回顾**代价**的定义及其主要性质，这些内容将在全文中使用。证明见 [3]。

2.1. **代价的定义。** 设 $a \leqslant b \leqslant c$ 和 $f \in C^{1,1}([a,c])$。令

$$\mathbf{H}_f(a,b,c) = f(b) - \Big(\operatorname*{\mathbf{conv}}_{[a,c]} f\Big)(b).$$

现在假设 $b_1, \dots, b_m \in [a,c]$。递归地定义区间 $[a,c]$ 关于合并操作 $(b_i)_{i=1}^m$ 的合并代价为

$$\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) = \begin{cases} \mathbf{H}_f(a,b_1,c), & m=1, \\ \mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^{m-1}) + \mathbf{H}_f(b_m^{\text{left}}, b_m, b_m^{\text{right}}), & m>1, \end{cases}$$

其中

$$b_j^{\text{left}} = \max\Big(\{a\} \cup \Big(\{b_i\}_{i=1}^{j-1} \cap [a,b_j]\Big)\Big),$$
$$b_j^{\text{right}} = \min\Big(\{c\} \cup \Big(\{b_i\}_{i=1}^{j-1} \cap [b_j,c]\Big)\Big).$$

或者，很容易推得**代价**$_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^m \mathbf{H}_f(b_i^{\text{left}}, b_i, b_i^{\text{right}})$。请注意，一般而言，**代价**$_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m$取决于点 b_i的顺序。图2给出了一个例子。

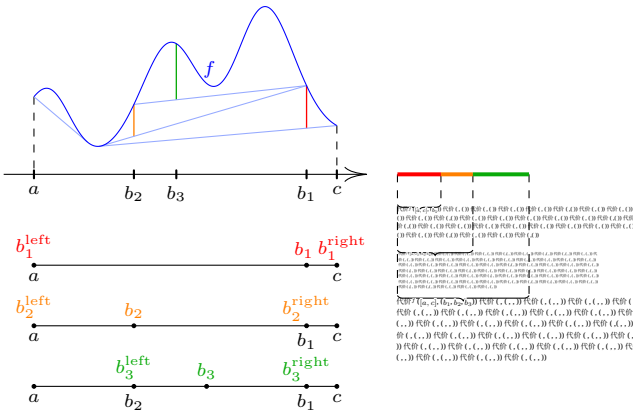


FIGURE 2. 合并代价的定义。

最后，我们可以引入代价函数 **代价**。

定义 2.1. 设 $a \leqslant c$ 和 $f \in C^{1,1}([a,c])$。我们将代价函数定义为

$$\mathbf{cost}_f(a,c) = \sup\Big\{\mathbf{cost}_f([a,c],(b_i)_{i=1}^m) : m \in \mathbb{N},\ b_1,\dots,b_m \in [a,c]\Big\}.$$

同时定义**代价**$_f(c,a)$ =**代价**$_{-f}(a,c)$。

2.2. **代价的二次界与类似相互作用的估计。** 首先，我们回顾代价函数的一个上界。我们将其称为二次界，意指其对区间长度的依赖。

命题 2.2. 设 $a < c$ 和 $f \in C^{1,\,1}([a,c])$，则

$$\mathbf{cost}_f(a,c) \leqslant \frac{1}{4}(c-a)^2 \left\| \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^- \right\|_{L^\infty}.$$

其次，我们重述关于后续区间及其并集上的**代价** 值的相关不等式。鉴于守恒律将区间视为相互作用的跳跃，我们将这些不等式称为类似相互作用的估计。

命题 2.3. 若 $a \leqslant b \leqslant c$ 且 $f \in C^{1,\,1}([a,c])$，则

(i) 代价$f(a,c) \geqslant$ **代价**$f(a,b) +$ **代价**$f(b,c) +$ **H**$f(a,b,c)$**, (ii) 代价**$f(a,c)$ $\leqslant$ **代价** $f(a,b) +$ **代价** $f(b,c) + \frac{1}{2}(b-a)(c-b) \left\| \begin{pmatrix} \partial^2 f \\ \partial x^2 \end{pmatrix}^- \right\|_{L^\infty}$.

2.3. **持久性**。现在我们回顾一个有用的命题，该命题指出，**代价**实际上局限于通量函数与其凸包络之间的间隙中。为了给出严谨的表述，我们需要以下定义。

定义 2.4。设 $f \in C([a,c])$。我们将 桥族 f位于 $[a,c]$上，记作 $\mathbf{Br}f(a,c)$ 为其上的极大开区间的可数族，在这些区间上$f > \mathbf{conv}_{[a,c]} f$，见图 3。

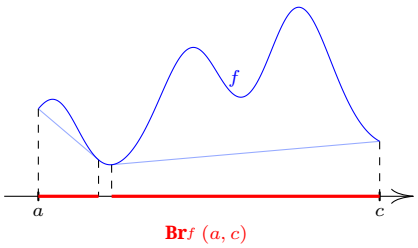


FIGURE 3. $\mathbf{Br}f(a,\ c)$ 的定义

命题 2.5。设 $a \leqslant c$ 和 $f \in C^{1,\,1}([a,c])$。则

$$\mathbf{cost}_f(a,c) = \sum_{(p,q)\in \mathbf{Br}(a,c)} \mathbf{cost}_f(p,q).$$

2.4. **稳定性估计**。现在我们给出估计，用以量化函数和区间都发生扰动时代价的变化。

命题 2.6。设 $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$。记 $I_i = [\min\{a,b_i\},\ \max\{a,b_i\}]$, $i = 1,2$。假设 $f_i \in C^{1,\,1}(I_i)$, $i = 1,2$。则

$$\left| \mathbf{cost}_{f_1}(a,b_1) - \mathbf{cost}_{f_2}(a,b_2) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} |I_1 \cap I_2| \cdot \left\| \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial \tau^2} \right\|_{L^1(I_1 \cap I_2)} +$$
$$+ \frac{1}{2} \max \left\{ \left\| \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} \right\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial^2 f_2}{\partial \tau^2} \right\|_{L^\infty} \right\} \cdot \frac{|I_1| + |I_2|}{2} \cdot |b_2 - b_1|.$$

3. RIGOROUS DEFINITION OF Υ

本节给出泛函 Υ 的严格定义。在标量情形下（见 [3, 定义 2.6]）， $\Upsilon(u)$ 是 C全变差$^2(u)$ 与对 u 的跳跃求和所得的**代价**(u_-, u_+) 之差。对于系统，定义则更为技术性。

事实上，全变差由沿曲线的全变差 V替代；**代价**必须使用约化通量计算；此外，还必须将著名的 Glimm–Bianchini–Bressan 泛函 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}} = \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}} + \frac{1}{4}\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$（见下文第3.3节）加入 Υ的定义中，以处理 n 不同族的存在。

为了引入这些对象，我们需要回顾一个核心构件：黎曼问题。首先，我们说明在不作 GNL/LD 假设的一般情形下如何求解黎曼问题（第 3.1 节）。随后，对于每个族 $k = 1, \dots, n$，我们可以定义 k-代价（第 3.2 节）以及泛函 V和 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$（第 3.3 节）。泛函 Υ 在第 3.4 节定义。尽管Υ 对于（某些）全变差较大的有界变差映射也有定义，但定理 A和定理 B 中的大多数结果仅在假设全变差较小时才成立。借助半群定义域方法可以方便地表述这一假设，这一方法秉承了 Bressan 的思路（参见 [12] 及其中的参考文献）。我们将在第 3.5 节讨论这一方法。最后，我们在第 3.6 节回顾关于黎曼问题解的一些基本估计。

3.1. **黎曼问题的解**。对于给定的 u^L，$u^R \in \Omega$ 足够接近零时，我们现在说明如何构造 [7]黎曼问题（u^L，u^R）的消失黏性解，即具有初始数据1的（$\bar{u}(x)$ $= u^L \mathbf{1}_{(-\infty,0)} + u^R \mathbf{1}_{(0,+\infty)}$的柯西问题。由于 $|u^L|$足够小，$|u^R|$我们假设 $\bar{u}$符合 [7] 的设定，因此存在唯一的消失黏性解。

首先，对于每个族 $k = 1, \dots, n$，构造所谓的广义特征向量和广义特征值

$$\tilde{r}_k : \mathcal{U}_k \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$
$$\tilde{\lambda}_k : \mathcal{U}_k \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

其中 $\mathcal{U}_k$ 是 $(0,0,\lambda_k(0))$ 的一个邻域。回想一下，$\lambda_k(0)$ 是矩阵 $A(0) = Df(0)$ 的第 k 个特征值。广义特征值彼此严格分离，^^ 即存在某个 $\lambda_0 < \cdots < \lambda_n$，

$$\hat{\lambda}_{k-1} < \tilde{\lambda}_k(u,v,\sigma) < \hat{\lambda}_k \text{ for all } (u,v,\sigma) \in \mathcal{U}_k. \tag{5}$$

此外，广义特征向量和特征值满足：

$$|\tilde{r}_k(u,v,\sigma)| = 1, \qquad \tilde{r}_k(u,0,\sigma) = r_k(u), \qquad \tilde{\lambda}_k(u,0,\sigma) = \lambda_k(u) \tag{6}$$

对所有 $(u,v,\sigma) \in \mathcal{U}_k$。

现在令 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ 为 0 的一个有界邻域，使得对于每个 $u^L \in \mathcal{U}$，都有 $(u^L, 0, \overline{\lambda_k}(u^L)) \in \mathcal{U}_k$，$k = 1, \dots, n$。给定一个左状态 $u^L \in \mathcal{U}$和$k \in \{1, \dots, n\}$，可以证明存在一条曲线 $s \mapsto T_s^k u^L \in \mathbb{R}^n$，满足 $T_0^k u^L = u^L$，定义于 $|s| \ll 1$，使得对于每个固定的 s，黎曼问题 $(u^L, T_s^k u^L)$ 都有唯一的消失黏性解，其构造如下。另有一条曲线，记为 $\gamma_k(u^L, s)$，或简记为 γ_k，称为第 k 族的精确曲线，它从 u^L 出发，长度为 s，

$$\gamma_k(u^L, s) = \gamma_k = (u_k, v_k, \sigma_k) : \mathbf{I}(s) \to \mathcal{U}_k$$

其中 $u_k(0) = u^L$, $u_k(s) = T_s^k u^L$，并在 $s \geqslant 0$ 时求解不动点问题

$$\begin{cases} u_k(\tau) = u^L + \displaystyle\int_0^\tau \tilde{r}_k(u_k(\varsigma), v_k(\varsigma), \sigma_k(\varsigma))d\varsigma, \\ v_k(\tau) = f_k(\tau) - \underset{[0,s]}{\mathbf{conv}}\, f_k(\tau), \\ \sigma_k(\tau) = \dfrac{d}{d\tau} \underset{[0,s]}{\mathbf{conv}}\, f_k(\tau), \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$f_k(\tau) = \int_0^\tau \tilde{\lambda}_k(u_k(\varsigma), v_k(\varsigma), \sigma_k(\varsigma))d\varsigma,$$

以及将$\mathbf{conc}^{[s,0]}$ 替换为$\mathbf{conv}_{[0,s]}$ 时的相同不动点问题（如果 $s \leqslant 0$）。映射 f_k 称为与曲线 $\gamma_k(u^L,\ s)$相关联的第 k 个约化通量 。

注3.1。 有时处理 平移版本的γ_k会更方便，这意味着 γ_k 的定义域为 $a + \mathbf{I}(s)$ 而不是 $\mathbf{I}(s)$。我们也可以对 f_k进行垂直平移，即令 $f(a)$ 等于一个预先规定的值，该值可能不为零。注意，(7) 在进行上述水平和垂直平移后仍保持稳健。

黎曼问题（u^L，$T_s^k u^L$）的解于是由下式给出

$$\omega_k(t,x) := \begin{cases} u^L, & \text{if } x/t \leqslant \sigma_k(0), \\ u_k(\tau), & \text{where } \tau = \max\{\varsigma \in \mathbf{I}(s) \,:\, x/t = \sigma_k(\varsigma)\}, \\ T_s^k u^L, & \text{if } x/t \geqslant \sigma_k(s). \end{cases} \tag{8}$$

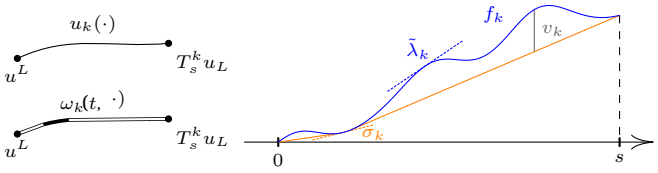


FIGURE 4. k第 个精确曲线（u_k，v_k，σ_k）以及黎曼问题（ ω_k ，u^L，$T_s^k u^L$）的解（情形 $s > 0$）。注意，根据（ ω_k 的跳跃与 σ_k 的平坦部分之间的对应关系，参见（8）。

注记 3.2。 将(8) 改写为如下形式很有用

$$\omega_k(-\infty) = u^L, \qquad \omega_k(t,\cdot)_x = (t\sigma_k)_\sharp\Big((\tilde{r}_k \circ \gamma_k) \cdot \mathcal{L}\big|_{\mathbf{I}(s)}\Big) \tag{9}$$

（几乎处处相等）。事实上，不失一般性，令 $s \geqslant 0$，则由于 σ_k 非递减且ω_k（t，$\cdot$）右连续，我们由（7）–（8）推出，对每个 x 均有

$$\begin{aligned} \Big(\omega_k(t,\cdot)_x\Big)((-\infty,x]) = \omega_k(t,x) - u^L &= \int_{\{\tau\in[0,s]\,:\,\sigma(\tau)\leqslant x/t\}} (\tilde{r}_k \circ \gamma_k)(\varsigma)\, d\varsigma \\ &= \Big((\tilde{r}_k \circ \gamma_k) \cdot \mathcal{L}\big|_{[0,s]}\Big)\Big((t\sigma_k)^{-1}((-\infty,x])\Big), \end{aligned}$$

从而证明了(9)。

最后，利用逆函数定理的 Lipschitz 版本，可以证明存在 $\delta_{\mathrm{RP}} > 0$ 使得 $B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0) \subset \mathcal{U}$，并且给定 u^L，$u^R \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$，存在唯一的数 s_1，……，$s_n \in \mathbb{R}$ 满足

$$u^R = T^n_{s_n} \circ \cdots \circ T^1_{s_1} u^L \tag{10}$$

and

$$\sum_{k=1}^{n} |s_k| = \mathcal{O}(1)|u^R - u^L|, \qquad |u^R - u^L| = \mathcal{O}(1)\sum_{k=1}^{n} |s_k|, \tag{11}$$

该映射

$$(u^L, u^R) \mapsto (s_1, \ldots, s_n) \tag{12}$$

为 Lipschitz 连续，且 $\mathcal{O}$具有 (1) 中的 Lipschitz 常数，见图 5(a)。

我们还将使用以下记号

$$s_k(u^L, u^R) := s_k.$$

根据构造，序列 $_{u^R}$ 中第 k 个和第 $(k+1)$ 个元素之间的黎曼问题

$$u^L, \qquad T^1_{s_1} u^L, \qquad T^2_{s_2} \circ T^1_{s_1} u^L, \qquad \ldots, \qquad \overbrace{T^n_{s_n} \circ \ldots \circ T^1_{s_1} u^L} \tag{13}$$

由映射 $\omega_k(t,\ x)$ 按照 (8) 求解（其中用序列中的第 k 个元素代替第 u^L 个元素）。(13)

（u^L，u^R）的解通过拼接 n 不同的解 ω_k得到：

$$u(t,x) := \omega_k(t,x) \text{ for } \hat{\lambda}_{k-1} < \frac{x}{t} < \hat{\lambda}_k, \tag{14}$$

见图 5(b)。鉴于（5）中特征速度彼此分离，这是可能的。我们将上述讨论总结为以下命题。

命题 *3.3.* 存在一个数 $\delta_{\mathrm{RP}} > 0$，使得以下结论成立。对于每个 $u^L, u^R \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$，都存在唯一的数 $s_1, \ldots, s_n$ 使得（*10*）成立，并且存在黎曼问题（u^L, u^R）的唯一消失黏性解 u 。该解由（*14*）给出，其中 $\omega_k(t,x)$是黎曼问题（*8*）的一个解，其对应于序列（*13*）中的第 k个和第（$k+1$）个元素之间的黎曼问题。此外，（*11*）成立，并且映射（u^L, u^R）$\mapsto s_k$ 是利普希茨的，利普希茨常数为 $\mathcal{O}(1)$。

请注意，尽管 $u_0 = u^L \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$ 和 $u_n = u^R \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$，解 u 也可能取值于 $\mathcal{U} \setminus B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$。

3.2. **定义** $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$。现在考虑两个状态 u^L，$u^R \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$，使得

$$u^R = T^n_{s_n} \circ \cdots \circ T^1_{s_1} u^L.$$

现在可以将跳跃 $(u^L,\ u^R)$ 的第 k 个代价 **代价**$_k(u^L,\ u^R)$ 定义为

$$\mathbf{cost}_k(u^L, u^R) := \mathbf{cost}_{f_k}(0, s_k),$$

其中，右端的 **代价**$_{f_k}$ 是第 2节中引入的（标量）代价函数，应用于约化通量 f_k （见上一节），定义在区间 $\mathbf{I}(s_k)$ 上。鉴于备注 3.1，我们注意到，**代价**的定义具有鲁棒性：我们平移定义域

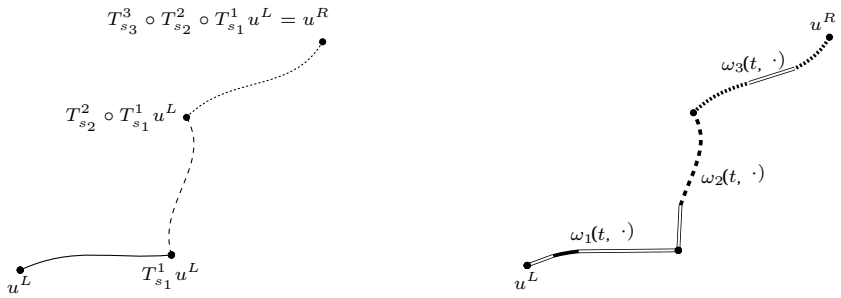


FIGURE 5. (a) 按族的编号排序的解曲线连接两个状态 u^L, u^R（绘制了 u 分量）；(b) 黎曼问题 (u^L, u^R) 的相应解 ω_k。

对于 f_k，从 $\mathbf{I}(s_k)$ 平移到 $a+\mathbf{I}(s_k)$，并将 f_k 替换为 $b+f_k$。现在我们定义 $\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cost}}$，$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}\colon \mathrm{BV}(\mathbb{R},\overline{B}_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，定义如下：

$$\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cost}}(u) := \sum_{|u_x|(\{x\})>0} \mathbf{cost}_k(u_-(x), u_+(x)), \qquad \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u) := \sum_{k=1}^{n} \mathcal{Q}_k^{\mathrm{cost}}(u).$$

3.3. 和的定义 V_k 及 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$。现在我们回顾$k$沿曲线的-全变差 V_k 以及*Glimm–Bianchini–Bressan* 泛函$\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$的严格定义。

设 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\overline{B}_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$。首先考虑 u 的导数，它是一个向量值测度 $u_x = u_x^{\mathrm{cont}} + u_x^{\mathrm{atom}}$，分解为连续部分和原子部分。第 k族波测度 $\mu_k = \mu_k^{\mathrm{cont}} + \mu_k^{\mathrm{atom}}$定义如下。连续部分 μ_k^{cont}是满足下述条件的 Radon 测度：

$$\int \varphi(x)\mu_k^{\mathrm{cont}}(dx) = \int \varphi(x)\left\langle \ell_k(u(x)),\ u_x^{\mathrm{cont}}(dx)\right\rangle$$

对每个 $\varphi \in C_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$均成立。原子部分 μ_k^{atom}集中在 u 的跳跃点集 $\{x_\alpha\}_\alpha$（至多可数）上，并定义为：

$$\mu_k^{\mathrm{atom}}(x_\alpha) := s_k(u_-(x_\alpha), u_+(x_\alpha)).$$

注意，由于 $u_\pm(x^\alpha) \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$，右端是良定义的。现在我们可以对每个 $k=1,\ \ldots,\ n$, V_k, $V\colon \mathrm{BV}(\mathbb{R};\ B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0}$ 定义如下：

$$V_k(u) := |\mu_k|(\mathbb{R}), \qquad V(u) := \sum_{k=1}^{n} V_k(u).$$

不难看出

$$V(u) \leqslant \mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(u), \qquad \mathrm{TV}(u) \leqslant \mathcal{O}(1)V(u). \tag{15}$$

我们还定义 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}\colon$ 有界变差$(\mathbb{R};\overline{B}_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$为

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u) := \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(u) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(u).$$

这里，横截 和三次 泛函 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}$, $\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}$: 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0}$构造如下。

- $\mathcal{Q}^{\text{横向相互作用}}$测量从初始数据 u 出发的半群演化过程中可能发生的横向相互作用:

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(u) := \sum_{h<k} \big(|\mu_h| \times |\mu_k|\big)(\measuredangle), \quad \measuredangle := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > y\}.$$

- $\mathcal{Q}^{\text{三次}k}$ 测量以相对速度加权的 k 族波前之间可能发生的相互作用:

$$\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(u) := \int_0^{|\mu_k|(\mathbb{R})} \int_0^{|\mu_k|(\mathbb{R})} |\sigma_k(\tau) - \sigma_k(\tau')| d\tau d\tau'. \tag{16}$$

这里，速度 $\sigma_k : (0, |\mu_k(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ 定义如下。固定 $\tau \in (0, |\mu_k(\mathbb{R})|)$，令$x \in \mathbb{R}$ 为满足 $|\mu_k|((-\infty, x)) \leqslant \tau$的最大数。现在令

$$\sigma_k(\tau) = \begin{cases} \lambda_k(u_-(x)), & \mu_k(\{x\}) = 0, \\ \frac{d}{d\varsigma}\big[\operatorname*{\mathbf{conv}}_{[0,\mu_k(\{x\})]} f_k\big](\varsigma)\Big|_{\varsigma=\tau-|\mu_k|((-\infty,x))}, & \mu_k(\{x\}) > 0, \\ \frac{d}{d\varsigma}\big[\operatorname*{\mathbf{conc}}_{[\mu_k(\{x\}),0]} f_k\big](\varsigma)\Big|_{\varsigma=|\mu_k|((-\infty,x))-\tau}, & \mu_k(\{x\}) < 0, \end{cases} \tag{17}$$

其中，最后两种情况下的 f_k 是与黎曼问题 $(u_-(x)\ u_+(x))$ 对应的 k 约化通量。

这里稍微滥用了记号，因为我们用符号 σ_k 同时表示在 (17) 中定义的映射，以及在 (7) 中求解黎曼问题的曲线的一个分量。这不应造成混淆。

最后注意到

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(u) \leqslant \mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(u)^2, \qquad \mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}} \leqslant \mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(u)^3. \tag{18}$$

3.4. **Υ的定义。**

定义 3.4. 我们定义 Υ: 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 如下

$$\Upsilon(u) := C_1 V(u)^2 + C_2 \mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u) - \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u). \tag{19}$$

由于它是非负量之差， $\Upsilon \geqslant 0$的非负性事先并不明显。我们将在定理 4.1中证明这一事实。常数 C_1, C_2 将在定理 4.1 和 5.3中确定，其中 $C_1 \gg 1$ 和 $C_2 - C_1 \gg 1$，以确保证明能够成立。我们用绿色方框标出对 C_1 和 C_2 提出的每一项新要求。在标量情形中，只需选择 $C_1 = \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty}$ 和 $C_2 = 0$。

3.5. **关于半群定义域的备注** $\mathcal{D}$。泛函 Υ, 以及 V和 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$，对每个 $u \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$ 都有定义。事实上，为了定义 $\Upsilon(u)$，只需知道 u 取值于 Ω，它至多有可数个跳跃且跳跃总量有限，并且每个黎曼问题（$u_-(x)\ u_+(x)$）都可以求解。若 $u \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$，则这三个条件均满足。

然而，定义域 $\mathrm{BV}(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$ 还有三个缺点:
(a) 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$ 中的映射可能具有较大的全变差；然而，要证明定理 A 和 定理 B中的某些结论，我们需要全变差足够小；(b) 对于 $\bar{u} \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$，方程组 (1)–(2) 可能无解；然而，要证明定理 A 和 定理 B中的某些结论，我们需要知道 $S_t\bar{u}$ 存在；

(c) 此外，即使 $S_t\bar{u}$ 存在（例如，当 $\bar{u}$ 是一个黎曼问题时），它也可能不属于有界变差($\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$。

这些问题可以通过以下方法得到简便的解决：半群方法，其思路源自 Bressan（参见 [12]及其中的参考文献）。

定义 3.5。称半群定义域为 $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{BV}(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$的一个子集，满足

(i) 存在 $\delta_0, \delta_1 \in (0, +\infty]$，使得 $\{u \in BV(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}/2}(0)): TV(u) < \delta_0\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \{u \in BV(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)): TV(u) < \delta_1\}$；*(ii)* 对每个 $\bar{u} \in \mathcal{D}$，存在唯一的消失黏性解 u，它满足方程 *(1)*，且对于所有 $t \in [0, +\infty)$，$u(t, \cdot) \in \mathcal{D}$）。 –(2)

现在，我们定义一个由 $\mathrm{BV}(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$ 的子集构成的族 $\{\mathcal{D}_\beta\}_{\beta>0}$，如下：

$$\mathcal{D}_\beta := \left\{ u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}; \overline{B}_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)) \colon |u(-\infty)| \leqslant \frac{\delta_{\mathrm{RP}}}{2},\ V(u) + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u) \leqslant \beta \right\}. \tag{20}$$

事实证明，对于 $\beta \ll$ 域。事实上，由 (15) 和 (18) 不难看出，对于每个β，都存在 $\delta_0(\beta)$、$\delta_1(\beta)$，使得定义 3.5 中的条件 (i) 成立，并且当 $\beta \to 0$ 时，δ_0、$\delta_1 \to 0$。特别地，根据 [7], ，若 $\beta \ll 1$，则每个 $\bar{u} \in \mathcal{D}_\beta$ 都存在唯一的消失黏性解 u。对于所有 t，$u(t, \cdot) \in \mathcal{D}_\beta$ 这一事实可由 [5], 中的分析推出；特别是，这是因为 $V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ 是一个 Lyapunov泛函，即当 $C \gg 1$ 时，$t \mapsto V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u(t, \cdot))$ 是非增的。[3]

鉴于，对于 $\beta \ll 1$，$\mathcal{D}_\beta$ 是一个半群定义域，且其中只包含全变差为 β量级的映射，$\mathcal{D}_\beta$ 不存在上述列出的（a）–（c）问题。在本文余下部分，我们将在每条陈述中说明该结论是对每个$u \in$ 有界变差($\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$) 都成立，还是仅对 $u \in \mathcal{D}_\beta$ 成立，其中 β“足够小”。每当对 β 提出新的大性要求时，我们都会用蓝框标出。注意，假设 $\beta \leqslant \mathcal{O}(1)$，则 (C_1、C_2 在（19）中的选取独立于 β的选取。

3.6. 黎曼问题的基本估计。本节最后列出黎曼问题的一些基本性质，供后文使用。我们从一个标准的线性近似引理开始。

引理 3.6. 设 $u^L, u^R \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(\overline{0})$，则有

$$s_k(u^L, u^R) = \left\langle \ell_k(u^L)\ ,\ u^R - u^L \right\rangle + \mathcal{O}(1)|u^R - u^L|^2.$$

证明。我们有

$$u^R - u^L = \sum_{h=1}^{n} \int_0^{s_h} \tilde{r}_h(\gamma_h(\varsigma))d\varsigma.$$

[3] 的李雅普诺夫性质 $V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ 已在 [5] 中针对分段常值函数证明。参见备注 5.13。对于一般的半群轨迹，我们在第 10.2 节给出证明概要。

因此

$$\begin{aligned}
&\big\langle \ell_k(u^L)\ ,\ u^R-u^L\big\rangle = \sum_{h=1}^{n}\int_0^{s_h}\big\langle \ell_k(u^L)\ ,\ \tilde r_h(\gamma_h(\varsigma))\big\rangle\,d\varsigma\\
&=\sum_{h=1}^{n}\Big(\int_0^{s_h}\underbrace{\big\langle \ell_k(u^L)\ ,\ r_h(u^L)\big\rangle}_{\delta_{kh}}d\varsigma+\int_0^{s_h}\big\langle \ell_k(u^L)\ ,\ \tilde r_h(\gamma_h(\varsigma))-\underbrace{r_h(u^L)}_{=\tilde r_h(u^L,0,\sigma_h(\varsigma))\text{ by (6)}}\big\rangle\,d\varsigma\Big)\\
&=s_k+\mathcal{O}(1)\sum_{h=1}^{n}\int_0^{s_h}\Big(\underbrace{|u_h(\varsigma)-u^L|+|v_h(\varsigma)|}_{\mathcal{O}(1)|s_h|\text{ by (7)}}\Big)d\varsigma\overset{(11)}{=}s_k+\mathcal{O}(1)|u^R-u^L|^2,
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

接下来，我们回顾 [10] 中的三个结果。

引理 3.7 ([10, 引理 3.5], 起点平移)。 令 $\gamma=\gamma_k(u_0,s)=(u,v_k,\sigma_k)$ 和 $\gamma'=\gamma'_k(u'_0,s)=(u',v'_k,\sigma'_k)$ 以及 $f_k,f'_k\colon\ \mathbf{I}(s)\to\mathbb{R}$ 表示相应的约化通量。则 $\|u-u'\|_{L^\infty}\leqslant\mathcal{O}(1)|u_0-u'_0|$ 并且

$$\|v_k-v'_k\|_{L^\infty}\,,\ \|\sigma_k-\sigma'_k\|_{L^1}\,,\ \left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f'_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1}\leqslant\mathcal{O}(1)\,|s|\cdot|u_0-u'_0|\,.$$

引理 3.8 ([10, 引理 3.6], 长度变化)。 令 $s's''\geqslant 0$ 和

$$\gamma=\gamma_k(u_0,s'+s'')=(u,v_k,\sigma_k),\quad \gamma'=\gamma_k(u_0,s')=(u',v'_k,\sigma'_k),$$
$$\gamma''=\gamma_k(u(s'),s''),$$

其中 γ,γ',γ'' 分别定义在 $\mathbf{I}(s'+s'')$、$\mathbf{I}(s')$ 和 $s'+\mathbf{I}(s'')$ 上。记 f_k,f'_k, f''_k 为相应的约化通量。则这八个量

$$\begin{aligned}
&\|u-u'\|_{L^\infty(\mathbf{I}(s'))}\,,\ \|v_k-v'_k\|_{L^\infty(\mathbf{I}(s'))}\,,\ \|\sigma_k-\sigma'_k\|_{L^1(\mathbf{I}(s'))}\,,\\
&\|u-u''\|_{L^\infty(s'+\mathbf{I}(s''))}\,,\ \|v_k-v''_k\|_{L^\infty(s'+\mathbf{I}(s''))}\,,\ \|\sigma_k-\sigma''_k\|_{L^1(s'+\mathbf{I}(s''))}\,,\\
&\left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f'_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'))},\ \left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f''_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(s'+\mathbf{I}(s''))}
\end{aligned}$$

由 $\mathcal{O}(1)|s'||s''|$ 有界。

引理 3.9 ([10, 引理 3.9], 同族同号相互作用）。设 $s's''\geqslant 0$,$\gamma'=(u',v'_k,\sigma'_k)=\gamma_k(u^L,s')$, $u^M=u'(s')$, $\gamma''=(u'',v''_k,\sigma''_k)=\gamma_k(u^M,s'')$, $\gamma=(u,v_k,\sigma_k)=\gamma_k(u^L,s'+s'')$, 其中 γ,γ'',γ 分别定义在 $I(s')$、$s'+I(s'')$、$I(s'+s'')$ 上。记 f'_k, f''_k, f_k 分别为 $\gamma'_k,\gamma''_k,\gamma_k$ 的约化通量，并假设 $f''_k(s')=f'_k(s')$。于是可得

$$\|u'\cup u''-u\|_{L^\infty(\mathbf{I}(s'+s''))}\,,\ \|v'_k\cup v''_k-v_k\|_{L^\infty(\mathbf{I}(s'+s''))}\,,\ \|\sigma'_k\cup\sigma''_k-\sigma_k\|_{L^1(\mathbf{I}(s'+s''))}\,,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 f'_k\cup f''_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'+s''))}\leqslant\mathcal{O}(1)\begin{cases}\Big[f'_k-\underset{[0,s'+s'']}{\mathbf{conv}}(f'_k\cup f''_k)\Big](s'), & s',s''\geqslant 0,\\ \Big[\underset{[s'+s'',0]}{\mathbf{conc}}(f'_k\cup f''_k)-\tilde f'_k\Big](s'), & s',s''\leqslant 0.\end{cases}$$

4. Nonnegativity and quadratic bound

现在，我们严谨地陈述并证明定理 A，第（i）项。

定理 4.1 （非负性与二次界）。 对于所有 $u\in\mathrm{BV}(\mathbb{R};B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$,

$$0\leqslant\Upsilon(u)\leqslant\mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(u)^2.$$

证明。泛函 V 已知与全变差等价。因此，由于$\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u) = \mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(u)^2$ 且代价项非负，我们立即得到$\Upsilon(u) \leqslant \mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(u)^2$。

接下来，将命题 2.2 应用于 **代价** 项（19）中的每一项，我们得到

$$\begin{aligned}\Upsilon(u) &\geqslant C_1 V(u)^2 - \frac{1}{4}\sup_{k,f_k}\left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial \tau^2}\right\|_{L^\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|u_x|(\{x\})>0} s_k(u_-(x),u_+(x))^2\\ &\geqslant C_1 V(u)^2 - \mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(u)^2,\end{aligned}$$

其中，上确界取遍我们框架下黎曼问题解中所有可能的约化通量。因此，由（15），我们得到 $\underline{\Upsilon}(u) \geqslant 0$ 对所有$u \in$ 有界变差（$\mathbb{R}$；$B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(\mathbf{0})$），只要 C_1 足够大。□

5. Interaction estimate

现在陈述并证明 定理 A中第（ii）项所声称的相互作用估计。首先，我们给出相互作用中涉及的波前的速度变化的严格定义。

定义 5.1（速度变化）。令 $u^L, u^M, u^R \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$。设 $s'_k = s_k(u^L, u^M)$,$s''_k = s_k(u^M, u^R)$，$s_k = s_k(u^L, u^R)$，并令曲线族

$$\{\gamma'_k = (u'_k, v'_k, \sigma'_k)\colon \mathbf{I}(s'_k) \to \mathcal{U}_k\}_{k=1}^n,\quad \{\gamma''_k = (u''_k, v''_k, \sigma''_k)\colon s'_k + \mathbf{I}(s''_k) \to \mathcal{U}_k\}_{k=1}^n,$$
$$\{\gamma_k = (u_k, v_k, \sigma_k)\colon \mathbf{I}(s_k) \to \mathcal{U}_k\}_{k=1}^n$$

分别求解黎曼问题 (u^L, u^M), (u^M, u^R), (u^L, u^R)。注意，我们假设 γ''_k 在平移后的定义域 $s'_k + \mathbf{I}(s''_k)$上有定义。速度变化定义为：

$$\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R) := \begin{cases} \left\|\left(\sigma'_k \cup \sigma''_k\right) - \sigma_k\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k + s''_k)\cap \mathbf{I}(s_k))}, & s'_k s''_k \geqslant 0,\\ \left\|\left(\sigma'_k \triangle \sigma''_k\right) - \sigma_k\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k + s''_k)\cap \mathbf{I}(s_k))}, & s'_k s''_k < 0.\end{cases}$$

（回忆一下记号 $\sigma'_k \cup \sigma''_k$, $\sigma' \triangle \sigma''_k$，见 (3)–(4)。）

注 5.2。定义 *5.1* 对应于 [10, 第 1 节1]。这很重要，因为我们将把 [10] 中的许多结果作为黑箱使用。

下面的定理是定理 A第（ii）项的严格表述。

定理 5.3（相互作用估计）。令 $\beta \ll 1$。令 $u\hat{}u \in \mathcal{D}_\beta$。令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个开区间。假设

（*a*）$u(x) = \hat{}u(x)$ 对 $x \notin I$成立；（*b*）在 I 上，u和$\hat{}u$ 均为分段常数；（*c*）在 I上，u恰有两次跳跃，分别从 u^L 跳至 u^M 以及从 u^M 跳至 u^R，而$\hat{}u$恰有一次跳跃，从 u^L 跳至 u^R。

Then

$$\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R) \leqslant \mathcal{O}(1)\Big(\Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u})\Big). \tag{21}$$

为证明定理 5.3 我们采用 [10] 的方法（该方法受到 [5] 的启发）。我们将两个黎曼问题（u^L, u^M）、（u^M, u^R）之间的相互作用分解为更简单的步骤，即：

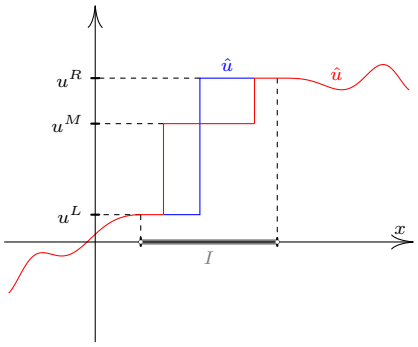


FIGURE 6. 定理5.3。

(1) 横向相互作用 （不同族的波前之间的相互作用）；(2) 同族相互作用 （这类似于标量情形中的相互作用，因为其中仅有一个族）；(3) 调整曲线的长度（这是因为通常情况下 $s_k \neq s_{k'} + s_{k''}$）。

可以通过适当的相互作用量（a.o.i.）来量化这些较简单相互作用各自的强度，具体定义见下文第 5.2 节：横向相互作用由横向相互作用量 $\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}(u^L, u^M, u^R)$ 衡量；同族相互作用由二次相互作用量 $\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}(u^L, u^M, u^R)$ 或抵消量 $\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}(u^L, u^M, u^R)$ 衡量（分别对应两个同族相互作用波前符号相同或相反的情形）；长度的调整则由横向相互作用量与三次相互作用量之和 $\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}(u^L, u^M, u^R) + \sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}(u^L, u^M, u^R)$ 衡量。

定理 5.3 的证明分为两部分：首先将 $\Delta\sigma$ 的上界估计为相互作用量。

命题 5.4. 对于 u^L, u^M, $u^R \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(\overline{0})$,

$$\begin{aligned}&\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R)\\ &\leqslant \mathcal{O}(1)\left[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}} + \mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}} + (|s_k'| + |s_k''|)\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}\right)\right](u^L, u^M, u^R).\end{aligned} \tag{22}$$

接下来证明，相互作用量有界于 Υ 的减少量。

命题 5.5. 对于 u, $\hat{}u$ 如定理 *5.3*

$$\begin{aligned}&\left[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}} + \mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}} + (|s_k'| + |s_k''|)\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}\right)\right](u^L, u^M, u^R)\\ &\leqslant 2\Big(\Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u})\Big).\end{aligned} \tag{23}$$

命题 5.4 本质上（仅需稍作修改） [10, 定理 3。3]。相反，命题 5.5 很大程度上依赖于 Υ和 **代价** 的性质（特别参见命题 5.14的证明）。

定理 *5.3* 的证明。 结合命题 5.4–5.5。 □

在第 5.1 节中，我们严谨地描述将相互作用分解为更简单步骤的过程。在第 5.2 节中，我们回顾各种相互作用量的定义。在第 5.3节中，我们回顾 [10] 中关于初等相互作用的一些估计。在第5.4节中，我们回顾 5.4 命题的证明，该证明出自 [10] （并略作改进）。最后，在第5.6 节中，我们证明命题 5.5：这一证明高度依赖于 Υ 的定义，尤其依赖于 **代价** 的性质；这是本节（也是全文）最重要的贡献项。我们将在第 5.5节中着重说明，如何将 5.5 中命题 [3] 的类似命题的标量证明推广到系统情形。

5.1. **将相互作用分解为初等相互作用**。现在我们来说明，两个黎曼问题之间的相互作用如何分解为更简单的步骤。

考虑两个相邻的黎曼问题（相互作用之前的情形）

$$u^M = T^n_{s'_n} \circ \cdots \circ T^1_{s'_1} u^L, \qquad u^R = T^n_{s''_n} \circ \cdots \circ T^1_{s''_1} u^M, \tag{24}$$

以及将它们合并后得到的黎曼问题（相互作用之后的情形）

$$u^R = T^n_{s_n} \circ \cdots \circ T^1_{s_1} u^L.$$

特别地，相互作用之前的精确曲线记为 γ'_k，γ''_k：

$$\gamma'_1 = (u'_1, v'_1, \sigma'_1) := \gamma_1(u^L, s'_1), \qquad \gamma'_k = (u'_k, v'_k, \sigma'_k) := \gamma_k\big(u'_{k-1}(s'_{k-1})s'_k\big), \qquad k \geqslant 2,$$
$$\gamma''_1 = (u''_1, v''_1, \sigma''_1) := \gamma_1(u^{\ M}\ s''_1), \quad \gamma''_k = (u''_k, v''_k, \sigma''_k) := \gamma_k\big(u''_{k-1}(s''_{k-1})\ \ s''_k\big), \qquad k \geqslant 2,$$

而相互作用之后的精确曲线记为 γ_k：

$$\gamma_1 = (u_1, v_1, \sigma_1) := \gamma_1(u^L, s_1), \quad \gamma_k = (u_k, v_k, \sigma_k) := \gamma_k\big(u_{k-1}(s_{k-1}), s_k\big), \quad k \geqslant 2.$$

我们类似地用 f'_k、f''_k、f_k 表示分别与 γ'_k、γ''_k、γ_k 相关联的约化通量。为方便起见，不失一般性地假设 γ''_k 和 f''_k 定义在 $s'_k + \mathbf{I}(s''_k)$ 上，而不是定义在 $\mathbf{I}(s''_k)$ 和 $f''_k(s'_k) = f'_k(s'_k)$ 上。注意，如果 $s'_k s''_k \geqslant 0$，那么 $f'_k \cup f''_k$ 是连续的（但通常在点 s'_k 处不可微，见图 8 中的第一幅和第四幅图）。

考虑一种中间情形也很有用。粗略地说，此时所有横向相互作用都已经发生。具体而言，固定一个族 $k \in \{1, \dots, n\}$ 并考虑以下点（见图7）

$$u^L_1 := u^L, \qquad u^L_k := T^{k-1}_{s''_{k-1}} \circ T^{k-1}_{s'_{k-1}} \circ \cdots \circ T^1_{s''_1} \circ T^1_{s'_1} u^L, \quad k = 2, \dots, n,$$
$$u^M_k := T^k_{s'_k} u^L_k, \quad u^R_k := T^k_{s''_k} u^M_k, \qquad\qquad k = 1, \dots, n.$$

根据定义，u^L_k 和 u^M_k 之间的黎曼问题由一个强度为 s'_k 的 k族基本波解出，而 u^M_k 和 u^R_k 之间的黎曼问题由一个强度为 s''_k的 k族基本波解出。

我们用 $\tilde{\gamma}'_k = (\tilde{u}'_k,\ \tilde{v}'_k,\ \tilde{\sigma}'_k)$表示解黎曼问题$(u^L_k,\ u^M_k)$的曲线，并用 $\tilde{f}'_k$表示相应的约化通量。类似地，令 $\tilde{\gamma}''_k = (\tilde{u}''_k,\ \tilde{v}''_k,\ \tilde{\sigma}''_k)$为解黎曼问题$(u^M_k,\ u^R_k)$的曲线，并令 $\tilde{f}''_k$为相应的约化通量。

显然，$\tilde{\gamma}'_k$ 定义在 $\mathbf{I}(s'_k)$上；不过，和之前一样，为方便起见，可以假设（不失一般性）$\tilde{\gamma}''_k$ 和 $\tilde{f}''_k$ 定义在 $s'_k + \mathbf{I}(s''_k)$上（而不是$\mathbf{I}(s''_k)$上），并且 $\tilde{f}''_k(s'_k) = \tilde{f}'_k(s'_k)$。注意，如果 $s'_k s''_k \geqslant 0$，$\tilde{f}'_k \cup \tilde{f}''_k$是连续的；与之相反

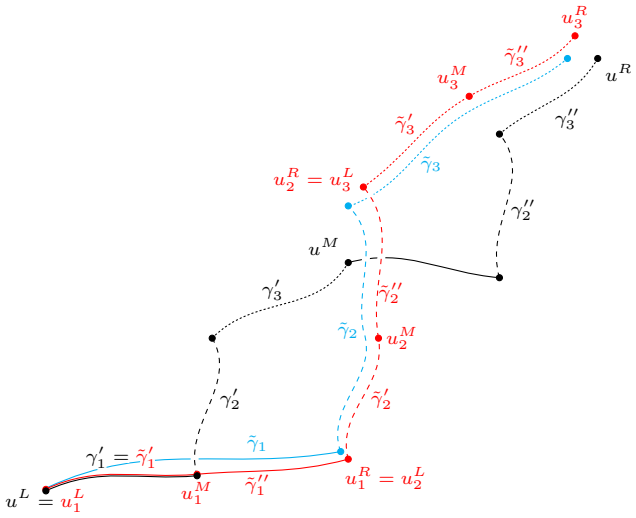


FIGURE 7. 初等曲线：相互作用前的两个黎曼问题（黑色）；横向相互作用后（红色）；同族相互作用后（青色）。仅绘出了 u 分量。

对于 $f_k' \cup f_k''$，它在 s_k' 处也可微（导数为 $\lambda_k(u_k^M)$），因此总的来说，$\tilde{f}_k' \cup \tilde{f}_k'' \in C^1$. $_1(\mathbf{I}(s_k' + s_k''))$。

最后，我们引入同族相互作用产生的曲线，

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_1 &= (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{\sigma}_1) := \gamma_1(u^L, s_1' + s_1''), \\
\tilde{\gamma}_k &= (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k, \tilde{\sigma}_k) := \gamma_k(\tilde{u}_{k-1}(s_{k-1}' + s_{k-1}''), s_k' + s_k''), k = 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

见图 7。

5.2. 相互作用量。 现在我们回顾四个量的定义，这些量在 [10, 5]中称为相互作用量。横向相互作用量和抵消量定义如下

$$\begin{aligned}
\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}(u^L, u^M, u^R) &:= \sum_{h<k} |s_k'||s_h''|, \\
\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}(u^L, u^M, u^R) &:= \begin{cases} 0, & \text{if } s_k' s_k'' \geqslant 0, \\ \min\{|s_k'|, |s_k''|\}, & \text{if } s_k' s_k'' \leqslant 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{25}$$

接下来，我们重述 [5],中三次相互作用量的定义

$$
\mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}(u^L,u^M,u^R):=
\begin{cases}
\int_0^{s'_k+s''_k}\Big[\underset{[0,s'_k]}{\mathbf{conv}}\,f'_k\cup\underset{[s'_k,s'_k+s''_k]}{\mathbf{conv}}\,f''_k-\underset{[0,s'_k+s''_k]}{\mathbf{conv}}\,\big(f'_k\cup f''_k\big)\Big]\,d\tau, & s'_k,s''_k\geqslant 0,\\
\int_0^{s'_k}\Big[\underset{[0,s'_k+s''_k]}{\mathbf{conv}}\,f'_k\cup\underset{[s'_k+s''_k,s'_k]}{\mathbf{conc}}\,f'_k-\underset{[0,s'_k]}{\mathbf{conv}}\,f'_k\Big]\,d\tau, & -s'_k\leqslant s''_k\leqslant 0,\\
\int_{s'_k+s''_k}^{s'_k}\Big[\underset{[s'_k+s''_k,s'_k]}{\mathbf{conc}}\,f''_k-\underset{[s'_k+s''_k,0]}{\mathbf{conc}}\,f''_k\cup\underset{[0,s'_k]}{\mathbf{conv}}\,f''_k\Big]\,d\tau, & s''_k\leqslant -s'_k\leqslant 0,\\
\int_{s'_k+s''_k}^{0}\Big[\underset{[s'_k+s''_k,0]}{\mathbf{conc}}\,\big(f''_k\cup f'_k\big)-\underset{[s'_k+s''_k,s'_k]}{\mathbf{conc}}\,f''_k\cup\underset{[s'_k,0]}{\mathbf{conc}}\,f'_k\Big]\,d\tau, & s'_k,s''_k\leqslant 0,\\
\int_{s'_k}^{0}\Big[\underset{[s'_k,0]}{\mathbf{conc}}\,f'_k-\underset{[s'_k,s'_k+s''_k]}{\mathbf{conv}}\,f'_k\cup\underset{[s'_k+s''_k,0]}{\mathbf{conc}}\,f'_k\Big]\,d\tau, & -s'_k\geqslant s''_k\geqslant 0,\\
\int_{s'_k}^{s'_k+s''_k}\Big[\underset{[s'_k,0]}{\mathbf{conc}}\,f''_k\cup\underset{[0,s'_k+s''_k]}{\mathbf{conv}}\,f''_k-\underset{[s'_k+s''_k,s'_k]}{\mathbf{conv}}\,f''_k\Big]\,d\tau, & s''_k\geqslant -s'_k\geqslant 0,
\end{cases}
$$

参见图 8。

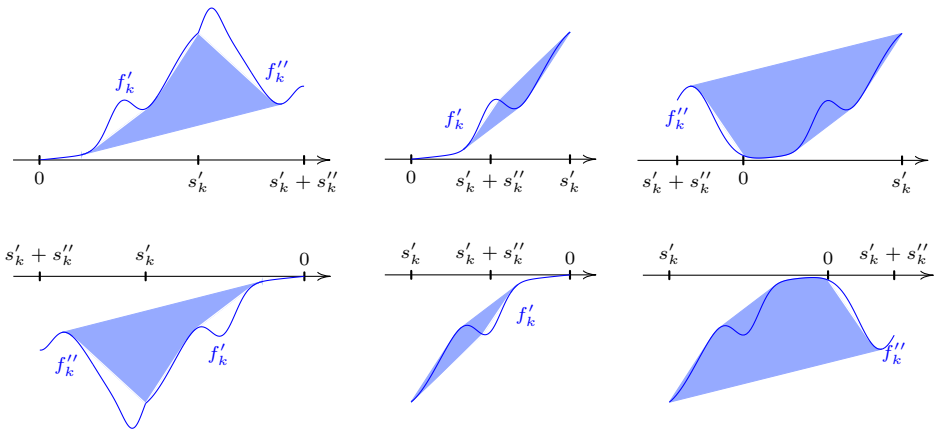


FIGURE 8.三次相互作用量以紫蓝色区域表示。

该二次相互作用量由下式给出

$$
\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}(u^L,u^M,u^R):=
\begin{cases}
\tilde f'_k(s'_k)-\Big[\underset{[0,s'_k+s''_k]}{\mathbf{conv}}\,(\tilde f'_k\cup\tilde f''_k)\Big](s'_k), & s'_k,s''_k\geqslant 0,\\
\Big[\underset{[s'_k+s''_k,0]}{\mathbf{conc}}\,(\tilde f'_k\cup\tilde f''_k)\Big](s'_k)-\tilde f'_k(s'_k), & s'_k,s''_k\leqslant 0,\\
0, & s'_ks''_k\leqslant 0.
\end{cases}
$$

注意，对于 $s'_k,\ s''_k\geqslant 0$，$\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}=\mathbf{H}^{\tilde f'_k\cup\tilde f''_k}(0,\ s'_k,\ s'_k+s''_k)$。

我们以回顾 [5] 中的一条奠基性定理来结束本节。鉴于下文的用途，我们还补充了一个二次界（第二个和第三个不等式）。

命题 5.6 ([5,定理 3。7])。 按照第 5.2 节中的记号，有

$$\sum_{k=1}^{n}|s_k-(s'_k+s''_k)|\leqslant\mathcal{O}(1)\Big[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}(u^L,u^M,u^R)+\sum_{k=1}^{n}\mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}(u^L,u^M,u^R)\Big]$$
$$\leqslant\mathcal{O}(1)\left[\sum_{k=1}^{n}|s'_k|\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}|s''_k|\right]\leqslant\mathcal{O}(1)\left|u^M-u^L\right|\left|u^R-u^M\right|.$$

证明。 第一个不等式参见 [5, 定理 3.7]。第二行的二次界由 $\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}$ 和 $\mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}$的定义推出。□

5.3. **初等相互作用分析**。 在证明命题5.4–5.5之前，我们回顾一些基本估计，这些估计来自 [10]。引理 5.7 和5.9分别摘自 [10, 引理 3.10、推论 3.13], 。引理 5.8 是 [10, 引理 3.11], 的一个略微改进的版本，即应在 $|s'_k|+|s''_k|$中右端加入乘子 [10,引理 3.11]。我们只证明引理 5.8。

引理 5.7 ([10, 引理 3.10])。 对任意 $k=1,\dots,n$，这些量

$$\|u'_k-\tilde{u}'_k\|_{L^\infty(I(s'_k))},\ \|u''_k-\tilde{u}''_k\|_{L^\infty(s'_k+I(s''_k))},\ \|\sigma'_k-\tilde{\sigma}'_k\|_{L^1(I(s'_k))},$$
$$\|\sigma''_k-\tilde{\sigma}''_k\|_{L^1(s'_k+I(s''_k))},\ \left\|\frac{\partial^2 f'_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\tilde{f}'_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k))},\ \left\|\frac{\partial^2 f''_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\tilde{f}''_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(s'_k+\mathbf{I}(s''_k))}$$

由 $\mathcal{O}(1)\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}(u^L,u^M,u^R)$ 有界。

引理 5.8 （ [10, 引理 3.11]的改进版本）。对于任意 $k=1,\dots,n$,

- *if* $s'_k s''_k\geqslant 0$, *then*

$$\left.\begin{aligned}&\|(\tilde{u}'_k\cup\tilde{u}''_k)-\tilde{u}_k\|_{L^\infty(\mathbf{I}(s'_k+s''_k))}\\&\|(\tilde{\sigma}'_k\cup\tilde{\sigma}''_k)-\tilde{\sigma}_k\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k))}\\&\left\|\tfrac{\partial^2\tilde{f}'_k}{\partial\tau^2}\cup\tfrac{\partial^2\tilde{f}''_k}{\partial\tau^2}-\tfrac{\partial^2\tilde{f}_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k))}\end{aligned}\right\}$$
$$\leqslant\mathcal{O}(1)\sum_{h=1}^{k}\Big[\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}(u^L,u^M,u^R)+(|s'_h|+|s''_h|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}(u^L,u^M,u^R)\Big];$$

- *if* $s'_k s''_k<0$, *then*

$$\left.\begin{aligned}&\|(\tilde{u}'_k\triangle\tilde{u}''_k)-\tilde{u}_k\|_{L^\infty(\mathbf{I}(s'_k+s''_k))}\\&\|(\tilde{\sigma}'_k\triangle\tilde{\sigma}''_k)-\tilde{\sigma}_k\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k))}\\&\left\|\tfrac{\partial^2\tilde{f}'_k}{\partial\tau^2}\triangle\tfrac{\partial^2\tilde{f}''_k}{\partial\tau^2}-\tfrac{\partial^2\tilde{f}_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k))}\end{aligned}\right\}$$
$$\leqslant\mathcal{O}(1)\sum_{h=1}^{k}\Big[\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}(u^L,u^M,u^R)+(|s'_h|+|s''_h|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}(u^L,u^M,u^R)\Big].$$

引理 5.9 ([10, 推论 3.13])。 对于任意 $k=1,\dots,n$，均有

$$\|\tilde{u}_k-u_k\|_{L^\infty(\mathbf{I}(s'_k+s''_k)\cap\mathbf{I}(s_k))},\ \|\tilde{\sigma}_k-\sigma_k\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k)\cap\mathbf{I}(s_k))},$$
$$\left\|\frac{\partial^2\tilde{f}_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k)\cap\mathbf{I}(s_k))}\leqslant\mathcal{O}(1)\Big[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}(u^L,u^M,u^R)+\sum_{h=1}^{n}\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}(u^L,u^M,u^R)\Big].$$

引理 5.8的证明。 下面的证明与 [10, 引理 3.11],类似，唯一的区别在于对 k个符号相反的波之间相互作用的分析， $s_k's_k'' \leqslant 0$，具体来说，是估计式 (30)–(31)、(33)–(34)。按照 [10], 我们将证明分为两个步骤。在整个证明过程中，我们省略相互作用量中自变量 (u^L, u^M, u^R)。

步骤 *1.* 我们断言，对于每个 $k = 1,\dots,n$，都有

$$|\tilde{u}_k''(s_k'+s_k'') - \tilde{u}_k(s_k'+s_k'')| \leqslant \mathcal{O}(1)\sum_{h=1}^{k}\Big[\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}} + (|s_h'|+|s_h''|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}\Big]. \tag{26}$$

我们对 k 进行归纳。基础情形和归纳步骤都归结为证明：对于每个 k,

$$\begin{aligned}&|\tilde{u}_k''(s_k'+s_k'') - \tilde{u}_k(s_k'+s_k'')|\\ &\qquad\leqslant \mathcal{O}(1)\Big[\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}} + (|s_k'|+|s_k''|)\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}} + |\tilde{u}_k'(0)-\tilde{u}_k(0)|\Big],\end{aligned} \tag{27}$$

其中左端等于后续 k 的右端中的第三项。我们区分三种情形。

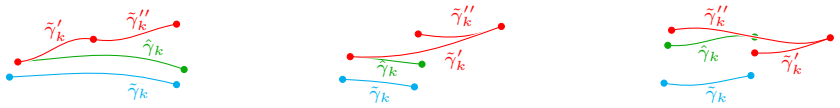
- *Case* $s_k's_k'' \geqslant 0$. Set $\hat{\gamma}_k = (\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{\sigma}_k) := \gamma_k(\tilde{u}_k'(0), s_k'+s_k'')$, see Fig. 9(a). We have

$$|\tilde{u}_k''(s_k'+s_k'') - \hat{u}_k(s_k'+s_k'')| \leqslant \mathcal{O}(1)\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}} \tag{28}$$

由引理 3.9，以及

$$|\hat{u}_k(s_k'+s_k'') - \tilde{u}_k(s_k'+s_k'')| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|\tilde{u}_k'(0)-\tilde{u}_k(0)| \tag{29}$$

根据引理3.7。由（28）和（29）可得（27）。



(a) (b) (c)

FIGURE 9. 引理 5.8的证明：(a) 情形 $s_k's_k'' \geqslant 0$；(b) 情形$s_k's_k'' < 0$, $|s_k'| \geqslant |s_k''|$；(c) 情形 $s_k's_k'' < 0$, $|s_k'| < |s_k''|$；u绘出了曲线的分量。

- 情形 $s_k's_k'' < 0$, $|s_k'| \geqslant |s_k''|$。设 $\hat{\gamma}_k := (\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{\sigma}_k) = \gamma_k(\tilde{u}_k'(0)\ s_k'+s_k'')$, 见图9(b)。我们估计

$$|\tilde{u}_k''(s_k'+s_k'') - \tilde{u}_k'(s_k'+s_k'')| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|s_k''|^2 = \mathcal{O}(1)\,|s_k''|\,\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}} \tag{30}$$

由于 u 分量的曲线 $\tilde{\gamma}_k'$ 和 $\tilde{\gamma}_k''$ 在 $\tilde{u}_k'(s_k')$ 处相切，且这两条曲线的二阶导数一致有界，

$$|\tilde{u}_k'(s_k'+s_k'') - \hat{u}_k(s_k'+s_k'')| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|s_k'+s_k''|\cdot|s_k''| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|s_k'|\cdot\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}} \tag{31}$$

根据引理 3.8，以及

$$|\hat{u}_k(s_k'+s_k'') - \tilde{u}_k(s_k'+s_k'')| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|\tilde{u}_k'(0)-\tilde{u}_k(0)| \tag{32}$$

由引理3.7可知。由（30）–（32）可得（27）。

- *Case* $s'_k s''_k < 0$, $|s'_k| < |s''_k|$. Set $\hat{\gamma}_k = (\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{\sigma}_k) := \gamma_k(\tilde{u}''_k(0), s'_k + s''_k)$, see Fig. 9(c). We estimate

(33) $$|\tilde{u}''_k(s'_k + s''_k) - \hat{u}_k(s'_k + s''_k)| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|s'_k + s''_k| \cdot |s'_k| \leqslant \mathcal{O}(1)\ |s''_k|\,\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}$$

由引理 3.8，并且

$$|\hat{u}_k(s'_k + s''_k) - \tilde{u}_k(s'_k + s''_k)| \leqslant \mathcal{O}(1)\Big(\,|\hat{u}_k(0) - \tilde{u}'_k(0)| + |\tilde{u}'_k(0) - \tilde{u}_k(0)|\,\Big)$$

(34) $$\leqslant \mathcal{O}(1)\Big(\,|s'_k|^2 + |\tilde{u}'_k(0) - \tilde{u}_k(0)|\,\Big) = \mathcal{O}(1)\Big(\,|s'_k|\,\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}} + |\tilde{u}'_k(0) - \tilde{u}_k(0)|\,\Big)$$

根据引理3.7 并利用以下对象的相切性 u曲线的 - 分量 $\tilde{\gamma}'_k$，$\tilde{\gamma}''_k$ 在 $\tilde{u}'_k(s'_k)$。由 (33) 和 (34) 可得 (27)。

步骤 *2* 与 [10], 中的情形完全类似，只需作出与步骤 1 中相同的修改。□

5.4. **关于 $\Delta\sigma$ 的界**。现在我们可以证明命题 5.4。我们已经指出，该命题是 [10, 定理 3.3]的一个精细化版本。事实上，与 [10, 定理 3.3], 相比，右端中 $|s'_k| + |s''_k|$ 在 $\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}(u^L, u^M, u^R)$ 前多了一个乘子。这一乘子的存在尤其表明，$\Delta\sigma(u^L, u^M, u^R) = \mathcal{O}(1)\ \big|u^R - u^M\big| \cdot \big|u^M - u^L\big|$ 是一个“二次量”，这正如其由二次泛函 Υ的下降所界定时所预期的那样。

命题 *5.4* 的证明。结合引理 5.7、5.8 和5.9。 □

注记 5.10。由引理 *5.4* *5.7*、*5.8*、*5.9* 导出命题 *3* 的过程与 [10, 定理 3。3] 由 [10, 引理 3.10–3.11、推论 3。13] 分别得出的过程相似。两者的差别仅在于引理 $|s'_k|+|s''_k|$ *5.8* 中额外的乘子 （相对于 [10,引理 3。11]）。

5.5. **标量情形下 $\Delta\Upsilon$ 的策略**。在证明命题 5.5之前，我们将利用 Υ 和**代价**的性质；先对 [3, 第 4] 节中的标量情形作一些类比，将很有启发。

首先请注意，相互作用量（特别是 $\mathtt{A}^{\mathrm{quadr}}(u^L,\ u^M,\ u^R)$ 和 $\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}(u^L,\ u^M,\ u^R)$）在标量情形下也有良好定义（尽管 [3] 中没有使用这种记法）。此外，$\mathtt{A}^{\mathrm{quadr}}$，$\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}$ 互相奇异（即，如果一个相互作用量非零，另一个必为零）。在两种典型情形——同号 （$u^L \leqslant u^M \leqslant u^R$）和异号 （$u^L \leqslant u^R \leqslant u^M$）相互作用——中，有

标量情形		
	$u^L \leqslant u^M \leqslant u^R$	$u^L \leqslant u^R \leqslant u^M$
$\mathtt{A}^{\mathrm{quadr}}(u^L,\ u^M,\ u^R)$	$\mathbf{H}(u^L, u^M, u^R)$	0
$\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}(u^L,\ u^M,\ u^R)$	0	$\lvert u^M - u^R\rvert$

虽然 [3], 中没有明确这样做，但标量情形下定理 5.3的证明也可拆分为命题 5.4–5.5的类似证明。对于 $\Delta\sigma$，有（此处及本节其余部分省略相互作用量和速度变化的自变量（$u^L,\ u^M,\ u^R$））：

(35) $$\Delta\sigma \leqslant 2\mathtt{A}^{\mathrm{quadr}} + \mathcal{O}(1)\big(|u^R - u^M| + |u^M - u^L|\big)\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}, \quad n = 1.$$

事实上，(35) 在 [3, (32)] 中可由同号相互作用的情形推出，而在 [3, (34)] 中可由异号相互作用的情形推出。注意，(35) 是

本质上是命题 5.4 (不含 $\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}$ 和 $\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}$，我们可以将它们视为来自系统情形的额外“误差”。)

关于命题5.5，标量类比为

$$\mathtt{A}^{\mathrm{quadr}} + \big(|u^R - u^M| + |u^M - u^L|\big)\,\mathtt{A}^{\mathrm{canc}} \leqslant \mathcal{O}(1)\big[\Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u})\big], \quad n = 1. \tag{36}$$

回想一下，在标量情形中，$\Upsilon = C$ 全变差$^2 - \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$，对于某个 $C > 0$ 足够大的值，待选定。[4] 估计（36）通过分别分析 [3]全变差$^2(u)$–全变差$^2(\hat{}u)$ 和 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u) - \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\hat{}u)$ 得到证明。这两个估计为[5]

标量情形		
	同号 相互作用	异号相互作用
$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\hat{}u) - \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)$	$\mathtt{A}^{\mathrm{quadr}}$	$+ \mathcal{O}(1)\,\big(|u^R - u^M| + |u^M - u^L|\big)\,\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}$ (37)
全变差$(u)^2$ –全变差$(\hat{}u)^2$	0	$+ 2\,\big(|u^R - u^M| + |u^M - u^L|\big)\,\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}$ (38)

上述不等式的右端始终有两项：第一项来自对同号相互作用的分析，第二项来自对异号相互作用的分析。$\Delta\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$ 分别参见 [3, (31)] 和 [3, (35)]。对于 Δ全变差^2, , 同号相互作用的情形显然成立；异号相互作用请参见 [3, (33)]。

这些不等式，加上在定义 C 中选取足够大的常数 Υ，足以得出标量情形下（36）的证明。事实上，记 $B > 0$ 为 $\mathcal{O}$（37）中出现的常数（1）；现在（37）$+C$（38）可写为

$$\begin{aligned}\Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u}) &\geqslant \mathtt{A}^{\mathrm{quadr}} + (2C - B)\,\big(|u^R - u^M| + |u^M - u^L|\big)\,\mathtt{A}^{\mathrm{canc}} \\ &\overbrace{\geqslant}^{(C \geqslant B)} \mathtt{A}^{\mathrm{quadr}} + B\,\big(|u^R - u^M| + |u^M - u^L|\big)\,\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}\end{aligned}$$

由此得到（36）。简言之，$-\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$ 在异号相互作用的情况下可能增大，但其增量受全变差^{2}的减小所控制。

5.6. **关于 $\Delta\Upsilon$ 的界。** 最后，我们证明命题 5.5，采用与上一节标量情形中所述类似的策略。因此，我们分别分析 $\Upsilon = C_1 V^2 + C_2\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}} - \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$ 各个分量的变化。常数 C_1、C_2（其中 C_1、$C_2 - C_1 \gg 1$）将在本节末确定。

命题 5.11 (V^2**的变分)。** 设 u, $\hat{}u$ 与定理 *5.3*中的定义相同。则有

$$V^2(u) - V^2(\hat{u}) \geqslant 2\sum_{k=1}^{n}(|s_k'| + |s_k''|)\sum_{h=1}^{n}\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}} - \mathcal{O}(1)\big[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}} + \sum_{k=1}^{n}\mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}\big].$$

[4]文献 [3], 证明，只需选取 $C = \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}$ 即可。[5]这些估计在文献 [3] 中并未以完全相同的形式给出（尤其是没有使用相互作用量这一记号），但我们将在下一段指出文献 [3] 中相关估计的确切出处。

证明。我们有

$$\begin{aligned}V^2(u)-V^2(\hat{u}) &= (V(u)+V(\hat{u}))(V(u)-V(\hat{u}))\\ &= (V(u)+V(\hat{u}))\Big(\sum_h |s_h'|+|s_h''|-|s_h|\Big)\\ &= (V(u)+V(\hat{u}))\Big[\Big(\sum_h \underbrace{|s_h'|+|s_h''|-|s_h'+s_h''|}_{=2\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}\geqslant 0}\Big)+\Big(\sum_h \underbrace{|s_h'+s_h''|-|s_h|}_{\geqslant -|s_h'+s_h''-s_h|}\Big)\Big]\\ &\geqslant 2\sum_k \big(|s_k'|+|s_k''|\big)\sum_h \mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}-\mathcal{O}(1)\Big[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}\Big],\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了 $\sum_k(|s_k'|+|s_k''|)\leqslant V(u)+V(\hat{u})\leqslant 2\beta\leqslant\mathcal{O}(1)$，以及命题 5.6。□

现在我们回顾一下与 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ [5] 相关的李雅普诺夫性质。

命题 5.12 ([5, 命题 4.1])。设 u，$\hat{u}$，u^L，u^M，u^R 与定理 5.3中的情形相同，且 β

$$\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}(u^L,u^M,u^R)+\sum_{k=1}^n \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}(u^L,u^M,u^R)\leqslant\mathcal{O}(1)\Big[\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u)-\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(\hat{u})\Big].$$

备注 5.13。结合命题 5.6 (其中 [5, 定理3。7]) 与命题 5.12，可以推得（使用与上文相同的记号）

$$(V+C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}})(u)\geqslant(V+C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}})(\hat{u}),$$

对于 $C\gg 1$。

现在我们估计 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$的变化量。这是全文证明的核心。与标量情形一样，我们证明 $-\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$ 包含一个递减部分（对应于同号相互作用）和一个递增部分（对应于异号相互作用，以及横向相互作用和曲线长度的调整）。

命题 5.14（$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$的变化量）。设 u，u 与定理 5.3中的定义相同。若 $\beta\ll 1$，则

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\hat{u})-\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)\geqslant\frac{1}{2}\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}-\mathcal{O}(1)\sum_{k=1}^n\big(|s_k'|+|s_k''|\big)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n\big(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}\big)\Big).$$

证明。首先我们注意到，只需证明对每个 k，

$$\begin{aligned}&\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^M)-\mathbf{cost}_k(u^M,u^R)\geqslant\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}\\ &-\mathcal{O}(1)(|s_k'|+|s_k''|+|s_k|)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big).\end{aligned}\tag{39}$$

确实，假设已证明（39）。对 $k=1$，……，n 求和后，左端之和为$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\hat{u})-\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)$。注意，由命题 5.6，

$$\sum_k|s_k|\leqslant\sum_k|s_k'+s_k''|+\mathcal{O}(1)\Big[\sum_k|s_k'|\Big]\cdot\overbrace{\Big[\sum_k|s_k''|\Big]}^{\leqslant\beta}\leqslant\mathcal{O}(1)(1+\beta)\sum_k(|s_k'|+|s_k''|)$$

（39）中右端对所有 k 的和又有如下下界：

$$\begin{aligned}\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}} - \mathcal{O}(1)(1+\beta)\Big(\sum_k(|s_k'|+|s_k''|)\Big)\cdot\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_h(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big)\\ =\Big(1-\mathcal{O}(1)(1+\beta)\beta\Big)\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}\\ -\mathcal{O}(1)(1+\beta)\Big(\sum_k(|s_k'|+|s_k''|)\Big)\cdot\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_h(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big)\end{aligned}$$

由此可得结论，只要 β 足够小。

现在证明（39）。我们分别考虑以下两种情形：s_k'、$s_k''\geqslant 0$（“同号相互作用”）以及 $-s_k'\leqslant s_k''\leqslant 0$（“异号相互作用”）。其余四种情形的处理类似。

同号相互作用，s_k'，$s_k''\geqslant 0$。我们采用记号 $a=0$，$b=s_k'$，$c=s_k'+s_k''$，$\bar c=s_k$。有

$$\mathbf{cost}_k(u^L,u^M)=\mathbf{cost}_{f_k'}(a,b),\quad \mathbf{cost}_k(u^M,u^R)=\mathbf{cost}_{f_k''}(b,c), \tag{40}$$

$$\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)=\mathbf{cost}_{f_k}(a,\bar c). \tag{41}$$

为了应用第2节中的类相互作用估计，我们将使用 $\tilde{\ }$ 定义在 $f_k'\cup f_k''$ 上的“虚拟通量” $[a,c]$，然后量化相对于（40）和（41）的误差。[6] 与标量情形类似，我们利用**代价**的超可加性（命题 2.3，（i）），得到

$$\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(a,c)-\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(a,b)-\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(b,c)\geqslant \mathbf{H}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(a,b,c)=\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}. \tag{42}$$

现在我们要量化由通量和波的数量变化所产生的修正项。首先，根据命题 2.6 以及 $b_1=b_2=b$，

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(a,b)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^M)\Big|=\Big|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'}(a,b)-\mathbf{cost}_{f_k'}(a,b)\Big|\\ &\leqslant\frac12(b-a)\left\|\frac{\partial^2\tilde f_k'}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_k'}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1([a,b])}=\mathcal{O}(1)\,|s_k'|\,\mathtt{A}^{\mathrm{trans}},\end{aligned} \tag{43}$$

其中，后一个估计由引理 5.7得出。同样，

$$\Big|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(b,c)-\mathbf{cost}_k(u^M,u^R)\Big|=\mathcal{O}(1)\,|s_k''|\,\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}. \tag{44}$$

其次，再由命题 2.6 可得 $b_1=c$，$b_2=\bar c$，

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(a,c)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)\Big|=\Big|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(a,c)-\mathbf{cost}_{f_k}(a,\bar c)\Big|\\ &\leqslant\frac12(s_k'+s_k'')\boxed{\left\|\frac{\partial^2(\tilde f_k'\cup\tilde f_k'')}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s_k'+s_k'')\cap\mathbf{I}(s_k))}}\\ &+\frac12\max\left\{\left\|\frac{\partial^2(\tilde f_k'\cup\tilde f_k'')}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty},\left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}\right\}\cdot\frac{s_k'+s_k''+|s_k|}{2}\cdot\underbrace{|s_k'+s_k''-s_k|}_{\leqslant\mathcal{O}(1)(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}})\text{ by Prop. 5.6}}.\end{aligned} \tag{45}$$

[6] 回想一下，正如第 5.1 节所指出的，$\tilde f_k'\cup\tilde f_k''\in C^{1,1}(\mathbf{I}(s_k'+s_k''))$，因此我们可以应用第 2 节中的所有结果。

我们将右端的框架化 L^1-范数估计为

$$\overbrace{\left\|\frac{\partial^2(\tilde f_k'\cup\tilde f_k'')}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\tilde f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s_k'+s_k''))}}^{\substack{\leqslant\mathcal{O}(1)\sum_{h=1}^k(\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s_h'|+|s_h''|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\\ \text{by Lemma 5.8}}}+\overbrace{\left\|\frac{\partial^2\tilde f_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s_k'+s_k'')\cap\mathbf{I}(s_k))}}^{\leqslant\mathcal{O}(1)(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}})\text{ by Lemma 5.9}}$$

$$\leqslant\mathcal{O}(1)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s_h'|+|s_h''|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big).$$

因此（45），由于右端的最大值一致有界，

$$\left|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'\cup\tilde f_k''}(a,c)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)\right|$$

$$\leqslant\mathcal{O}(1)(s_k'+s_k''+|s_k|)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s_h'|+|s_h''|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big). \tag{46}$$

根据42) (44) and (46) bt i

$$\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^M)-\mathbf{cost}_k(u^M,u^R)\geqslant\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}$$

$$-\mathcal{O}(1)(s_k'+s_k''+|s_k|)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s_h'|+|s_h''|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big).$$

这是 implies, (39) s_k', s_k 种情况。$\geqslant 0$

相反符号相互作用， $-s_k'\leqslant s_k''\leqslant 0$。我们采用记号 $a=0$, $b=s_k'+s_k''$, $c=s_k'$, $b=s_k$。成立

$$\mathbf{cost}_k(u^L,u^M)=\mathbf{cost}_{f_k'}(a,c),\quad \mathbf{cost}_k(u^M,u^R)=\mathbf{cost}_{f_k''}(c,b), \tag{47}$$

$$\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)=\mathbf{cost}_{f_k}(a,\bar b). \tag{48}$$

利用命题 2.3 (ii) 和命题 2.2，我们得到

$$\mathbf{cost}_{\tilde f_k'}(a,b)-\mathbf{cost}_{\tilde f_k'}(a,c)\geqslant-\mathbf{cost}_{\tilde f_k'}(b,c)-\frac12\left\|\frac{\partial^2\tilde f_k'}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}(c-b)(b-a)$$

$$\geqslant-\mathcal{O}(1)\,|s_k'|\cdot|s_k''|=-\mathcal{O}(1)\,|s_k'|\,\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}. \tag{49}$$

与（43）类似，我们有

$$\left|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'}(a,c)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^M)\right|=\mathcal{O}(1)\,|s_k'|\,\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}. \tag{50}$$

此外，根据命题 2.6 以及 $b_1=b$, $b_2=b$

$$\left|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'}(a,b)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)\right|=\left|\mathbf{cost}_{\tilde f_k'}(a,b)-\mathbf{cost}_{f_k}(a,\bar b)\right|$$

$$\leqslant\frac12(s_k'+s_k'')\boxed{\left\|\frac{\partial^2\tilde f_k'}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s_k'+s_k'')\cap\mathbf{I}(s_k))}}$$

$$+\frac12\max\left\{\left\|\frac{\partial^2\tilde f_k'}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty},\ \left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^\infty}\right\}\cdot\frac{s_k'+s_k''+|s_k|}{2}\cdot\underbrace{|s_k'+s_k''-s_k|}_{\substack{\leqslant\mathcal{O}(1)(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^n\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}})\\ \text{by Prop. 5.6}}}. \tag{51}$$

我们将右端的框架 L^1-范数估计为

$$\overbrace{\left\|\frac{\partial^2\tilde f'_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\tilde f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k))}}^{\leqslant\mathcal{O}(1)\sum_{h=1}^{k}(\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s'_h|+|s''_h|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\text{ by Lemma 5.8}}+\overbrace{\left\|\frac{\partial^2\tilde f_k}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f_k}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1(\mathbf{I}(s'_k+s''_k)\cap\mathbf{I}(s_k))}}^{\leqslant\mathcal{O}(1)(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^{n}\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}})\text{ by Lemma 5.9}}$$
$$\leqslant\mathcal{O}(1)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^{n}(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s'_h|+|s''_h|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big).$$

因此（51）由于右端中的最大值一致有界，

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbf{cost}_{\tilde f'_k}(a,b)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)\Big|\\ &\leqslant\mathcal{O}(1)(s'_k+s''_k+|s_k|)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^{n}(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s'_h|+|s''_h|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big).\end{aligned}\tag{52}$$

最后，我们利用二次界粗略估计**代价**$_k$（u^M，u^R）2.2）（命题，

$$\mathbf{cost}_k(u^M,u^R)\leqslant\mathcal{O}(1)\,|s''_k|^2\leqslant\mathcal{O}(1)\,|s'_k|\,\mathtt{A}^{\mathrm{canc}}.\tag{53}$$

由（49）–（50）和（52）–（53），我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{cost}_k(u^L,u^R)-\mathbf{cost}_k(u^L,u^M)-\mathbf{cost}_k(u^M,u^R)\geqslant-\mathcal{O}(1)\Big[&|s'_k|\,\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}\\ &+(|s'_k|+|s''_k|+|s_k|)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_{h=1}^{n}(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{quadr}}+(|s'_h|+|s''_h|)\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}})\Big)\Big]\end{aligned}$$

这就得到了（39）。　□

注 *5.15.* 请注意，在 *(46)* 和 *(52)* 中，我们实际上会在 $|s'_h|+|s''_h|$ 和 $\sum_h A_h^{\mathrm{canc}}$ 之间得到一个额外的前因子。这可以解释如下：来自第 k 族的 Δ代价$_k$ 贡献为 $A_k^{\mathrm{quadr}}-\mathcal{O}(1)(|s'_k|+|s''_k|)A^{\mathrm{canc}}$，而来自第 h 族的修正项 $h\neq k$ 在 A_h^{quadr} 和 A_h^{canc} 之前带有高阶前因子。因此，可以通过在所有 A_h^{canc}、$h\neq k$ 项中加入这些前因子来细化 *(39)* 的右端。不过，对所有 k 将 *(39)* 相加后，这种细化的效果便不再显现，因此我们保留右端较粗略的 *(39)*。

命题 *5.5* 的证明。现在我们证明，只要在 5.5 的定义中选取足够大的常数 C_1，C_2-C_1，Υ 即可使命题成立。记 $B>0$为命题 $\mathcal{O}$中出现的常数 5.11、5.12、5.14 及其上界

我们将相应的不等式相加:

$$
\begin{aligned}
&\Upsilon(u)-\Upsilon(\hat{u})\\
&\quad= C_1(V^2(u)-V^2(\hat{u}))+C_2(\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u)-\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(\hat{u}))-(\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)-\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\hat{u}))\\
&\quad\geqslant 2C_1\sum_k(|s_k'|+|s_k''|)\sum_h \mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}-C_1B\big[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}\big]\\
&\qquad+C_2B\big[\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}\big]\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}-B\sum_k\big(|s_k'|+|s_k''|\big)\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_h\big(\mathtt{A}_h^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}\big)\Big)\\
&\quad=\frac{1}{2}\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}+(2C_1-B)\sum_k\big(|s_k'|+|s_k''|\big)\sum_h \mathtt{A}_h^{\mathrm{canc}}\\
&\qquad+(C_2-C_1-\beta)B\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}\Big)\\
&\quad\geqslant\frac{1}{2}\Big(\mathtt{A}^{\mathrm{trans}}+\sum_k \mathtt{A}_k^{\mathrm{cubic}}+\mathtt{A}_k^{\mathrm{quadr}}+\big(|s_k'|+|s_k''|\big)\mathtt{A}_k^{\mathrm{canc}}\Big),
\end{aligned}
$$

其中，只要 C_1 和 C_2-C_1 取值足够大，最后一

足够 .

□

6. Υ IS CONSTANT IF NO INTERACTION TAKES PLACE

现在我们陈述并证明持久性性质，该性质已在定理 A第（iii）项中提出。

定理 6.1 （Υ 若不存在相互作用则为常数）。 设 $\beta \ll 1$。设 $u \in \mathcal{D}_\beta$ 为分段常数函数，相邻跳跃点之间的距离下界为 $L_0>0$。那么对所有 $t\in[0,t_0)$， $S_t\bar{u}\in\mathcal{D}_\beta$和

$$\Upsilon(S_t u)=\Upsilon(u),$$

with

$$t_0:=\frac{L_0}{\max\limits_{\xi,\eta\in\overline{B}_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)}|\lambda_n(\xi)-\lambda_1(\eta)|}$$

备注 6.2。 我们实际上将证明（见命题 *6.3* 的证明）， Υ （即 V、 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}$、 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$、 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$）的每个分量在时刻 t_0之前均为常数。

我们从以下命题推导出定理 6.1 。

命题 6.3. 设 $u(t,x)$ 为黎曼问题 (u^L,u^R)的消失黏性解。那么对所有 $t>0$，都有 $\Upsilon(u(t,\cdot))=\Upsilon(\bar{u})$。

命题 *6.3*的证明。 为简便起见，考虑 $t=1$ 的情形；一般情形只需对空间变量进行缩放，证明完全类似。令 $w=u(1,\cdot)$。我们分别证明 $\Upsilon=C_1V+C_2(\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}+\frac{1}{4}\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}})-\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$的每个分量在 $\bar{u}$ 和 w上取值相同。

根据黎曼问题解的构造（第3.1节）， w 由 n 个拼接在一起的部分组成， k 第 k个部分对应第 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}$族。由于各部分按其编号在空间上依次排列，$w$（$=0$），并且显然还有 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(\bar{u})$。$=0$中的其他所有分量，即 Υ，也就是 V， $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$ 和

$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$，分别处理所有族，而不衡量族间相互作用。鉴于此，为了简化记号，我们现在假设只有一个族存在。一般情形可通过按照下文所述的方式分析所有族，并将它们的贡献项相加得到。

因此，我们假设 u^L 和 u^R 由一条精确曲线 $\gamma_k(u^L,\ s) = (u_k,\ v_k,\ \sigma_k)$连接：$\mathbf{I}(s) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 对某个固定的 k 和 s成立。不失一般性，我们还假设 $s > 0$（因而 $\mathbf{I}(s) = [0, s]$）。记 f_k 为约化的 k-通量。再记 μ_k 为 w的第 k个波测度。

现在令 $\mathcal{A}$ 为正测度的极大区间 $A \subset \mathbf{I}(s)$（至多可数）的集合，在这些区间上 σ_k 为常数。我们首先证明

$$w_x^{\mathrm{atom}} = \sigma_{k\sharp}\Big((\tilde{r}_k \circ \gamma_k) \cdot \mathcal{L}\big|_{\cup\mathcal{A}}\Big), \qquad w_x^{\mathrm{cont}} = \sigma_{k\sharp}\Big((\tilde{r}_k \circ \gamma_k) \cdot \mathcal{L}\big|_{\mathbf{I}(s)\setminus(\cup\mathcal{A})}\Big). \tag{54}$$

根据黎曼问题解的构造，

$$w_x \overset{(9)}{=} \sigma_{k\sharp}\Big((\tilde{r}_k \circ \gamma_k) \cdot \mathcal{L}\big|_{\mathbf{I}(s)}\Big). \tag{55}$$

特别地，我们有 $w_x(\{x\}) \neq 0 \implies \big|\sigma_k^{-1}(\{x\})\big| > 0 \implies \sigma_k^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$。因此 $w_x^{\mathrm{atom}} = \sum_{A\in\mathcal{A}} w_x\big(\sigma_k(A)\big)\delta_{\sigma_k(A)}$。对于 $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$，我们推得

$$\int \varphi(x) w_x^{\mathrm{atom}} = \sum_{A\in\mathcal{A}} \varphi(\sigma_k(A)) w_x(\sigma_k(A)) \overset{(55)}{=} \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A \varphi(\sigma_k(\varsigma))\tilde{r}_k(\gamma_k(\varsigma))d\varsigma,$$

由此可得 w_x^{atom}在（54）中的等式。关于 w_x^{cont}的等式则由 w_x^{atom}的等式以及（55）得出。

现在注意到，由（54），对于 $A = [a_-, a_+] \in \mathcal{A}$ 和 $\sigma_k(A) = \{x\}$，映射$\gamma_k\big|_A$ 是一条连接 $w_-(x) = u_k(a_-)$ 与 $w_+(x) = u_k(a_+)$ 的精确曲线，其对应的通量为 $f_k\big|_A$（定义域作适当平移后）。由此可知

$$\mu_h(\{x\}) = |A|\,\delta_{kh}, \qquad \mathbf{cost}_h(w_-(x), w_+(x)) = \mathbf{cost}_{f_k}(a_-, a_+)\delta_{kh}. \tag{56}$$

现在我们证明

$$\mu_h^{\mathrm{atom}} = \delta_{hk}\sigma_{k\sharp}(\mathcal{L}\big|_{\cup\mathcal{A}}), \qquad \mu_h^{\mathrm{cont}} = \delta_{hk}\sigma_{k\sharp}(\mathcal{L}\big|_{\mathbf{I}(s)\setminus\cup\mathcal{A}}). \tag{57}$$

第一个等式由（54）、（56）立即得出。接下来，令 $s \in \mathbf{I}(s) \setminus (\cup\mathcal{A})$。我们有 $v_k(s) = 0$，因此 $(\tilde{r}_k \circ \gamma_k)(s) = (r_k \circ u_k)(s)$；此外 $(w \circ \sigma_k)(s) \overset{(8)}{=} u_k(s)$。于是，给定 $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$，根据 μ_h 的定义，

$$\begin{aligned}
\int \varphi\mu_h^{\mathrm{cont}} &= \int \varphi(x)\,\big\langle \ell_h(w(x))\ ,\ w_x^{\mathrm{cont}}(dx)\big\rangle \\
&\overset{(54)}{=} \int_{\mathbf{I}(s)\setminus(\cup\mathcal{A})} (\varphi\circ\sigma_k)(s)\,\big\langle \underbrace{(\ell_h \circ w \circ \sigma_k)(s)}_{=\ell_h(u_k(s))}\ ,\ \underbrace{(\tilde{r}_k\circ\gamma_k)(s)}_{=r_k(u_k(s))}\big\rangle\, ds \\
&= \int_{\mathbf{I}(s)\setminus(\cup\mathcal{A})} (\varphi\circ\sigma_k)\delta_{kh}\, ds,
\end{aligned}$$

这就意味着（57）中的第二个等式。

由（57），可得 $\mu_h = \delta_{hk}\sigma_{k\sharp}(\mathcal{L}\big|_{\mathbf{I}(s)})$，由 σ_k 的单调性可知，$\mu_k = |\mu_k|$ 因此 $V(w) = V(\bar{u}) = |s|$。

现在我们来证明 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}(w) = \mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}(\bar{u})$。回想一下，与本证明前文一样，$\sigma_k$ 是求解黎曼问题 (u^L, u^R) 的精确曲线的第三个分量。显然，$\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}(\bar{u})$ 可利用 16 中的 σ_k计算。现在我们证明

同样， $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}(w)$ 可利用 16 中的同一个映射 σ_k计算。这相当于证明 σ_k 对 17 满足 $w_\circ$

因此，固定 $\tau \in (0, |\mu_k|(\mathbb{R})) = (0, s)$。那么满足条件 $|\mu_k((-\infty, x))| \leqslant \tau$ 的最大数目 x 等于 $x = \sigma_k(\tau)$。现在

- if $\mu_k(\{x\}) = 0$, then $\tau \in \mathbf{I}(s) \setminus (\cup \mathcal{A})$ is a singleton σ_k-preimage of x, that means $w_-(x) = w(x) = u_k(\tau)$ and $\sigma_k(\tau) = \tilde{\lambda}_k(\gamma(\tau)) = \lambda_k(u_k(\tau))$;
- if $\mu_k(\{x\}) > 0$, then $A := \sigma_k^{-1}(\{x\})$ belongs to $\mathcal{A}$, and

$$\sigma_k(\tau) = \frac{d}{d\varsigma}(\operatorname*{\mathbf{conv}}_{\mathbf{I}(s)} f_k)(\tau) = \frac{d}{d\varsigma}(\operatorname*{\mathbf{conv}}_{A} f_k)(\tau),$$

因此，总体而言， σ_k 满足（17），对于 $w_\circ$ 这证明了 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}(w) = \mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}(\bar{u})$ 。

最后，将上文确定的 w_x 的原子写作 $\mathcal{A}$ 中元素的 σ_k-像，可得

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(w) = \sum_x \mathbf{cost}_k(w_-(x), w_+(x)) \overset{(56)}{=} \sum_{[a_-,a_+]\in\mathcal{A}} \mathbf{cost}_{f_k}(a_-, a_+)$$
$$\overset{\text{Prop. 2.5}}{=\!=} \sum_{[a_-,a_+]\in\mathcal{A}} \sum_{\substack{(p,q)\in \\ \mathbf{Br}_{f_k}(a_-,a_+)}} \mathbf{cost}_{f_k}(p,q) = \sum_{\substack{(p,q)\in \\ \mathbf{Br}_{f_k}(0,s)}} \mathbf{cost}_{f_k}(p,q) = \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\bar{u}).$$

在倒数第二个等式中，我们使用了恒等式

$$\bigsqcup_{[a_-,a_+]\in\mathcal{A}} \mathbf{Br}_{f_k}(a_-, a_+) = \mathbf{Br}_{f_k}(0, s). \qquad \square$$

定理6.1的证明。考虑 u的两个相邻跳跃。由于 Lax 可容许性条件，源自第一个跳跃的任意速度与源自第二个跳跃的任意速度之差至多为

$$\max_{\xi,\eta\in\overline{B}_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)} |\lambda_n(\xi) - \lambda_1(\eta)|$$

此外，跳跃在空间上至少相隔 L_0。因此，在时刻 t_0之前，从不同位置（在零时刻）出发的波前不会相互作用。因此，对所有 $t < t_0$，由命题 6.3， $\Upsilon(S_t\bar{u}) = \Upsilon(\bar{u})$。$\square$

7. The approximation property w.r.t. cropping

本节和下一节将陈述两个定理（定理 7.2–8.2），对应于 定理 B，第 (ii) 项。本节讨论如何通过裁剪 过程逼近给定的映射 u，该过程通过移除 u 在紧集之外的变化来实现。

定义 7.1。令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个非空区间。对于 $u \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$，我们将裁剪 $\mathbf{Crop}_I(u)$ 定义为映射 $v \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$，使得

$$v_x = v_x\big|_I = u_x\big|_I \quad \text{and } v = u \text{ a.e. on } I. \tag{58}$$

注意

$$\mathbf{Crop}_I \circ \mathbf{Crop}_J = \mathbf{Crop}_{I\cap J} \text{ whenever } I \cap J \neq \varnothing. \tag{59}$$

定理 7.2（关于**裁剪**的**逼近**。设 $\Theta \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ 满足 $\inf \Theta = -\infty$，$\sup\ \Theta = +\infty$。对每个 $u \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$，

$$\Upsilon(u) = \sup_{\substack{I \subseteq \mathbb{R} \\ \inf I, \sup I \in \Theta}} \Upsilon(\mathbf{Crop}_I(u)).$$

为证明定理7.2 我们首先在第7.1 节讨论 $\Upsilon(u)$（具体而言，Υ的每个分量）在我们改变区间 u上的 $I \subseteq \mathbb{R}$的取值时如何变化。然后我们说明，**裁剪**操作会降低 Υ的值（第7.2节），最后证明，当**裁剪**的界限趋近 $\pm\infty$时，这种下降会消失（第7.3节）。

7.1. 区间内的扰动。

命题 7.3. 假设

$$u, \tilde{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}; \overline{B}_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)), \quad u_x = \tilde{u}_x \ \text{on}\ \mathbb{R} \setminus A, \quad \text{and}\ u = \tilde{u}\ \text{a.e. on}\ \mathbb{R} \setminus A, \tag{60}$$

其中 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间。则

$$|\Upsilon(\tilde{u}) - \Upsilon(u)| \leqslant \mathcal{O}(1)\Big[(\mathrm{TV}(u) + \mathrm{TV}(\tilde{u})) \sum_k |V_k(\tilde{u}) - V_k(u)| + |u_x|(A)^2 + |\tilde{u}_x|(A)^2\Big](1 + \mathrm{TV}(u) + \mathrm{TV}(\tilde{u})).$$

证明基于以下三个引理，并假设（60）。在证明中，回顾记号 $A_\pm$ （见第1.5节）。我们用 μ_k （分别用 $\tilde{\mu}_k$）表示 k-th 波测度 u（分别为 $\tilde{u}$）。

引理 7.4. 设 （60）成立。那么

$$\big|\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(\tilde{u}) - \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(u)\big| \leqslant \mathcal{O}(1)\Big[|u_x|(\mathbb{R} \setminus A)\sum_{k=1}^{n} |V_k(\tilde{u}) - V_k(u)| + |u_x|(A)^2 + |\tilde{u}_x|(A)^2\Big].$$

证明。我们有

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(u) = \sum_{k' < k''} \big(|\mu_{k'} \times \mu_{k''}|\big)(\measuredangle), \quad \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(\tilde{u}) = \sum_{k' < k''} \big(|\tilde{\mu}_{k'} \times \tilde{\mu}_{k''}|\big)(\measuredangle).$$

并且，由于（60），

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(\tilde{u}) - \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(u) = \sum_{k' < k''} \big(|\tilde{\mu}_{k'} \times \tilde{\mu}_{k''}| - |\mu_{k'} \times \mu_{k''}|\big)(\overbrace{\measuredangle \cap [A \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times A]}^{(A \times A_-) \sqcup (A_+ \times A) \sqcup (\measuredangle \cap A^2)}).$$

Then,

$$\big(|\tilde{\mu}_{k'} \times \tilde{\mu}_{k''}| - |\mu_{k'} \times \mu_{k''}|\big)(A \times A_-) = \overbrace{(|\tilde{\mu}_{k'}| - |\mu_{k'}|)(A)}^{V_{k'}(\tilde{u}) - V_{k'}(u)}\ \overbrace{|\mu_{k''}|(A_-)}^{\mathcal{O}(1)|u_x|(\mathbb{R} \setminus A)},$$

$$\big(|\tilde{\mu}_{k'} \times \tilde{\mu}_{k''}| - |\mu_{k'} \times \mu_{k''}|\big)(A_+ \times A) = \underbrace{|\mu_{k'}|(A_+)}_{\mathcal{O}(1)|u_x|(\mathbb{R} \setminus A)}\ \underbrace{(|\tilde{\mu}_{k''}| - |\mu_{k''}|)(A)}_{V_{k'}(\tilde{u}) - V_{k'}(u)}.$$

and

$$\Big|\big(|\tilde{\mu}_{k'} \times \tilde{\mu}_{k''}| - |\mu_{k'} \times \mu_{k''}|\big)(\measuredangle \cap A^2)\Big| \leqslant \big(|\tilde{\mu}_{k'} \times \tilde{\mu}_{k''}| + |\mu_{k'} \times \mu_{k''}|\big)(\measuredangle \cap A^2)$$
$$\leqslant \mathcal{O}(1)(|u_x|(A)^2 + |\tilde{u}_x|(A)^2)$$

综合所有估计，我们得出结论。 □

引理 7.5. 设 (60)成立，则

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(\tilde{u})-\mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(u)\right|\\&\leqslant \mathcal{O}(1)\Big[\,|u_x|\,(\mathbb{R}\setminus A)\cdot|V_k(\tilde{u})-V_k(u)|+|u_x|\,(A)^2+|\tilde{u}_x|\,(A)^2\Big](\mathrm{TV}(u)+\mathrm{TV}(\tilde{u})).\end{aligned}$$

证明。令 $\sigma_k,\tilde{\sigma}_k$ 分别表示与 u 和 $\tilde{u}$ 相关联的速度映射，如式（17）所示。令

$$\begin{aligned}S_k&=(0,|\mu_k|\,(\mathbb{R})),\qquad &Z_k&=(|\mu_k|\,(A_-),|\mu_k|\,(A_-\cup A))\\ \tilde{S}_k&=(0,|\tilde{\mu}_k|\,(\mathbb{R})),\qquad &\tilde{Z}_k&=(|\tilde{\mu}_k|\,(A_-),|\tilde{\mu}_k|\,(A_-\cup A)).\end{aligned}$$

注意，$\tilde{\sigma}_k$ 可以通过将子区间 Z_k 插入 σ_k 的位置来得到，Z_k 并改变该处的取值，同时可能平移其右侧的取值，见图 10。假设 $\varnothing\subsetneq A\subsetneq\mathbb{R}$，另一种情况显然成立。不失一般性，

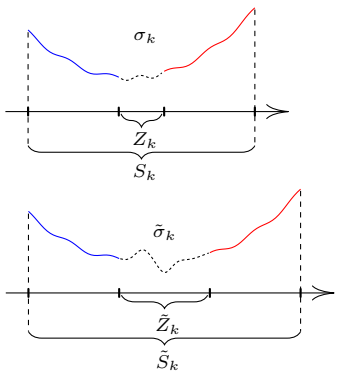


FIGURE 10. 引理 7.5 的证明：σ_k 和 $\tilde{\sigma}_k$的结构。

我们可以假设 $\inf A\in\mathbb{R}$。令 $p=u(-\infty)+u_x(A_-)$。对于每个 $x\in A$，有$|u(x)-p|\leqslant|u_x|(A)$，$|\tilde{u}(x)-p|\leqslant|\tilde{u}_x|\,(A)$。因此，根据 σ_k 的构造，有

$$|\sigma_k(s)-\lambda_k(p)|\leqslant\mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(A)\quad(s\in Z_k),\tag{61}$$

$$|\tilde{\sigma}_k(s)-\lambda_k(p)|\leqslant\mathcal{O}(1)\,|\tilde{u}_x|\,(A)\quad(s\in\tilde{Z}_k).\tag{62}$$

我们有

$$\mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(u)=\iint\limits_{S_k\times S_k}|\sigma_k(s')-\sigma_k(s'')|\,ds'ds'',\ \mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(\tilde{u})=\iint\limits_{\tilde{S}_k\times\tilde{S}_k}|\tilde{\sigma}_k(s')-\tilde{\sigma}_k(s'')|\,ds'ds''.$$

根据 σ_k 的结构，

$$\mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(\tilde{u})-\mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(u)=\iint\limits_{(\tilde{Z}_k\times\tilde{S}_k)\cup(\tilde{S}_k\times\tilde{Z}_k)}|\tilde{\sigma}_k(s')-\tilde{\sigma}_k(s'')|\,ds'ds''-\iint\limits_{(Z_k\times S_k)\cup(S_k\times Z_k)}|\sigma_k(s')-\sigma_k(s'')|\,ds'ds''.$$

现在来证明，在后一差值中，减数（分别地，被减数）接近于量 $2|Z_k|\cdot\text{int}$（分别地，$2|Z_k|\cdot\text{int}$），其中

$$\text{int}:=\int\limits_{S_k\setminus Z_k}|\lambda_k(p)-\sigma_k(s)|\,ds=\int\limits_{\tilde{S}_k\setminus\tilde{Z}_k}|\lambda_k(p)-\tilde{\sigma}_k(s)|\,ds.$$

事实上，利用 $|Z_k| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(A)$，可得

$$\Big|\text{subtrahend} - 2\,|Z_k| \cdot \text{int}\Big| \leqslant \left| \iint\limits_{Z_k \times Z_k} |\sigma_k(s') - \sigma_k(s'')|\; ds'ds'' \right|$$

$$+ 2 \iint\limits_{Z_k \times (S_k \setminus Z_k)} \Big| |\sigma_k(s') - \sigma_k(s'')| - |\lambda_k(p) - \sigma_k(s'')| \Big|\, ds'ds'' \leqslant \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(A)^3$$

$$+ 2 \iint\limits_{Z_k \times (S_k \setminus Z_k)} |\sigma_k(s') - \lambda_k(p)|\; ds'ds'' \overset{(61)}{\leqslant} \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(A)^2\,\mathrm{TV}(u).$$

类似地，利用（62），我们得到 $\Big|$被减数 $- 2|\tilde{Z}_k| \cdot$积分$\Big| \leqslant \mathcal{O}$（1）$|\tilde{u}_x|$（$A$）^{2}全变差（$\tilde{u}$）。于是

$$\begin{aligned}&\big|\mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(\tilde{u}) - \mathcal{Q}_k^{\text{cubic}}(u)\big| \\ &\leqslant 2\Big|\underbrace{|\tilde{Z}_k| - |Z_k|}_{V_k(\tilde{u}) - V_k(u)}\Big| \cdot \text{int} + \mathcal{O}(1)(|u_x|\,(A)^2 + |\tilde{u}_x|\,(A)^2)(\mathrm{TV}(u) + \mathrm{TV}(\tilde{u})).\end{aligned}$$

最后，由于积分 $\leqslant \mathcal{O}$（1）$|u_x|$（$\mathbb{R} \setminus A$）全变差（u），我们得出结论。 □

引理 7.6。设（60）成立，则

$$\big|\mathcal{Q}^{\text{cost}}(\tilde{u}) - \mathcal{Q}^{\text{cost}}(u)\big| \leqslant \mathcal{O}(1)(|u_x|\,(A)^2 + |\tilde{u}_x|\,(A)^2).$$

证明。我们有

$$\mathcal{Q}_k^{\text{cost}}(u) = \sum_{|u_x|(\{x\})>0} \mathbf{cost}_k(u_-(x), u_+(x)), \quad \mathcal{Q}_k^{\text{cost}}(\tilde{u}) = \sum_{|\tilde{u}_x|(\{x\})>0} \mathbf{cost}_k(\tilde{u}_-(x), \tilde{u}_+(x))$$

并且，根据（60），

$$\mathcal{Q}_k^{\text{cost}}(\tilde{u}) - \mathcal{Q}_k^{\text{cost}}(u) = \sum_{\substack{x \in A: \\ |\tilde{u}_x|(\{x\})>0}} \mathbf{cost}_k(\tilde{u}_-(x), \tilde{u}_+(x)) - \sum_{\substack{x \in A: \\ |u_x|(\{x\})>0}} \mathbf{cost}_k(u_-(x), u_+(x)).$$

利用**代价**（命题 2.2）中的二次界，我们将右端各项分别界为 $\mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(A)^2$ 和 $\mathcal{O}(1)$ $|\tilde{u}_x|\,(A)^2$,。 □

命题 *7.3* 的证明。将引理 7.4–7.6 与不等式结合

$$\begin{aligned}\big|V^2(\tilde{u}) - V^2(u)\big| &= |V(\tilde{u}) + V(u)| \cdot |V(\tilde{u}) - V(u)| \\ &\leqslant \mathcal{O}(1)(\mathrm{TV}(u) + \mathrm{TV}(\tilde{u}) \sum_k |V_k(\tilde{u}) - V_k(u)|\end{aligned}$$ □

7.2. **定理 ⩾"的证明（定理 7.2）**。

引理 7.7。设 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(\overline{0}))$ 且 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空区间，则Υ(**裁剪**$_I(u)$) $\leqslant \Upsilon(u)$。

证明。有三种可能的非平凡情形：要么 $\inf I \in \mathbb{R}$，$\sup I = +\infty$，要么 $\sup I \in \mathbb{R}$，$\inf I = -\infty$，要么 I 有界。前两种情形类似，而第三种情形可通过使用（59）归结为前两种情形。因此，不妨设为第一种情形。注意，此时可以保证 $\mathbb{R} \setminus I$ 是一个区间。

设 $v =$ **裁剪**$_{\mathbb{R}\setminus I}(u)$，$w =$ **裁剪**$_I(u)$。我们声称

$$\Upsilon(u) \geqslant \Upsilon(v) + \Upsilon(w). \tag{63}$$

事实上， k阶的 w 波测度（分别为 v）是 k阶的 u 波测度在 I （分别为 $\mathbb{R}\setminus I$）上的限制。因此，利用 $u_x\big|_I = w_x\big|_I$、 $u(+\infty) = w(+\infty)$，以及 $u\big|_{\mathbb{R}\setminus I} = v\big|_{\mathbb{R}\setminus I}$、 $u(-\infty) = v(-\infty)$，可得 $V(u) = V(v) + V(w)$（从而$V(u)^2 \geqslant V(v)^2 + V(w)^2$），并且 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u) = \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(v) + \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(w)$。此外，由于交叉项，不等式 (63) 对 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}$, $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$ 而非 Υ 仍成立。由此证明了 (63)，并完成了证明。□

7.3. **定理“⩽”的证明 7.2**。 定理“⩽”的证明 7.2可由以下引理立即得出。

引理 7.8. 设 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(\overline{0}))$ 且 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空区间，则

$$|\Upsilon(\mathbf{Crop}_I(u)) - \Upsilon(u)| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(\mathbb{R}\setminus I)\cdot \mathrm{TV}(u)\cdot(1+\mathrm{TV}(u)).$$

证明。 同样，利用 (59)，一般情形可归结为半无界 I的情形。于是 $\mathbb{R}\setminus I$ 是一个区间，对 7.3 应用命题 $\tilde{u} = \mathbf{裁剪}_I(u)$， $A = \mathbb{R}\setminus I$，即可得到

$$\begin{aligned}|\Upsilon(\mathbf{Crop}_I(u)) - \Upsilon(u)| &\leqslant \mathcal{O}(1)\Big(\mathrm{TV}(u)\cdot|u_x|\,(A) + |u_x|\,(A)^2\Big)(1+\mathrm{TV}(u))\\ &\leqslant \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(A)\cdot\mathrm{TV}(u)\cdot(1+\mathrm{TV}(u)).\end{aligned}$$ □

8. The approximation property w.r.t. Riemann cuts

现在我们讨论如何通过有限次 对给定映射 u 的逼近：黎曼切割。这是对应于 7.2 的第二个陈述（连同定理 定理 B，第（ii）项）。

我们已在第 1.3 节非正式地引入了黎曼切割，见图 1。不过，采用更一般的黎曼切割定义会更方便。

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间。我们用 $\mathcal{P}(I)$ 表示将I 划分为子区间的所有有限划分的集合。在 $\mathcal{P}(I)$ 上，我们定义偏序 $\mathcal{F}' \preccurlyeq \mathcal{F}$： 若对每个$I' \in \mathcal{F}'$，都存在 I 属于 $\mathcal{F}$，使得 $I' \subseteq I$。

定义 8.1。 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{P}(I)$。若集合 $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ 与 $\mathcal{F}$ 相容，即 $x_i \in I_i$，则称其相容 。此时，对 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$，我们将黎曼切割 $\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}(u)$ 定义为映射 $\hat{}u$，满足

$$\hat{u}(-\infty) = u(-\infty) \text{ and } \hat{u}_x = u_x - u_x\big|_I + \sum_{i=1}^m u_x(I_i)\delta_{x_i}.$$

若 $\mathcal{F} = \{I\}$ 且 $X = \{\hat{}x\}$，则称该黎曼切割为简单 的，并记作$\mathbf{Cut}_{I,\hat{x}}(u)$。

特别地，简单黎曼切割中区间端点为闭（分别为开）端，对应于将边缘跳跃（若存在）纳入（分别是不纳入）所得的有界变差函数中，见图11。

注意，对于 $u \in$有界变差$(\overline{\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)})$， $\Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}(u))$ 的值不取决于 X的具体选取。鉴于此，我们简写为 $\Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u))$。根据定理 5.3，若 $\beta \ll 1$，

$$\forall u \in \mathcal{D}_\beta\colon \quad \mathcal{F}' \preccurlyeq \mathcal{F} \implies \Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F}',\bullet}(u)) \geqslant \Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u)). \tag{64}$$

现在可以陈述以下逼近结果。

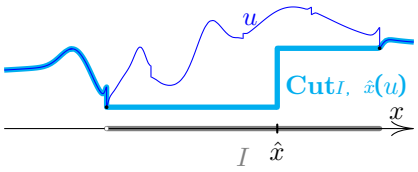


FIGURE 11.在 $\inf I \notin I$、$\sup I \in I$ 情形下，简单黎曼切割中的边缘跳跃。

定理 8.2（关于 **Cut**的逼近）。设 $\beta \ll 1$。设 $\Theta \subseteq I$ 在 I中稠密。那么，对于任意 $u \in \mathcal{D}_\beta$,

$$\Upsilon(u) = \sup\Big\{\Upsilon\big(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u)\big) : \mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I)\Big\},$$

其中

$$\mathcal{P}_\Theta(I) = \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}(I) \ s.t. \ \forall J \in \mathcal{F}, \inf J, \sup J \in \Theta \cup \{\inf I, \sup I\}\big\}.$$

由此立即得到定理 B，第（i）项。

推论 8.3。令 $\beta \ll 1$ 和 $u \in \mathcal{D}_\beta$。令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间，且 $\hat{}x \in I$。那么$\Upsilon(\mathbf{Cut}_{I,\ \hat{x}}(u)) \leqslant \Upsilon(u)$。

证明。将定理 8.2 应用于情形 $\mathcal{F} = \{I\}$。 □

注意，根据 (64)，$\mathcal{F}$ 越细，$\Upsilon(\mathrm{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u))$ 的取值越大。为证明定理 8.2，我们首先借鉴第 7.1 节的思路，通过分别分析全变差较小的区间（第 8.1 节）和存在大跳跃的区间（第 8.2 节），建立估计。随后，我们引入一类 ε-准确划分（第 8.3 节）来以指定精度逼近 Υ，并证明对于每个划分 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I)$，都存在一个 ε-准确划分 $\mathcal{F}' \succcurlyeq \mathcal{F}$（第 8.4 节）。

注 8.4。采用相同的策略，用命题*5.12*(分别用备注*5.13*)代替定理 *5.3*，即可证明，泛函 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ (分别是 $V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$) 也具有黎曼切割逼近性质，这些泛函在 [6, 5] 中引入:

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u) = \sup\Big\{\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}\big(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u)\big) : \mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I)\Big\},$$
$$(V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}})(u) = \sup\Big\{(V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}})\big(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u)\big) : \mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I)\Big\},$$

因此也有 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ 和 $V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ 在黎曼切割下递减。

8.1. **跨越小黎曼切割的变化**。本节中，我们固定一个区间 $I \subset \mathbb{R}$、$\hat{}x \in I$和一个函数 $u \in \mathcal{D}$。令 $\hat{}u = \mathbf{Cut}_{I,\ \hat{x}}(u)$，并将 μ_k 和 $\hat{}\mu_k$ 分别记为与 u 和 $\hat{}u$ 相关联的第 k 个波测度。根据构造，它们在 $\mathbb{R}\backslash I$ 上的限制相同，而且很容易验证

$$\hat{\mu}_k = \mu_k - \mu_k\big|_I + s_k(\hat{u}_-(\hat{x}), \hat{u}_+(\hat{x}))\delta_{\hat{x}}. \tag{65}$$

本节旨在用假设为小的量 $|u_x|(I)$、$\mu_k(I)$ 和 $|\mu_k|(I)$ 来估计量 $|\Upsilon(\hat{}u) - \Upsilon(u)|$。更确切地说，我们要证明以下命题。

命题 8.5。 设 $u \in$ 有界变差$(\mathbb{R};\ \overline{B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)})$ 且 $\hat{}u = \mathbf{Cut}_{I,\ \hat{x}}$，则

$$|\Upsilon(\hat{u}) - \Upsilon(u)| \leqslant \mathcal{O}(1)\Big(|u_x|\,(I)^2 + \sum_{k=1}^{n} \Big[\, |\mu_k|\,(I) - |\mu_k(I)| \,\Big]\Big)\Big(1 + \mathrm{TV}(u)^2\Big).$$

策略是用波测度来估计 V_k 的变差（引理8.6），然后应用命题 7.3。

引理 8.6。 设 $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R};\overline{B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)})$ 且 $\hat{}u = \mathbf{Cut}_{I,\hat{x}}$，则

$$|V_k(\hat{u}) - V_k(u)| \leqslant |\mu_k|\,(I) - |\mu_k(I)| + \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(I)^2.$$

证明。 由（65），

$$V_k(\hat{u}) - V_k(u) = |\hat{\mu}_k|\,(\mathbb{R}) - |\mu_k|\,(\mathbb{R}) = |s_k(\hat{u}_-(\hat{x}), \hat{u}_+(\hat{x}))| - |\mu_k|\,(I). \tag{66}$$

于是，我们有

$$\mu_k^{\mathrm{cont}}(I) = \int_I \big\langle \ell_k(u(x))\ ,\ u_x^{\mathrm{cont}}(dx)\big\rangle = \big\langle \ell_k(\hat{u}_-(\hat{x}))\ ,\ u_x^{\mathrm{cont}}(I)\big\rangle + \mathcal{O}(1)\cdot|u_x|\,(I)^2.$$

最后，对每个原子 $\xi \in I$，由引理 3.6，

$$\begin{aligned}\mu_k^{\mathrm{atom}}(\{\xi\}) &= \langle \ell_k(u_-(\xi))\ ,\ u_x(\{\xi\})\rangle + \mathcal{O}(1)\,|u_x(\{\xi\})|^2 \\ &= \langle \ell_k\left(\hat{u}_-(\hat{x})\right)\ ,\ u_x(\{\xi\})\rangle + \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(\{\xi\})\cdot|u_x|\,(I).\end{aligned}$$

总之，对每个原子 ξ，将 $\mu_k^{\mathrm{cont}}(I)$ 和 $\mu_k^{\mathrm{atom}}(\{\xi\})$ 相加，我们得到

$$\mu_k(I) = \langle \ell_k(\hat{u}_-(\hat{x}))\ ,\ u_x(I)\rangle + \mathcal{O}(1)\,|u_x|\,(I)^2. \tag{67}$$

再次由引理3.6 ，

$$s_k(\hat{u}_-(\hat{x}), \hat{u}_+(\hat{x})) = \langle \ell_k(\hat{u}_-(\hat{x}))\ ,\ \overbrace{\hat{u}_+(\hat{x}) - \hat{u}_-(\hat{x})}^{u_x(I)}\rangle + \mathcal{O}(1)\overbrace{|\hat{u}_+(\hat{x}) - \hat{u}_-(\hat{x})|^2}^{\leqslant |u_x|(I)^2}. \tag{68}$$

比较（66）、（67）和（68），结论随之得出。 □

命题 *8.5* 的证明。结合引理 8.6与命题 7.3。 □

8.2. Υ **在大跳跃附近的黎曼切割上的变化**。

命题 8.7. 设 $\beta \ll 1$、 $u \in \mathcal{D}_\beta$ 和 $\hat{}u = \mathbf{Cut}_{I,\hat{x}}(u)$。设 $z \in I$。则

$$|\Upsilon(\hat{u}) - \Upsilon(u)| \leqslant \mathcal{O}(1)\Big(|u_x|\,(J) + |u_x|\,(J)^2\Big)\Big(1 + \mathrm{TV}(u)^2\Big), \quad J := I \setminus \{z\}.$$

回顾一下，我们将 u 在 z 处的跳跃视为 大跳跃。这意味着该跳跃支配了 u 在 $I\setminus\{z\} = J$ 上的其余全变差，而 $\hat{}u$ 是通过将这个 u 中的大跳跃 及其余全变差缩减为一个单独的跳跃而得到的。这启发我们将命题 8.7 中的估计写成关于 J 的形式。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\hat{}x = z$。

令 $J_{\mathrm{left}} = (-\infty, z) \cap J \supseteq \varnothing$、 $J_{\mathrm{right}} = (z, +\infty) \cap J \supseteq \varnothing$，使得 $J = J_{\mathrm{left}} \sqcup J_{\mathrm{right}}$。注意，

$$\hat{u} = \mathbf{Cut}_{I,z}(u) = (\mathbf{Cut}_{J_{\mathrm{right}}\sqcup\{z\},z} \circ \mathbf{Cut}_{J_{\mathrm{left}}\sqcup\{z\},z})(u)$$

因此，现在只需证明 $I = J_{\mathrm{left}} \sqcup \{z\}, J_{\mathrm{right}} \sqcup \{z\}$ 这些情形下的结论。

从现在起，我们假设 $I = J_{\mathrm{left}} \sqcup \{z\}$ （其余情形完全类似）。特别地，$J = J_{\mathrm{left}}$。如果 $J = \varnothing$， $u = \hat{}u$，因此无需证明任何内容，所以假设 $J \neq \varnothing$。

取 p，$p' \in J$、$p < p'$，并定义一个有界变差、右连续函数$\mathring{u}$，使得 $\mathring{u}(-\infty) = u(-\infty)$ 且 $\mathring{u}_x = \hat{u}_x + u_x(J)[\delta_p - \delta_{p'}]$。我们有 $\mathbf{Cut}_{J,\ p}(u) = \mathbf{Cut}_{(p,z],\ z}(\mathring{u})$。事实上，

$$(\mathbf{Cut}_{(p,z],z}(\mathring{u}))_x = \mathring{u}_x - \overbrace{\mathring{u}_x\big|_{(p,z]}}^{u_x(I)\delta_z - u_x(J)\delta_{p'}} + \overbrace{\mathring{u}_x((p,z])}^{u_x(\{z\})}\delta_z = \hat{u}_x + u_x(J)\delta_p - u_x(J)\delta_z$$
$$= u_x - u_x\big|_I + u_x(\{z\})\delta_z + u_x(J)\delta_p = u_x - u_x\big|_J + u_x(J)\delta_p = (\mathbf{Cut}_{J,p}(u))_x.$$

现在我们断言

$$\Upsilon(\hat{u}) \leqslant \Upsilon(\mathbf{Cut}_{J,p}(u)) \leqslant \Upsilon(\mathring{u}). \tag{69}$$

事实上，

$$\Upsilon(\hat{u}) \overset{(64)}{\leqslant} \Upsilon(\overbrace{\mathbf{Cut}_{\{J,\{z\}\},\{p,z\}}(u)}^{\mathbf{Cut}_{J,p}(u)}) = \Upsilon(\mathbf{Cut}_{(p,z],z}(\mathring{u}))$$
$$\overset{(64)}{\leqslant} \Upsilon(\mathbf{Cut}_{\{(p,p'),[p',z),\{z\}\},\{\frac{p+p'}{2},p',z\}}(\mathring{u})) = \Upsilon(\mathring{u}).$$

现在有

$$|\Upsilon(u) - \Upsilon(\hat{u})| \leqslant |\Upsilon(u) - \Upsilon(\mathbf{Cut}_{J,p}(u))| + |\Upsilon(\mathbf{Cut}_{J,p}(u)) - \Upsilon(\hat{u})|$$
$$\overset{(69)}{\leqslant} |\Upsilon(u) - \Upsilon(\mathbf{Cut}_{J,p}(u))| + |\Upsilon(\mathring{u}) - \Upsilon(\hat{u})| \quad (\mathbf{Cut}_{J,p}(\mathring{u}) = \mathring{u})$$

右端中的两项都可以利用命题 $\mathcal{O}(1)\Big(|u_x|(J) + |u_x|(J)^2\Big)\Big(1 + \text{全变差}(u)^2\Big)$ 由命题 8.5 控制。□

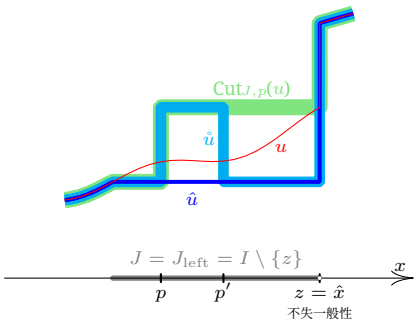


FIGURE 12. 关于命题 8.7：情形 $I = J_{\text{left}} \sqcup \{z\}$。

注 *8.8.* 命题 *8.7* 的证明中存在一个小小的疏漏。也就是说，$\mathring{u}$ 不一定先验地属于 $\mathcal{D}_\beta$。特别是，式 *(64)* 不适用。不过，$TV(\mathring{u}) \leqslant 3TV(\hat{u})$。因此，将式 *(20)* 中的 β 替换为足够小的 $\beta' < \beta$，我们便可保证，对于满足 $TV(\quad) = u(-\infty)$ 的每个 v，$u \in \mathcal{D}_{\beta'}$ 都蕴含 $v \in \mathcal{D}_\beta$。

8.3. **ε-精确划分**。我们现在引入一类 ε-精确划分，它们以给定的精度逼近 Υ 。

定义 8.9. 令 $u \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(\overline{0}))$， $\varepsilon > 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间。若可写成 $\mathcal{F} = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{S}$，使得……，则称 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(I)$ 是 ε-精确的 （对于 u 在 I 上）。

(I) 每个 $I \in \mathcal{B}$ 恰好包含一个点 z_I，满足 $|u_x|(\{z_I\}) \geqslant \varepsilon$，并且还有 $|u_x|(J_I) \leqslant \varepsilon^2$，其中 $J_I := I \setminus \{z_I\}$; *(II)* 对每个 $I \in \mathcal{S}$， $|u_x|(I) \leqslant \varepsilon$; *(III)* 对每个 $k = 1, \dots, n$， $\sum_{I \in \mathcal{F}} \big(|\mu_k|(I) - |\mu_k(I)|\big) \leqslant \varepsilon$。

我们将 z_I （I）视为大跳跃 的位置 u而将 $\mathcal{S}$ 之间的区间视为小 变差 u 所对应的框架分别为命题 8.7和命题 8.5。还请注意，**基数** $\mathcal{B} \leqslant$ 全变差$(u)\varepsilon^{-1}$ 以及

$$\mathcal{F} \text{ is } \varepsilon\text{-accurate}, \mathcal{F}' \succcurlyeq \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}' \text{ is } \varepsilon\text{-accurate}. \tag{70}$$

以下引理表明， ε-精确划分可以按预先规定的精度逼近 Υ 。

引理 8.10。 设 $u \in \mathcal{D}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间， $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$（$I$）是 ε-精确的。那么

$$|\Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}) - \Upsilon(u)| \leqslant \mathcal{O}(1)(\varepsilon + \varepsilon^3)(1 + \mathrm{TV}(u)^3).$$

证明。 将命题 8.5 （分别为命题 8.7）应用于黎曼切割 $\mathbf{Cut}_{I,\hat{x}}$, $I \in \mathcal{S}$（分别为 $I \in \mathcal{B}$），可得

$$|\Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}(u)) - \Upsilon(u)| \leqslant \mathcal{O}(1)\Big(1 + \mathrm{TV}(u)^2\Big)\Big(\sum_{I \in \mathcal{B}}\Big[|u_x|(J_I) + |u_x|(J_I)^2\Big] + \sum_{I \in \mathcal{S}}\Big[|u_x|(I)^2 + \sum_k \big(|\mu_k|(I) - |\mu_k(I)|\big)\Big]\Big).$$

注意，由于下式成立，该结论现在便可得出

- $\sum_{I \in \mathcal{B}}\Big[|u_x|(J_I) + |u_x|(J_I)^2\Big] \leqslant (\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\,\mathbf{card}\,\mathcal{B} \leqslant (\varepsilon + \varepsilon^3)\,\mathrm{TV}(u)$ by the assertion (I);
- $\sum_{I \in \mathcal{S}} |u_x|(I)^2 \leqslant \varepsilon \sum_{I \in \mathcal{S}} |u_x|(I) \leqslant \varepsilon\,\mathrm{TV}(u)$ by the assertion (II);
- $\sum_{I \in \mathcal{S}} \sum_k \big(|\mu_k|(I) - |\mu_k(I)|\big) \leqslant n\varepsilon$ by the assertion (III). □

以下引理断言，对每个$\varepsilon > 0$，都存在 ε-精确划分。

引理 8.11. 设 $\varepsilon > 0$, $u \in$ 有界变差$(\mathbb{R}; \overline{B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)})$， I 是一个区间，且 $\Theta \subset I$ 在 I中稠密。那么存在一个 ε-精确划分 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I)$。

˜证明. 构造满足断言（I）–（II）的 *(I)* 很直接。

现在回忆一下，$\operatorname{sgn} \mu_k \in L^1(I, |\mu_k|)$ 表示拉东–尼科迪姆导数$d\mu_k / d|\mu_k|$。注意， Θ 在 I中稠密，且 $C_c(I)$ 在 $L^1(I, |\mu_k|)$ 中稠密。因此，我们可以找到 $\mathcal{G} \in \mathcal{P}_\Theta(I)$，使得函数 $\operatorname{sgn} \mu_k$ 到子空间**张成空间**$\{\mathbf{1}_J \colon J \in \mathcal{G}\}$ 在 $L^1(I, |\mu_k|)$ 中的距离小于 ε，对每个 $k = 1, \dots, n$ 都成立。

注意到 $\psi_k := \sum_{J \in \mathcal{G}} \mathbf{1}_J \operatorname{sgn}(\mu(J))$ 最小化了 $\operatorname{sgn} \mu_k$ 与 **张成空间**$\{\mathbf{1}_J \colon J \in \mathcal{G}\}$ 之间的 $L^1(I, |\mu_k|)$ 距离。因此，

$$\sum_{J \in \mathcal{G}} \big(|\mu_k|(J) - |\mu_k(J)|\big) = \int_I (\operatorname{sgn} \mu_k - \psi_k)\, d\mu_k \leqslant \|\operatorname{sgn} \mu_k - \psi_k\|_{L^1(I, |\mu_k|)} \leqslant \varepsilon,$$

~　　~　　~从而断言 (III) 得以由 $\mathcal{G}$ 满足。令 $\mathcal{F} = \{J \cap J\colon\ J \in \mathcal{F}, J \in \mathcal{G}\}$ 即可完成证明。□

8.4.**关于黎曼切割的逼近性质证明（定理 8.2）**。

定理 8.2 的证明。设 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I)$ 和 $\varepsilon > 0$。根据引理 8.11，构造一个ε-精确划分 $\mathcal{F}_\varepsilon \in \mathcal{P}_\Theta(I)$，则 $\mathcal{F}' = \{J \cap J_\varepsilon\colon\ J \in \mathcal{F}, J_\varepsilon \in \mathcal{F}_\varepsilon\} \in \mathcal{P}_\Theta(I)$ 根据 (70) 也具有 ε-精确性。于是，根据引理 8.10，$|\Upsilon(\mathrm{Cut}_{\mathcal{F}'},\bullet) - \Upsilon(u)| \leqslant \mathcal{O}(1)(\varepsilon + \varepsilon^3)(1 + 全变差(u)^3)$。根据 (64)，$\Upsilon(\mathrm{Cut}_{\mathcal{F}},\bullet) \leqslant \Upsilon(\mathrm{Cut}_{\mathcal{F}'},\bullet)$。

因此，除非可能需要缩小 ε，我们已经证明

$$\forall \mathcal{F} \in \mathcal{P}_\Theta(I), \varepsilon > 0\colon \exists \mathcal{F}' \in \mathcal{P}_\Theta(I)\colon \\ \Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\bullet}) \leqslant \Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F}',\bullet}) \in (\Upsilon(u) - \varepsilon, \Upsilon(u) + \varepsilon).$$

这就得出了该结论。□

9. Stability w.r.t. perturbations in state space

现在我们严谨地陈述并证明定理 B，第（iii）项。

定理 9.1。设 $\beta \ll 1$。设 $u \in \mathcal{D}_\beta$，并设 $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为 *Lipschitz* 连续，且 $\Phi \circ u \in \mathcal{D}_\beta$。则

$$|\Upsilon(u) - \Upsilon(\Phi(u))| = \mathcal{O}(1)(1 + M^2)M \left\|\Phi - \mathrm{id}\right\|_{W^{1,\infty}},$$
$$M := \max\{\mathrm{TV}(u), \mathrm{TV}(\Phi \circ u)\} \leqslant \mathrm{TV}(u)(1 + \left\|D\Phi\right\|_{L^\infty}),$$

其中 $\mathrm{id}(p) = p$ 对所有 $p \in \mathbb{R}^n$均成立。

我们首先证明一个辅助引理 9.2。然后证明命题 9.3，衡量 Υ相对于分段常值函数扰动的变化。最后，我们完成定理9.1的证明。

引理 9.2. 设 u^L，u^R，v^L，$v^R \in \overline{B_{\delta_{\mathrm{RP}}}}(0)$，其中

$$v^L = u^L + p, \qquad v^R = u^R + p$$

对某个 $p \in \mathbb{R}^n$。则

$$\left|s_k(v^L, v^R) - s_k(u^L, u^R)\right| \leqslant \mathcal{O}(1)\,|p| \cdot \left|u^R - u^L\right|. \tag{71}$$

证明。记 $\xi = u^R - u^L$。根据命题 5.6 有

$$\begin{aligned} s_k(u^L, v^R) &= s_k(u^L, u^R) + s_k(u^R, v^R) + \mathcal{O}(1)\,|p| \cdot |\xi| \\ &= s_k(u^L, v^L) + s_k(v^L, v^R) + \mathcal{O}(1)\,|p| \cdot |\xi|, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &s_k(v^L, v^R) - s_k(u^L, u^R) = s_k(u^R, v^R) - s_k(u^L, v^L) + \mathcal{O}(1)\,|p| \cdot |\xi| \\ &\overset{\text{Lemma 3.6}}{=\!=\!=} \left\langle \ell_k(u^R) - \ell_k(u^L)\ ,\ p \right\rangle + \mathcal{O}(1)\big(\,|p|^2 + |p| \cdot |\xi|\,\big) = \mathcal{O}(1)\big(\,|p|^2 + |p| \cdot |\xi|\,\big). \end{aligned}$$

现在考虑函数 $p \mapsto s_k(u^L + p, u^R + p)$，其开凸域由满足以下条件的 p组成：$u^L + p$，$u^R + p \in B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$。我们刚刚证明的等式表明，该函数在点 $\mathcal{O}(1)\,|\xi|$处局部满足利普希茨条件，利普希茨常数为 $p = 0$。类似地，我们可以证明它在 $\mathcal{O}(1)\,|\xi|$内任意其他点处也局部满足利普希茨连续性，这意味着（71），这是由于 $B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0)$ 的凸性。□

命题 9.3。 设 $\beta \ll 1$。设 $w, w \in \mathcal{D}_\beta$ 为分段常值函数，其依次取值为 $w_0, \dots, w_m$ 和 $w_0, \dots, w_m$。设 $A =$ 最大值 $_{i=0,\dots,m} |w_i - \overline{w_i}|$, $B = \sum_{i=1}^m |(w_i - w_{i-1}) - (w_i - w_{i-1})|$, $M =$ 最大值{全变差(w),全变差(w)}。那么

$$|\Upsilon(\overline{w}) - \Upsilon(w)| \leqslant \mathcal{O}(1)(1 + M^2)(AM + B). \tag{72}$$

证明。 我们将证明分为几个步骤。

步骤 *1*（同伦论证）。令 $p_i = w_i - w_i$和 $\overline{w_i^\tau} = w_i + \tau p_i$, $i = 0,$ ....., m, $\tau \in [0,1]$。构造分段常值函数 w^τ，依次取值$w_0^\tau \dots w_m^\tau$，具体取值取决于 $\tau \in [0,1]$（见图 13（a））。

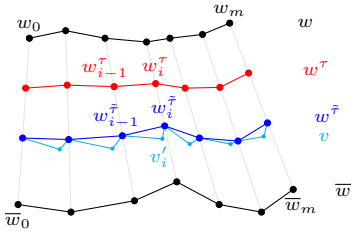
首先，注意到 TV$(w^\tau) \leqslant M$。因此，按照备注 8.8的思路，当 $\beta' < \beta$足够小时， w, $w \in \mathcal{D}_{\beta'}$便意味着 $\overline{w^\tau} \in \mathcal{D}_\beta$对所有 $\tau \in [0,1]$均成立。

我们的目标是证明，对于 $|\tau - \tilde{\tau}| \leqslant \varepsilon$,

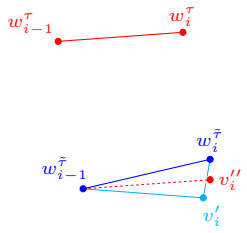
$$|\Upsilon(w^\tau) - \Upsilon(w^{\tilde{\tau}})| \leqslant \mathcal{O}(1)\varepsilon(1 + M^2)(AM + B) + \boxed{\text{terms of order } \varepsilon^2} \tag{73}$$

由此可轻易推出（72）。

步骤 2（辅助函数 v）。因此，固定 $\varepsilon \in (0,1)$，并选取 $\tau, \tilde{\tau} \in [0,1]$ with $|\tilde{\tau} - \tau| \leqslant \varepsilon$。为比较 $\Upsilon(w^\tau)$ 与 $\Upsilon(w^{\tilde{\tau}})$，我们按如下方式构造一个辅助映射 v。令 $s_k^i := s_k(w_{i-1}^\tau, w_i^\tau)$, $i = 1, \dots, m$。对于每个 $i = 1, \dots, m$, 求出满足 $s_k(w_{i-1}^{\tilde{\tau}}, v_i') = s_k^i$, $k = 1, \dots, n$ 的 v_i'（见图 13(b)）。分段常值函数 v 由依次取值 $w_0^{\tilde{\tau}}, v_1', w_1^{\tilde{\tau}}, v_2', \dots, w_m^{\tilde{\tau}}$ 构造而成（见图1(a)）。



(a)



(b)

FIGURE 13. 命题 9.3 的证明。青色曲线对应于 v。

注意，粗略地说， v 中的跳跃有两种类型：形如（$w_{i-1}^{\tilde{\tau}}$, v_i'）的跳跃，我们将其视为大跳跃（就波强度而言，它们是 w^τ的跳跃的平移）；以及形如（v_i', w_i^τ）的跳跃，我们将其视为小跳跃。

步骤 *3*（关于 v中的小跳跃的估计）。首先，我们证明第二种类型的所有跳跃之和 $\sum_{i=1}^m |v_i' - w_i^{\tilde{\tau}}|$ 确实很小（确切地说，其阶为 ε）。

为此，令 $v_i'' := w_{i-1}^{\tilde{\tau}} + (w_i^\tau - w_{i-1}^\tau)$（见图13（b））。应用引理3.7 3.8，我们得

$$\begin{aligned} |v_i' - v_i''| &= \mathcal{O}(1) \sum_{k=1}^n \Big| \overbrace{s_k(w_{i-1}^{\tilde{\tau}}, v_i')}^{s_k(w_{i-1}^\tau, w_i^\tau)} - \overbrace{s_k(w_{i-1}^{\tilde{\tau}}, v_i'')}^{s_k(w_{i-1}^\tau + (\tilde{\tau}-\tau)p_{i-1}, w_i^\tau + (\tilde{\tau}-\tau)p_{i-1})} \Big| \\ &\overset{\text{Lemma 9.2}}{=\!=} \mathcal{O}(1) |p_{i-1}| \cdot \varepsilon \cdot \left| w_i^\tau - w_{i-1}^\tau \right| = \mathcal{O}(1) A \varepsilon \left| w_i^\tau - w_{i-1}^\tau \right|. \end{aligned}$$

因此 $\sum_{i=1}^m |v_i' - v_i''| = \mathcal{O}(1)A\varepsilon M$ 从而

$$\sum_{i=1}^m \left|v_i' - w_i^{\tilde\tau}\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \left[|v_i' - v_i''| + \left|v_i'' - w_i^{\tilde\tau}\right|\right] = \mathcal{O}(1)\overbrace{(AM+B)}^{=:C}\varepsilon. \tag{74}$$

Then

$$\mathrm{TV}(v) \leqslant \mathrm{TV}(w^{\tilde\tau}) + \mathcal{O}(1)C\varepsilon, \tag{75}$$

因此，对于足够小的 $\beta' < \beta$ 和 ε， w, $\overline{w} \in \mathcal{D}_{\beta'}$ 蕴含 $v \in \mathcal{D}_\beta$ （且与 τ, $\tilde\tau$ 的选取无关）。

步骤 4（比较 $\Upsilon(w^\tau)$ 与 $\Upsilon(v)$）。现在我们比较 $\Upsilon(w^\tau)$ 与 $\Upsilon(v)$（稍后将比较 $\Upsilon(v)$ 与 $\Upsilon(w^{\tilde\tau})$ ）。我们分别讨论四个泛函 V、 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}$、 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cubic}}$、 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}$。由于 v “包含”了 w^τ 的所有跳跃（就波强度而言），因此有 $V(v) \geqslant V(w^\tau)$，且 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(v) \geqslant \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(w^\tau)$。接下来，记 σ_k^i、 $\tilde\sigma_k^i$ 为：分别对应于黎曼问题 (w_{i-1}^τ, w_i^τ) 和 $(w_{i-1}^{\tilde\tau}, v_i')$ 的第 k 个速度映射。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(v) \geqslant \sum_{i,j=1}^m \int_0^{|s_k^i|}\int_0^{|s_k^j|} \left|\tilde\sigma_k^i(s) - \tilde\sigma_k^j(s')\right| ds'ds \geqslant -2\sum_{i,j=1}^m |s_k^i|\cdot\|\sigma_k^j - \tilde\sigma_k^j\|_{L^1} \\ + \sum_{i,j=1}^m \int_0^{|s_k^i|}\int_0^{|s_k^j|} \left|\sigma_k^i(s) - \sigma_k^j(s')\right| ds'ds,\end{aligned}$$

后一项等于 $\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(w^\tau)$。根据引理 3.7， $\|\sigma_k^j - \tilde\sigma_k^j\|_{L^1} \leqslant \mathcal{O}(1)|s_k^j|\cdot |w_{j-1}^{\tilde\tau} - w_{j-1}^\tau| \leqslant \mathcal{O}(1)A\varepsilon|s_k^j|$，因此

$$\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(v) \geqslant \mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(w^\tau) - \mathcal{O}(1)\sum_{i,j=1}^m |s_k^i|\cdot A\varepsilon|s_k^j| \geqslant \mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(w^\tau) - \mathcal{O}(1)\,\mathrm{TV}(w^\tau)^2 A\varepsilon.$$

最后，记 f_k^i， $\tilde f_k^i$： $\mathbf{I}(s_k^i) \to \mathbb{R}$ 分别为与黎曼问题 $(w_{i-1}^\tau,\ w_i^\tau)$ 和 $(w_{i-1}^{\tilde\tau},\ v_i')$ 相关的约化通量。利用代价的二次界和稳定性（命题 2.2 和2.6），我们有：

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cost}}(v) \leqslant \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^m \left|v_i' - w_i^{\tilde\tau}\right|^2 + \sum_{i=1}^m \mathbf{cost}_{\tilde f_k}(0, s_k^i) \overset{(74)}{\leqslant} \mathcal{O}(1)C^2\varepsilon^2 + \sum_{i=1}^m \mathbf{cost}_{f_k}(0, s_k^i)\\ &+ \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^m |s_k^i|\cdot\left\|\frac{\partial^2 f_k^i}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 \tilde f_k^i}{\partial\tau^2}\right\|_{L^1} \overset{\text{Lemma 3.7}}{\leqslant} \mathcal{O}(1)C^2\varepsilon^2 + \mathcal{Q}_k^{\mathrm{cost}}(w^\tau)\\ &+ \mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^m |s_k^i|^2\cdot|w_{i-1}^{\tilde\tau} - w_{i-1}^\tau| \leqslant \mathcal{Q}_k^{\mathrm{cost}}(w^\tau) + \mathcal{O}(1)(C^2\varepsilon^2 + \underbrace{\mathrm{TV}(w^\tau)^2}_{\leqslant M^2}A\varepsilon).\end{aligned}$$

将所有结果汇总起来，我们得到

$$\Upsilon(v) \geqslant \Upsilon(w^\tau) - \mathcal{O}(1)(M^2A\varepsilon + C^2\varepsilon^2) \tag{76}$$

步骤 5（比较 $\Upsilon(v)$ 与 $\Upsilon(w^{\tilde\tau})$）。现在我们比较 $\Upsilon(v)$ 与 $\Upsilon(w^{\tilde\tau})$。注意到， $w^{\tilde\tau}$ 是通过一系列黎曼切割从 v 得到的（除了跳跃位置的变化

）。因此，根据命题 8.7，

$$\Upsilon(v)-\Upsilon(w^{\tilde\tau})\leqslant \mathcal{O}(1)(1+\mathrm{TV}(v)^2)\sum_{i=1}^{m}\Big(\big|v_i'-w_i^{\tilde\tau}\big|+\big|v_i'-w_i^{\tilde\tau}\big|^2\Big)$$

$$\overset{(74),(75)}{\leqslant} \mathcal{O}(1)(1+\mathcal{O}(1)[M+C\varepsilon]^2)(C\varepsilon+C^2\varepsilon^2)$$

$$\leqslant \mathcal{O}(1)(1+M^2)C\varepsilon+\varepsilon^2\times\boxed{\text{polynomial in } M,C}. \tag{77}$$

步骤 6（比较 $\Upsilon(w^\tau)$ 与 $\Upsilon(w^{\tilde\tau})$）。合并（76）、（77），得到

$$\Upsilon(w^\tau)-\Upsilon(w^{\tilde\tau})\leqslant \mathcal{O}(1)\varepsilon(1+M^2)(AM+B)+\boxed{\text{terms of order } \varepsilon^2}.$$

对交换后的 w^τ 和 $w^{\tilde\tau}$写出类似的不等式，得到（73），从而完成证明。□

定理 *9.1* 的证明。注意，由命题 u，该结论对分段常数量成立，这是因为命题 9.3：事实上，令 $w=u$，$w=\Phi\circ u$，有 $A\leqslant\|\Phi-\mathrm{id}\|_{L^\infty}$，$B\leqslant\|D\Phi-\mathrm{id}_n\|_{L^\infty}M$。

对于任意 $u\in\mathcal{D}$，对每个 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 以及与 $\mathcal{F}$ 相容的 $X\subset\mathbb{R}$，我们有

$$\Phi\circ\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}(u)=\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}(\Phi\circ u). \tag{78}$$

现在，根据定理 8.2 和（64），我们可以取足够精细的划分 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$，以用 $\Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}(u))$ 和 $\Upsilon(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}(\Phi\circ u))$ 分别逼近 $\Upsilon(u)$ 和 $\Upsilon(\Phi\circ u)$。利用分段常数情形和（78）估计最后两个量之差，得证。□

10. Further properties of Υ

现在我们来陈述并严格证明 定理 A，第 (iv) 项（定理 10.1），第 (v) 项（定理 10.3），以及第 (vi) 项（定理10.5）。

10.1. **下半连续性**。

定理 10.1（中的下半连续性 L^1_{loc}）。设 $\beta\ll 1$。若 $(u_m)_m$ 和 u 属于 $\mathcal{D}_\beta$，且 $u_m\to u$ 属于 L^1_{loc}，则

$$\Upsilon(u)\leqslant\liminf_{m\to\infty}\Upsilon(u_m).$$

证明。可能需要取一个子列，因而不妨设 $\liminf_m\Upsilon(u_m)=\lim_m\Upsilon(u_m)$，且 $u_m\to u$ 在某个满测度集上逐点成立。令 Θ 为该集合与 $\{u_m\}_m$ 和 u的共同连续点集的交集。于是Θ 是 $\mathbb{R}$的满测度子集，因此它是稠密的。

任取区间 I，使 $\inf I$，$\sup I\in\Theta$，再任取 $\mathcal{F}=\{I_1<\ldots<I_N\}\in\mathcal{P}_\Theta(I)$ 的一个划分。令 X为与 $\mathcal{F}$相容的有限点集。根据构造以及 u 在 Θ各点处的连续性，函数 $(\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}\circ$**裁剪**$_I)(u)$ 是分段常数，并依次取值

$$u(\inf I),u(\sup I_1),\ldots,u(\sup I_N), \tag{79}$$

见图 10.1。类似地，对于每个 m，函数（$\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X}\circ\mathbf{Crop}_I$）（$u_m$）是分段常值函数，并依次取值

$$u_m(\inf I),u_m(\sup I_1),\ldots,u_m(\sup I_N). \tag{80}$$

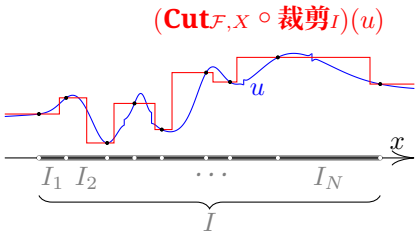


FIGURE 14. （$\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},\ X} \circ$ 裁剪$_I$）（u）。

由 u_m 逐点收敛于 u 于 Θ，值（80）收敛于值（79）。因此，应用定理 8.2、定理 7.2 和命题9.3，我们得到

$$\Upsilon(u_m) \geqslant \Upsilon\Big((\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X} \circ \mathbf{Crop}_I)(u_m)\Big) \to \Upsilon\Big((\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X} \circ \mathbf{Crop}_I)(u)\Big)$$

以便

$$\liminf_m \Upsilon(u_m) \geqslant \sup_{\substack{I\subseteq\mathbb{R}\\ \inf I,\sup I\in\Theta}} \sup_{\mathcal{F}\in\mathcal{P}_\Theta(I)} \Upsilon\Big((\mathbf{Cut}_{\mathcal{F},X} \circ \mathbf{Crop}_I)(u)\Big).$$

再次由定理 8.2 和定理 7.2可知，右端等于 $\Upsilon(u)$，由此证明得证。□

注 10.2。同样的证明表明，[6, 5] 的泛函 $\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$、$V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$ 是下半连续的，正如 [5]中所声称的那样。

10.2. **李雅普诺夫性质**。

定理10.3。设 $\beta \ll 1$。设 $\bar{u} \in \mathcal{D}_\beta$，并令 $u(t,\cdot) := S_t\bar{u}$, $t \in [0,+\infty)$为初值为 $\bar{u}$的消失黏性解。则 $S_t\bar{u} \in \mathcal{D}_\beta$ 且

$$t \mapsto \Upsilon(u(t))$$

单调不增。

证明。由半群性质，只需证明 $\Upsilon(u) \geqslant \Upsilon(u(t,\cdot))$，$t > 0$。我们将采用Glimm格式 [15, 14, 16, 11]。设 $\beta \ll 1$。可以构造一列$(u_m)_m$，它们[illegible]m近似解，初始数据为 $u_m(0,\cdot) = u_m$。我们还可以假设（分别利用定理 8.2 和注 8.4）$\Upsilon(u_m) \leqslant \Upsilon(u)$，并且类似地，$V(u_m) + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u_m) \leqslant V(u) + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u)$。由此根据下半连续性（分别利用定理 10.1 和注 10.2）可得 $V(u_m) + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u_m) \to V(u) + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u)$，且 $\Upsilon(u_m) \to \Upsilon(u)$。

注意到，每个 Glimm 近似解 u_m 都是通过反复进行黎曼切割并求解局部黎曼问题，由初始数据 u_m 构造而成的。因此，根据定理 5.3（黎曼切割）和定理 6.1（持久性）（分别根据注 5.13 和注 6.2），两个映射 $t \mapsto \Upsilon(u_m(t,\cdot))$、$t \mapsto V(u_m(t,\cdot)) + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(u_m(t,\cdot))$ 均为非增映射。特别地，回顾式 (20) 中 $\mathcal{D}_\beta$ 的定义，对所有 t 和所有 m，$u_m(t,\cdot) \in \mathcal{D}_\beta$。

根据 Helly定理，$u_m \to \tilde{u}$（忽略重新标记的子列）。由$V + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}$的下半连续性（注 10.2），对于所有 t，我们有 $V(\tilde{u}(t,\cdot)) + C\mathcal{Q}^{\mathrm{GBB}}(\tilde{u}(t,\cdot)) \leqslant \beta$。由于测度族 $\{|(u_m(t,\cdot))_x|\}_m$ 的紧性（这是由有限传播速度导致的），我们还得到 $\tilde{u}(t,-\infty) = u(-\infty)$。总而言之，对于所有 t，$\tilde{u}(t,\cdot) \in \mathcal{D}_\beta$。

另一方面，根据 [11] 中的分析（另见 [2]），Glimm格式的极限 $\tilde{u}$必定与消失黏性解 $u(t,\cdot) = S_t\bar{u}$一致，该解对应于（1）–（2），对所有 t均成立。于是 $S_t\bar{u} \in \mathcal{D}_\beta$，并且由 Υ 的下半连续性（定理 10.1），我们还得到$\Upsilon(u(t,\cdot)) \leqslant \Upsilon(u)$。□

注10.4。在没有 *GNL/LD* 假设的情况下，*Glimm*格式的一致性已通过 [11] 非局部二次泛函 $\mathfrak{Q}(t)$ 得到证明，该泛函在第*1.2*节中进行了讨论。或者，也可以利用我们的局部时间泛函 $\Upsilon(u^\varepsilon(t))$ 作用于 *Glimm*格式近似解 $u^\varepsilon(t)$来证明一致性。定理 *10.3*的证明不会构成循环论证，因为 [11] 只要求泛函定义在近似的分段常数解上，因此只需用到我们已经证明的定理*5.3*、*6.1*。

10.3. **自变量重新参数化下的不变性**。

定理 10.5。设 $\underline{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(\overline{0}))$ 和 $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 严格递增。设 $\tilde{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}; B_{\delta_{\mathrm{RP}}}(0))$ 满足 $\tilde{u}(-\infty) = u(-\infty)$ 且 $\tilde{u}_x = \psi_\sharp u_x$。那么$\Upsilon(\tilde{u}) = \Upsilon(u)$。

注意，对于光滑的 u，条件组 $\tilde{u}(-\infty) = u(-\infty)$ 和 $\tilde{u}_x = \psi_\sharp u_x$ 等价于 $\tilde{u}(y) = u(\psi^{-1}(y))$。我们倾向于使用推前记号，因为我们只假设 $u \in$ 有界变差。

证明。记 μ_k（分别为 $\tilde{\mu}_k$）为 u（分别为 $\tilde{u}$）的第 k 个波测度。由于 ψ 是单射，我们有 $(\tilde{u}_x)^{\mathrm{atom}} = \psi_\sharp[u_x^{\mathrm{atom}}]$，因此 $(\tilde{u}_x)^{\mathrm{cont}} = \psi_\sharp[u_x^{\mathrm{cont}}]$。根据第 k 个波测度的定义（见第3.3节），这意味着 $\tilde{\mu}_k = \psi_\sharp\mu_k$。利用 ψ 严格递增这一事实，我们推得 $|\tilde{\mu}_k| = \psi_\sharp|\mu_k|$，从而有 $V(\tilde{u}) = V(u)$。考虑到恒等式 $(\psi \otimes \psi)^{-1}(\triangle) = \triangle$，我们还得到 $\mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(\tilde{u}) = \mathcal{Q}^{\mathrm{trans}}(u)$。

接下来，$\tilde{x} \in \mathbb{R}$ 是 $\tilde{u}$ 的跳跃点，当且仅当 $\psi^{-1}(\{\tilde{x}\})$非空（因此，对于某个 x，$\psi^{-1}(\{\tilde{x}\}) = \{x\}$），且 x 是 u的跳跃点。在这种情况下，$\tilde{u}_\pm(\tilde{x}) = u_\pm(x)$。这意味着 $\mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(\tilde{u}) = \mathcal{Q}^{\mathrm{cost}}(u)$。

最后，令 σ_k（分别为 $\tilde{\sigma}_k$）表示在（17）中为 u（分别为 $\tilde{u}$）定义的映射。我们断言 $\sigma_k = \tilde{\sigma}_k$。

确实，固定 $\tau \in (0, |\mu_k|(\mathbb{R})) = (0, |\tilde{\mu}_k|(\mathbb{R}))$。令 x（分别为 $\tilde{x}$）表示满足 $|\mu_k|((-\infty, x)) \leqslant \tau$（分别为 $|\mu_k|((-\infty, \tilde{x})) \leqslant \tau$）的最大数。于是，$x$是满足 $\psi(x) \leqslant \tilde{x}$的最大数。这意味着 $\psi^{-1}((\psi(x)\ \tilde{x}]) = \varnothing$。因此，$u_\pm(x) = \tilde{u}_\pm(\tilde{x})$，并由（17）得到 $\sigma_k(\tau) = \tilde{\sigma}_k(\tau)$。所以，$\mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(\tilde{u}) = \mathcal{Q}_k^{\mathrm{cubic}}(u)$，证明完毕。□

备注 *10.6.* 如果 $\beta \ll 1$ 和 $u, \tilde{u} \in \mathcal{D}_\beta$，则还有一种替代证明。具体而言，注意到定理 *10.5* 对分段常数 u和 $\tilde{u}$显然成立，因此对于每个 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$，$\Upsilon(\mathit{Cut}_{\mathcal{F}}, \bullet(\tilde{u})) = \Upsilon(\mathit{Cut}_{\psi^{-1}(\mathcal{F})}, \bullet(u))$。接下来只需应用定理 *8.2*。

References

[1] Fabio Ancona 和 Andrea Marson。一般非线性双曲方程组的前沿追踪存在性理论。*Archive for Rational Mechanics and Analysis*，185(2):287–340，2007年4月。[2] Fabio Ancona 和 Andrea Marson。一般非线性双曲方程组中 Glimm 格式的最佳收敛速率。*Communications in Mathematical Physics*，302(3):581–630，2011年1月。[3] Egor Baitenov 和 Stefano Modena。标量守恒律的局部时间二次泛函。2026年。

[4] Paolo Baiti 和 Alberto Bressan。 *Lower semicontinuity of weighted path length in BV*，第 31–58 页。Birkh¨auser Boston，1997年。[5] Stefano Bianchini。一般双曲系统的相互作用估计与 Glimm 泛函。*Discrete and Continuous Dynamical Systems*，9(1):133–166，2003年。[6] Stefano Bianchini 和 Alberto Bressan。关于联系缩短曲线与粘性守恒律的 Lyapunov 泛函。 *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*，51(4):649–662，2002年11月。[7] Stefano Bianchini 和 Alberto Bressan。非线性双曲方程组的消失黏性解。 *Annals of Mathematics*，161(1):223–342，2005年1月。[8] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。关于标量守恒律的二次泛函。 *Journal of Hyperbolic Differential Equations*，11(02):355–435，2014年6月。[9] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。守恒律系统的二次相互作用泛函：一个案例研究。 *Bulletin of the Institute of Mathematics of Academia Sinica(New Series)*，9(3):487–546，2014年9月。[10] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。一般守恒律系统的二次相互作用泛函。 *Communications in Mathematical Physics*，338(3):1075–1152，2015年5月。[11] Stefano Bianchini 和 Stefano Modena。Glimm 格式的收敛速率。 *Bulletin of the Institute of Mathematics of Academia Sinica (New Series)* 11 1 235 300, 2016 ，( ): – 3月。

[12] Alberto Bressan。*Hyperbolic systems of conservation laws: the one-dimensional Cauchy problem* 2000 。牛津大学出版社，。[13] Alberto Bressan 和 Rinaldo M. Colombo。大初值守恒律的唯一解。 *Indiana University Mathematics Journal*，44(3):677–726，1995年。[14] Alberto Bressan 和 Andrea Marson。Glimm 格式确定性版本的误差界。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*，142(2):155–176，1998年5月。[15] James Glimm。非线性双曲方程组的大范围解。 *Communications on Pure and Applied Mathematics* 18 4 697 715, 1965 ，( ): – 11月。

[16] 刘太平。Glimm 格式的确定性版本。 *Communications in Mathematical Physics* 57 2 135 148, 1977 ，( ): – 6月。

[17] Stefano Modena。守恒律系统的“向前时间”二次势函数。 *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*，24(5)，2017年8月。

GSSI, I-67100 L'Aquila, Italy*Email address*:
egor.baitenov@gssi.it, stefano.modena@gssi.it