PROCEEDINGS OF SCIENCE

通过手征相边界确定共形窗口

Jan Philipp Klinger, [a, *] **Reinhold Kaiser,** [a, b] **Owe Philipsen**[a, b] **和 Jonas Schaible** [a]

[a]理论物理研究所 - 歌德大学，*Max-von-Laue-Str. 1*，*60438* 美因河畔法兰克福，德国[b]*GSI* 约翰·冯·诺伊曼计算研究所（*NIC*），*Planckstr. 1*，*64291* 达姆施塔特，德国电子邮箱：klinger@itp.uni-frankfurt.de, kaiser@itp.uni-frankfurt.de, philipsen@itp.uni-frankfurt.de, jschaible@itp.uni-frankfurt.de

当无质量费米子味数达到临界值 N_f^* 时，多味QCD便进入共形窗口，此时真空中的手征对称性保持不破缺。在夸克质量非零时，手征对称性会显式破缺；对于 $N_f \geq N_f^*$，也可能出现热手征交叉。因此，仅凭它们的存在无法区分类QCD理论与质量形变共形理论。不过，两者在连续统手征极限下热转变是否持续存在这一点上有所不同。为此，我们在裸晶格参数空间（N_τ，β，am，N_f）中描绘未改进交错费米子的手征相边界，并比较 $N_f = 7$ 和 $N_f = 8$。结果表明，对于 $N_f = 7$，热手征转变在连续统手征极限下仍然存在；而具有 $N_f = 8$ 的无质量连续统理论在真空中仍保持手征对称性。此外，我们证明，有限夸克质量下观测到的八味赝临界面与共形超标度相符，这进一步支持八味QCD位于共形窗口内，并暗示 $7 < N_f^* \leq 8$。

第*43*届国际晶格场论研讨会（*Lattice2026*）*2026*年*7*月*26*日–*8*月*1*日 马里兰大学，大 学公园市，美国

*报告人© 作者根据知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎4.0国际许可协议（CC BY-NC-ND 4.0）的条款享有版权。保留将文本和数据用于商业目的的挖掘、人工智能训练及类似技术的所有权利。
ISSN 1824-8039。由 SISSA Medialab 出版。

arXiv:2611.30669v1 [hep-lat] 23 Nov 2026

1. 引言

具有 $SU(3)$ 规范理论的 N_f 无质量费米子的微扰两圈贝塔函数预言，当味数足够多时会出现相互作用的红外固定点 [1]。这一固定点将支配长程动力学，使理论呈现红外共形性。超越微扰论后，格点研究也提供了红外共形性的证据，例如在 $N_f = 10$ [2] 和 $N_f = 12$ [3, 4]。综述请参见参考文献 [5]。不过，共形窗口下边界的位置 N_f^* 仍不确定；相关估计历来差异很大，格点研究给出的范围从略高于六味 [6]到约十二味 [7] ，而早期泛函重整化群研究给出的估计接近十三味 [8, 9]。近期一项泛函重整化群分析将自发手征对称性破缺消失的位置确定为 $N_f \simeq 7$。3 [10], ，一项关于重整化梯度流耦合的格点研究则指出，八味理论可能位于共形窗口的下边界 [11]。另一项针对 $N_f = 8$ 的格点研究发现，手征极限下 Roberge–Weiss 跃迁温度与零相符 [12]。

对于具有 $N_f \geq 3$ 个无质量基本味的 $SU(3)$规范理论，'t Hooft反常匹配和持续质量约束要求禁闭区域 [13]中发生自发手征对称性破缺。图1展示了这样一种情形：在 $T = 0$处，手征对称性恢复与红外共形性的出现相一致。对于 $N_f < N_f^*$，存在一个手征相变，其温度随 N_f降低；而对于$N_f \geq N_f^*$，该理论在包括零温在内的所有温度下都保持手征对称。这促使我们在由格点规范耦合 $\beta = 6/g^2$、味数 N_f、裸夸克质量 am和时间方向格点尺度 N_τ所张成的扩展裸参数空间中，绘制手征相边界。继我们之前的研究 [14], 之后，我们将交错费米子格点QCD与 $N_f = 7$ 和8进行比较。在有限夸克质量和足够大的 N_τ下，两种理论都表现出热交叉。然而，我们的结果揭示了这些转变趋近手征极限的方式存在明显差异。对于 $N_f = 7$，热转变与连续统手征极限相连接。相比之下，对于 $N_f = 8$，无质量理论在连续统中于所有温度下都保持手征对称。此外，相应的赝临界温度随裸夸克质量的标度方式与共形

随着趋近手征极限而呈现的超标度行为。

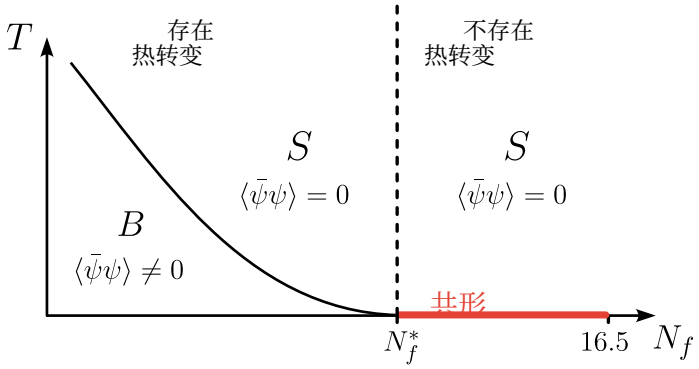
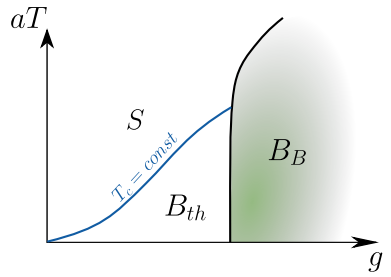
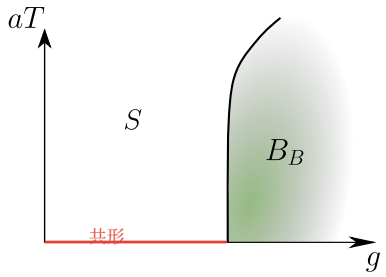


图1： 无质量多味QCD的示意相图，其中包含手征对称性破缺相（B）和对称相（S）。未知的 N_f^* 将类QCD区域与共形窗口分隔开来。

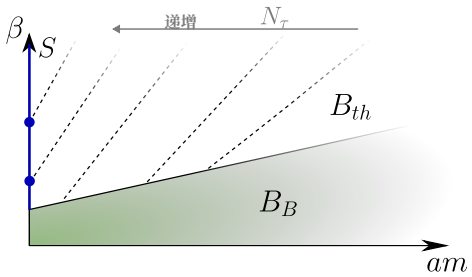


(a) 类QCD理论： $N_f < N_f^*$

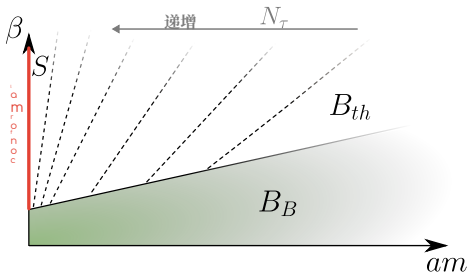


(b) 共形情形： $N_f \geq N_f^*$

图2： 无质量格点QCD在 (g, aT) 平面中的示意相结构。阴影表示手征对称性破缺体相 B_B。对于类QCD理论（a），热边界将手征对称性破缺区域 B_{th} 与对称区域 S 分隔开，并连接至高斯连续极限 $(g, aT) = (0,0)$。对于共形理论（b），物理区域在所有温度下均保持手征对称。



(a) 类QCD理论： $N_f < N_f^*$



(b) 共形情形： $N_f \geq N_f^*$

图3： 在 (β, am) 平面中，随着 $N_\tau = 1/aT$增加时的示意相结构，其中 $\beta = 6/g^2$。对于类QCD理论（a），当N_τ足够大时，热转变达到 $am = 0$ 体相边界以上。对于共形理论（b），在 $am = 0$ 下，物理区域对所有 N_τ均保持手征对称。这些图的手征极限再现了图2中的无质量相结构。

2. 格点相结构

为帮助解读我们的结果，我们简要概述本文所用未改进交错费米子作用量在裸参数空间中的预期格点相结构 $(\beta,\ am,\ N_\tau,\ N_f)$。根据参考文献 [14],，我们讨论图 1 中的连续相图如何在取连续极限和手征极限时涌现。

图2展示了在固定 N_f下，无质量类QCD理论和共形理论在（g, aT）平面中预期的格点相结构。在足够强的裸耦合下，多味格点量子色动力学会形成一个体相 B_B，其中格点伪影诱发手征对称性破缺 [6, 14,15]。体相变将该区域与和连续统相连的物理弱耦合区域分隔开来。这一相变在零温下仍然存在，并且当 N_τ足够大时，其位置不再变化。对于类QCD理论，如图2a所示，热边界将物理弱耦合区域分为手征对称性破缺的低温区域 B_{th} 和对称区域 S。非零的连续统相变温度 T_χ 要求该边界趋近于高斯连续极限，即 $g \to 0$ 和 $aT_\chi = 1/N_\tau \to 0$，同时保持 $T_\chi = 1/(a(g)N_\tau)$ 不变。在共形情形下，相比之下，无质量理论在所有温度下都保持手征对称，包括 $T = 0$。因此，在

物理弱耦合侧。只有体相边界将 B_B 与和连续统相连的对称区域分隔开来 S 对于所有时间方向长度均如此 N_τ，如图2b所示。
数值模拟必然在非零夸克质量下进行，而非零夸克质量会显式破缺手征对称性。在这种情况下，对于 $N_f \geq N_f^*$ 也会出现热交叉。类QCD理论与质量形变共形理论之间的关键区别在于，在连续统手征极限下热转变是否仍然存在。这一点在不同 $(\beta,\ am)$ 下相边界的投影中变得十分清晰，如图3所示。对于足够大的 N_τ，体相边界在非零质量下仍保持N_τ无关，而热边界则随着 N_τ的增加向更大的 β 移动。对于类QCD理论，在较小的 N_τ下，体相变会掩盖手征极限中的热转变。当 N_τ足够大时，在体相边界的物理一侧 $am = 0$处会出现热转变。随后，伪临界耦合随着 $\beta \to \infty$ 的增加而向连续极限增大，$N_\tau \to \infty$重现图2a中的无质量相结构。在共形情形下，没有热边界能够在体相变的物理弱耦合侧达到 $am = 0$，而无质量理论在所有温度下都保持手征对称性。

3. 晶格设置

我们的模拟采用标准 Wilson 规范作用量，并在 $N_\tau \times N_\sigma^3$ 个晶格上使用未改进、质量简并的交错费米子。我们使用 CL²QCD [16], , 这是一套 OpenCL 晶格QCD代码套件；作业管理与监控由 Bash 工具 BaHaMAS [17] 提供。我们将手征凝聚 $O = \bar{\psi}\psi$ 作为准序参量，据此确定手征跃迁。其分布由标准化中心矩表征

$$B_n = \frac{\langle (O - \langle O \rangle)^n \rangle}{\left\langle (O - \langle O \rangle)^2 \right\rangle^{n/2}}. \tag{1}$$

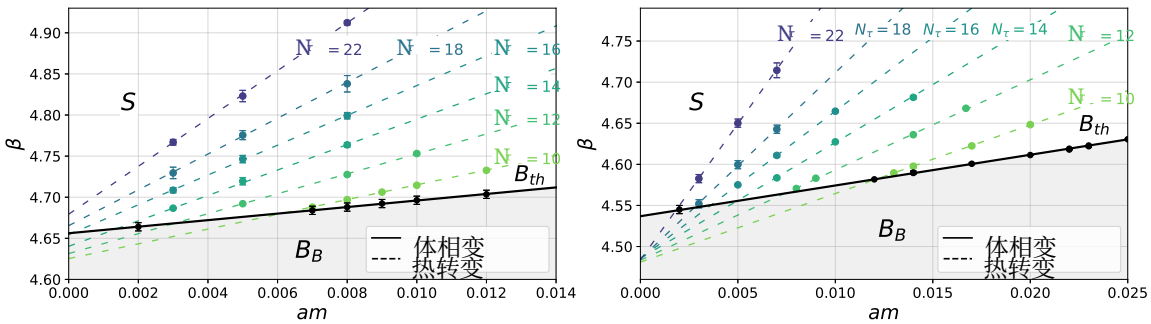
在固定 N_f、N_τ 和 am时，我们使用多直方图重加权法 [18] 合并相邻耦合下的系综，并通过偏度为零确定伪临界耦合，$B_3(\beta_{\mathrm{pc}},\ am) = 0$。对于 $N_f = 7$ 和 8，我们均使用长宽比为 $N_\sigma/N_\tau = 2$ 的晶格，取值为 $N_\tau = 10$、12、16；此外，还使用长宽比为 $N_\sigma/N_\tau \simeq 1.5$ 的晶格，取值为 $N_\tau = 14$、18、22。我们在选定的参数点使用更大的长宽比，评估 β_{pc} 上的有限体积效应。

4. $N_f = 7$ 与 $N_f = 8$的比较

QCD 中手征转变相关的赝临界超曲面 $N_f = 7$ 和$N_f = 8$ 简并味的结果，如图4 所示，位于(β, am)平面上，时间方向格点尺度为$10 \leq N_\tau \leq 22$，覆盖裸质量$0.002 \leq am \leq 0.025$。与先前的研究结果一致 [19],，该参数范围内所有模拟的热相变均与交叉相容，峰度值 $B_4 > 1.61$ 随体积增大而增大[1]。此外，固定 N_τ 时的所有转变线均可由线性拟合很好地描述

$$\beta_{\mathrm{pc}}(am, N_\tau) = \beta_0(N_\tau) + C(N_\tau) am. \tag{2}$$

[1]随着空间体积增大，峰度趋近于 $B_4 = 1.604$：在 $Z(2)$临界点处为 $B_4 = 1$，一级相变时为 $B_4 = 3$，交叉时为 $B_4 = 3$。



(a) $N_f = 7$ **(b)** $N_f = 8$

图4： $N_f = 7$和 8 在（β， am）平面上的手征相边界。彩色点表示对应于热交叉的伪临界耦合。虚线为线性拟合，并向 $am = 0$延伸。体相边界与 N_τ无关，此处展示的是 $N_\tau = 10$的情况。

体相边界（黑色实线）将非物理体相 B_B与物理区间 S和 B_{th}分隔开。通过比较 $N_\tau = 8$与 $N_\tau = 10$，发现该边界几乎保持不变。

4.1 $N_f = 7$

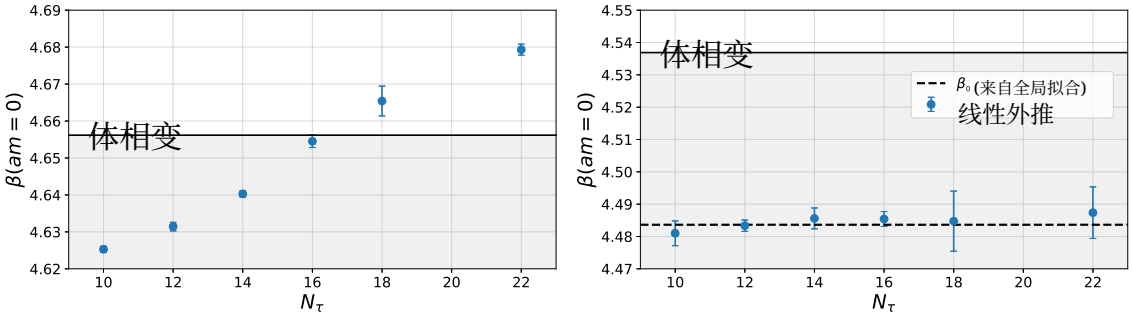
先前研究 [14, 19, 20] 表明，对于 $N_f = 7$，无质量手征相变的阶数取决于 N_τ：在粗晶格上为一级，而只有当 $N_\tau \geq N_\tau^{\text{tric}}$时才变为二级；当前估计表明 $N_\tau^{\text{tric}} \approx 23$。精确确定 N_τ^{tric}需要将热相变与体相变区分开来，目前仍在进行中。对于 $N_\tau < N_\tau^{\text{tric}}$，因此在领先阶采用线性手征外推是合理的；而对于 $N_\tau > N_\tau^{\text{tric}}$，预计会出现 $O(2)$ 临界标度，这种标度接近手征极限，反映了交错费米子的残余手征对称性。

临界耦合$\beta_0(N_\tau)$在手征极限下由对式（2）线性拟合进行外推得到，如图4a所示，并外推至 $am = 0$。如图5a所示，这些耦合随 N_τ单调增加，这与热转变连接到渐近自由连续极限的情形一致，$\beta \to \infty$ 当 $N_\tau \to \infty$时。对于 $N_\tau = 18$ 和22，这些截距位于体相边界之上，因此热转变在手征极限下出现在物理弱耦合侧。确定尺度后，相应的截距 $\beta_0(N_\tau)$代表这些晶格间距对应的临界温度 $T_c(am = 0, N_\tau)$。这一行为对应于图3a中的类 QCD 情景。

4.2 $N_f = 8$ 与共形超标度

对于 $N_f = 8$，对式（2）线性拟合进行的手征外推，如图4b所示，呈现出截然不同的模式：所有截距都位于体相边界之下，且彼此相容，即与一个不依赖于 N_τ的常数相符，见图5b。因此，在所研究的 N_τ 范围内，我们没有发现热边界在物理弱耦合侧达到 $am = 0$ 的迹象，这与图2b 和3b所示的共形情形一致。

请注意，对于 $N_\tau \to \infty$ 而言，纵轴上存在共同截距 $\beta_0(N_\tau) = \beta_0$ 是红外共形性的必要条件。β轴上任何移动的截距都将表现为手征极限下的破缺低温相，因而呈现出类似 QCD 的特征。另一方面， am轴上的截距则意味着在 $\beta = 0$ 强耦合极限下存在对称相，而这



(a) $N_f = 7$ **(b)** $N_f = 8$

图5： 通过将热线（式（2））外推至 $am = 0$，得到的手征截距，作为N_τ的函数。实黑线表示每个 $am = 0$处外推得到的体相边界 N_f。对于 $N_f = 8$，所有截距均与一个共同值 β_0（虚线）相容，该值由式（3）的全局拟合得到。

对于 $N_f \lesssim 52$ [21]而言是被排除的。然而，这一条件只能确立连续极限中不存在自发手征对称性破缺。要证明红外固定点的存在，还需要额外证据。为此，完整赝临界超曲面的函数形式提供了更严格的检验。对于 $N_f = 8$，热相边界可由下式很好地描述：

$$\boxed{\beta_{\rm pc}(am, N_\tau) = \beta_0 + C N_\tau^p \, am}. \tag{3}$$

斜率随 N_τ 呈幂律增长，可自然地用质量形变共形理论中的共形超标度来解释。在低能下，无质量理论趋近于一个尺度不变区域，其中不存在动力学生成的红外质量尺度。非零夸克质量是一种相关形变，会显式破缺共形对称性；在不存在其他相关形变的情况下，它为所有红外观测量设定尺度。在红外标度区域，所有质量诱导尺度都遵循关于重整化夸克质量的相同主导幂律，这称为共形超标度 [22, 23]。对于赝临界温度，有

$$T_{\rm pc} \propto m_R^{1/y_m}, \qquad y_m = 1 + \gamma_m^*. \tag{4}$$

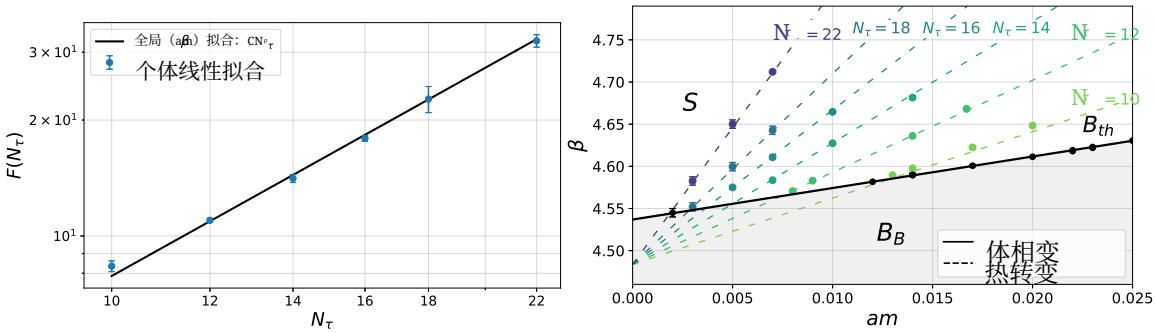
这里的 m_R 定义在固定参考尺度下，而 y_m 是夸克质量的重整化群标度指数，由红外固定点处的质量反常维数 γ_m^* 确定。
在固定3式下重新整理式 $\beta > \beta_0$ 可得格点温度

$$aT_{\rm pc} = \frac{1}{N_\tau} = \left(\frac{C\, am}{\beta - \beta_0}\right)^{1/p} = K(\beta)(am)^{1/p}, \qquad K(\beta) = \left(\frac{C}{\beta - \beta_0}\right)^{1/p}. \tag{5}$$

对于我们的交错费米子，乘性质量重整化意味着在固定 $am_R \propto am$ 、 β 和参考尺度下。比较式（ $am_R \propto am$ 4）与（5），我们可以确定

$$p = y_m = 1 + \gamma_m^* \tag{6}$$

在红外超标度区间内。公式（5）意味着，对于每个固定的 $\beta > \beta_0$ 赝临界温度在手征极限下趋于零， $T_{\rm pc} \to 0$ 因为 $am \to 0$这与无质量理论中不存在热转变相一致。



(a) 热线斜率 **(b)** $N_f = 8$ 相边界

图 6： (a) 图 4b 中独立线性拟合的斜率，采用对数坐标轴表示。(b) 八味QCD在 (β, am) 平面上的相边界。实线 $F(N_\tau) = CN_\tau^p$ 见于 (a)，而 (b) 中的热线则由对 $12 \le N_\tau \le 22$ 的热数据进行式 (3) 的单个全局拟合得到。

图6a显示，从图4b中的独立线性拟合中提取的斜率遵循关于 N_τ的幂律。实心黑线表示 $F(N_\tau) = CN_\tau^p$，这是将公式（3）全局拟合到热数据并取 $12 \le N_\tau \le 22$得到的结果。相应的热线显示于图6b中。该拟合仅使用三个参数，却能以 $\chi^2/\text{dof} = 16.3/13 \simeq 1.25$描述数据，得到 β_0 =4.4836(12)、 $C = 0.1260(42)$以及 $\gamma_m^{\text{eff}} = p-1 = 0.796(11)$的有效质量反常维数。拟合范围从 $N_\tau = 12$开始，这是因为我们发现，将拟合限制在逐渐增大的 N_τ 范围内会改善拟合质量，同时提取出的质量反常维数也会增大，并在接近1时趋于平稳（未显示）。我们将其记为 γ_m^{eff}，以反映这种仍然存在的拟合窗口依赖性。这表明，领头阶超标度的修正仍然具有重要影响。这类修正会显著影响所提取的指数，有限尺寸标度研究 [24]已对此进行了展示。因此，要受控地确定渐近指数，就需要开展超越领头阶的分析，或在更大的 N_τ上进行模拟，同时还需评估有限体积效应。我们的有效值与八味谱学测定在定性上相符；后者明显依赖于观测量和拟合范围 [25, 26]。此外，我们的结果与采用nHYP涂抹交错费米子、在 $N_\tau = 20$和24处进行的模拟相一致；这些模拟显示出热相边界相同的定性模式 [27, 28]。

5. 结论与展望

我们通过比较七味和八味QCD的手征相边界，研究了共形窗口的起始位置。对于 $N_f = 7$，手征外推表明热转变与渐近自由连续极限一致， $\beta \to \infty$ 当 $N_\tau \to \infty$时。在相反情况下，对于$N_f = 8$，在所研究的 N_τ 范围内，在物理弱耦合侧的手征极限中，我们没有发现自发手征对称性破缺的迹象。

我们的核心结果是，八味QCD的热超曲面可以由共形超标度很好地描述，即 $aT_{\text{pc}} \propto (am)^{1/p}$，其中 $p = 1 + \gamma_m^*$ 和 γ_m^* 是红外固定点处的质量反常维数。综合裸参数相结构与超标度分析，有力地表明八味QCD位于共形窗口内。其起点究竟恰好发生在八种味，还是发生在七种与八种之间的某个非整数值，按照当前的精度仍无法确定

。将同样的分析扩展到非整数 N_f，通过广义的开根号交错费米子行列式 [29]，可以更精确地确定这一边界。
我们的全局拟合得到的有效质量反常维数为 $\gamma_m^{\text{eff}} \simeq 0$。8，而限制在更大的$N_\tau$ 范围内的拟合得到的数值更接近于 1。这种拟合窗口依赖性促使我们进一步检验有限尺寸标度和共形超标度修正。最后，观测到的超标度振幅 $K(\beta) \propto (\beta - \beta_0)^{-1/p}$ 在公式（5）中的耦合依赖性，也为未来研究提供了另一个方向。这种行为可以由连接共形窗口中非平凡紫外固定点与红外固定点的贝塔函数解释；鉴于关于存在具有对称质量生成的独特强耦合相的相关设想，这一点尤其引人关注，该相位位于 $N_f = 8$ [11,30]。要确立这种解释，需要独立的重整化群或连续标度检验。

致谢

我们感谢 Anna Hasenfratz 富有帮助的讨论。本工作得到德国科学基金会（DFG）通过 CRC-TR 211 项目（项目编号 315477589，TRR 211）的支持。我们感谢 GSI 达姆施塔特的 HYDRA 集群以及法兰克福科学计算中心的 Goethe-HLR 集群所提供的计算资源。

参考文献

[1] T. Banks 和 A. Zaks，《具有无质量费米子的矢量型规范理论的相结构》，Nucl. Phys. B 196 (1982) 189–204，doi:10.1016/0550-3213(82)90035-9。[2] A. Hasenfratz、E. T. Neil、Y. Shamir、B. Svetitsky 和 O. Witzel，《具有 $N_f = 10$ 味的 SU(3)规范理论的红外固定点》，Phys. Rev. D 108 (2023) L071503，arXiv:2306.07236。[3] A. Deuzeman、M. P. Lombardo 和 E. Pallante，《SU(N)规范理论中的共形相证据》，Phys. Rev. D 82 (2010年10月) 074503，arXiv:0904.4662。[4] A. Hasenfratz 和 C. T. Peterson，《无质量十二味SU(3)规范-费米子系统中的红外固定点》，Phys. Rev. D 109 (2024) 114507，arXiv:2402.18038。[5] A. Y. Kotov、M. P. Lombardo 和 A. Trunin，《沿QCD转变线下行：从$N_f = 2$ 直到共形性开始》，Symmetry 13 (2021) 1833，arXiv:2111.00569。[6] Y. Iwasaki、K. Kanaya、S. Kaya、S. Sakai 和 T. Yoshie，《一般味数下格点QCD的相结构》，Phys. Rev. D 69 (2004) 014507，arXiv:hep-lat/0309159。[7] K. Miura 和 M. P. Lombardo，《强味QCD中前共形动力学的格点蒙特卡罗研究：从有限温度下的手征相变角度出发》，Nucl. Phys. B 871 (2013) 52–81，arXiv:1212.0955。[8] J. Braun 和 H. Gies，《有限温度下QCD的手征相边界》，《高能物理杂志》06 (2006) 024，arXiv:hep-ph/0602226。[9] J. Braun 和 H. Gies，《多味QCD共形窗口附近的标度律》，《高能物理杂志》05 (2010) 060，arXiv:0912.4168。[10] Á. Pastor-Gutiérrez，《来自共形窗口的非微扰新进展》，arXiv:2608.23674。[11] A. Hasenfratz，《四维空间中具有8个Kähler–Dirac费米子的涌现强耦合紫外固定点》，Phys. Rev. D 106 (2022) 014513，arXiv:2204.04801。[12] M. D'Elia、M. Nacci 和 K.Zambello，《作为多味QCD共形性探针的Roberge–Weiss跃迁》，Phys. Rev. D 114 (2026) 034502，arXiv:2604.07284。

[13] L. Ciambriello、R. Contino、A. Luzio、M. Romano 和 L.-X. Xu，《证明类QCD理论中手征对称性破缺的新策略》，《物理评论快报B辑》862 (2025) 139367，arXiv:2404.02967。[14] J. P. Klinger、R. Kaiser、O. Philipsen 和 J. Schaible，《关于交错费米子无质量多味QCD的相结构》，PoS LATTICE2025 (2026) 119，arXiv:2603.20099。[15] F. R. Brown、H. Chen、N. H. Christ、Z. Dong、R. D. Mawhinney、W. Schaffer 和 A. Vaccarino，《具有八种轻夸克味的格点QCD》，Phys. Rev. D 46 (1992) 5655–5670，arXiv:hep-lat/9206001。[16] O. Philipsen、C. Pinke、A. Sciarra 和 M. Bach，《CL2QCD——基于OpenCL的格点QCD》，PoS LATTICE2014 (2014) 038，arXiv:1411.5219。[17] A. Sciarra，《BaHaMAS：模拟监控与管理Bash处理程序》，《欧洲物理杂志网络会议》175 (2018) 09003，arXiv:1710.08831。[18] A. M. Ferrenberg 和 R. H. Swendsen，《优化的蒙特卡罗数据分析》，《物理评论快报》63 (1989) 1195–1198，doi:10.1103/PhysRevLett.63.1195。[19] F. Cuteri、O. Philipsen 和 A. Sciarra，《不同夸克味数下QCD手征相变的阶》，《高能物理杂志》11 (2021) 141，arXiv:2107.12739。[20] J. P. Klinger、R. Kaiser 和 O. Philipsen，《无质量多味格点QCD中手征相变的阶》，PoS LATTICE2024 (2025) 172，arXiv:2501.19251。[21] P. de Forcrand、S. Kim 和 W. Unger，《强耦合下多味格点QCD的共形性》，《高能物理杂志》02 (2013) 051，arXiv:1208.2148。[22] V. A. Miransky，《类QCD理论中的共形窗口中的动力学》，Phys. Rev. D 59 (1999) 105003，arXiv:hep-ph/9812350。[23] L. Del Debbio 和 R. Zwicky，《质量变形共形规范理论中的超标度关系》，Phys. Rev. D 82 (2010) 014502，arXiv:1005.2371。[24] A. Cheng、A. Hasenfratz、Y. Liu、G. Petropoulos 和 D. Schaich，《存在近边缘算子时共形理论的有限尺寸标度》，Phys. Rev. D 90 (2014) 014509，arXiv:1401.0195。[25] T. Appelquist 等（LSD合作组），《SU(3)规范理论中八味畴壁费米子的格点模拟》，Phys. Rev. D 90 (2014) 114502，arXiv:1405.4752。[26] Y. Aoki 等（LatKMI合作组），《格点上的$N_f = 8$ QCD中的轻味单态标量粒子与缓行信号》，Phys. Rev. D 96 (2017) 014508，arXiv:1610.07011。[27] D. Schaich、A. Hasenfratz 和 E. Rinaldi。《八味SU(3)规范理论的有限温度研究》。载于：《质量起源与强耦合规范理论》（SCGT15）。世界科学出版社，2018，351–354。doi:10.1142/9789813231467_0051。arXiv:1506.08791。[28] T. Appelquist 等，《SU(3)规范理论中八种动力学味的非微扰研究》，Phys. Rev. D 99 (2019) 014509，arXiv:1807.08411。[29] F. Cuteri、O. Philipsen 和 A. Sciarra，《来自非整数味数的QCD手征相变》，Phys. Rev. D 97 (2018) 114511，arXiv:1711.05658。[30] O. Witzel 和 A. Hasenfratz（格点强动力学合作组），《强重整化耦合下具有 $N_f = 8$ 基本表示费米子的SU(3)研究》，PoS LATTICE2024 (2025) 146，arXiv:2412.10322。