arXiv:2611.30679v1 [math.LO] 23 Nov 2026

Cohen 泛型的等价关系是超有限的

IIAN B. SMYTHE

摘要。本文证明，在一个集合论的可数模型上，Cohen 泛型实数之间的等价关系是超有限的；当且仅当两个实数生成相同的泛型扩张时，它们等价。此结果回答了作者提出的一个问题。证明使用渐近分离，并整理了最初由 GPT-6 给出的一种论证。

1. 引言

本文始终设 M 为一个集合论的可数传递模型ZFC，或者是足以完成本文所有论证的任意有限片段。在 [5],Clemens、Coskey 和 Dworetzky 在研究集合论可数模型上的同构关系的复杂性时，考察了如下等价关系 $\equiv_M^{\mathbb{C}}$：它定义在 M 上的 Cohen 泛型实数之间：

$$x \equiv_M^{\mathbb{C}} y \quad \Longleftrightarrow \quad M[x] = M[y].$$

他们在证明 [5, 定理 32], 时表明， $\equiv_M^{\mathbb{C}}$ 不是光滑的，也就是说，它不能 Borel 可约到任何波兰空间上的相等关系。

作者在 [14], 中进一步拓展了这个例子，并提出了如下的一般框架：给定 M中的一个强迫概念 $\mathbb{P}$ （也就是说， $\mathbb{P}$ 及其序关系 $\leq$ 都是 M的元素），存在 $2^{\mathbb{P}}$ 的一个波兰子空间 $\mathrm{Gen}_M^{\mathbb{P}}$，它由所有针对 $\mathbb{P}$的 M-泛型滤子组成；在该子空间上，由下式给出的等价关系：

$$G \equiv_M^{\mathbb{P}} H \quad \Longleftrightarrow \quad M[G] = M[H].$$

是一个可数 Borel 等价关系。对于 Cohen 强迫 $\mathbb{C}$，作者证明了 $\equiv_M^{\mathbb{C}}$ 是超超有限的 [14, 定理 31], ，并提出[14, 问题 2]：它是否超有限。回顾一下，如果一个等价关系是可数个递增的超有限（即具有有限等价类的）Borel 等价关系的并，则称其为超有限；如果它是可数个递增的超有限等价关系的并，则称其为超超有限。

这是一个由来已久、至少可追溯至 [7], 的开放问题，称为“并问题”：每个超超有限等价关系是否都是超有限的？多位作者提出过这样一个问题：Cohen 泛型的等价关系 $\equiv_M^{\mathbb{C}}$是否可能构成并问题的反例。

日期：2026年11月24日。作者获得了 NSERC 发现基金（RGPIN-2023-03343）的部分资助。

例如， [2], [4], 和 [10]。本文将证明并非如此：

定理 1.1。$\equiv_M^{\mathbb{C}}$ 是超有限的。

定理1.1 的证明应用了 Conley、Jackson、Marks、Seward 和 Tucker-Drob 在 [6], 中发展出的 Borel 渐近维数理论，并结合了 [14]中最初的超超有限性论证思路。

AI 披露： 定理1.1 的证明最初由 GPT-6 Astra 根据 Zoltán Vidnyánszky 提出的提示生成，提示要求它证明$\equiv_M^{\mathbb{C}}$ 利用渐近维数论证是超有限的。GPT 给出解答后，Vidnyánszky 将其告知作者，作者随后独立核实了其正确性。双方一致认为，应将 AI 生成的解答改写得更易读，并尽快发表。本说明即为此成果，由作者全程撰写；作者依据《莱顿宣言》 [1]对其内容及正确性负责。

2. 自同构与博雷尔编码

若 $\mathbb{P}$ 是 M中的完备布尔代数，[1] 则根据 Vopěnka 和 Hájek 的一个结果 [16] （另见 [8, 定理 3.5.1]），可知 $\equiv_M^{\mathbb{P}}$ 是由可数群 $\mathrm{Aut}^M(\mathbb{P}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}) \cap M$ 的自同构在 $\mathbb{P}$上的自然作用所诱导的；该作用如 M中所计算，定义在其 M-泛型滤子构成的空间上。由于每个偏序集都能稠密嵌入到某个完备布尔代数中，而且稠密嵌入会导出博雷尔同构等价关系 [14, 引理 2.7]，因此不失一般性，我们可以只考虑完备布尔代数。

如 [14], 中分析 $\equiv_M^{\mathbb{C}}$的复杂度时一样，使用 Cohen 强迫及其布尔完备化的一种特定表示将会很方便。首先，我们需要回顾博雷尔编码的概念；这一概念最初在 [15]中提出。假设 M 认为 B 是 2^ω的一个博雷尔子集，例如， M 包含一个实数，即 B的编码，它描述了 B 如何由一个固定的开集可计算基构造而成。我们用 B^M 表示该编码在 M中的解释，并省略上标，直接用 B 表示它在环境宇宙中的相应解释$\mathbf{V}$。我们将利用以 M编码的博雷尔集（或函数）的各种性质的绝对性，也就是说，该性质对 B^M在 M 中成立，当且仅当它对 B 在$\mathbf{V}$中成立。

引理 2.1。 对于在 M 中编码的博雷尔集、函数或等价关系，以下概念是绝对的：

（*1*）对于集合：隶属关系、包含关系、可数并与交、瘦性； （*2*）对于函数：函数性、像、单射性、满射性；

[1]意即 $M \models$“$\mathbb{P}$ 是完备布尔代数”。

（3）对于等价关系：构成等价关系、具有有限等价类、由函数 f_0、…、f_{n-1} 在 M 中编码所生成的群的轨道等价关系诱导、具有作为选择子的函数 s。

证明。 除 (3) 中最后两个断言外，这些陈述都在 [14] 或 [15] 中证明，方法是说明相应性质可以用适当的代码作 Π^1_1 定义。(3) 中倒数第二个断言与 [14, 引理 3.5(iii)]类似。至于剩下的断言，函数 s 是博雷尔等价关系 E 的一个选择子，当且仅当

$$\forall x, y[xEs(x) \wedge (xEy \to s(x) = s(y))],$$

这显然在适当的代码中是 Π^1_1，因此是绝对的。 □

在 M 中，令 $\mathbb{C}$ 为 2^ω 的所有非瘦博雷尔子集组成的集合，令 $\mathbb{C}$ 为 2^ω 中的博雷尔集构成的集合，并对瘦集理想取商。于是，$\mathbb{C}$ 是 M 中的完备布尔代数，自然映射 $i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 将集合映到其模瘦集等价类，是一个稠密嵌入。若 $G \subseteq \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的滤子，我们用 G 表示由 $i''G$ 在 $\mathbb{C}$ 中生成的滤子。于是，G 是 M-泛型，当且仅当 G 是，并且 $M[G] = M[G]$。（参见 [12, §VII.7]。）

回到 **V** 中，我们称 $x \in 2^\omega$ 为一个 M-泛型 ***Cohen*** 实数，如果存在一个 M-泛型滤子 G，使得它属于 $\mathbb{C}$

$$\{x\} = \bigcap\{B : B^M \in G\},$$

在这种情况下，$M[x] = M[G]$。等价地，x 属于 M 中编码的每个 2^ω 的余瘦博雷尔子集。由于 G 可由 x 唯一地定义为

$$G = \{B^M : x \in B\},$$

我们可以记作 $G = G_x$。令 $\mathcal{C}_M$ 为所有 M-泛型 Cohen 实数构成的集合，并用 $\equiv^{\mathbb{C}}_M$ 表示关系

$$x \equiv^{\mathbb{C}}_M y \quad \Longleftrightarrow \quad M[x] = M[y]$$

在 $\mathcal{C}_M$ 上。于是，根据 [14, 引理 2.10], ，映射 $x \mapsto G_x$ 是我们对 $\equiv^{\mathbb{C}}_M$ 的两种定义之间的博雷尔同构：一种定义在 M-泛型 Cohen 实数上，另一种定义在 $\mathbb{C}$ 的 M-泛型滤子上。

Maharam 和 Stone 的一个结果 [13, 推论 2]指出，2^ω 的博雷尔子集代数模瘦集的每个自同构，都由一个保持瘦集等价类（即 g 和 g^{-1} 都保持瘦集）的博雷尔双射 $g : 2^\omega \to 2^\omega$ 所诱导。令 $\mathrm{MCP}^M(2^\omega)$ 为所有编码于 M 中的保持瘦集等价类的博雷尔双射 $2^\omega \to 2^\omega$ 构成的集合。显然，$\mathrm{MCP}^M(2^\omega)$ 构成一个可数群，并且根据瘦性的绝对性，它作用于 $\mathcal{C}_M$，且保持 $\equiv^{\mathbb{C}}_M$。它同样作用于 $\mathbb{C}$ 的 M-泛型滤子空间，作用方式为

$$g \cdot G = \{(g^M)''(B) : B \in G\},$$

对于 $g \in \mathrm{MCP}^M(2^\omega)$ 和 $G \in \mathrm{Gen}^{\mathbb{C}}_M$。以下引理隐含于 $\equiv^{\mathbb{C}}_M$ in [14] 的超超有限性证明中；我们在此将其明确表述：

引理 2.2。 $\equiv_M^{\mathbb{C}}$ 由$\mathrm{MCP}^M(2^\omega)$ 在 $\mathcal{C}_M$上的作用诱导。

证明。 只需证明，对于 x， $y \in \mathcal{C}_M$，$M[x] = M[y]$当且仅当存在 $g \in \mathrm{MCP}^M(2^\omega)$ 使得 $g(x) = y$。我们通过一系列等价关系进行证明：

$$\begin{aligned} M[x] = M[y] &\iff M[\overline{G_x}] = M[\overline{G_y}] \\ &\iff \exists \gamma \in \mathrm{Aut}^M(\overline{\mathbb{C}})(\gamma''\overline{G_x} = \overline{G_y}) \\ &\iff \exists g \in \mathrm{MCP}^M(2^\omega)(g \cdot G_x = G_y) \\ &\iff \exists g \in \mathrm{MCP}^M(2^\omega)(G_{g(x)} = G_y) \\ &\iff \exists g \in \mathrm{MCP}^M(2^\omega)(g(x) = y). \end{aligned}$$

第一个等价关系源于以下事实： $M[x] = M[G_x] = M[\overline{G_x}]$和 $M[y] = M[G_y] = M[\overline{G_y}]$。 第二个等价关系利用了 M中 $\mathbb{C}$的完备性以及 Vopěnka–Hájek 定理，第三个则由 Maharam–Stone 定理得出。第四个等价关系依据 [14, 引理 3。7], 最后一个则源于以下事实：一个 M-generic filter 对于 $\mathbb{C}$ 唯一确定相应的 Cohen 实数。 □

3. 泛型渐近分离

设 H 是标准博雷尔空间 X上的局部有限博雷尔图，记 X上的扩展路径度量为ρ_H，其中 $\rho_H(x, y) = \infty$，当且仅当 x和 y不属于 H的同一个连通分支。对于任意整数 $r \geq 1$，令 $H^{\leq r}$ 为一个图，它连接 X 中距离至多为 ρ_H（按 r 度量）的所有点。在 [6], 中，Conley、Jackson、Marks、Seward 和 Tucker-Drob 引入了博雷尔渐近维数，即渐近维数这一概念的博雷尔形式，以及适用于博雷尔扩展度量空间的渐近分离指标。本文将关注后者。

定义 3.1。 设 H 是标准博雷尔空间 X上的局部有限博雷尔图。 H的渐近分离指标记作 asi(H)，是满足以下条件的最小$d \in \omega$：对于每个 $r \geq 1$，存在覆盖 X 的博雷尔集 U_0、U_1、.....、U_d，并且对于所有 $i \leq d$，$H^{\leq r} \restriction U_i$ 的连通分支都是有限的。

下面的结果是在局部有限博雷尔图的特殊情形下陈述的（参见 [3, 定理 1. 15] 中的这一表述），它说明局部有限博雷尔图一般具有 ≤ 1的渐近分离指标。

定理 3.2 ([6, 定理 4.8(b)])。 若 H 是标准博雷尔空间 X上的局部有限博雷尔图，则存在一个 H-不变的余瘦博雷尔集$D \subseteq X$，使得$\mathrm{asi}(H \restriction D) \leq 1$。

这里我们指出，相关概念对于博雷尔图具有绝对性。

引理 3.3。 对于在 M 中编码的 H 博雷尔集，以下性质是向上绝对的（即，如果编码的集合在 M 中满足这些性质，那么它们在 $\mathbf{V}$ 中也成立）：

(1) H 是局部有限博雷尔图；*(2)* ρ_H 是 H上的扩展路径度量；*(3)* 对于 $r \geq 1$, 图 $H^{\leq r}$；*(4)* R 在 H上的连通关系。

证明。 这些结论的证明方式与引理2.1基本相同。唯一需要注意的是，判断 x 和 y 是否属于 H的同一连通分支，需要断言存在一条从 x到 y的路径（即有限多个点）；这一存在量词使连通关系（在（4）中是显式的，但在 ρ_H的定义中是隐含的，因而在（2）和（3）中也是隐含的）向上绝对，而这正是我们所需要的。 □

4. 超有限性的证明

下面是本文的主要结果。

定理 4.1。 设 $\Gamma = \{f_n : n \in \omega\}$ 是一个由保持稀疏类的博雷尔双射组成的可数群，作用于 2^ω，且每个 f_n 都编码于 M中。那么，由 Γ在 2^ω 上诱导的轨道等价关系，限制在 M-泛型 *Cohen* 实数 $\mathcal{C}_M$的空间上时，是超有限的。

定理1.1 是定理4.1、引理2.2以及$\mathrm{MCP}^M(2^\omega)$ 可数这一事实的直接推论。注意，虽然我们要求每个f_n 都编码在 M中，但整个序列$(f_n)_{n\in\omega}$ 则不必如此，例如，$\mathrm{MCP}^M(2^\omega)$ 在 M中不可数。

GPT 给出的定理4.1的证明，结合了证明 $\equiv_M^{\mathbb{C}}$ 是超超有限的 [14], ，其中定理3.2 此时起到泛型超有限性定理的作用 [11, 定理 12。1], ，以及证明局部有限图具有有限博雷尔渐近维数时会导出超有限博雷尔等价关系的 [5, 定理 7。1]。

定理*4.1*的证明。设 Γ 如上所述，并令 E 为由 Γ诱导的轨道等价关系，限制在集合 $\mathcal{C}_M$上。

在 M 中（为简洁起见，在此处的 M 中我们将省略上标），令 R_n 为 2^ω 上由 $\{f_0, \ldots, f_{n-1}\}$ 生成的群所诱导的轨道等价关系。那么， R_n 构成 M 中递增的可数 Borel 等价关系序列，并且在 $\mathbf{V}$ 中，

$$E = \bigcup_{n\in\omega} R_n \restriction \mathcal{C}_M.$$

我们将构造 2^ω 上的有限 Borel 等价关系递增序列 F_n ，使得每个关系都编码于 M 和 $F_n \subseteq R_n$ 中。我们先令 $F_0 = \Delta_{2^\omega}$ 为 2^ω 上的相等关系。

对于 $n \geq 1$，假设 F_{n-1} 已按要求定义。现在我们在 M 中进行。为 F_{n-1} 选择一个博雷尔选择函数 s_{n-1}。令

$$H_n = \left(F_{n-1} \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} (\mathrm{graph}(f_i) \cup \mathrm{graph}(f_i^{-1})) \right) \setminus \Delta_{2^\omega}.$$

那么， H_n 是 2^ω 上的一个局部有限博雷尔图，其中每个 F_n 类都是一个团，并且其连通关系与 R_n 重合。

我们应用定理3.2 于 M，得到博雷尔集 D_n，A_n^0，$A_n^1 \subseteq 2^\omega$ 使得 D_n 在 2^ω中是余瘦的，$D = A_n^0 \sqcup A_n^1$，并且对于 $H_n^{\leq 4} \restriction A_n^i$，$i = 0, 1$。设 P_n 是 2^ω 上的有限博雷尔等价关系，其中在每个 A_n^i上，其等价类是 $H_n^{\leq 4}$ 的连通分支；而在 D_n 之外，它就是相等关系。注意到 $P_n \subseteq R_n$。

定义 F_n 于 2^ω 上如下:

$$xF_ny \quad \iff \quad s_{n-1}(x)P_ns_{n-1}(y).$$

于是， F_n 是一个有限博雷尔等价关系，且满足 $F_{n-1} \subseteq F_n$，因为它是有限博雷尔等价关系在选择子 s_{n-1} 下的拉回，其中该选择子对应于F_{n-1}，并且 $F_n \subseteq R_n$。为证明后者，注意若 xF_ny，则

$$xF_{n-1}s_{n-1}(x), \quad s_{n-1}(x)P_ns_{n-1}(y), \quad \text{and} \quad s_{n-1}(y)F_{n-1}y,$$

并且由于 F_{n-1} 和 P_n 都是 R_n的子集，我们有 xR_ny。

这描述了 F_n<style id='4}> 的构造。现在我们在**V**中工作，利用引理 2.1和3.3 来保证所有相关概念的绝对性。由于所有的D_n都是编码于 M中的余瘦博雷尔集，我们有 $\mathcal{C}_M \subseteq \bigcap_{n\in\omega} D_n$。

断言 1。 对于每个 $x \in \mathcal{C}_M$ 和 $n \in \omega$，部分轨道

$$T_n = \{x, f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$$

至多与两个 F_n-类相交。

如果 $u \in T_n(x)$，那么 $\rho_{H_n}(x, u) \leq 1$，并且由于 u 和 $s_{n-1}(u)$ 位于同一个F_{n-1}-类中，因此 $\rho_{H_n}(s_{n-1}(u)\ u)$ 也 ≤ 1。因此，对于任意 u，$v \in T_n(x)$，

$$\begin{aligned}\rho_{H_n}(s_{n-1}(u), s_{n-1}(v)) \leq \rho_{H_n}(s_{n-1}(u), u) + \rho_{H_n}(u, x)\\ + \rho_{H_n}(x, v) + \rho_{H_n}(v, s_{n-1}(v)) \leq 4.\end{aligned}$$

注意，由于它们与 x 位于同一个 R_n-类中，$s_{n-1}(u)\ s_{n-1}(v) \in \mathcal{C}_M$，因此属于 $D_n = A_n^0 \sqcup A_n^1$。如果 $s_{n-1}(u)\ s_{n-1}(v)$ 都位于同一个 A_n^i 中，那么它们要么相等，要么由 $H_n^{\leq 4}$ 的一条边相连；在后一种情况下，$s_{n-1}(u)P_ns_{n-1}(v)$，从而 uF_nv。于是，T_n 至多与两个 F_n-类相交，断言得证。

在 $\mathcal{C}_M$ 上定义一个等价关系

$$F = \bigcup_{n\in\omega} F_n \restriction \mathcal{C}_M.$$

根据构造，F 是超有限的，并且 $F \subseteq \bigcup_{n\in\omega} R_n \restriction \mathcal{C}_M = E$。

断言 2。 每个 E-类至多与两个 F-类相交。

假设 y_0，y_1，y_2 是某个 x 的 E-类中的成员。选取足够大的 n，使得 y_0，y_1，$y_2 \in T_n(x)$。于是，根据断言 1，其中两个属于同一个 F_n-类，因而也属于同一个 F-类。因此，一个 E-类不可能包含来自两个以上不同 F-类的元素。

换言之，F 是 ≤ 2 的一个指标为E的超有限子等价关系，因此根据 [9, 命题 1.3(vii)]，E 是超有限的。□

参考文献

[1] J. Alper、M. J. Barany、A. Chavarri Villarello、S. Dahmen、W. Dean、K. Ganapathy、M. Harris、D. Holmes、M. Jamnik、S. Kelk、B. Kra、U. Martin、B. Naskręcki、R. Ochigame、J. Portegies 和 J. Schmitt。《莱顿人工智能与数学宣言》。https://leidendeclaration.ai/，2026年6月。[2] G. Barmpalias、S. Gao、J. He、T. Kihara、A. Nies、T. Slaman、C.-M. Tran、D. Turetsky、P. Welch、L. Yu 和 H. Zhang。数理逻辑中的开放问题，2026。预印本。[3] A. Bernshteyn 和 F. Weilacher。有限渐近分离指标的图的局部引理的 Borel 版本及局部算法。《美国数学会汇刊》，378(11):8183–8221，2025。[4] F. Calderoni 和 D. Sinapova。强迫、泛型性与可数 Borel 等价关系，2026。预印本。[5] J. Clemens、S. Coskey 和 S. Dworetzky。集合论可数模型的分类。《数学逻辑季刊》，66(2):182–189，2020。[6] C. T. Conley、S. C. Jackson、A. S. Marks、B. M. Seward 和 R. D. Tucker-Drob。博雷尔渐近维数与超有限等价关系。《杜克数学杂志》，172(16):3175–3226，2023。[7] R. Dougherty、S. Jackson 和 A. S. Kechris。超有限 Borel 等价关系的结构。《美国数学会汇刊》，341(1):193–225，1994。[8] S. Grigorieff。集合论中的中间子模型与泛型扩张。《数学年刊》（第2辑），101:447–490，1975。[9] S. Jackson、A. S. Kechris 和 A. Louveau。可数 Borel 等价关系。《数学逻辑杂志》，2(1):1–80，2002。[10] A. S. Kechris。可数 Borel 等价关系理论，剑桥数学论著第234卷。剑桥大学出版社，剑桥，2025。[11] A. S. Kechris 和 B. D. Miller。轨道等价专题，数学讲义第1852卷。施普林格出版社，柏林，2004。[12] K. Kunen。集合论，逻辑与数学基础研究第102卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1980。[13] D. Maharam 和 A. H. Stone。范畴代数同构的实现。《澳大利亚数学会公报》，19(1):5–10，1978。[14] I. B. Smythe。泛型的等价性。《数学逻辑档案》，61(5-6):795–812，2022。[15] R. M. Solovay。一个集合论模型，其中每个实数集都是勒贝格可测的。《数学年刊》（第2辑），92:1–56，1970。[16] P. Vopěnka 和 P. Hájek。《半集合理论》。布拉格科学院出版社，1972。

数学与统计学系，温尼伯大学，波蒂奇大道515号，温尼伯，马尼托巴省，加拿大，R3B 2E9电子邮箱：i.smythe@uwinnipeg.ca