arXiv:2611.30682v1 [math.NT] 23 Nov 2026

复几何中的算术绕行曲线

SeungJu Lee

2026年11月24日

摘要

我们从循环覆盖和数域 K的完备化构造算术绕行曲线。循环周期之间的转移给出本原圆分关系。在奇剩余特征下，其导出交的等变端同态环的选定因子为有限域；在剩余特征为二时，则为长度二 Witt 环。赋值覆盖将这些周期承载在曲线 Y_K上。其正规坐标将覆盖变换平移实现为 Meyer 算术迹公式中的 Schwartz 算子，而其穿孔微分给出ζ_K的有限欧拉因子。我们构造了一个层 Y_K ，使中间傅里叶–泊松表示作为一个 C_K-模嵌入普通的第一层上同调中。Dedekind ζ 分量是一个等变直和项。该嵌入利用有限处的赋值单值化，以及阿基米德图上的阿代尔 Poisson 求和。两个像类的杯积在张量积系数下为零，即使对其中一个因子作共轭后仍然如此。在截面一侧，张量次数和整 jets 给出乘法格、显式对偶商以及相对 theta 恒等式。一个在截断喷流上行列式为一的主圆分扭曲，在秩不断增加的一族中给出对数指标的二次下界。固定权重泊松商保留 Hecke 零点处有限组 Mellin 导数，其阶数低于各自的重数。

1 引言

曲线上次数为 d 、定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的一个闭点，同时确定了阶数为 q^d 的剩余域，以及长度为 d的 Frobenius 轨道。在 $\mathbb{F}_1$ 上构造一种几何，尤其要探究数域 [32, 的曲线上，剩余域、素数轨道与 ζ 函数之间可能存在怎样的联系；参见引言和 §1。2]。我们的构造始于一个循环覆盖。其转移映射施加了分圆关系，而其导出交所具有的自同态则提供了剩余系数的加性算术。在每个有限处 v ，赋值覆盖承载这些系数。经过范商后，边界的周期为对数 q_v 。同一个赋值平移作用于进入显式公式的测试函数。定义20.1 汇集了空间 Y_K、其覆盖塔、其截面实现，以及在傅里叶–泊松复形上的作用。它们之间的相容性构成了

定理 20.2。

在 Y_K 本身上也存在一个比较。借助 $Q = H^1(C_K^{\mathrm{FP}})$ 和 $Q_{\mathrm{D}} = Q^{C_K^1}$，我们构造了一个复向量空间层 $\mathscr{F}_K$ 以及等变映射

$$Q \xrightarrow{\iota} H^1(Y_K, \mathscr{F}_K) \xrightarrow{r_{v,w}} Q_{\mathrm{D}}, \qquad r_{v,w}\iota = \Pi_{\mathrm{D}},$$

其中 Π_{D} 是对范数为一的 idèle 类群取归一化平均。有限图迫使每个可延拓 puncture 截面都消失。在阿基米德图上，可延拓的常值截面正是阿代尔 Poisson 求和的像。所得的连接映射嵌入整个中间表示。在某个有限处的绕行环和一条阿基米德弧，在其 Dedekind 分量上给出一个左逆（命题 21.1 和 21.4）。这些类成对取杯积的结果在命题 21.2中计算。

正规行列式计算恢复了完备化戴德金ζ函数的因子。我们使用扩展黎曼猜想 （ERH）来断言，其所有非平凡零点的实部均为 $1/2$ 对每个数域 K成立。傅里叶–Poisson 表示还包含酉海克分量，包括无限阶特征。第 19节给出了定权完备化，在零点处保留带重数的求值。带标记的射影系数线上的整 jets 提供

第二种算术测量。即使主扭曲在截断射流上的作用行列式为一，它们仍能检测出该扭曲。

1.1 从循环周期到算术系数

记 $C_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$，并令 $R = \mathbb{S}[\mathbb{Z}]$ 为球面群代数，其生成元为 t。本原周期-m对象的表示为

$$U_m \simeq \operatorname{cofib}\bigl(\Phi_m(t) : R \longrightarrow R\bigr),$$

其中 Φ_m 是第 m个分圆多项式。其整数零次同调为 $\mathbb{Z}[t]/(\Phi_m)$。当$m < n$时，导出交 $U_m \otimes_R U_n$ 除非 n/m 是素数幂，否则为零；在这种情况下，其底层谱是摩尔谱的楔和（命题3.11）。保留该交上的 C_m作用，也就保留了其圆分系数信息。当 $p \nmid m$时，

$$\pi_0 \operatorname{End}_{C_m}(U_m \otimes_R U_{mp})$$

在奇特征下是有限域，而 $W_2(k)$ 在剩余特征为二时成立（定理3.14）。因此，加法系数源自几何周期对象之间的稳定映射。底层摩尔谱与其带指标自同态之间的区别，对这一恢复至关重要。

图余跨提供复合律。缝合通过同伦推出定义，并在相关系数上给出一个余纤维序列（命题3.4）。后文构造的对应系数代数通过 Amitsur 下降保留源模及其映射谱（定理8.5）。第4 节还给出了输入域的算术表示：循环不可约标记图返回确定一个数域，而其不变格则恢复整数环以及曲线中使用的完备化数据。

1.2 曲线及其算术迹

记为 $C_K = \mathbb{A}_K^\times / K^\times$。对于赋值 v，令 $j_v \colon K_v^\times \to C_K$ 为由第 v 个伊代尔坐标诱导的映射。v 处的图表为

$$N_v = (C_K \times K_v)/K_v^\times, \qquad (c, z) \cdot h = (c\, j_v(h), h^{-1} z).$$

其穿孔通过 $(c,\ z) \mapsto c\, j_v(z)$ 与 C_K 相识别。沿这个公共穿孔粘合所有图表，定义了 Y_K。N_v 中的零轨道为 $C_K / j_v(K_v^\times)$，因此该图表同时记录了伊代尔类作用以及 v 处的乘法稳定子。

这些性质解释了为何选择这条曲线。在有限处，商去 $\mathcal{O}_v^\times$ 后会留下一个赋值坐标，并产生一个主 $\mathbb{Z}$-覆盖 $Q_v \to Y_K$。其有限循环商携带绕行周期，而通过 $\mathcal{O}_v^\times$ 的开子群作细化，则提供用于选取剩余系数的角数据。用范数一子群 C_K^1 对零轨道 Z_v 取商，得到边界圆 $\mathbb{R}_{>0}/q_v^{\mathbb{Z}}$，其中 q_v 为剩余域大小。因此，素数的范数决定了同一几何作用的一个周期，而该作用也承载着这些覆盖。实完备化与复完备化通过同一图表公式纳入其中，而有限扩张则通过定理 5.7 的范数映射作用。对于 $a = j_v(a_v) \neq 1$，固定层为 Z_v，横向坐标乘以 a_v。逆拉回贡献为 $|1 - a_v^{-1}|_v^{-1}$，即迹中远离恒等式时出现的因子（定理 11.3）。因此，同一组图表同时承载覆盖数据和显式公式中使用的横向作用。

与显式公式的联系使用了施瓦茨模实现。正规球基通过下式映射到施瓦茨函数：

$$t_v^n \longmapsto \mathbf{1}_{\varpi_v^n \mathcal{O}_v}.$$

此映射将乘以 t_v 与伸缩 ϖ_v 交织起来（命题9.2）。对应代数作用于傅里叶–泊松复形，而迈耶迹定理对这一作用求值，其中包括素数处和阿基米德贡献 [28, 定理 5.8 和 5.11]。定理11.2和命题11.5 用选定的测度和源算子表示此迹。因此，图册的作用具体体现在：它提供坐标和覆盖操作，而这些操作在

算术迹计算中的像已明确。同一个穿孔微分 $1-t_v$，经 $t_v \mapsto q_v^{-s}$ 特化后，给出欧拉因子 $(1-q_v^{-s})^{-1}$。它在有限处的乘积，加上阿基米德高斯积分和自对偶体积因子，便是

$$|D_K|^{s/2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2}\zeta_K(s) \qquad (\Re(s)>1)$$

（命题 12.4），其中 D_K 是域判别式，且 r_1，r_2 分别计数实赋值与复赋值。

1.3 截面、整 jets 与度量

截面乘法必须尊重绕行标架的变化。覆盖 Q_v 定义了一个可逆的$\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-系数层 $\mathscr{L}_v$。过渡映射 t^n 在其 m次张量幂上的作用为 t^{mn}，因此张量次数给出了下降代数 $\bigoplus_{m\ge 0}\mathscr{L}_v^{\otimes m}$（命题 13.2）。在有限周期下，该代数具有一个标架不变的系数锥，以及一个乘法为压缩的正厄米度量。商映射是压缩映射，而归一化传递是等距乘法嵌入，并具有幂等单位像。

为了得到有限截面格，我们将系数变量 t 实现为定义在 $\mathbb{Z}$上的标记射影直线。 ɯɯ是系数代数的射影实现。标记除子 D 给出有限自由格 $S(D)$，而其在 $t=1$处直到 $M-1$阶的喷流的整性定义了 $S_M(D)$。这一条件保留了标记点处的算术信息，而仅凭秩和次数无法记录这些信息。这些格满足

$$S_M(D)\,S_M(E)\subseteq S_M(D+E),$$

且非零截面上的乘法是单射（定理 13.10）。当 秩 $S(D)=M$ 时，其指标由分式格的展开计算得出（定理 13.11）。

指标能揭示除子类和行列式可能遗漏的信息。记 $Z(P)$ 为由多项式 P 切出的除子。对于零次数除子 D_0 以及由此得到的除子 $D_m^{\pm}$，定义如下

$$D_0 = 2Z(\Phi_2)-3Z(\Phi_4)+Z(\Phi_8), \qquad D_m^{\pm}=(m-1)[\infty]\pm mD_0,$$

推论13.12 证明

$$\log[S(D_m^{\pm}):S_m(D_m^{\pm})]\ge\left(\frac{1}{8}m^2-O(m\log m)\right)\log 2.$$

这里的秩随 m 增长。相应的圆分有理函数

$$R(t)=\frac{\Phi_2(t)^2\Phi_8(t)}{\Phi_4(t)^3}$$

满足 $D_0=\operatorname{div}(R)$ 且 $R(1)=1$，因此乘以 $R(1+x)^m$ 在 $\mathbb{Q}_2[x]/(x^m)$ 上的行列式为一。因此，通常的除子类和这个行列式都无法记录所显示的对数指标；保留下来的整 jet 则可以。命题 13.13 和 13.14 计算对偶格以及它与对偶喷射条件之间的有限商。随后，泊松求和给出定理 13.15的相对 theta 恒等式。

这些度量是为配合这些运算而选取的。Bombieri 度量使跨张量次数的乘法具有压缩性。加权 Laurent 完备化在圆分消没理想上给出有界除法，并赋予有限喷流商空间正度量（定理 18.4）。对有限周期商度量进行平均化和归一化，可恢复绕行覆盖度量（命题 18.6）。因此，用于截面的正范数与用于循环系数的正范数之间，通过已证明的度量比较联系起来。

最后的解析构造涉及泊松商的完备化。对于每个酉特征分量和每个固定的指数权 $\alpha>1/2$，定理 19.2 构造了一个核弗雷歇商 Q_α。若 ρ 是一个重数为m_ρ的实际非平凡零点，其各阶梅林导数求值 $0\le j<m_\rho$ 在 Q_α上仍然连续；任意有限个互不相同的此类求值构成的映射都是满射。因此，完备化保留了对零点及其重数的这些有限检验。

1.4 循环系数与球面算术

关于 $\mathbb{F}_1$ 的若干成熟方法已经将循环算术编码其中。Deitmar 将幺半群M扩张为 $\mathbb{Z}$ 的结果是幺半群代数 $\mathbb{Z}[M]$ [21, §1，定理 1。1]。Soulé 将 $\mathbb{Z}[T]/(T^L-1)$ 用于循环标量扩张，并将厄米格列为示例之一 [32, §2.4，公式 (4)，以及 §5。3]。我们层级为L 的系数的整实现是

$$H\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{S}}\mathbb{S}[C_L]\simeq H(\mathbb{Z}[C_L]).$$

层级 $\mathbb{F}_{1^L}$ 在定义3.7 中还保留了覆盖扭子、本原谱、模范畴、商映射和稳定转移。因此 L 具有覆盖度和循环周期的几何意义。

Lorscheid 的圆分蓝图对单位根施加了子群和关系。它向环的扩展是 $\mathbb{Z}[\zeta_m]$。对于 $m=q-1$，p 之上的一个素数处的剩余域为 $\mathbb{F}_q$，其中 q 是 p [26, §1.10] 的幂。我们的传递余纤维在 $H_0(U_m;\mathbb{Z})$ 中实现了这些关系（命题 3.9 ）。例如，在 $m=3$ 处，转移施加了 $1+t+t^2=0$。由于 $\Phi_6(\zeta_3)=-2\zeta_3$，$T_{3,6}=U_3\otimes_R U_6$ 的底层谱是 $\mathbb{S}/2$ 的两个副本的楔和。定理3.14和7.7计算了 C_3-等变自同态在零次上的环，

$$\pi_0\operatorname{End}_{C_3}(T_{3,6})\simeq(\mathbb{Z}/4)[t]/(t^2+t+1)\simeq W_2(\mathbb{F}_4).$$

其约化为 $\mathbb{F}_4$，因为 t^2+t+1 在模 2 意义下不可约。该端同态环具有特征四，这是因为 $\mathbb{S}/2$ 的稳定恒等元 [33, 具有加法阶四1]命题 4。蓝图描述形式和之间的关系，而带记录带基点乘法幺半群中的零和 [26,定义 1.1–1.2] [3,定义 1.1]。

本原谱具有一个直接的谱前驱。Zhang 的构造 3.3.2 遵循 Rezk，取循环置换谱之间商映射的纤维 [38, 构造 3.3.2，第 25–26 页，作者 v4]。如定义 3.6之后所述，我们的传递余纤维是其等变 Spanier–Whitehead对偶。Toën–Vaquié 将球谱上的概形纳入相对代数几何 [35, 定义 5.8–5.9 和 §5。2]。Carmeli–Nikolaus–Yuan 证明，函子 $G\mapsto\mathbb{S}[G]$在有限生成阿贝尔群上作为到交换环谱的函子是全忠实的 [10,定理 1。1]。我们的本原余纤维及其接触是在模范畴中形成的。

对于在 $\mathbb{Z}$ 上平坦的概形，Borger 用一族彼此可交换的 Frobenius 提升来描述 Λ-结构，每个素数对应一个。在幺半群代数上，环面提升的作用为 $\psi_\ell([g])=[g^\ell]$ [5, 引言和 §2.2]。因此，整层环 $\mathbb{Z}[C_L]$ 带有所有替换 $t\mapsto t^\ell$。在本原商 $\mathbb{Z}[t]/(\Phi_m)$ 上，当 $\ell\nmid m$ 时，这个替换会下降，因为它置换了本原的 m次单位根。对于 $\ell\mid m$，它将一个本原根映到一个阶为 m/ℓ 的根，如 $\Phi_3(\zeta_3^3)=3$ 所示。在上面的接触处，映射 $t\mapsto t^2$固定 $\mathbb{Z}/4$，并在 $\mathbb{F}_4$ 上提升 Frobenius。$C_6\to C_3$ 上相容的标记变换在 C_6 上的指数为 5，因为 $5\equiv2$ 模 3，且 $5\equiv1$ 模 2（命题 7.10）。

赋值扭子上的甲板变换通过将其整数标签加一来作用。选定一致化元后，其生成元 t_v 映射为对应代数中的幺准特征类平移 $\delta_{j_v(\varpi_v)}$。对于有限赋值集 S，定理 8.5 构造了该系数映射的模收缩。随后，Mathew 的下降定理通过 Amitsur 全化恢复这些 $\mathbb{S}[\mathbb{Z}^S]$-模及其映射谱，在有限循环基变换后也同样如此。定义 3.18 和命题 3.22、3.28]。

1.5 布尔系数与 Connes–Consani 几何

布尔半域 $\mathbb{B}$ 具有幂等加法 $1+1=1$。因此，从 $\mathbb{B}$ 到一个环的含幺半环映射会迫使目标中有 $1=0$。Connes 和 Consani 还发展了球形系数形式，其中包括环 [15, §3]。在我们的构造中，剩余系数上的加法律来自稳定映射的加法，而乘法来自复合。

Connes 和 Consani 将其算术位点在热带半域上的点识别为$\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ [12, 定理1.1 和定义 31]。他们的缩放位点给出了轨道 $C_p=\mathbb{R}_{>0}/p^{\mathbb{Z}}$，它是斜率属于 $\mathbb{Z}[1/p]$的连续凸分段仿射函数层。他们计算了其除子类群，并利用实值维数证明了一个黎曼–罗赫公式 [13, §2.1、引理 5.1(ii)、定理 5.6 和 5.17]。对于 $K=\mathbb{Q}$，命题5.6给出了 $C_K^1\backslash Y_K$中的同一个圆。在取

该商之前，我们的赋值塔记录了一致化元的幂，而其角向细化保留了单位的有限商（定理5.4和命题7.2）。

Connes 和 Consani 的球面方法在 Γ-集和 Γ-环中使用范畴球面。它提供除子上同调、整数维数和 Serre 对偶，由此得到 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ [14, 定理 1.2–1.3] [16, 定理 1]的 Riemann–Roch 公式。我们的截面理论计算带标记系数实现上的整喷射格。命题 13.14确定了对偶格与对偶喷射条件之间的有限商。推论 13.12给出了沿主扭曲的幂、且秩不断增加时，截面指数对数的二次下界。

在对 Picard 幺半群和雅可比幺半群的描述中，Connes 和 Consani 用带刚化数据的秩一无挠群表示阿代尔类，并通过张量积实现乘法。他们对横截域的描述将稳定子 $\mathbb{Q}_v^{\times}$ 与显式公式 [19,§§2–4, 8, 9.1–9.2]联系起来。在 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上，对于包含 ∞ 的赋值处有限集，其 Schwartz 代数给出一个层的截面，而它们的交叉积给出第二个层的截面 [19, §9.4, (21) 和定理 9.1]。 [18, 命题 2.2、推论 3.15 和定理 3.17] 中的绝对曲线，是在 $\operatorname{Spec}\ \mathbb{Z}$ 上通过拉回球面结构层定义的，其茎 $\mathbb{F}_1[T^{\mathbb{Z}[1/p]+}]$ 位于 p。对于剩余特征为 p的代数闭完美体 F，将 p 处的连续几何点除以 $\mathbb{Q}_p^{\times}$ 作用所得的商，对应于 $F^\flat$ 的反倾斜，视为模去倾斜识别的 Frobenius 扭曲，其中包括等特征反倾斜 $F^\flat$ 本身。他们的扭量构造在带符号球面基底 $\mathbb{F}_{1^2}$ 上提供了一个阿基米德分量。他们将有限曲线扩展到该基底，并在泛点处将两个分支粘合 [20, 定义 1.1 和 7.1]。

对于包含 ∞ 的 $\mathbb{Q}$ 赋值处有限集，Connes 和 Consani 研究泛轨道与恰有一个零坐标的分层之并 [17, §§5.3–5.4]。对于每个数域 K，我们的图册沿 C_K 粘合 $C_K \times_{K_v^{\times}} K_v$，并在 v 之外使用 idele 拓扑。它到 $\mathbb{A}_K/K^{\times}$ 的映射将每个图表送到在该赋值处之外为伊代尔的类（命题 5.2）。命题 9.1 计算了赋值覆盖在这些坐标下的过渡映射，而命题 9.2 则将由此得到的平移对应为对施瓦茨函数的伸缩。Connes 和 Consani 的类域函子将 $\mathbb{Q}$ 的有限阿贝尔扩张逆变地映射到阿代尔空间的有限覆盖（可能有分歧），并在非分歧素数轨道上带有算术 Frobenius 单值化 [17, 定理 3.9、3.12 和 4.2]。我们的Q_v、L是赋值周期挠子。在域扩张下，范数会将赋值乘以剩余次数，而分歧指数则出现在剩余类域单位的范数公式中（定理 5.7 和 7.12）。命题 7.10 通过改变循环标记的幂次，在所选剩余域上实现 Frobenius。

傅里叶–泊松作用也有一个层上同调先例。在三点空间 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{F}_1}$ 上，Connes 和 Consani 在两个仿射开集上定义了一个层 Ω。对于在原点处取值为零且积分为零的测试函数直和项，这两个限制分别是轨道求和及其按范数加权的逆坐标形式。它们在极性直和项上为零。泊松求和将它们在交叠处的像对应起来，而 $H^1(\mathbf{P}^1_{\mathbb{F}_1}, \Omega)$ 则实现了海克 L-函数 [11,方程 (84)–(89)、引理 5.3 和定理 5.5] 的零点。将Y_K有限坐标图和阿基米德图归并后，可得两个开集，其交集为 C_K。对于第 21.1 节的层 $\mathscr{F}_K$，有限绕行迫使从有限开集出发的限制为零。常值截面在其值属于 $\theta H_\cap$ 时，恰好可以从 C_K 延拓到阿基米德开集。这些常值截面上的 Mayer–Vietoris 连接映射将 $H_-/\theta H_\cap$ 嵌入 $H^1(Y_K, \mathscr{F}_K)$（命题 21.1）。

1.6 截面不变量与解析实现

Meyer 对伊代尔类群的表示给出了完备迹及其谱解释 [28, 定理 5.8 和 5.11]。我们的正规坐标映射在该表示中实现绕行算子，而固定权商保留其有限零点射流。在截面方面，theta 大小与欧几里得对偶源自算术泊松求和 [36, 命题 1 和 §8] [6, §§2.2、5.5、6.1]。Bost–Charles 发展了厄米截面构造与 Theta 不变量 [7, §0.2.3.3– 0.2.4。1]在这里，这些工具为积分喷流条件所规定的格给出了显式恒等式。Bombieri–Weyl 归一化 [1, §2，公式（10）及其后的展示式]以及正交对称化，导出了命题17.1中的压缩乘积估计。

保留下来的喷流信息也有循环论实现。对于本文所用的光滑射影曲线及非空有效 Cartier 模数，权一相对动机复形将以下对象对应起来

相对单位与相对皮卡群 [4, 定理4.1与推论4。2]。第16 节将此应用于增广为一的分圆射流。Gillet–Soulé 的算术陈特征公式给出了所示 Koszul复形的有限部分与度量项 [23, 定理1。1]。主扭曲在通常皮卡群中是平凡的，但其相对射流类及整格指标保留了更多数据。

赋范几何提供了另一种比较。Scholze 的 Berkovich谱参数化有界乘法半范数，并检测所述的弧覆盖 [31, 定义 2.13 和 3.1]；Aoki 在环层上定义绝对半赋值和绝对值 [2, 定义 4.31]。这里的完备化 K_v确定图表，正截面范数则定义在显式的系数模上。它们的乘积与除法界，以及与有限覆盖度量的比较，均在第17 节和18节中得到证明。

1.7 中间上同调与交数问题

设 $X/\mathbb{F}_q$ 为一条光滑射影几何连通曲线，令 F 为其 q 次幂 Frobenius 自同态，并记 $H^i = H^i_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ 为 $\ell \nmid q$。迹公式和 ζ 函数的分子给出，对于 $n \ge 1$，

$$1 + q^n - \#X(\mathbb{F}_{q^n}) = \operatorname{Tr}\big((F^*)^n \mid H^1\big), \qquad P_1(T) = \det(1 - T F^* \mid H^1).$$

在 H^1 上的完美交错杯积将特征值 α 与 q/α 配对。纯性断言，对于每个复嵌入 [22, , $|\alpha| = q^{1/2}$ §1.4, (1.5.1), (1.5.4), 定理 1.6 和 2.3，§§2.4– 2.6]。交数证明使用 $X \times X$ 上的除子。将对角线和 F^n 的图像投影到与两个纤维类正交的部分，并取其上的负交积。它们的内积为 $1+q^n-\#X(\mathbb{F}_{q^n})$，范数平方分别为 $2g$ 和 $2gq^n$，其中 g 为亏格。柯西–施瓦茨不等式给出绝对迹 [24, 的界 $2gq^{n/2}$：定义 1.1–1.2 和引理 1.3，第 127] 页。

在 Y_K 上，范数流记录了一个闭素轨道及其周期 $\log q_v$，在对 C_K^1 取商之后（命题 5.6）。在傅里叶–泊松复形中，平凡特征和范数特征对应完备化戴德金ζ函数的两个极点，而中间表示则对应 Meyer 分布迹中的非平凡零点 [28, 定理 5.8 和 5.11]。第21节将该中间表示置于通常层上同调中。它的像在有限–阿基米德覆盖的两个开集上都限制为零，因此任意两个像类的杯积都消失，即使对任一因子取共轭后也如此。要几何地证明迹的符号，仍需一种能够恢复算术迹的配对。任何使用截面格的构造，在识别相反的射流条件时，都必须考虑命题 13.14 的对偶商。对于维数为 $n \ge 1$、定义在 $\mathbb{Q}$ 上的正规整射影簇，Yuan–Zhang 证明了：对于阿代尔 $\mathbb{Q}$-线丛，当 M可积、L_i 数值有效、底层的 L_i 是大的，并且 $M \cdot L_1 \cdots L_{n-1} = 0$ [37, 时，有 $M^2 \cdot L_1 \cdots L_{n-1} \le 0$ 定理 3.2]。

组织结构。在介绍完记号后，第3–8 节构造绕数系数、算术输入、曲线和对应映射。第9–12节给出 Schwartz 实现、完备迹和正规行列式。第13–16 节发展截面、喷流、导出接触和循环类。度量与泊松商构造将在第17–19节介绍。第20 节汇总它们的相容性陈述。第21 节构造系数层，证明比较，并计算其像上的杯积。附录证明用于对数截面指标二次下界的二进估计。

2 记号与约定

对于赋值 v，记 K_v 为完备化，并记 $j_v\colon K_v^\times \to C_K$ 为由其他所有坐标均为 1 的伊代尔所诱导的映射。在有限赋值 v处，令 $\mathcal{O}_v$、$\mathfrak{m}_v$ 和 k_v 分别为赋值环、极大理想和剩余域，并设 $q_v = |k_v|$。取一致化元 ϖ_v，并将其归一化

$$|\varpi_v|_v = q_v^{-1}, \qquad |x|_v = |x| \ (K_v = \mathbb{R}), \qquad |z|_v = z\bar z \ (K_v = \mathbb{C}).$$

于是，对于 $a \in K^\times$，有 $\prod_v |a|_v = 1$。设 $C_K^1 =$ 为核$(|\cdot|: C_K \to \mathbb{R}_{>0})$。我们使用 $\mathbb{A}_K/K$ 的迹特征$\psi_K = \psi_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{Tr}^{\mathbb{A}_K/\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}$，其在 $K = \mathbb{Q}$ 处的实分量为 $x \mapsto e^{2\pi i x}$，并使用自对偶加法 Haar 测度。满格 $\Lambda \subset K$ 是秩为 $[K$ 的自由 $\mathbb{Z}$-模：$\mathbb{Q}]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上张成 K。

所有谱范畴和模范畴都是稳定的 ∞-范畴。对于离散群 G，其球面群代数为 $\mathbb{S}[G] = \Sigma^\infty_+ G$；谱张量积均为导出的。记号 HA 表示 Eilenberg–Mac Lane 谱，Perf_A 表示有限细胞 A-模的收缩，而 $h\mathcal{D}$ 表示$\mathcal{D}$的同伦范畴。对于空间 X，Shv(X; Sp) 使用其普通开集位，而 Δ_X 表示常值层函子。

3 图余跨与有限周期

我们使用带有同伦相干群作用的谱。对于离散群 G，记作 $\mathbb{S}[G] = \Sigma^\infty_+ G$；其模范畴为 Fun($BG$,Sp)。令

$$R = \mathbb{S}[\mathbb{Z}], \qquad R_L = \mathbb{S}[C_L], \qquad C_L = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z},$$

并将标记生成元记为 t。谱和模的张量积都是导出张量积。

3.1 等变图与缝合

定义 3.1（图-余跨范畴）。对于 $r \geq 0$，令 $F_r = \mathbb{Z} \times \{1,\ldots,r\}$，第一因子上带有平移以及 $F_0 = \varnothing$。$\mathcal{C}_{\tau,g}$ 的对象是 F_r。一个态射 $F_r \to F_s$ 是一个等变余跨

$$F_r \longrightarrow \widetilde{Y} \longleftarrow F_s,$$

其中 Y 是一个具有有限商的自由 $\mathbb{Z}$-CW 图。将各个支腿替换为其映射柱，并且在相对于边界映射的等变同伦等价下辨认余跨。复合是沿公共边界作等变同伦推出。不交并是对称幺半积。记号 g 记录了商图各连通分支的第一 Betti 数。

令 $B = F_1$。折叠余跨 $B \sqcup B \to B \leftarrow B$、其逆以及带有一个空边界的余跨定义了映射 $\mu, \Delta, \eta, \epsilon$。平移定义了一个自同构 $\tau\colon B \to B$。

命题 3.2. 映射 $(\mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ 使 B 成为一个交换 *Frobenius* 对象，而 τ 保留这些映射。特别地，

$$(\mu \sqcup \mathrm{id})(\mathrm{id} \sqcup \Delta) = \Delta\mu = (\mathrm{id} \sqcup \mu)(\Delta \sqcup \mathrm{id}), \qquad \tau\mu = \mu(\tau \sqcup \tau).$$

证明。将各条腿替换为映射柱后，两个结合复合的商图都是具有相同带标记边界的树。收缩它们的边后，得到相同的花冠图。同样的论证可证明单位恒等式和 Frobenius 恒等式；反转余跨可得余代数恒等式。交换两个边界轨道可得交换性和余交换性。平移中间轨道，可使每个结构映射与同步边界平移相交织。 □

对于 $L \geq 1$，令

$$H_L = \mu(\mathrm{id} \sqcup \tau^L)\Delta : B \longrightarrow B.$$

其商图有两个顶点和两条边。将位移为 0 和 L 的边提升后可知，其分支构成 C_L，且两个边界映射均等于模 L 的 $k \mapsto k$。

定义 3.3（图余跨的谱实现）。对于自由的 $\mathbb{Z}$-图像 Y，令 $P(Y) = \Sigma^\infty_+ Y$，并通过平移将其视为一个 R-模。将 P 应用于图余跨的三个条目，可得到一个完美对象范畴 R-模余跨。

命题 3.4（缝合三角形）。 谱实现定义了一个对称幺半函子

$$\mathcal{C}_{\tau,g} \longrightarrow h\,\mathrm{Cospan}(\mathrm{Perf}_R).$$

如果 $\widetilde{W} = \widetilde{Y} \cup^{h}_{\widetilde{F}_s} \widetilde{Z}$，则存在自然的余纤维序列

$$R^{\oplus s} \xrightarrow{(j_*,-i_*)} P(\widetilde{Y}) \oplus P(\widetilde{Z}) \longrightarrow P(\widetilde{W}). \tag{1}$$

此外，

$$P(\widetilde{Y}_{H_L}) \simeq \mathrm{cofib}(t^L - 1 : R \longrightarrow R) \simeq R_L \quad in\ \mathrm{Mod}_R\,. \tag{2}$$

证明。 为有限商图的每个胞腔选取一个提升。其悬挂谱的胞腔构造使用有限多个自由 R-胞腔，因此是完美的。悬挂谱保持$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$同伦推出。在稳定范畴中， $P(Y)$ 和 $P(Z)$ 在 $R^{\oplus s}$ 上的推出是两个边界映射之差的余纤维，这证明了（1）以及与复合的相容性。不交并对应直和。在 H_L的图中，将位移为零的边的各个平移副本收缩。剩下的粘接映射是 $t^L - 1$。覆盖图的每个连通分支都是可缩的；其连通分支 $\mathbb{Z}$集合为 C_L。这证明了（2）中的第二个等价。

□

3.2 指标有限周期系统

定义 3.5（有限周期及其转移）。 令 O_L 为定向圆的次数为 L 的覆盖在一个标记点上的纤维。它是一个 C_L-挠子，其生成元由正向绕行诱导。一个标记的片将其识别为 C_L。对于 $L \mid hL$，令 $q_{hL,\,L}$：$O_{hL} \to O_L$ 为商映射。它诱导置换谱的映射 q_*。利用 Spanier–Whitehead 对偶 $D(X) = \mathrm{Map}(X, \mathbb{S})$ 以及 $\mathrm{Fun}(BC_{hL},\mathrm{Sp})$ 中有限置换谱的典范自对偶，定义其加性稳定转移 $q^! = D(q_*)$，其中 $\mathbb{S}[O_L]$ 通过 $C_{hL} \to C_L$携带作用。在底层谱上，这些映射为

$$q_* e_x = e_{q(x)}, \qquad q^! e_y = \sum_{q(x)=y} e_x.$$

忘记群作用后， $q_* q^! = h\mathrm{id}$。对于普通交换环 A，应用$HA \otimes_{\mathbb{S}} -$ 后，同一恒等式在等变意义下仍然成立。复合的转移按相反顺序复合。

有限集对偶使该构造不依赖于纤维的排序，并赋予其相容的复合与拉回恒等式。如果 $d \mid m$， n，那么 $O_m \times_{O_d} O_n$在同时平移作用下是 $\gcd(m,\ n)/d$ 个周期为 $\mathrm{lcm}(m,\ n)$的轨道的不交并：其基数为 mn/d，且每个平移轨道都具有所述长度。

定义 3.6（本原谱）。 令 $U_1 = \mathbb{S}$ 带有平凡作用。如果 $L = \ell^a$，其中 ℓ 为素数且$a \geq 1$，则置

$$U_{\ell^a} = \mathrm{cofib}\big(q^! : \mathbb{S}[C_{\ell^{a-1}}] \longrightarrow \mathbb{S}[C_{\ell^a}]\big) \quad \text{in } \mathrm{Fun}(BC_{\ell^a}, \mathrm{Sp}),$$

其中源作用沿商映射膨胀。对于一般的 L，取关于 $\ell^a \| L$的外部 smash 积，并使用中国剩余同构 $C_L \simeq \prod_{\ell^a \| L} C_{\ell^a}$ ，该同构将标记生成元映射为每个因子中的标记生成元。对于一个 C_L-挠子 P，在其素数幂商上进行相同的构造，定义 $U(P)$。

这些本原谱是 Rezk 的构造中分圆莫尔谱的斯潘尼尔–怀特黑德对偶，见 Zhang 的 [38, 构造 3.3.2 以及第 25–26]页上的外 smash 积。事实上，该构造取商映射 q_*的纤维；通过对偶性以及有限置换谱的典范自对偶性，便得到上述带有循环作用的传递余纤维。

定义 3.7（层级 $\mathbb{F}_{1^L}$）。 符号 $\mathbb{F}_{1^L}$ 表示层级-L项

$$(O_L,\ R_L,\ \mathrm{Mod}_{R_L},\ U_L)$$

在按正整数的整除性编制索引的系统中。转移数据包括商映射$q_{hL、\ L}$、它们的加性转移、所诱导的环谱映射 $R_{hL} \to R_L$，以及标量扩张与标量限制。整数 L 是覆盖度，也是H_L的分支轨道的周期。

引理 3.8（胞腔链上的细化）。 设 A 为交换环，$T = A[t, t^{-1}]$，且 $D_L = [T \xrightarrow{t^L-1} T]$，其上同调次数为 -1、0。对于 $N_{h,\ L} = \sum_{j=0}^{h-1} t^{jL}$，商映射和转移由下式表示：

$$D_{hL} \xrightarrow{(N_{h,L},1)} D_L, \qquad D_L \xrightarrow{(1,N_{h,L})} D_{hL}.$$

它们在 D_L 上的复合与 $h$id链同伦。

证明。 两个链映射恒等式均由（$t^L - 1$）$N_{h,\ L} = t^{hL} - 1$推出。在零次同调上，第一个映射将指数模 L化，而第二个映射将其 h个提升求和。该复合在两个次数上均为乘以 $N_{h,\ L}$。多项式 $N_{h,\ L} - h$ 可被 $t^L - 1$整除；从零次到 -1次乘以该商，正是所需的链同伦。

□

3.3 本原交及其自同态

命题3.9。 U_m 的底层谱是 $\varphi(m)$ 个球面的楔和。其整系数同调集中在零次，并且在标记作用下，

$$H_0(U_m; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[t]/(\Phi_m(t)).$$

存在一个 R-模等价

$$U_m \simeq \mathrm{cofib}(\Phi_m(t) : R \longrightarrow R). \tag{3}$$

证明。 对于 $m = \ell^a$，转移映射对 C_ℓ的每个陪集都包含一组基向量之和。在每个陪集中，该和可扩充为一个整基。所得商是自由的，其旋转模为

$$\mathbb{Z}[t]/(t^{\ell^a} - 1,\ 1 + t^{\ell^{a-1}} + \cdots + t^{(\ell-1)\ell^{a-1}}) = \mathbb{Z}[t]/(\Phi_{\ell^a}).$$

整基变换可提升为有限个球面的楔和之间的等价。因此，余纤维是由所示秩的球面组成的楔和。对于互素周期，分圆格的外张量积由其特征根的乘积生成：每个特征根都可以由该乘积的某个幂恢复。秩相等，故该张量积与 $\mathbb{Z}[t]/(\Phi_m)$同构。

类 $1 \in \pi_0 U_m$ 定义了一个 R-线性映射 $R \to U_m$。它与 $\Phi_m(t)$的复合在$\pi_0 U_m$中表示为零，因此选取一个零伦，并将该映射延拓至其余纤维上。所得映射诱导一个整系数同调同构。其余纤维是连通的，且整系数同调为零，因此由稳定 Hurewicz 定理可知它是可缩的。

□

定义 3.10（本原接触）。 对于正整数 m，n，定义

$$T_{m,n} = U_m \otimes_R U_n.$$

每个因子上的标记作用规定了其 R-模结构。我们赋予 $T_{m,\ n}$ 由第一因子诱导的额外C_m-作用，并用 $\mathrm{End}_{C_m}(T_{m,\ n})$ 表示 $\mathrm{Fun}(BC_m,$ 谱范畴$)$ 中的自同态环谱。

命题 3.11（底层接触谱）。设 $m < n$。若 n/m 不是素数的正整数次幂，则 $T_{m,\ n} \simeq 0$。若 $n = mp^a$，其中 p 是素数且 $a \geq 1$，其底层谱是 $\varphi(m)$ 个 $\mathbb{S}/p$ 的楔和。

证明。由 (3)，接触是 $\Phi_n(t)$ 在 U_m 上的余纤维。在其自由整数同调上，这个映射是 $\Phi_n(\zeta_m)$ 在 $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ 上的乘法。对于 $m>1$，绝对行列式是分圆结果式[9, 定理 9]；除非 $n/m=p^a$，否则它等于 1；在这种情况下等于 $p^{\varphi(m)}$。对于 $m=1$，相应公式为 $\Phi_n(1)=p$（当为素数幂时），否则为 1 [9, 引理 4]。

在素数幂情形下，写作 $m=up^b$，其中 $p\nmid u$。模 p 约化得到 $\Phi_{up^r}=\Phi_u^{\varphi(p^r)}$，适用于 $r\geq 1$，因而有 $\Phi_m\mid\Phi_n$。由此可得 $\Phi_n(\overline{\zeta_m})=\overline{p}\alpha$，其中 $\alpha\in\mathbb{Z}[\zeta_m]$。结式给出 $|N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}}(\alpha)|=1$，因此 α 是一个单位。在球面的底层楔和所取的基下，该映射等价于 p 乘以一个可逆整数矩阵。取其余纤维即可证明该断言。

□

Le引理 3.12（标量 Moore 自同态环）。对于 $M_p=\mathbb{S}/p$，复合给出 s

$$\pi_0\operatorname{End}(M_p)=\begin{cases}\mathbb{F}_p, & p\neq 2,\\ \mathbb{Z}/4, & p=2.\end{cases}$$

证明。若 p 为奇数，Moore 余纤维序列给出 $\pi_1M_p=0$ 和 $\pi_0M_p=\mathbb{F}_p$。将 $[-,M_p]$ 应用于该序列，可将 $[M_p,M_p]$ 识别为 $\mathbb{F}_p$，其生成元为恒等式。对于 $p=2$，它给出一个由 $\mathbb{Z}/2$ 扩张 $\mathbb{Z}/2$ 的扩张。取 $\rho:\ \mathbb{S}\to M_2$，$\beta:\ M_2\to\Sigma\mathbb{S}$，以及 Hopf 映射 $\eta:\ \Sigma\mathbb{S}\to\mathbb{S}$，恒等式满足 $2\mathrm{id}_{M_2}=\rho\eta\beta\neq 0$ [33, 命题 4.1]。因此，恒等式的加法阶为四，并生成该端同态环。

□

定义 3.13（与 p 互素的本原因子）。对于 $p\nmid m$，令 e_m 为 $\mathbb{Z}_{(p)}[C_m]$ 中由下式给出的幂等元：

$$e_m=\prod_{\ell\mid m}\left(1-\frac{1}{\ell}\sum_{h\in C_\ell}h\right),$$

其中 C_ℓ 是阶为 ℓ 的子群，并令 $e_1=1$。令 A_m 为交换环谱 $\mathbb{S}_{(p)}[C_m]$ 中相应的幂等因子。

乘积中的每个因子都是幂等元，且这些因子彼此交换。代数 A_m 是 $\mathbb{S}_{(p)}$ 上的有限自由代数，并且 $\pi_0A_m=\mathbb{Z}_{(p)}[t]/(\Phi_m)$。事实上，添加 m 次单位根后，e_m 会选出在每个子群 C_ℓ 上都非平凡的那些特征，也就是本原特征。由于 m 是单位，特征分解在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的有限忠实平坦扩张上成立。它下降到所示因子。模 π_0A_m 是有限自由 $\mathbb{Z}_{(p)}$-模的直缩，因此是秩为 $\varphi(m)$ 的自由模。将一组基提升为映射 $\mathbb{S}^{\vee\varphi(m)}{}_{(p)}\to A_m$。由于 A_m 是局部化球谱有限楔和的幂等直缩，此映射诱导出整系数同调同构。根据稳定 Hurewicz 定理，其连通余纤维是可缩的，从而证明了它在 $\mathbb{S}_{(p)}$ 上的自由性。

定理 3.14（带指标的自同态系数）。令 $p\nmid m$、$a\geq 1$ 和 $E_p=\operatorname{End}(\mathbb{S}/p)$。存在一个结合环谱的等价

$$\operatorname{End}_{C_m}(T_{m,mp^a})\simeq A_m\otimes_{\mathbb{S}_{(p)}}E_p. \tag{4}$$

在此等 价下，标记旋转就是特征环元素。特别 $r,$

$$E_m:=\pi_0\operatorname{End}_{C_m}(T_{m,mp})\simeq R_p[t]/(\Phi_m(t)),\qquad R_p=\begin{cases}\mathbb{F}_p, & p\neq 2,\\ \mathbb{Z}/4, & p=2.\end{cases} \tag{5}$$

证明。本原投影算子在 U_m 经 p-局部化后作用为恒等式。类 1 给出一个等变映射 $A_m\to U_{m,(p)}$；其整系数同调映射是一个同构，因此它是一个等价。命题 3.11 的证明将 $\Phi_{mp^a}(t)\in\pi_0A_m$ 识别为 p 乘以一个单位。因此

$$T_{m,mp^a}\simeq A_m\otimes_{\mathbb{S}_{(p)}}M_p$$

作为支集位于因子 A_m 上的 $\mathbb{S}_{(p)}[C_m]$-模。这类模具有与 A_m-模相同的映射谱。摩尔谱是可对偶化的，因此标量扩张给出

$$\operatorname{End}_{A_m}(A_m\otimes M_p)\simeq A_m\otimes\operatorname{End}(M_p),$$

与复合相容。接触是 p-局部的，由命题 3.11可知，因此这也计算了它原本的 C_m-等变映射谱。由于 A_m 是局部化球谱上的有限自由模，取π_0 并应用引理 3.12 可得（5）。

□

命题 3.15 （线性映射与系数变换）。 固定 $p \nmid m$ 并设 $T_m = T_{m,\ mp}$。其对象为有限和的收缩、态射为次数为零的 C_m-等变映射的范畴，通过 $[T_m, -]_{C_m}$与有限投射 E_m-模的范畴等价。若$m \mid M$且 $p \nmid M$，则子群包含 $C_m \to C_M$，$1 \mapsto M/m$，诱导出

$$E_m \longrightarrow E_M, \qquad t \longmapsto t^{M/m}. \tag{6}$$

限制对应于标量限制。诱导随后施加 M的本原投影算子，对应于标量扩张。

证明。 在 T_m的有限和上，态射是环 E_m上的矩阵 M次单位根提升到 M/m 是一个本原m次单位根，这就证明了（6）。本原群代数因子之间的诱导映射是秩为 $\varphi(M)/\varphi(m)$ 的有限自由模：在一个分裂素数非 p 次根的忠实平坦扩张之后，每个本原 m-特征都有那么多个本原 M-特征提升。有限投射性可由该分裂下降，并且基环 $\pi_0 A_m$ 是半局部的，因此所得的常秩投射模是自由的。于是，$A_M \otimes M_p$的限制属于由 $A_m \otimes M_p$生成的加性幂等完备化。群代数限制与诱导的伴随，随后再施加本原投影算子，在矩阵及其幂等元直和项上给出两个标量函子。

□

对于 $m = p^d - 1$、 $M = p^e - 1$和 $d \mid e$，式（6）中的相容剩余因子给出 $\mathbb{F}_{p^d} \to \mathbb{F}_{p^e}$。相同的函子给出有限维向量空间的扩张与限制。在 $p = 2$处，先将相应矩阵在长度为二的 Witt 因子上模 2约化。在所得的域上，映射 $t \mapsto t^p$ 是 Frobenius。将元素的乘法视为作用于限制后的向量空间，其迹和行列式分别是该元素的域迹和范数。

命题 3.16 (完备本原系数**)**。 设 $p \nmid m$，并设$U_{m,\ p}$ 为U_m的 p-完备化。在带有 C_m-作用的 p-完备谱中，

$$\pi_0 \operatorname{End}_{C_m}(U_{m,p}) = \mathbb{Z}_p[t]/(\Phi_m(t)) \simeq \prod_{f \mid \overline{\Phi}_m} W\big(\mathbb{F}_p[t]/(f)\big),$$

其中 f 遍历首一不可约因子，而 $W(k)$ 是剩余域为 k 、一致化元为 p的非分歧完备离散赋值环。

证明。 上面的本原因子论证将$U_{m,\ p}$ 识别为 $\mathbb{S}^\wedge_p[C_m]$的本原因子。其端同态环就是该因子，其零次同伦环则是所示的多项式商环。 Φ_m 的约化是可分的，因为 $p \nmid m$。对其互素因子进行 Hensel提升，将这个有限 étale $\mathbb{Z}_p$-代数分解为所示的非分歧因子。

□

4 标记图返回与算术格

定义 4.1 （标记整返回）。 标记整返回是一个三元组 (Y, f, e)，其中 Y是有限连通带基点图， $f : Y \to Y$ 是带基点胞腔映射，而 $e \in H_1(Y, \mathbb{Z})$。记作$M = H_1(Y, \mathbb{Z})$， $d =$秩为 $M > 0$，且 $U = f_*$。若 $e, Ue, \dots, U^{d-1}e$是 M 的一个 $\mathbb{Z}$-基，且 U 的特征多项式在 $\mathbb{Q}$上不可约，则该返回是循环且不可约的。

对于这样的返回，映射 $P(U) \mapsto P(U)e$将 $A_0 = \mathbb{Z}[U]$与 M等同起来。有理代数$K = \mathbb{Q}[U]$ 是一个数域，而 $M \otimes \mathbb{Q}$ 是它的正则模。

命题 4.2 （由有界覆盖族得到的极大阶）。 令

$$G_{ij} = \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(U^{i+j}) \quad (0 \le i, j < d), \qquad D = |\det G|.$$

对于 U-稳定格 $DM \subseteq L \subseteq M$，构造乘子环

$$A_L = \{a \in K : aL \subseteq L\}.$$

这个有限族有一个最大的成员，等于 O_K。每个格 L 都是某个 Y 的有限阿贝尔覆盖中闭路径的像，而且 f 提升到该带基点覆盖。

证明。 $K/\mathbb{Q}$ 的可分性蕴含 $D \neq 0$。 A_L 中的元素作用于自由整格 L，因此其特征多项式是首一的，且系数为整数。它在 K 上的作用是乘以该元素，因此 $A_L \subseteq \mathcal{O}_K$。

Let

$$A_0^\vee = \{a \in K : \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(aA_0) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

迹的整性给出 $\mathcal{O}_K \subseteq A_0^\vee$。在基 1，U，……，U^{d-1} 下， G^{-1} 的伴随矩阵公式给出 $DA_0^\vee \subseteq A_0$。因此

$$DA_0 \subseteq D\mathcal{O}_K \subseteq A_0.$$

格 $D\mathcal{O}_K$ 在 U 作用下稳定，其乘子环为 $\mathcal{O}_K$。因此，它实现了该族中最大的成员。由于 M/DM 是有限的，中间格只有有限多个。

令 H_L 为 L 在阿贝尔化 $\pi_1(Y) \to M$ 下的原像。相应的带基点覆盖具有有限覆盖变换群 M/L，其基本群在 M 中的像为 L。包含映射$UL \subseteq L$ 给出 $f_*(H_L) \subseteq H_L$，这就是带基点提升判据。□

命题 4.3（同余完备化）。令 $O = O_K$。对于正整数 k，格 $kDO \subseteq DO$及标记的乘法作用给出环 O/kO 及其过渡映射。按整除性编索引的逆极限为

$$\widehat{O} = \varprojlim_k O/kO \cong \prod_{v \nmid \infty} \mathcal{O}_v.$$

此外

$$\mathbb{A}_{K,f} = \bigcup_{n \geq 1} n^{-1}\widehat{O}, \qquad K_\infty = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \qquad \mathbb{A}_K = \mathbb{A}_{K,f} \times K_\infty.$$

同余商上的对角映射给出对角嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{A}_K$。

证明。乘以 D 将 O/kO 识别为 DO/kDO 上的一个 O-模，并将其乘法作用传递到此商上。对于 $k \mid \ell$，包含映射 $\ell DO \subseteq kDO$ 给出模 k约化。中国剩余定理将逆极限分解为O的非零素理想处的完备化。

有限阿代尔环中的元素除有限多个赋值处外均为整性的。在这些赋值处下方的有理素数处，可以选取一个具有足够大赋值的正整数，使每个分量都成为整性的。这就证明了所示的并集；反向包含由受限乘积的定义可得。有限实代数 $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 是实完备化与复完备化的乘积。所有对角映射的相容性均由它们通过对 K中同一元素求值而定义这一点得出。

□

定义 4.4（标记回返的多项式态射）。 设 (M, U, e) 和 (M', U', e') 是循环不可约回返的同调数据。多项式态射是一个二元组 (J, r)，其中 $J\colon M \to M'$ 是单射整同态， $r \in \mathbb{Z}[x]$，

$$J(e) = e', \qquad JU = r(U')J.$$

具有相同 J 和相同取值 $r(U')$ 的两个二元组定义同一个态射。复合为 $(J_2, r_2) \circ (J_1, r_1) = (J_2 J_1, r_1 \circ r_2)$。

命题 4.5 (诱导的域映射)。 多项式态射诱导域嵌入 g

$$\phi : K \hookrightarrow K', \qquad P(U) \longmapsto P(r(U')).$$

它将 O_K 映入 $O_{K'}$，并在同余完备化和阿代尔环上诱导出相容的映射。

证明。令 p_U 为 U 的特征多项式。交织恒等式给出

$$p_U(r(U'))e' = Jp_U(U)e = 0.$$

复数域中元素的乘法由其在 $1 = e'$ 上的值决定，因此 $p_U(r(U')) = 0$ 属于 K'。因此，求值定义了一个含幺映射 $\mathbb{Q}[x]/(p_U) \to K'$；由于其源是一个域，该映射是单射。同样的计算得出 $J(P(U)e) = \phi(P(U))e'$。域嵌入会保持元素的整性。模正整数约化并取逆极限，得到有限完备化映射。在阿基米德位处扩张并对正整数取逆，得到阿代尔映射。多项式代入证明了它与复合相容。

□

定义 4.6（格测试与迹对偶格）。对于满格 $\Lambda \subset K$，定义

$$\widehat{\Lambda} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{A}_{K,f}, \qquad \Lambda^{\vee} = \{a \in K : \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(a\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

有限格测试是示性函数 $1_{\widehat{\Lambda}} \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{K,f})$。其全位测试为 $1_{\widehat{\Lambda}} \otimes \Phi_{\infty}$，其中 $\Phi_{\infty} \in \mathcal{S}(K_{\infty})$。

命题 4.7（格测试的傅里叶变换）。对于第2节的迹特征和自对偶测度，

$$\mathcal{F}_f(1_{\widehat{\Lambda}}) = \mathrm{vol}(\widehat{\Lambda})\, 1_{\widehat{\Lambda^{\vee}}}.$$

若 $\Lambda' \subseteq \Lambda$ 的指标有限，为 a，则 $\mathrm{体积}(\widehat{\Lambda'}) = a^{-1}\,\mathrm{体积}(\widehat{\Lambda})$。

证明。取 Λ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，以及关于非退化迹配对的对偶基。对于每个有理素数 p，在迹所诱导的特征下，$\Lambda \otimes \mathbb{Z}_p$ 的湮没子是 $\Lambda^{\vee} \otimes \mathbb{Z}_p$，因为 $\mathbb{Q}_p$ 的标准特征的湮没子是 $\mathbb{Z}_p$。对 p 取乘积，可将 $\widehat{\Lambda}$ 的湮没子识别为 $\widehat{\Lambda^{\vee}}$。特征在紧群上的积分：若为平凡特征，则等于该群的体积；否则为零。这就证明了傅里叶公式。最后，Λ/Λ' 有 a 个元素，且各陪集的哈尔测度相等。

□

5 空间及其绕行覆盖

记 $C = C_K$。对于每个赋值 v，同态 $j_v\colon K_v^{\times} \to C$ 将一个局部元素映射到一个伊代尔的类，其中其他分支均为 1。构造相关商空间时，我们使用右作用。

定义 5.1（正规图表与相关空间）。v 处的正规图表是商空间 ce

$$N_v = (C \times K_v)/K_v^{\times}, \qquad (c,z)\cdot h = (cj_v(h), h^{-1}z).$$

其穿孔部分通过以下方式与 C 相识别：

$$\nu_v : N_v^{\times} \longrightarrow C, \qquad [c,z] \longmapsto cj_v(z).$$

令 Y_K 为 通过沿这些已识别的开子集粘合所有 N_v 而得到的拓扑空间。
该空间的闭轨道图表是

$$Z_v = \{[c,0] : c \in C\} \simeq C/j_v(K_v^{\times}).$$

因此，这些图表覆盖了 Y_K，并且对于 $v \neq w$，$N_v \cap N_w = C$。

命题 5.2. 每个图表 N_v 都是局部紧且豪斯多夫的。子集 C 在 Y_K 中是开集，且第一坐标上的乘法定义了 C 在 Y_K 上的连续作用。每个 Z_v 都是一个紧 C-轨道。存在一个连续的 C-等变映射

$$\nu : Y_K \longrightarrow \mathbb{A}_K/K^{\times}.$$

证明. 映射 j_v 是单射：如果一个单赋值伊代尔是对角元素，那么任何其他分量都会迫使该对角元素为 1。它是适当的。事实上，对于紧子集 $D \subset C$， $j_v^{-1}(D)$中元素的范数落在 $\mathbb{R}_{>0}$中的某个固定紧区间内。 $K_v^\times$ 中的相应局部范数环域是紧的，而 $j_v^{-1}(D)$是其中的闭集。

$K_v^\times$在 $C \times K_v$ 上的作用是自由且适当的。对于适当性，紧子集（$C \times K_v$）^{2} 的两个 C坐标在紧子集 C中限定了 j_v（h）$= c^{-1}c'$；而 j_v 的适当性继而将 h 限定在紧子集 $K_v^\times$中。因此，作用映射将紧集的原像映为紧集。其轨道关系是闭的，且其商映射是开映射，所以商空间是豪斯多夫的。楼上的相对紧开邻域的像在楼下有一个紧邻域，由此可证局部紧性。

去心识别具有连续逆 $c \mapsto [c, 1]$。零坐标子集是闭且饱和的。 C 的左乘与右作用可交换，并且在所有去心识别下相一致；因此它下降到粘合空间上。

令 $C^1 = \ker(|\cdot| : C \to \mathbb{R}_{>0})$。这个群是紧的 [30, §5.8, 第 33]页。在有限处，每个模 $j_v(K_v^\times)$ 的类都有一个代表元，其范数属于 $[1, q_v]$；这是C的一个紧子集，因为范数映射有连续截面且核是紧的。在无限位置，每个类都有一个位于 C^1中的代表元。因此 Z_v 是紧的。

对于 $c \in C$，选择一个表示它的伊代尔 a，并令

$$b_w = a_w \quad (w \neq v), \qquad b_v = a_v z.$$

b 模 $K^\times$ 的类与 a的选择无关，而定义 N_v 的右作用使其保持不变。因此， $\mathbb{A}_K^\times \times K_v$ 上的连续映射下降到 N_v。在穿孔部分，它是从伊代尔类到阿代尔类的通常映射。这些映射在交叠处一致，并定义 ν。

□

At a finite place put $U_v = \mathcal{O}_v^\times$, $\ell_v = \log q_v$, and $H_{v,L} = \mathrm{ord}_v^{-1}(L\mathbb{Z})$ for $L \geq 1$.

定义 5.3（赋值覆盖）。 在图表 N_v 上考虑

$$P_v = (C \times K_v)/U_v.$$

$K_v^\times/U_v \simeq \mathbb{Z}$ 的右作用为

$$[c, z] \cdot n = [cj_v(\varpi_v^n), \varpi_v^{-n} z].$$

它与一致化元的选择无关。在其穿孔部分使用平凡化

$$[c, z] \longmapsto (cj_v(z), -\mathrm{ord}_v(z)) \in C \times \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Y_K 上的赋值覆盖 Q_v 是通过对每个 $w \neq v$，利用公共开子集上的（7）将 P_v 与 $N_w \times \mathbb{Z}$粘合得到的。其周期-L 商记为 $Q_{v,\,L} = Q_v/L\mathbb{Z}$。

定理 5.4. 映射 $Q_v \to Y_K$ 是一个以离散群 $\mathbb{Z}$为结构群的主覆盖。对于每个 $L \geq 1$,$Q_{v,\,L} \to Y_K$ 都是一个主 C_L-覆盖，并且

$$Q_{v,L}|_{N_v} \simeq (C \times K_v)/H_{v,L}.$$

若 $L \mid M$，商映射 $Q_{v,M} \to Q_{v,L}$ 按塔复合。它们的悬挂谱转移映射满足相同的复合律。

证明。 函数 $a([c, z]) = \log |c|$ 在 P_v上定义良好，因为对于 $u \in U_v$， $|u|_v = 1$，且 $a(x \cdot n) = a(x) - n\ell_v$。长度小于 ℓ_v 的开区间的原像与其非恒等平移彼此不交。轨道映射是开映射，因此它在这样的原像上的限制是到 N_v的一个开子集上的同胚。这些平移给出一个覆盖平凡化。其结构群是 $K_v^\times/U_v$，通过赋值与 $\mathbb{Z}$ 相对应。

公式（7）在 U_v 下保持不变，并且对于其第二坐标的平移是等变的。一个逆元是

$$(a, n) \longmapsto [aj_v(\varpi_v^n), \varpi_v^{-n}].$$

因此，图表覆盖粘合为主覆盖。除以 $L\mathbb{Z}$即可得到所述的局部商。商映射根据定义复合。对覆盖的每个有限商应用有限置换谱的规范对偶性。此构造沿覆盖平凡化下降，其中包括它们的过渡置换和所有复合同伦。对偶性反转复合，因此所得转移满足塔恒等式。同一有限集构造还给出了与拉回的相容性。

□

定义 5.5（沿赋值覆盖的实现）。对于带有 $\mathbb{Z}$作用的空间，或带有 $\mathbb{Z}$作用的谱，其沿 Q_v 的实现是通过从 Q_v的平凡化覆盖上下降其常值层而得到的伴随局部常值层。伴随丛约定为

$$(p+n,x)\sim(p,n\cdot x).$$

对于拓扑 $\mathbb{Z}$图 G，我们将此构造应用于同伦型 $\mathrm{Sing}(G)$，然后应用纤维逐点悬挂谱函子。

伴随下降和纤维逐点悬挂保留同伦余极限。因此，$\mathbb{Z}$图的同伦推出给出谱层的同伦推出，而图缝合给出其余纤维三角。对于置换谱 $\mathbb{S}[C_L]$，其实现是有限覆盖$Q_{v,\ L}$的纤维逐点悬挂谱。

命题 5.6（范数流图表）。商$C^1|Y_K$ 有一般开子集 $\mathbb{R}_{>0}$。在有限处，其图表为

$$(\mathbb{R}_{>0}\times(\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}))/\mathbb{Z},\qquad (r,n)\cdot k=(rq_v^{-k},n-k).$$

穿孔坐标为 rq_v^{-n}，其边界为 $\mathbb{R}_{>0}/q_v^{\mathbb{Z}}$。在 Z_v 中，$C^1|Q_{v,\ L}$ 上方的边界为 $\mathbb{R}_{>0}/q_v^{L\mathbb{Z}}$，对数长度为 $L\ell_v$。在实赋值或复赋值处，商图表为 $[0,\infty)$，坐标为 $r|z|_v$。

证明。范数诱导出 $C/C^1\simeq\mathbb{R}_{>0}$。在第一个坐标中取此商后，再在第二个坐标中对局部范数的核取商。在有限处，结果为 $\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$，配备赋值拓扑，且 $\mathrm{ord}_v(0)=+\infty$。剩余的作用就是所示的整数作用。在边界上，仅保留 r 坐标，并对 $q_v^{\mathbb{Z}}$ 的乘法取商；或者在周期 L 处对 $q_v^{L\mathbb{Z}}$ 取商。在无限位置，局部范数给出商 $[0,\infty)$；剩余的 $\mathbb{R}_{>0}$ 作用将 $(r,\ s)$ 与 rs 识别。□

对于主 $\mathbb{Z}$ 挠子 P，将其沿着整数 f 的乘法推出，记作 fP。此类挠子的和是指沿结构群的加法取它们的缩并积。

定理 5.7 (范数映射)。有限扩张 L/K 诱导出一个连续映射 $N_{L/K}:\ Y_L\to Y_K$，且关于 ***idele*** 类范数是等变的。在与 $w\mid v$ 相关的图表上，它是

$$[c,z]\longmapsto[N_{L/K}c,N_{L_w/K_v}z].$$

这些映射在域的塔中复合。对于 K的每个有限处 v ，存在主 $\mathbb{Z}$-覆盖的同构

$$N_{L/K}^{*}Q_{K,v}\simeq\sum_{w\mid v}f(w/v)Q_{L,w}. \tag{8}$$

The 对于每个 $r\geq1$，这些同构都与覆盖变换群模 r的约化相交换。

证明。恒等式 $N_{L/K}(j_w(h))=j_v(N_{L_w/K_v}h)$证明了图映射保持平衡关系。在每个去心图上，它都是 idele 类范数；因此各图映射可以粘合。局部范数和 idele 范数在塔中复合。

固定 $w\mid v$，并记 $f=f(w/v)$。映射

$$(C_L\times L_w)/\mathcal{O}_w^{\times}\longrightarrow(C_K\times K_v)/\mathcal{O}_v^{\times},\qquad[c,z]\longmapsto[Nc,Nz]$$

定义良好，且关于 $\mathbb{Z}\xrightarrow{f}\mathbb{Z}$ 是等变的，因为 $\mathrm{ord}_v(Nz)=f\,\mathrm{ord}_w(z)$。因此，它将 $Q_{L,\ w}|_{N_w}$ 沿着乘以 f 推出的挠子，与该图表上的拉回覆盖等同。在右侧

边（8）中，所有其他挠子在 N_w上都是平凡的。在赋值不同于 v的图表上，两边都平凡。在公共开子集上，过渡标记为 $-\operatorname{ord}_v(Nz) = -f\operatorname{ord}_w(z)$，由（7）得出。因此，图表同构在所有交叠上都一致。模 r 约化是挠子的推出，并且与这些构造相容。

□

推论 5.8. 在周期 r时， w-赋值覆盖的生成元通过加上 $f(w/v)$来作用于目标纤维 C_r 。它有 最大公约数$(f(w/v)\ r)$个轨道，每个轨道的长度为 $r/$最大公约数$(f(w/v)\ r)$。对于径向球函数，

$$N^*1_{\{\operatorname{ord}_v\geq n\}} = 1_{\{\operatorname{ord}_w\geq\lceil n/f(w/v)\rceil\}}, \qquad N^*t_v^{f(w/v)} = t_wN^*,$$

其中 t_v 将球指标提高1。

证明。 由 $f(w/v)$ 生成的 C_r中的子群的阶为 $r/$最大公约数$(f(w/v)\ r)$。其陪集就是轨道，因此其数量为最大公约数$(f(w/v)\ r)$。球恒等式由 $\operatorname{ord}_v(Nz) = f(w/v)\operatorname{ord}_w(z)$ 得出；将 n 替换为 $n+f(w/v)$ 即得移位恒等式。

□

6 球正规系数

谱及谱模的所有张量积均为导出张量积。记为 $R = \mathbb{S}[\mathbb{Z}] = \mathbb{S}[t,t^{-1}]$，并令 $\mathbb{S}_{\mathrm{aug}}$ 为 R-模，其中 t 的作用为恒等映射。

定义 6.1 （赋值直线上的球函数）。 赋予 $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 序拓扑。对于 $\overline{\mathbb{Z}}$ 的有限开闭划分 $\mathcal{P}$ ，构造交换球代数 $\mathbb{S}^{\mathcal{P}}$。细化通过对角映射作用于其因子。定义

$$\overline{A} = \operatorname*{colim}_{\mathcal{P}}\mathbb{S}^{\mathcal{P}}, \qquad D = \operatorname{fib}(\mathrm{ev}_{-\infty}:\overline{A}\to\mathbb{S}), \qquad A_c = \operatorname{fib}(\overline{A}\to\mathbb{S}\times\mathbb{S}).$$

最后一个映射在两个端点处取值。 $\overline{\mathbb{Z}}$ 的平移诱导一个自同构 σ，且在端点处固定。对于闭开尾部 $[n,+\infty]$ 的特征截面 b_n ，约定为 $\sigma(b_n) = b_{n+1}$。 令 $\delta_n = b_n - b_{n+1}$。

赋值将 K_v/U_v 识别为 $\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$。在这种解释下， b_n 表示紧开球 $\varpi_v^n\mathcal{O}_v$，而 δ_n 表示其去心壳。缺失的端点 $-\infty$ 是这个局部紧赋值空间的无穷远点。

定理 6.2 （去心序列）。 这些 R-线性映射

$$R\longrightarrow A_c,\quad t^n\longmapsto\delta_n, \qquad R\longrightarrow D,\quad t^n\longmapsto b_n$$

是 R-模之间的等价，其中 t 通过 σ 作用。在这些等价下，从去心赋值直线延拓紧开截面并在零点处取值，构成余纤维序列

$$R\xrightarrow{1-t}R\longrightarrow\mathbb{S}_{\mathrm{aug}}. \tag{9}$$

证明。 由有限个单点整数和两个尾部组成的划分构成一个共尾的闭开划分族。因此， π_iA 由定义在 $\overline{\mathbb{Z}}$ 上的函数组成，其值取自 $\pi_i\mathbb{S}$，并且在两端足够远处分别为常值。利用两个尾部，端点求值分裂为一个谱映射。因此， π_iA_c 由 $\overline{\mathbb{Z}}$上的有限支集函数组成，而 π_iD 由在左侧足够远处为零、在右侧足够远处为常值的函数组成。前者具有壳基 δ_n。取一阶差分便得到后者的尾基 b_n： 若函数值为 a_n，则 b_n 的系数为 $a_n - a_{n-1}$。只有有限多个系数非零。

这些基描述对每个 i都成立。所示映射由自由 R-模性质以及截面 δ_0、b_0构造，因此它们是相容的 R-模映射，并且是等价。包含映射将 δ_n 映至 $b_n - b_{n+1}$，而正端求值将每个 b_n 映至 1。这将端点纤维序列识别为（9）。

□

从 A 继承的 D 上的乘法满足 $b_nb_m = b_{\overline{\max(n,m)}}$。 定理中与 R 的等价性使用平移模结构。

6.1 交叉积及其边界

定义 6.3（正规代数）。 正规代数是 E_1-环谱

$$B = \overline{A} \rtimes_\sigma \mathbb{Z} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{A}U^n, \qquad (fU^n)(gU^m) = f\,\sigma^n(g)U^{n+m}.$$

两个端点求值定义了一个同态

$$q : B \longrightarrow Q = R_- \times R_+, \qquad R_\pm = \mathbb{S}[u_\pm, u_\pm^{-1}], \qquad q(U) = (u_-, u_+).$$

记 $\mathscr{K} = \mathrm{fib}(q)$ 为其双边理想。

命题 6.4（矩阵理想）。存在矩阵单位

$$E_{ij} = \delta_i U^{i-j} \quad (i,j\in\mathbb{Z}), \qquad E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

它们将 $\mathscr{K}$ 识别为以 $\mathbb{Z}$ 为指标的有限支撑矩阵的球面代数。若 $e = E_{00}$，则

$$eBe \simeq \mathbb{S}, \qquad Be \otimes_{\mathbb{S}} eB \xrightarrow{\sim} \mathscr{K}$$

通过乘法，作为 B-双模。

证明。 q 的底层纤维是 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_c U^n$，因为谱的余积保持纤维序列。因此， A_c 的壳基将其底层谱与 $\bigoplus_{i,\,j} \mathbb{S}E_{ij}$相识别。恒等式 $\sigma^r(\delta_k) = \delta_{k+r}$ 给出了所显示的乘法。在每个有限指标集上，它都是通常的矩阵代数；这些有限矩阵代数通过其角嵌入给出了所述的非幺代数。

谱 Be 和 eB 分别具有基 E_{i0} 和 E_{0j}，而 eBe 只有一个基元素e。乘法映射 $E_{i0}\otimes E_{0j}$ 到 E_{ij}，从而证明了双模等价。 □

定义 6.5。 E_1-环的同态 $B \to Q$ 称为*Tor*-单位，如果乘法 $Q \otimes_B Q \to Q$ 是一个等价。

命题 6.6（边界限制）。 映射 $B \to Q$ 和 $B \to R_+$ 是 *Tor*-单位的。它们在左模范畴上的限制函子是全忠实的。 $Q \otimes_B -$ 的核在 $V \mapsto Be \otimes_{\mathbb{S}} V$下与谱范畴 等价，逆元为 $M \mapsto eM$。

证明。 幂等元 e 在 Q 上平凡作用。命题6.4 给出

$$\mathscr{K} \otimes_B Q \simeq Be \otimes_{\mathbb{S}} eQ \simeq 0.$$

将 $\mathscr{K} \to B \to Q$ 与 Q 张量化即可证明 $Q \otimes_B Q \simeq Q$。投影 $Q \to R_+$ 是一个幂等因子投影，因此同一恒等式给出 $R_+ \otimes_B R_+ \simeq R_+$。对于任一映射，标量扩张与标量限制的余单位都是等价；因此标量限制是全忠实的。

若 $Q \otimes_B M = 0$，理想序列确定了 $M \simeq \mathscr{K} \otimes_B M \simeq Be \otimes_{\mathbb{S}} eM$。反之 $Q \otimes_B Be = 0$。最后， e（$Be \otimes_{\mathbb{S}} V$） $\simeq V$，因为 $eBe \simeq \mathbb{S}$。 □

6.2 两种系数提升与正规函子

通过 $u_+ = t^{-1}$ 将 R_+ 与 R 识别，并将正商记为 q_+： $B \to R$。同态

$$r : R \longrightarrow B, \qquad r(t) = U^{-1}$$

满足 $q_+ r = \mathrm{id}_R$。

定义 6.7（正规模与系数提升）。 赋予 D 右 B-模结构 re

$$d \cdot (fU^n) = \sigma^{-n}(df).$$

对于左 R-模 E，定义左 B-模

$$J(E) = B \otimes_{R,r} E, \qquad I(E) = q_{+,*}E.$$

商 q_+ 诱导出 $J(E) \to I(E)$。正规函子为

$$\mathcal{N} : \mathrm{Mod}_B \longrightarrow \mathrm{Sp}, \qquad \mathcal{N}(M) = D \otimes_B M.$$

定理 6.8 (两个提升的正规实现)。 沿 r 限制得到的右 R-模 D，以 b_0为基。存在如下谱的自然等价

$$\mathcal{N}(J(E)) \simeq E, \qquad \mathcal{N}(I(E)) \simeq \mathbb{S}_{\mathrm{aug}} \otimes_R E.$$

由 $J(E) \to I(E)$ 诱导的映射是将 (9)与 E 张量化后得到的三角中的增广映射。

证明。对于 模运算律，乘以 fU^n和 gU^m的两种不同括号方式都会得到

$$\sigma^{-n-m}(df)\,\sigma^{-m}(g).$$

限制给出 $d\cdot r(t) = \sigma(d)$，因此定理 6.2 证明了其自由性。由张量结合律可得$D \otimes_B J(E) \simeq D \otimes_R E \simeq E$。

对于另一个提升，乘以 e 将 De与 $\mathbb{S}$等同。映射

$$D \otimes_B \mathscr{K} \simeq De \otimes_{\mathbb{S}} eB \longrightarrow D$$

将行基元素发送 E_{0j}到 δ_j。这是包含映射 $A_c \to D$。因此 $D\otimes_B Q$在 $\mathbb{S}$正边界处有支集，并且 u_+的作用是平凡的。取正因子后得到 $D\otimes_B R \simeq \mathbb{S}_{\mathrm{aug}}$。在 R 上与 E 进行张量化即可证明第二个等价关系。在这些描述下，该比较是正端求值，也就是（9）的最终映射。

□

6.3 层的正规系数

定义 6.9 （层约定与下降的正规数据）。对于开子集 $V \subset Y_K$，令 Shv(V; Sp) 表示其普通开集位上的谱层稳定范畴。常值层函子记为 Δ_V。本节中的局部常值层，是指在某个开覆盖上与常值层等同的层。环层上的模在此范畴中构造。

主覆盖 Q_v 及其作用

$$n \longmapsto \mathrm{Ad}(U^n) \quad \text{on } B, \qquad n \longmapsto \sigma^n \quad \text{on } D$$

通过伴随下降定义一个 E_1-代数层 $\mathcal{B}_v$ 以及一个层 $\mathcal{D}_v$。令 $R_{Y_K} = \Delta_{Y_K} R$。下降映射写作

$$R_{Y_K} \xrightarrow{r_v} \mathcal{B}_v \xrightarrow{q_v} R_{Y_K}.$$

层 $\mathcal{L}_v = \mathbb{S}_{Y_K}[Q_v]$ 是挠子上的逐纤维自由球面模，其右 R_{Y_K}-作用由甲板变换诱导。对于一个左 R_{Y_K}-模层 F，置

$$J_v(F) = \mathcal{B}_v \otimes_{R_{Y_K}} F, \qquad I_v(F) = q_{v,*}F, \qquad \mathcal{N}_v(M) = \mathcal{D}_v \otimes_{\mathcal{B}_v} M.$$

这里，$\mathcal{N}_v$取值于 Shv(Y_K; Sp)。对于常值源模 E，记作 Loc$_v$(E) $= \mathcal{L}^v \otimes_{R_{Y_K}} \Delta_{Y_K} E$。

定理 6.10 （下降穿孔序列）。层 D_v 是一个右 B_v-模。沿 r_v 的限制将其识别为 L_v。函子 I_v 是全忠实的，并且 $q_v r_v = \mathrm{id}$。对于每个 R_{Y_K}-模层 F，比较 $J_v(F) \to I_v(F)$ 在应用 N_v后给出余纤维序列

$$\mathcal{L}_v \otimes_{R_{Y_K}} F \xrightarrow{1-t} \mathcal{L}_v \otimes_{R_{Y_K}} F \longrightarrow \mathbb{S}_{Y_K,\mathrm{aug}} \otimes_{R_{Y_K}} F.$$

特别地，

$$\mathrm{Loc}_v(E) \xrightarrow{1-t} \mathrm{Loc}_v(E) \longrightarrow \Delta_{Y_K}(\mathbb{S}_{\mathrm{aug}} \otimes_R E). \tag{10}$$

对于 $E = \mathbb{S}[C_L]$，第一项是 $Q_{v,\ L}$ 的纤维逐点悬挂谱。

证明。 恒等式

$$\sigma^n(d \cdot b) = \sigma^n(d) \cdot \mathrm{Ad}(U^n)(b)$$

证明了模结构与过渡映射的相容性。通过 U^n 的共轭固定 $r(R)$，且端点映射在共轭下保持不变。因此，两个代数映射都下降。在球基中， D 的过渡映射是乘以 t^n，这正是 Q_v 上自由球面模的过渡映射。这证明了 $\mathcal{D}_v|_{R_{Y_K}} \simeq \mathcal{L}_v$。

Tor-幺半性是双模层的一个等价性，并且可以在使 Q_v 平凡化的开覆盖上进行检验。命题 6.6 因此证明了 I_v的完全忠实性。定理6.8 的局部比较可以下降，因为正端求值和壳层包含与过渡映射相交换。其增广商具有平凡的过渡映射，这是因为 t^n 在 $\mathbb{S}_{\mathrm{aug}}$上平凡作用。将下降后的序列与 F 进行张量化即可证明该断言。最后一个断言由构造 Q_v 的关联置换谱得到，其纤维为 C_L。

□

6.4 多个赋值处

对于有限处的有限集 S，使用彼此独立的甲板变量

$$R_S = \mathbb{S}[\mathbb{Z}^S] = \mathbb{S}[t_v^{\pm 1} : v \in S], \qquad \mathcal{B}_{v,S} = \mathcal{B}_v \otimes_{\mathbb{S}_{Y_K}} \Delta_{Y_K}\mathbb{S}[\mathbb{Z}^{S\setminus\{v\}}].$$

映射 r_v， q_v 在其他变量上取恒等映射来扩展；将所得映射记为 $r_{v,\ S}$， $q_{v,\ S}$.

定义 6.11 （有限赋值处集合上的系数）。 对 $V \subset Y_K$ 开，记为 $R_{S,\ V} = \Delta_V R_S$ 并令

$$\mathcal{R}_S(V) = \mathrm{Mod}_{R_{S,V}}(\mathrm{Shv}(V;\mathrm{Sp})), \qquad \mathcal{M}_{v,S}(V) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{B}_{v,S|V}}(\mathrm{Shv}(V;\mathrm{Sp})).$$

定义稳定范畴

$$\mathcal{E}_S(V) = \mathcal{R}_S(V) \times_{\prod_{v\in S}\mathcal{R}_S(V)} \prod_{v\in S} \mathcal{M}_{v,S}(V), \tag{11}$$

其中，乘积是一个同伦纤维积。它的两个箭头分别是对角线和边界函子 $M_v \mapsto R_{S,\ V} \otimes_{\mathcal{B}_{v,\ S|V}} M_v$。一个对象是一个元组

$$(F, (M_v)_{v\in S}, (\eta_v)_{v\in S}), \qquad \eta_v : R_{S,V} \otimes_{\mathcal{B}_{v,S|V}} M_v \xrightarrow{\sim} F.$$

令 p_S为它到 F的投影。 J_S， I_S的截面分别使用 $M_v = \mathcal{B}_{v,\ S|V} \otimes_{R_{S,\ V}} F$和$M_v = q_{v,\ S,\ *}F$，以及它们的典范边界等价。

命题 6.12. 范畴 $E_S(V)$ 随 V 变化而满足下降。截面 I_S 是全忠实的。商映射定义了自然变换 $J_S \to I_S$，且其在每个 v 处的正规实现都是下降穿孔序列，同时保留其他变量。

对于 $S \subset T$，标量扩张定义相容函子 $E_S(V) \to E_T(V)$，如下所示：将公共边界从 R_S扩张到 R_T，沿着 $B_{v,S} \to B_{v,T}$扩张已有分支，并对每个新分支使用 J。这些函子保留 J_S-截面。在 I_S-截面上，它们带有一个指向 I_T的自然变换，该变换在新分支上由 $J \to I$给出。

证明. 模层可通过开覆盖上的下降得到。(11) 中的同伦极限与这些下降极限可交换。每个边界函子都是正合的，因此所得范畴是稳定的。 的完全忠实性源于每个分支上的边界限制都完全忠实：对于其像中的两个对象，映射空间纤维积可化为它们的公共边界模的映射空间。比较和正规序列可逐个分支由定理6.10得出。

对于 $S \subset T$，记作 $F_T = R_{T,\ V} \otimes_{R_{S,\ V}} F$。对于已有分支，取 $\mathcal{B}_{v,\ T}|_V \otimes_{\mathcal{B}_{v,\ S|V}} M_v$；根据张量结合律及 η_v，其边界为 F_T。对于新的赋值 $w \in T\setminus S$，取 $\mathcal{B}_{w,\ T}|_V \otimes_{R_{T,\ V}} F_T$，其边界仍为 F_T。添加的变量是中心张量因子，因此这些运算在 $S \subset T \subset W$ 下可以复合。张量结合律还将 $J_S(F)$ 的扩张与 $J_T(F_T)$ 等同。对于 $I_S(F)$，旧分支成为 R_T 上相应的限制边界模；在新分支上，商映射给出了所述自然变换。其相容性继承自相同商映射与张量积的相容性。

□

7 角覆盖与剩余系数

固定 K 的一个有限处 v。记作

$$F = K_v, \quad \mathcal{O} = \mathcal{O}_v, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_v, \quad U = \mathcal{O}^\times, \quad U^r = 1 + \mathfrak{m}^r \ (r \geq 1),$$

并令 $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, $q = |k| = p^d$。空间 Y_K、其正规图表 N_v以及主 $\mathbb{Z}$-覆盖$Q_v \to Y_K$ 均为定义 5.1 和 5.3中的对象。

7.1 单位覆盖系统

定义 7.1（角覆盖）。对于开子群 $H \subset U$，令

$$G_{v,H} = F^\times/H, \qquad N_{v,H} = (C_K \times F)/H,$$

使用作用 $(c,\ z)h = (cj_v(h)\ h^{-1}z)$。群 $G_{v,\ H}$是离散的，并且适合如下正合列

$$1 \longrightarrow U/H \longrightarrow G_{v,H} \xrightarrow{\mathrm{ord}_v} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{12}$$

通过在 Y_K 上取 $N_{v,\ H}$ 在 N_v 上取 $N_w \times G_{v,\ H}$ 在 N_w 上取 $w \neq v$，并在公共开集 C_K 上进行粘合，定义 $\mathcal{Q}_{v,\ H}$：

$$[c,z]_H \longmapsto (cj_v(z), [z]^{-1}), \qquad z \neq 0. \tag{13}$$

命题 7.2。投影 $\mathcal{Q}_{v,\ H} \to Y_K$ 是一个主 $G_{v,\ H}$-覆盖，其右覆叠变换作用为

$$[c,z]_H \cdot [h] = [cj_v(h), h^{-1}z]_H.$$

$H' \subset H$ 的包含映射诱导这些覆盖之间的相容商映射。通过 $\mathrm{ord}v$ 进行结构群扩张得到 Q_v；等价地，$\mathcal{Q}_{v,\ H} \to Q_v$ 是一个有限主 U/H-覆盖。

证明。紧群 U 的开子群是紧的，并且具有有限指标。$C_K \times F$ 上的自由适当 $F^\times$ 作用下降为 $N_{v,\ H}$ 上 $F^\times/H$ 的自由适当作用。为证明适当性，沿着紧群商 $C_K \times F \to N_{v,\ H}$ 提升紧子集，并利用原作用的适当性。离散群在局部紧豪斯多夫空间上的自由适当作用是覆盖作用：从一个相对紧邻域开始，去掉可能与其相交的有限多个平移副本，再将其缩小，使之与所有非恒等式平移副本均不相交。

(13) 中的第一个坐标在覆盖变换群作用下保持不变，第二个坐标则乘以$[h]$。因此，这是一个等变平凡化。它将局部覆盖与其他图表上的平凡覆盖粘合起来。不同 H 的商映射在这些平凡化下相容，这证明了它们的相容性。对 U/H取商，得到 $(C_K \times F)/U$上的 N_v，而第二个坐标变为 $-\mathrm{ord}v(z)$。这是 Q_v的过渡函数。 □

在边界 $Z_v = C_K/j_v(F^\times)$上，这些映射限制为 $C_K/j_v(H) \to C_K/j_v(U) \to C_K/j_v(F^\times)$。因此，有限单位商和赋值商源自同一个序列（12）。

定义 7.3（带标记的温和–野性细化）。令 $m = q - 1$。取 $k^\times$ 的一个生成元 u 以及一个非零同态

$$\chi : U^1/U^2 \longrightarrow C_p.$$

令 $H_\chi \subset U^1$ 为其核的原像。这一对（u，χ）是该细化的一个标记 nt

$$\mathcal{Q}_{v,H_\chi} \longrightarrow \mathcal{Q}_{v,U^1} \longrightarrow Q_v. \tag{14}$$

命题 7.4。在 Q_v 上，覆盖 $\mathcal{Q}_{v,\ H_\chi}$ 和 $\mathcal{Q}_{v,\ U^1}$ 分别具有带标记的覆盖变换群 C_{mp} 和 C_m。它们之间的映射由 $C_{mp} \to C_m$诱导，其核为 C_p。任一循环群的子群所对应的商都是在 Q_v 上的有限覆盖，其置换谱带有定义*3.5*中的转移。

证明。 映射 $1+x \mapsto x \bmod \mathfrak{m}^2$将 U^1/U^2与 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$的加法群对应起来。它是一个在 $\mathbb{F}_p$上的 d 维向量空间，因此 χ 是满射。对 X^m-1 的单根进行 Hensel提升，得到$U=\mu_m \times U^1$。因此

$$U/H_\chi = \mu_m \times C_p, \qquad U/U^1 = k^\times.$$

令 $[u] \in \mu_m$ 为 u的提升，并令 w_χ 为 U^1/H_χ 中的类，其中 $\chi(w_\chi) = 1$。元素 $[u]w_\chi$的阶为 mp ，并映射到 u；它给出了两个标记生成元。应用命题 7.2 和有限集传递构造。

□

7.2 本原接触层

主有限群覆盖与对象 M 上的作用，通过沿平凡化开覆盖下降，确定一个伴随层，并采用第 2 节的常值层约定。

定义 7.5 (角接触层)。 令 P_{mp} 和 P_m 表示 Q_v在（14）中的两个有限扭子。它们的本原置换谱层定义为

$$\mathcal{T}_v = U(P_m) \otimes_{\Delta_{Q_v} R} U(P_{mp}).$$

它是一个取值于 Fun(BC_m,谱范畴) 的局部常值层，其中 C_m 通过第一因子作用。在点 $x \in Q_v$ 处，将其在该范畴中的纤维记为 $\mathcal{T}_{v,x}$ 。

引理 7.6。 在 P_{mp} 的一个纤维中选取原点，可将 $T_{v,x}$ 识别为$T_{m,mp}$。将原点平移r 会对接触施加 t^{2r}。由此诱导的 $T_{v,x})$ 上的传输是恒等式。

证明。 在 P_{mp} 中的原点会在其商中确定一个相容的原点 P_m。这使两个本原纤维都与定义3.6中的纤维相识别。将原点平移 r 会对两个因子分别施加 $t^r \otimes t^r$，在 t^{2r} 上取平衡后即为 R。一个 C_m等变态射与标记旋转的这一幂次交换，因此其在零次自同态代数上的共轭作用是平凡的。

□

定理 7.7 （接触的剩余系数）。 设 u 为定义7.3中的生成元。同态 $\mathbb{F}_p[t]/(\Phi_m) \to k, \quad t \mapsto u$选取纤维自同态代数的一个因子。此因子为

$$k \quad \text{if } p \neq 2, \qquad W_2(k) \quad \text{if } p = 2,$$

其中 $W_2(k) = W(k)/p^2W(k)$。在第二种情况下，它模2 的约化为 k。

证明。 定理 3.14 给出纤维代数 $E_m = R_p[t]/(\Phi_m)$ ，随后再选取一个因子。由于 $p \nmid m$， Φ_m 的约化是可分的。若 $m > 1$，则 p 模 $m = p^d - 1$ 的阶为 d：指数 d可行，而 $0 < p^r - 1 < m$ 对于 $0 < r < d$。因此， u 的 Frobenius 轨道大小为 d，其不可约多项式给出商 k。对于奇数 p，中国剩余定理将此域选为 E_m的一个因子。

对于 $p = 2$，本原幂等元唯一地提升通过幂零理想 $2E_m$。它的因子是剩余域为 k 的有限 étale $\mathbb{Z}/4$-代数，因此是 $W_2(k)$，其标记根为 u 的 Teichmüller 提升。可以通过对 Φ_m 作互素 Hensel 分解来构造它；唯一性也可由 Hensel 局部环 [34, Tag 04GK] 上有限 étale 等价得到。若 $m = 1$，则 $q = 2$，计算结果为 $E_1 = \mathbb{Z}/4 = W_2(\mathbb{F}_2)$。

□

定义 7.8 （选定接触层）。 令 $A = \mathbb{S}_p^\wedge[C_m]$。由 u 的 Frobenius 轨道指标化的 $\mathbb{F}_p[C_m]$ 的本原幂等元提升为中心幂等元 $\epsilon_u \in \mathbb{Z}_p[C_m] = \pi_0 A$。令 A_{ϵ_u} 为其幂等因子，并令

$$\mathcal{T}_{v,u} = \Delta_{Q_v}(A_{\epsilon_u}) \otimes_{\Delta_{Q_v} A} \mathcal{T}_v. \tag{15}$$

此处，$\mathcal{T}_v$ 首先在 p-完备谱中构造为 A-模的局部常值层。

命题 7.9。 层 $T_{v,\ u}$ 是 T_v 的直缩。对于每个 $x \in Q_v$，

$$\pi_0 \operatorname{End}_{\mathrm{Fun}(BC_m,\mathrm{Sp})}(\mathcal{T}_{v,u,x}) \simeq \begin{cases} k, & p \neq 2, \\ W_2(k), & p = 2. \end{cases} \tag{16}$$

相应的零次自同态代数局部常值层具有平凡输运，并且是取此值的常值层。

证明。 根据命题 3.11，每个接触纤维都是 Moore 谱的有限楔和，且是 p-完备的。其典范 $\mathbb{S}^\wedge_p$-作用与保留的 C_m-作用及扭子过渡映射相交换。在一个开覆盖上平凡化有限扭子，在每个开集上构造 p-完备谱中的接触，并下降所得的 A-模。这就构造了式（ A）中使用的 15-模层。

Hensel提升给出 ϵ_u 作为一个中心群代数幂等元。它的作用与传输相干地交换，因此扩张到因子 A_{ϵ_u} 会分裂该层。在每个纤维上，它都是定理 7.7 中的本原投影算子。 p 完备对象之间的映射谱与谱范畴中的映射谱一致。因此，指标化自同态代数的角是（16）中的所选因子。引理7.6的传输计算下降到这个因子上，并且是恒等映射。 □

命题 3.16 的完备本原系数，采用相同的 u 选择，为 $W(k)$。 $F/\mathbb{Q}_p$ 中剩余域为 k 的唯一非分歧子扩张是 $\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})$ [29, 命题 7.50 和推论 7.51]。在其整数环 $W(k)\subset \mathsf{O}$ 中，元素 p 是一致化元，并且根据 Hensel引理， μ_{q-1} 约化到 $k^\times$ 上。因此，Nakayama引理给出 $W(k)=\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$。环 O 是该非分歧系数环上的有限自由忠实平坦代数。对于 $p=2$，约化因而给出单射 $W_2(k)\to \mathsf{O}/4\mathsf{O}$。因此，有限接触因子与完备本原因子在正规坐标环中具有相容的约化。

命题 7.10 (标记变换与Frobenius)。 对于 $a\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$，剩余比较满足

$$\mathrm{ev}_{u^a}=\mathrm{ev}_u\circ(t\mapsto t^a).$$

剩余*Frobenius*由带标记覆盖变换群 C_m 的自同构 $t\mapsto t^p$ 诱导。它扩展为覆盖变换群商群 $C_{mp}\to C_m$ 的自同构，其在 C_{mp} 上的指数 $A\in(\mathbb{Z}/mp\mathbb{Z})^\times$ 由下式确定

$$A\equiv p\pmod m,\qquad A\equiv 1\pmod p.$$

证明。 第一个恒等式是对多项式求值。模 p 意义下，将带标记的根提升至 p 次方，会使其有限域因子中的每个元素都提升至 p 次方。由于 $p\nmid m$，这两个同余式模 mp 有唯一解；它与 m 和 p 均互素。在分解 $U/H_\chi=\mu_m\times C_p$ 上，它在驯分支因子上作用为 p 次幂，而在所选的野分支商群上作用为恒等式。 □

7.3 范数、剩余次数与分歧

命题7.11。 设 L_w/K_v 是一个有限扩张，其剩余次数为 f，分歧指数为 e。对于 $x\in L_w^\times$、 $b\in \mathsf{O}_w^\times$ 和 $a\in \mathsf{O}_w$,

$$\mathrm{ord}_v(N_{L_w/K_v}x)=f\ \mathrm{ord}_w(x), \tag{17}$$

$$\overline{N_{L_w/K_v}b}=N_{k_w/k_v}(\bar b)^e, \tag{18}$$

$$\overline{\mathrm{Tr}_{L_w/K_v}a}=e\ \mathrm{Tr}_{k_w/k_v}(\bar a). \tag{19}$$

证明。 对于非零整性的 x，乘以 x 在自由 $\mathcal{O}_v$-模 $\mathcal{O}_w$ 上的行列式为$N_{L_w/K_v}x$。该行列式的赋值为 长度$_{\mathcal{O}_v}(\mathcal{O}_w/x\mathcal{O}_w)$。后一个商有 $\mathrm{ord}_w(x)$个连续因子，均同构于 k_w，每个的 $\mathcal{O}_v$-长度为 f。这就证明了（17）；通过除法可将其推广到 $L_w^\times$。

该 k_v-向量空间 $\mathcal{O}_w/\varpi_v\mathcal{O}_w$ 按 $\mathfrak{m}_w$的幂具有滤过，其 e 连续商同构于 k_w。乘以 a 会在每个商上诱导乘以 $\bar a$ 的运算。在该滤过下，迹相加，行列式相乘。因此，将整乘法矩阵模 ϖ_v约化，便得到（18）和（19）。 □

定理 7.12 （覆盖系统的范数）。 设 L/K 是一个有限扩张，且 $N:\ Y_L\to Y_K$是定理 *5.7*中的映射。固定一个有限处 v 和一个开集 $H_v\subset\mathcal{O}_v^\times$。对于每个 $w\mid v$，选取一个开集$H_w\subset\mathcal{O}_w^\times$，使得 $N_{L_w/K_v}(H_w)\subset H_v$，并记作

$$\nu_w: L_w^\times/H_w\longrightarrow K_v^\times/H_v$$

表示范数同态。于是，在 Y_L 上存在主 $K_v^\times/H_v$-覆盖的一个同构

$$N^*\mathcal{Q}_{K,v,H_v} \simeq \bigotimes_{w\mid v} \nu_{w,*}\mathcal{Q}_{L,w,H_w}. \tag{20}$$

右侧是阿贝尔目标群的扭子的缩并积。这些同构与开子群的细化以及有限扩张的塔相容。

证明。在 $w \mid v$ 处的图表上，映射

$$[c,z]_{H_w} \longmapsto [N_{L/K}c, N_{L_w/K_v}z]_{H_v}$$

定义良好，且 ν_w-等变。它将源挠子的结构群扩张与目标挠子的拉回相识别。与 w 以外的赋值处相关联的所有因子在此图表上都是平凡的。在不整除 v的赋值处上方的图表中，(20) 中的所有挠子都是平凡的。在穿孔平凡化中，过渡标记满足 $[z]^{-1}\mapsto[Nz]^{-1}$。这些标记在 $w\mid v$上的乘积就是目标标记，因此图表上的同构可以粘合。对子群取商以及复合范数都会保留这些标记，由此得到这两种相容性。

□

由范数的连续性可知，这样的子群 H_w 存在。特别地，可以将任意选定的H_w与$N^{-1}_{L_w/K_v}(H_v)$取交来细化。对(20) 取赋值得到赋值覆盖拉回中的系数 $f(w/v)$；而对单位群作约化，则得到(18)中的$e(w/v)$分歧指数。

8 对应系数与下降

固定 dc 上的一个哈尔测度，使其在 $\log|\cdot|\colon C\to\mathbb{R}$ 下的推前为勒贝格测度。对于 $a\in C$，令 $\gamma_a\colon Y_K\to Y_K$ 为由 $\gamma_a[c,z]=[ac,z]$定义的作用。其图像是以下张成空间

$$Y_K \xleftarrow{\mathrm{id}} Y_K \xrightarrow{\gamma_a} Y_K.$$

这些张成空间的复合给出 γ_{ab}的图像。

定义 8.1（卷积代数）。令 $\mathcal{D}(C)$ 为 C上紧支撑的光滑复值函数所构成的 Bruhat 空间。因此，$\mathcal{D}(C)$ 是 $C_c^\infty(C/U)$ 在 C 上的拉回，关于满足 C/U 为李群的紧子群 U 取归纳极限。每个阶段都带有其通常的归纳胚。令

$$B_C=\mathbb{C}[C^{\mathrm{disc}}],\qquad \mathscr{D}_K=\mathcal{D}(C)\,dc,\qquad \mathscr{A}_K=B_C\oplus\mathscr{D}_K.$$

B_C 中的元素是狄拉克测度的有限线性组合； $\mathscr{D}_K$ 由具有 Bruhat 测试密度的测度构成。 $\mathscr{A}_K$ 中的乘法是测度的卷积。 $\mathscr{A}_K$ 上的有界结构是 B_C 上的细胚与 $\mathscr{D}_K$上的 Bruhat 有界结构的直和。

命题 8.2. $\mathscr{A}_K$ 是一个由紧支撑测度构成的含幺交换代数。其单位元为 δ_1， $\mathscr{D}_K$ 是一个理想，而原子投影 $\pi\colon\mathscr{A}_K\to B_C$ 是一个分裂的代数同态。乘法对于所述有界结构是有界的。

证明。范商使 C 成为非离散空间，因此哈尔测度没有原子。由此，既是原子测度又具有光滑密度的测度必为零。若 $\alpha,\beta\in B_C$且 $f,g\in\mathcal{D}(C)$，则

$$(\alpha+f\,dc)*(\beta+g\,dc)=\alpha*\beta+(\alpha*g+f*\beta+f*g)\,dc.$$

平移和卷积保持$\mathcal{D}(C)$；因此，最后三项属于 $\mathscr{D}_K$。这证明了关于代数和理想的论述。原子包含映射分裂为 π。 B_C 中的有界子集包含于由狄拉克测度张成的某个有限维空间的有界子集中。相应有限集上的平移在 Bruhat 空间上有界，而卷积在每个共同的光滑紧支集阶段上有界。这些观察证明了有界性。

□

测试函数上的正则作用为

$$\rho(\mu)u(x) = \int_C u(a^{-1}x)\, d\mu(a). \tag{21}$$

Fubini 定理给出 $\rho(\mu * \nu) = \rho(\mu)\rho(\nu)$。此表示是忠实的：与光滑近似单位卷积会在分布拓扑下收敛到一个紧支撑测度，因此对于每个 $u \in \mathcal{D}(C)$，若满足 $\mu * u = 0$，则有 $\mu = 0$。

定义 8.3（球对应系数）。记 $\mathbb{S}_C = \mathbb{S}[C^{\mathrm{disc}}]$。定义交换环谱

$$\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}} := \mathbb{S}_C \times_{HB_C} H\mathscr{A}_K, \tag{22}$$

其中，第一个映射由 $\mathbb{S} \to H\mathbb{C}$ 诱导，第二个映射由 π 诱导。拉回是在交换环谱中取的。令 Corr$_K$ = 完美对象范畴($\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}$)。

引理 8.4。投影 $\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}} \to \mathbb{S}_C$ 作为交换环谱的映射有一个截面。作为 $\mathbb{S}_C$-模，

$$\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}} \simeq \mathbb{S}_C \oplus H\mathscr{D}_K.$$

第二个直和项上的乘积是卷积，其 $\mathbb{S}_C$-作用经由 B_C 的平移作用分解。

证明。原子包含 $B_C \to \mathscr{A}_K$ 与 $\mathbb{S}_C$ 的恒等式共同给出了拉回投影的截面。从交换环谱到谱的遗忘函子保极限。因此，其纤维为 fib($H\mathscr{A}_K \to HB_C$) $= H\mathscr{D}_K$。该截面将此纤维序列分裂为模。乘法由 $\mathscr{A}_K$ 诱导。

□

在每个有限处选择一个一致化元 ϖ_v，并记作 $h_v = j_v(\varpi_v)$。对于有限处的有限集 S，置

$$R_S = \mathbb{S}[\mathbb{Z}^S], \qquad H_S = \langle h_v : v \in S \rangle \subset C.$$

映射 $\mathbb{Z}^S \to C$ 是单射。事实上，若坐标在 S 上为 $\varpi_v^{n_v}$、在其他地方为 1 的伊代尔是一个对角元素 $k \in K^\times$，则在 S 之外的某个赋值处进行比较可得 $k = 1$，于是每个 n_v 都为零。

定理 8.5（绕数系数的下降）。同态

$$R_S \longrightarrow \mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}, \qquad t_v \longmapsto \delta_{h_v},$$

具有一个 R_S-线性截面。它是可下降的，并且标量扩张函子诱导出一个等价

$$\mathrm{Mod}_{R_S} \simeq \mathrm{Tot}_{[n]\in\Delta} \mathrm{Mod}_{(\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}})^{\otimes_{R_S}(n+1)}}. \tag{23}$$

对于一个由正整数组成的元组$\mathbf{m} = (m_v)_{v\in S}$，令

$$R_{S,\mathbf{m}} = \mathbb{S}[\textstyle\prod_{v\in S} C_{m_v}], \qquad A_{S,\mathbf{m}} = R_{S,\mathbf{m}} \otimes_{R_S} \mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}.$$

对于 $R_{S、\mathbf{m}}$ 和$A_{S、\mathbf{m}}$，也存在类似的等价。这些等价识别映射谱，并限制在完美对象上。

证明。由引理8.4可知，只需将 $R_S \to \mathbb{S}_C$ 作为模直缩。将 C 分解为H_S-陪集，可得 $\mathbb{S}_C$ 作为 R_S-模的直和分解。投影到陪集 H_S 是R_S-线性的，其目标为 $\mathbb{S}[H_S] \simeq R_S$。因此，Mod$_{R_S}$ 的单位属于由 $\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}$ 生成的厚张量理想。这就是 [27, 意义下的可下降性。18], 与 [27, 给出的命题 3.22]，即为（23）。将该截面与$R_{S、\mathbf{m}}$ 张量化，即可证明有限循环基变换后的断言。映射谱是稳定 ∞-范畴等价的一部分。由 [27,命题 3.28]可知，完美性可通过该基变换检测。

□

特别地，带指标的接触自同态谱连同其 Amitsur 下降数据一并得到恢复。固定的一致化元使这些构造与有限地点集的包含映射相兼容。

命题 8.6 (余跨与系数层)。 对于每个有限处 v，图余跨的源实现再沿 $t \mapsto \delta_{h_v}$ 进行标量扩张，得到

$$\mathcal{C}_{\tau,g} \longrightarrow h\,\mathrm{Cospan}(\mathrm{Perf}_R) \longrightarrow h\,\mathrm{Cospan}(\mathrm{Corr}_K). \tag{24}$$

它保留源中的同伦推出复合、覆盖映射和典范转移，以及它们的塔和拉回同伦。对于每个开 $U \subset Y_K$，定义 *6.11*的系数范畴都有一个正合函子

$$\Xi_{S,U} : \mathcal{E}_S(U) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\Delta_U \mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}}(U), \qquad (F, (M_v), (\eta_v)) \longmapsto \Delta_U \mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}} \otimes_{\Delta_U R_S} F. \tag{25}$$

这些函子与到开子集的限制交换。在源截面 J_S上，它们与 (24)中的标量扩张的层化一致。

证明。 导出标量扩张保留余极限并且是正合的。因此，它保留复合两个余跨的推出，以及源映射及其同伦。在（25）中，第一步是正合的边界投影 p_S： $\mathcal{E}_S(U) \to \mathrm{Mod}_{\Delta_U R_S}(U)$。与$\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}$ 的常值层进行张量化是正合的，并且与沿开嵌入的原像交换。最后 $p_S J_S = \mathrm{id}$，这就证明了最后一个断言。

□

9 正规坐标的 Schwartz 实现

令 $\Gamma = K^\times$。记 $\widetilde{j}_v$： $K_v^\times \to \mathbb{A}_K^\times$ 表示除其他坐标均为 1 的 idele 嵌入；它与类映射的复合为 j_v。对于有限处 v，置

$$I^{(v)} = \prod_{w \neq v}{}' K_w^\times, \qquad \mathbb{A}_K^{(v)} = \prod_{w \neq v}{}' K_w.$$

第一个受限乘积取 idele 拓扑，第二个取加性 adele 拓扑。若$b \in I^{(v)}$，则 $c(b) \in C$ 表示 v坐标为 1、其余坐标为 b的 idele 的类。

命题 9.1 (正规商与过渡函数)**.** 存在一个 C-等变的商表示之间的同胚

$$(K_v \times I^{(v)})/\Gamma \xrightarrow{\sim} N_v, \qquad [(z,b)] \longmapsto [c(b), z], \tag{26}$$

其中 $k \in \Gamma$ 的作用为 $(z,b) \mapsto (k_v z, k^{(v)} b)$。赋值覆盖 $Q_v \to N_v$ 的拉回有一个截面$s(z,b) = [c(b)\ z]_{U_v}$，其中 $U_v = \mathcal{O}_v^\times$，且满足

$$s(k_v z, k^{(v)} b) = s(z,b) \cdot (-\operatorname{ord}_v k). \tag{27}$$

按照伴随丛约定 $(p+n, x) \sim (p, t_v^n x)$，这个移动截面中的系数按 $t_v^{\operatorname{ord}_v k}$变换。

证明。 c的一个 idele 提升 (a_v, b) 在定义 N_v的平衡积中给出 $[c,z] = [c(b)\ a_v z]$。将提升改为 $k \in K^\times$ 会得到所示的对角关系。这两个构造都是连续的商映射，并且互为逆映射。恒等式 $c(k^{(v)}b) = c(b) j_v(k_v^{-1})$蕴含 (27)，因为 k_v^{-1}在 Q_v 上的作用的赋值为 $-\operatorname{ord}_v k$。若截面因该甲板变换而改变，则伴随丛中的不变元素的系数会乘以该平移的逆元。这便得到$t_v^{\operatorname{ord}_v k}$。

□

我们使用标准的布吕阿–施瓦茨空间 $\mathcal{S}(K_v)$ 和 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)$。在有限处，$\mathcal{S}(K_v)$ 是由局部常值紧支撑函数构成的空间，带有其归纳胚；在无限位置，它是通常的 Schwartz 空间，带有其 Fréchet bornology。空间 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)$ 是限制完备张量积，在有限处取特选向量 $1_{\mathcal{O}_v}$。伸缩约定为

$$(\lambda_a \Phi)(x) = \Phi(a^{-1}x). \tag{28}$$

命题 9.2（正规球模）。 设 $R_{v,\ \mathbb{C}}=\mathbb{C}[t_v,t_v^{-1}]$，带有其细胚。存在一个胚同构

$$\iota_v : R_{v,\mathbb{C}}\widehat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{A}_K^{(v)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{A}_K)^{U_v}, \qquad t_v^n\otimes\Psi \longmapsto 1_{\varpi_v^n\mathcal{O}_v}\otimes\Psi. \tag{29}$$

它将乘以 t_v 的乘法与 $\lambda_{j_v}(\varpi_v)$ 相交织。 $k\in\Gamma$ 在其源上的对角作用为

$$k(t_v^n\otimes\Psi)=t_v^{n+\mathrm{ord}_v\,k}\otimes\lambda_{k^{(v)}}\Psi. \tag{30}$$

证明。 一个 U_v-不变布鲁哈函数在 K_v 上，在每个赋值壳层上都是常数。其壳层值在赋值充分小时为零，在赋值充分大时为常数。取其逐次差分，可将其唯一表示为球 $1_{\varpi_v^n\mathcal{O}_v}$的有限线性组合。在每个固定的支集和局部常值阶段，这都是有限维空间之间的同构。过渡到归纳胚并与其他赋值处张量化，即可证明（29）。伸缩将第 n个球映到第 $(n+1)$ 个球。最后， $k_v\varpi_v^n\mathcal{O}_v=\varpi_v^{n+\mathrm{ord}_v\,k}\mathcal{O}_v$，这就证明了（30）。这也是引理 4 中使用的球基 [28,引理 4。18]。

□

（27）–（30）中的正规过渡与施瓦茨过渡一致；对于有限集 S，其指数向量为 $(\mathrm{ord}_v\,k)_{v\in S}$。

对于导出余不变量，使用光滑完备凸胚表示的正合范畴；忘却群作用后，若短正合列可由有界线性映射分裂，则称其为可容许的 [28, §4.3，第 29–30] 页。令 H_Γ 表示此正合范畴中的全导出余不变量。特别地，

$$H_\Gamma(V)=\mathbb{C}\widehat{\otimes}^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}(\Gamma)}V, \qquad \mathcal{D}(\Gamma)=\mathbb{C}[\Gamma],$$

其中群代数带有细胚。若要在完备凸胚向量空间的严格导出范畴中考察这些复形，则应用从线性分裂导出范畴出发的自然正合局部化。我们将其零次余不变空间记作 $H_+=\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)/\Gamma$ 。迈耶余不变量定理指出：

$$H_\Gamma\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)\simeq H_+ \tag{31}$$

在导出范畴中；参见 [28,定理 5.1 及其证明之后的段落 f].

命题 9.3 (系数实现**)。** 对于 $E\in$ 完美对象范畴$\mathbb{S}[\mathbb{Z}^S]$，令 $E_{\mathbb{C}}=H\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{S}}E$，并将其视为 R_S上的 $\mathbb{C}=\mathbb{C}[\mathbb{Z}^S]$完美复形。令 $U_S=\prod_{v\in S}U_v$。存在自然等价

$$H_\Gamma\Big(E_{\mathbb{C}}\widehat{\otimes}^{\mathbf{L}}_{R_{S,\mathbb{C}}}\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)^{U_S}\Big)\simeq E_{\mathbb{C}}\widehat{\otimes}^{\mathbf{L}}_{R_{S,\mathbb{C}}}H_+^{U_S}. \tag{32}$$

For 在有限处 v，在 v 坐标的零点处取值给出一个严格正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{D}(K_v^\times)\widehat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{A}_K^{(v)})\longrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)\xrightarrow{\mathrm{ev}_{0,v}}\mathcal{S}(\mathbb{A}_K^{(v)})\longrightarrow 0, \tag{33}$$

其中 $D(K_v^\times)$ 表示带有归纳胚的局部常值紧支撑函数。应用 H_Γ 后，这个序列给出一个特异三角。

证明。 对紧群 U_S 取平均化是一个有界幂等元，与 Γ-作用可交换，且是正合的。将此幂等元应用于（31）即可证明（32）对 $E_{\mathbb{C}}=R_{S,\ \mathbb{C}}$成立。两边都是 $E_{\mathbb{C}}$ 的正合函子，并保持有限和与收缩。该公式对所有完美复形均成立。自然性涵盖每个 Laurent 矩阵和每个源映射。对于（33），在零点处取值为零的局部常值函数在零点的某个邻域上恒为零，因此其在 $K_v^\times$ 上的限制在该处具有紧支撑。零延拓给出核的逆向识别。映射 $\Psi\mapsto 1_{\mathcal{O}_v}\otimes\Psi$是求值的有界线性截面。因此，该序列线性分裂且严格正合；其导出余不变量构成所述三角。

□

复数 co ，一种高效实现将本原接触映射为零：对于 $m\geq 1$、素数 p 和 $a\geq$ 1,

$$H\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{S}}T_{m,mp^a}\simeq 0,$$

因为其底层谱是.....的楔和 $\mathbb{S}/p$ 和 p在 $\mathbb{C}$中可逆。其算术自同态系数通过定理8.5保留在球面对应构造中。（29）中的解析算子使用的是此接触特化之前的 Laurent 源作用。

10 傅里叶–泊松复形

固定标准特征 $\psi\colon\ \mathbb{A}_K/K \to \mathbb{C}^\times$ 由迹到 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ 得到，并使用自对偶加法 Haar 测度。记

$$\widehat{\Phi}(y) = \int_{\mathbb{A}_K} \Phi(x)\psi(xy)\,dx.$$

$\widehat{\ }$傅里叶反演给出 $\Phi(x) = \Phi(-x)$。对合 $x \mapsto -x$ 属于 Γ的对角作用，因此在 H_+ 上的诱导傅里叶映射是一个对合。

定义 10.1（加权 Schwartz 空间）。对于区间 $I \subset \mathbb{R}$，定义

$$\mathcal{S}(C)_I = \{f : C \to \mathbb{C} : |\cdot|^\sigma f \in \mathcal{S}(C) \text{ for every } \sigma \in I\}.$$

有界结构是乘法映射 $f \mapsto |\cdot|^\sigma f$ 到 $\mathcal{S}(C)$ 的初始有界结构。这里，$\mathcal{S}(C)$ 是布吕阿–施瓦茨空间，由 C的李群商上的施瓦茨函数构造而成。令

$$H_- = \mathcal{S}(C)_\mathbb{R}, \qquad \mathcal{W} = \mathcal{S}(C)_{(1,\infty)} \oplus \mathcal{S}(C)_{(-\infty,0)}.$$

对于 C上的函数，定义 $Jf(c) = |c|^{-1}f(c^{-1})$。

这是 [28, 定义 4.1 和 §5 中的加权空间约定。3]求和映射是

$$\Sigma\Phi(c) = \sum_{a\in K^\times} \Phi(ax), \qquad c = [x] \in C.$$

它下降为 H_+上的有界映射。这些映射

$$i_+ : H_+ \longrightarrow \mathcal{W}, \quad [\Phi] \longmapsto (\Sigma\Phi, J\Sigma\widehat{\Phi}), \qquad i_- : H_- \longrightarrow \mathcal{W}, \quad f \longmapsto (f, f) \tag{34}$$

are 有界结构嵌入 [28,引理 5.3–5.4 以及 §5.3 第 41] 页中 i_- 的定义 .

引理 10.2（傅里叶协变性）。 对于 $a \in \mathbb{A}_K^\times$,

$$\mathcal{F}\lambda_a = |a|\lambda_{a^{-1}}\mathcal{F}, \qquad J\lambda_a = |a|\lambda_{a^{-1}}J. \tag{35}$$

((34) 中的两个映射都是 C-等变的。对于有限集 S，令

$$\iota_S : R_{S,\mathbb{C}} \to R_{S,\mathbb{C}}, \qquad \iota_S(t_v) = q_v^{-1}t_v^{-1}.$$

令 M为 $S(\mathbb{A}_K)^{U_S}$或 $H_+^{U_S}$。原始傅里叶映射是从 M到 ι_S^*M的 $R_{S,\ \mathbb{C}}$-线性映射，其中 ι_S^*表示标量限制。对于每个完美对象范畴 $R_{S,\ \mathbb{C}}$-复形 $E_\mathbb{C}$，其经过系数代换后的目标自然地为

$$E_\mathbb{C} \otimes^{\mathbf{L}}_{R_{S,\mathbb{C}}} \iota_S^*M \simeq \iota_S^*\left(\iota_S^*E_\mathbb{C} \otimes^{\mathbf{L}}_{R_{S,\mathbb{C}}} M\right). \tag{36}$$

证明。 将 $x = ay$ 代入傅里叶积分。雅可比行列式为 $|a|$，傅里叶自变量变为 ay，由此证明第一个恒等式。对于第二个恒等式，直接求值得到

$$J\lambda_a f(x) = |x|^{-1}f(a^{-1}x^{-1}) = |a|\lambda_{a^{-1}}Jf(x).$$

乘积公式使傅里叶变换能够通过 Γ-余不变元下降：它将关系式 $(\lambda_k - 1)\Phi$ 变为 $(\lambda_{k^{-1}} - 1)\,\widehat{\Phi}$。求和是等变的。两个因子 $|a|$和 $|a^{-1}|$在 $J\Sigma\mathcal{F}$中抵消，从而证明 i_+的等变性。由于 $|h_v| = q_v^{-1}$，第一个恒等式诱导出 ι_S。(36) 左侧的关系式为$re \otimes m = e \otimes \iota_S(r)m$。右侧为 $\iota_S(s)e \otimes m = e \otimes sm$；令 $s = \iota_S(r)$。外部限制使这一对应对于原始的 $R_{S,\mathbb{C}}$-作用是线性的。将同样的论证应用于有限胞腔分解，随后应用于收缩，即得导出公式。 □

定义这两个等变映射

$$\epsilon_0 : H_+ \to \mathbb{C}_1, \quad [\Phi] \mapsto \Phi(0), \qquad \epsilon_1 : H_+ \to \mathbb{C}_{|\cdot|}, \quad [\Phi] \mapsto \int_{\mathbb{A}_K} \Phi,$$

其中， $\mathbb{C}_\chi$ 表示特征为 χ 的一维表示。这两个映射根据乘积公式均定义良好。它们的联合核记为 $H_\cap$。

命题 10.3（公共泊松子空间）。 映射 (ϵ_0,ϵ_1) 是满射。求和映射限制为一个等变嵌入 $\theta:\ H_\cap \to H_-$，并且

$$i_+(H_\cap) = i_+(H_+) \cap i_-(H_-)$$

在 W 中。其值域在诱导的有界学商构造中是闭的。

证明。 取一个支集避开零且积分非零的布鲁哈–施瓦茨函数，再取另一个在零点处等于 1 的函数。从第二个函数中减去第一个函数的适当倍数，即可得到联合满射性。在 $\mathbb{A}_K/K$ 上应用泊松求和，得到

$$\Sigma\Phi(c) - J\Sigma\widehat{\Phi}(c) = |c|^{-1}\epsilon_1[\Phi] - \epsilon_0[\Phi]. \tag{37}$$

因此，当且仅当两个矩都为零时，这两个坐标才相等。这两个加权 Schwartz 空间的交为 H_-，它确定了公共像。固定有限整单位的一个开子群 U。按 [28, §5.1], 中的做法，取足够大的 S，使得 $U^S = \prod_{v\notin S}\mathsf{O}_v^\times \subset U$。在 W^{U^S} 上，Meyer 算子 $P_+^S = i_+p_+^S$ 投影到 $i_+(H_+^{U^S})$；见 [28, 引理 5.4 的证明及第 41] 页。将其限制到弗雷歇空间 W^U，并对输出在 U 上进行平均化，便得到一个像为 $i_+(H_+)\cap\mathsf{W}^U$ 的投影；这是由 i_+ 的等变性和单射性得出的。此有界投影是连续的，因此其像是闭的。根据 (37)， i_- 在 H_-^U 上的原像为 $\theta(H_\cap^U)$。紧子群投影与两个嵌入都可交换，因此经过角层级时得到所述的商有界结构。 □

定义　第 10.4 节（傅里叶–泊松复形）。定义光滑 C-表示的复形 s

$$C_K^{\mathrm{FP}} = \Big[\mathbb{C}_1 \oplus H_\cap \xrightarrow{(0,\theta)} H_- \xrightarrow{\ 0\ } \mathbb{C}_{|\cdot|}\Big] \tag{38}$$

位于上同调次数 0、1、2 中，其余所有项均为零。其上同调为

$$H^0 = \mathbb{C}_1, \qquad H^1 = H_-/\theta H_\cap, \qquad H^2 = \mathbb{C}_{|\cdot|},$$

其中，中间项带有命题10.3所述的商有界结构。

C 在每一项上的作用都与微分交换。对该作用进行积分得到 $\mathscr{A}_K$的作用。因此，映射 $\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}} \to H\mathscr{A}_K$ 定义了一个正合实现

$$\mathcal{R}_K : \mathrm{Perf}(\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{bor}}(\mathbb{C}), \qquad \mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}} \longmapsto C_K^{\mathrm{FP}}.$$

这里 $\mathcal{D}_{\mathrm{bor}}(\mathbb{C})$ 是带有严格正合结构的完备凸有界复向量空间的导出范畴。该函子在有限自由模上通过有限直和以及所显示算子的矩阵得到，在完美模上则通过有限锥和幂等元分裂得到。结合（24），它将源余跨实现为复形的余跨。所组装的等变图（34）具有与（32）相同的系数代换。

11 迹与正规固定分层

定义 11.1（赋值处的迹分布）。 赋予 $K_v^\times$Weil Haar 测度 $d_W^\times a$，使其归一化为

$$\int_{1\le|a|_v<|b|_v} d_W^\times a = \log|b|_v \qquad (|b|_v>1).$$

在有限处，其单位元质量为 $\log q_v$。 对于 $\varphi\in\mathcal{D}(K_v^\times)$，定义

$$W_v^0(\varphi) = \int_{K_v^\times} (\varphi(a)-\varphi(1)1_{\mathcal{O}_v^\times}(a))\frac{|a|_v}{|1-a|_v}\,d_W^\times a \quad (v\nmid\infty). \tag{39}$$

在有限处选取一个导子为 $\mathcal{O}_v$ 的参考加法特征 $\psi_{v,0}$。在实赋值与复赋值处，分别取

$$\psi_{v,0}(x) = e^{2\pi i x}, \qquad \psi_{v,0}(z) = e^{4\pi i\Re z}.$$

相应的自对偶测度 $dx_{v,0}$ 在有限处赋予 $\mathcal{O}_v$ 体积 1，在无限位置处则为 dx 和 $2\,dx\,dy$。记 $\mathcal{F}_{v,0}$ 为由此得到的傅里叶变换，并定义分布 P_v 为

$$\langle P_v, \eta\rangle = \int_{K_v} \log|x|_v\,(\mathcal{F}_{v,0}\eta)(x)\,dx_{v,0} \qquad (\eta \in \mathcal{S}(K_v)).$$

在一个无限位置处，令

$$W_v^0(\varphi) = -\langle P_v, x \mapsto \varphi(1-x)\rangle. \tag{40}$$

在（40）中，φ 在0处延拓为零。分布 P_v 限制为 $-d_W^\times x$ 在零点之外。这些是 [28, 引理 3.4–3.5 和公式（19）], 使用上述参考特征表示的局部傅里叶迹分布。定义

$$W_K(f) = \sum_v W_v^0(f\circ j_v) - \log|D_K|\,f(1), \qquad f \in \mathcal{D}(C). \tag{41}$$

在有限处，（39）中的减法使被积函数在 1 附近消失，并且 $W_v^0(1_{\mathcal{O}_v^\times}) = 0$。由于 P_v 在 $1_{\mathcal{O}_v}$ 和 $1_{1+\varpi_v\mathcal{O}_v}$上都取值为 $-\log\,q_v/(q_v-1)$，分别利用 $\mathrm{F}_{v,0}1_{\mathcal{O}_v} = 1_{\mathcal{O}_v}$ 以及 P_v 在零点之外的限制，傅里叶归一化给出相同的值。对于 $f \in \mathrm{D}(C)$，(41) 中只有有限多个局部项非零。事实上，取一个有限的赋值处集合，使得在该集合之外f 是单位不变的，并取一个包含其支集范数的紧区间。在一个更大的有限集之外，只有单位部分可能落入该区间；在那里，$f\circ j_v$是 $f(1)1_{\mathcal{O}_v^\times}$，其局部分布为零。

(41) 中的判别式，是从这些参考特征到全局迹特征的变换。记作 $\psi_v(x) = \psi_{v,\,0}(\delta_v x)$。$\psi_v$ 上的自对偶测度为 $dx_{v,\,\psi} = |\delta_v|_v^{1/2} dx_{v,\,0}$，并且

$$\mathcal{F}_{v,\psi}\eta(x) = |\delta_v|_v^{1/2}(\mathcal{F}_{v,0}\eta)(\delta_v x).$$

用同一个分布配对与 $\mathcal{F}_{v,\,\psi}$ 以及 $dx_{v,\,\psi}$ 定义 $P_{v,\,\psi}$。代入 $y = \delta_v x$，再在零点处进行傅里叶反演，得到

$$P_{v,\psi} = P_v - \log|\delta_v|_v\,\delta_0.$$

因此，局部迹项变为 $\log|\delta_v|_v\varphi(1)$。在无限位置 $\delta_v = 1$；在有限处，其赋值为不同指数。因此 $\prod_v |\delta_v|_v^{-1} = |D_K|$，得到 (41) 中的判别式项。这就是 [28, 方程 (20)、§5.1 和定义 5 中的特征变换项。7]。

定理 11.2 (完备迹)。对于每个 $f \in \mathrm{D}(C)$，算子 $\rho(f)$ 在 C_K^{FP}的三个上同调空间上均可求和，并且

$$\mathrm{str}_{H^*(C_K^{\mathrm{FP}})}\,\rho(f) = \int_C f(c)\,dc + \int_C f(c)|c|\,dc - \mathrm{Tr}\Big(\rho(f)\mid H^1\Big) = W_K(f). \tag{42}$$

对于 C_K^{FP} 的有限个直和副本，矩阵（ρ（f_{ij}）的超迹，其中 $f_{ij} \in \mathrm{D}$（C），为$\sum_i W_K$（f_{ii}）。

证明。命题 10.3 将 $H_+/(H_+\cap H_-)$ 与 $\mathbb{C}_1\oplus\mathbb{C}_{|\cdot|}$对应，并将 $H_-/(H_+\cap H_-)$ 与 H^1对应。这些是 [28, §5.5] 中的正表示与负表示。根据[28, 定理 5.8], ，并采用上文计算出的局部特征归一化，它们具有可求和性和特征。由于两个正特征在（38）中占据偶数次，其特征恰好是（42）中的超迹。这两个一维迹就是所显示的矩。有限可加性给出矩阵公式。 □

定理 11.3（固定分层及其法向贡献）。令 $a \in C\setminus\{1\}$。若 $a \in j_v(K_v^\times)$，则 $\mathrm{Fix}(\gamma_a) = Z_v$；否则不动点集为空。至多有一个赋值 v 具有此性质。对于$a = j_v(a_v)$， Z_v 处的法向作用是乘以 a_v，而逆拉回法向因子为

$$\frac{1}{|1-a_v^{-1}|_v} = \frac{|a_v|_v}{|1-a_v|_v}. \tag{43}$$

若 $f \in \mathrm{D}(C)$ 的支集避开1，则

$$\sum_v \int_{K_v^\times} f(j_v(a))\frac{d_W^\times a}{|1-a^{-1}|_v} = \mathrm{str}_{H^*(C_K^{\mathrm{FP}})}\,\rho(f). \tag{44}$$

证明。公共开集 C 上的作用是自由的。在 $Z_v = C/j_v(K_v^\times)$ 上，一个元素固定某点，当且仅当它属于 $j_v(K_v^\times)$；由于 C 是阿贝尔群，因此它会固定每一点。若某个元素既可由 v 处的单赋值伊代尔表示，又可由 $w \neq v$处的单赋值伊代尔表示，那么它们的商就是 $K^\times$中的对角元素。在第三个赋值处，该元素的坐标为 1，因此它在 K中等于 1。于是这两个局部子群仅交于 1。在 N_v 中作平衡可得 $[cj_v(a_v)\ z] = [c, a_v z]$。逆拉回对应的法向差乘以 $1 - a_v^{-1}$，其加法雅可比行列式为 $|1 - a_v^{-1}|_v$。由此证明了 (43)，包括复赋值处的绝对值平方。

映射 j_v 是适当的，因此 f 的支集的拉回是紧的，并且避开 1。式 (44) 中的所有积分都是通常意义下的积分。此外，除有限多个 v 外，子群 $j_v(U_v)$ 都包含在一个与支集不相交的单位元邻域内。非单位元的范数为 q_v^n、 $n \neq 0$，当 q_v 足够大时，不可能与其固定的紧范数区间相交。因此该和是有限的。对于所选取的 C 上的哈尔测度以及其稳定子上的 Weil Haar 测度，每个 Z_v 的商空间上的 Haar 测度均为 1：在有限处，范数区间的长度为 $\log q_v$，等于局部单位元测度；在无限位置，两种测度都推前为 $d\log\, r$。因此，所显示的积分就是不动分层的正规贡献。由于 $f(1) = 0$，定义 11.1 和定理 11.2 给出式 (44)。

□

定义 11.4（源算子和转置）。 对于 S 有限，记 $h^{\mathbf{n}} = \prod_{v\in S} h_v^{n_v}$ 和 $T_v = \lambda_{h_v}$。如果 $P = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} t^{\mathbf{n}} \in R_{S,\,\mathbb{C}}$，则令

$$f_P(c) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} f((h^{\mathbf{n}})^{-1} c).$$

$\mathscr{A}_K$ 上的共轭线性对合定义为

$$\delta_a^\sharp = |a|\delta_{a^{-1}}, \qquad f^\sharp(c) = |c|^{-1}\overline{f(c^{-1})}. \tag{45}$$

诱导的多项式对合为

$$P^\sharp(t) = \sum_{\mathbf{n}} \overline{a_{\mathbf{n}}} \left(\prod_{v\in S} q_v^{-n_v}\right) t^{-\mathbf{n}}.$$

命题 11.5（与迹复合）。 对于 $P,\ Q \in R_{S,\,\mathbb{C}}$ 和 $f,\ g \in \mathcal{D}(C\qquad\qquad)$，

$$P(T)\rho(f) = \rho(f_P), \tag{46}$$

$$\operatorname{str}\Big(P(T)\rho(f)Q^\sharp(T)\rho(g^\sharp)\Big) = W_K\Big(f_P * (g_Q)^\sharp\Big). \tag{47}$$

如果 $\int_C f\ (c)\ dc = \int_C f\ (c)\ |c|\, dc = 0$，且对 g也成立，那么 （47） 右侧为 $-\operatorname{Tr}(\rho\ (f_P * (g_Q)^\sharp)\ \mid H^1)$。

证明。对积分变量作平移得到 $\lambda_h\rho(f) = \rho(c \mapsto f(h^{-1}c))$，从而得到（46）。规则 $\sharp$是一个对合，并且会反转卷积。例如，对于测试函数配对 $\int_C u(c)v(c)|c|\, dc$，变量替换给出 $\lambda_a^* = |a|\lambda_{a^{-1}}$；对该恒等式积分得到（45）。因此 $(g_Q)^\sharp = Q^\sharp(\delta_h) * g^\sharp$。所有有限平移和卷积仍属于 $\mathrm{D}(C)$，因此定理 11.2 可应用于它们的乘积，从而证明（47）。泛函 $f \mapsto \int f|\cdot|^j,\ j = 0, 1$ 是卷积特征。它们的公共核是一个在平移下保持不变的理想，而 $\sharp$通过复共轭交换这两个特征。因此，在所述矩条件下，两个偶次迹均为零。 □

12 正规行列式与无穷因子

定义 12.1 (正规行列式因子)。 对于有限处 v 和 $R(s) > 0$，将式（9）的正规穿孔微分特化为 $t_v \mapsto q_v^{-s}$。在源端使用壳基，在目标端使用球基，并定义

$$\tau_v(s) = \det\big(1 - q_v^{-s} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\big)^{-1} = (1 - q_v^{-s})^{-1}.$$

这是特化的两项无环复形的逆行列式。

命题 12.2. 因子 $\tau_v(s)$ 不受法覆盖标架变更的影响。对于正整数 L、h，周期细化与……相容

$$1-t^{hL}=(1-t^{L})\sum_{j=0}^{h-1}t^{jL}.$$

复特化后，有限源复形的行列式线在其缝合三角中具有乘法性。

证明。 标架变换会使两个基都乘上同一个劳朗单位，该因子在行列式中相消。只要多项式细化恒等式中的两个因子都可逆，该恒等式就给出乘法性。最后，$\det C^\bullet=\bigotimes_i(\det\ C^i)^{(-1)^i}$ 将缝合映射的映射锥映到目标行列式线与源行列式线的逆元的张量积。

□

标准迹特征的自对偶局部加法测度为 dx 在实赋值处，$2\,dx\,dy$在复赋值处，并且具有$\mathcal{O}_v$-体积 $q_v^{-d_v/2}$在有限处，其中 d_v 为不同指数[30, 命题 4。8]。对于以下梅林积分，使用乘法测度 $dx/|x|$在实赋值处，$2\,dx\,dy/(\pi|z|^2)$ 在复赋值处，并在有限处取单位元质量 1 。

命题 12.3（阿基米德正规积分）。 对于 $R(s)>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^\times}e^{-\pi x^2}|x|^s\frac{dx}{|x|}=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)=:\Gamma_{\mathbb{R}}(s),$$
$$\int_{\mathbb{C}^\times}e^{-2\pi|z|^2}|z|^{2s}\frac{2\,dx\,dy}{\pi|z|^2}=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)=:\Gamma_{\mathbb{C}}(s).$$

在逆拉回伸缩下，阶数为 $2n$ 的偶次实泰勒系数的权重为 $|a|^{-2n}$，而$(z\bar z)^n$ 的复径向系数的权重为 $|a|_v^{-n}$。

证明。 实积分等于正半轴积分的两倍。代入 $u=\pi x^2$ ，得到第一个公式。在极坐标下，复积分为 $4\int_0^\infty e^{-2\pi r^2}r^{2s-1}\,dr$。代入 $u=2\pi r^2$，得到第二个公式。将 $a^{-1}x$ 和 $a^{-1}z$ 代入相应的单项式，并在复赋值处使用 $|a|_v=|a|_{\text{ordinary}}^2$ ，即可得到泰勒展开中的结论。

□

命题 12.4（正规因子的乘积）。 设 r_1、r_2 分别为 K 的实赋值处和复赋值处的数量。令 $V_K=$体积$\psi_f(\mathcal{O}_K)$，其中使用有限自对偶加法测度。定义

$$\mathcal{Z}_K(s)=V_K^{-s}\Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2}\prod_{v\nmid\infty}\tau_v(s),\qquad \Re(s)>1.$$

该乘积在 $R(s)>1$ 上局部一致收敛，并且

$$\mathcal{Z}_K(s)=|D_K|^{s/2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2}\zeta_K(s).$$

证明。 局部自对偶体积给出 $V_K=\prod_{v\nmid\infty}q_v^{-d_v/2}=|D_K|^{-1/2}$。对于 $R(s)\ge1+\varepsilon$，有 $\sum_v q_v^{-\Re(s)}\le[K:\ \mathbb{Q}]\sum_p p^{-1-\varepsilon}<\infty$。这证明了该乘积局部一致收敛。非零整数理想的唯一分解给出 $\prod_v(1-q_v^{-s})^{-1}=\zeta_K(s)$。代入即可证明该公式，其中采用 [30,§4.7] 的伽马归一化。

□

13 乘法与整截面

赋值扭子给出带有截面乘积的分次系数线。随后，带标记的 Laurent 坐标给出带有整喷射条件的除子截面格。

13.1 沿赋值扭子的分次下降

令 $Q_v \to Y_K$ 为与有限处 v 相关联的主 $\mathbb{Z}$-覆盖。令 $A = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$，并令 A 表示 Y_K 上的常值环层。

定义 13.1（绕行系数线）。可逆的 A-模 $\mathscr{L}_v$ 是伴随层

$$\mathscr{L}_v = \mathbb{Z}[Q_v] \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]} A, \qquad n \cdot f = t^n f.$$

对于 $m \geq 0$，令 $\mathscr{L}_v^{[m]} = \mathscr{L}_v^{\otimes_A m}$，其中 $\mathscr{L}_v^{[0]} = A$，并定义

$$\mathscr{S}_v = \bigoplus_{m \geq 0} \mathscr{L}_v^{[m]}.$$

命题 13.2（乘法下降）。层 $\mathscr{S}_v$ 是一个分次交换 A-代数。其乘法给出如下同构

$$\mathscr{L}_v^{[m]} \otimes_A \mathscr{L}_v^{[n]} \simeq \mathscr{L}_v^{[m+n]}.$$

应用 *Eilenberg–Mac Lane* 函子后，次数为一的层是沿 Q_v 的自由绕行系数的整实现。这些构造与挠子的拉回以及系数环 A 的扩张相交换。

证明。对于扭子框架 $q_j = q_i + n_{ij}$，线框架满足 $u_j = t^{n_{ij}} u_i$。因此，代数过渡映射 $A[u_j] \to A[u_i]$ 在次数 m 上的作用为 $t^{m n_{ij}}$。扭子余循环给出下降，多项式乘法给出所述张量积。次数一具有自由绕行模过渡映射。拉回和系数扩张保留这些等式。 □

定义 13.3（有限周期处的截面）。对于 $L \geq 1$，令

$$A_L = A/(t^L - 1) = \mathbb{Z}[C_L], \qquad \mathscr{L}_{v,L}^{[m]} = \mathscr{L}_v^{[m]} \otimes_A A_L, \qquad \mathscr{S}_{v,L} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathscr{L}_{v,L}^{[m]}.$$

实系数纤维具有系数正向量锥 $f = \sum_{j=0}^{L-1} a_j t^j$，其定义为 $a_j \geq 0$。

命题 13.4（有限周期处的有效性与共同范数）。系数正向子集与所选框架无关。它们在加法和分次乘法下封闭，且与其负集的交为零。在复系数纤维上，定义

$$\|f\|_{L,m}^2 = e^{-2m\eta} L \sum_{j=0}^{L-1} |a_j|^2, \qquad \eta \in \mathbb{R}.$$

这给出每个次数上的正厄米度量，并且该度量在覆盖变换下保持不变。乘法满足

$$\|fg\|_{L,m+n} \leq \|f\|_{L,m} \|g\|_{L,n}.$$

乘子 $f \in A_L$ 在 A_L 上具有单射性，当且仅当对每个 L 次单位根 ζ，$f(\zeta) \neq 0$。

证明。标架变换会置换系数，同时保持锥和度量不变。该锥是适当的，并且对加法和循环卷积封闭。由杨氏不等式和柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|fg\|_{\ell^2} \leq \|f\|_{\ell^1} \|g\|_{\ell^2} \leq \sqrt{L}\, \|f\|_{\ell^2} \|g\|_{\ell^2}.$$

次数因子给出了所述估计。由于 A_L 是 $\mathbb{Z}$-自由的，单射性等价于行列式非零；在 $\mathbb{C}$ 上，该行列式为 $\prod_{\zeta^L = 1} f(\zeta)$。 □

命题 13.5（周期变化与度量）。设 $M = hL$ 满足 $h \geq 1$。商同态 $\pi : A_M \to A_L$ 对于命题 *13.4*中的范数是一个压缩映射。定义

$$\mathrm{tr}_L^M(f) = \left(\sum_{j=0}^{h-1} t^{jL} \right) \widetilde{f}, \qquad \iota_L^M(f) = h^{-1} \mathrm{tr}_L^M(f),$$

其中， $\widetilde{f}$ 是任意一个劳朗提升。整数系数传递的范数因子为 h。在 $\mathbb{Q}$或 $\mathbb{C}$上， ι_L^M是一个等距乘法嵌入，其中

$$\pi\iota_L^M = 1, \qquad \iota_L^M(1) = h^{-1}\sum_{j=0}^{h-1} t^{jL}.$$

这三个映射都保持系数正性，并与分次覆盖变换相容。商、整数系数传递和归一化传递可在周期塔中复合。

证明。 对每个商纤维应用柯西–施瓦茨不等式，得到

$$L\sum_{r<L}\left|\sum_{j<h} a_{r+jL}\right|^2 \le Lh\sum_{k<M}|a_k|^2 = M\sum_{k<M}|a_k|^2.$$

转移将系数重复 h 次，从而范数平方为 $h^2L\sum_{r<L}|a_r|^2$。对于 $N=\sum_{j<h}t^{jL}$，有 $N^2=hN$，且 $N(t^L-1)=0$ 在 A_M 中。这些恒等式表明提升的选择无关性、 N/h 的乘法性以及 $\pi\iota_L^M=1$。所有映射都与 t 的幂相容；对商纤维分组即可证明塔的恒等式。

□

13.2 边界圆的上同调

令 $B_v=\mathbb{R}_{>0}/q_v^{\mathbb{Z}}$。该圆是 C_K^1 中 Z_v 的像$\backslash Y_K$。将 Z_v 上的赋值覆盖按 C_K^1 取商，得到

$$\overline{Q}_v = \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow B_v, \qquad r\cdot n = rq_v^{-n}.$$

商之前的两个空间分别是 $C_K/j_v(\mathcal{O}_v^\times)$和 $C_K/j_v(K_v^\times)$。使用定义 Q_v中的定义 13.1在 B_v上构造系数线丛，并以覆盖变换标记为一的生成元定向。

命题 13.6 (边界截面秩)。 在次数 $m\ge 0$ 且有限周期为 L时，上同调由下式计算：

$$[A_L \xrightarrow{t^m-1} A_L]$$

在零次和一次时。两个上同调群都是秩为 最大公约数(L,m) 的自由阿贝尔群，其中 最大公约数$(L,0)=L$。对于系数环 A 和 $m\ge 1$，同样的计算得到

$$H^0 = 0, \qquad H^1 = A/(t^m-1).$$

对于 $A/(\Phi_u)$，若 $u\nmid m$，则 $H^0=0$，且 H^1 的有限阶为 $|\mathrm{Res}(\Phi_u,t^m-1)|$。若 $u\mid m$，则两个群都是 $A/(\Phi_u)$。

证明。 胞腔微分是单值化减去恒等式，此处为 t^m-1。置换 $j\mapsto j+m$ 在 C_L 上有最大公约数(L,m) 个轨道；其不变量和余不变元在这些轨道上自由生成。在 A 上微分是单射。在 $A/(\Phi_u)$ 上，若 $u\mid m$，微分为零；否则微分是行列式为 $\mathrm{Res}(\Phi_u,t^m-1)$ 的单射。

□

13.3 标记射影坐标上的除子

使用带有标记坐标 t 的射影系数实现 $X=\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$。设 P_i 是有限个互不相同的首一分圆多项式，且满足 $P_i(1)\neq 0$；令 $Z(P_i)$ 表示它们在 X 中的零因子。该有限族可在对 $P_i(t^h)$ 进行因子相加和因式分解时扩充；新因子在 1 处的值也非零。

定义 13.7 （标记除子及其截面格）。 对于整数 a， b， r_i 置

$$D = a[0]+b[\infty]+\sum_i r_i Z(P_i), \qquad F_D(t)=\prod_i P_i(t)^{r_i}, \qquad n(D)=a+b+\sum_i r_i\deg P_i.$$

定义

$$S(D)=H^0(X,\mathcal{O}_X(D)).$$

非零有理截面的有效性意味着 $\mathrm{div}(f)+D\ge 0$ 作为卡蒂埃因子。

命题 13.8（显式截面及其乘积）。若 $n = n(D) \geq 0$，则

$$S(D) = t^{-a} F_D(t)^{-1} \mathbb{Z}[t]_{\leq n}.$$

若 $n(D) < 0$，则此群为零。有理函数的乘法给出

$$S(D) \otimes_{\mathbb{Z}} S(E) \longrightarrow S(D+E),$$

且乘以任意非零截面都是单射。分子识别

$$\nu_D : S(D) \longrightarrow \mathbb{Z}[t]_{\leq n(D)}, \qquad \nu_D(f) = t^a F_D f$$

满足 $\nu_{D+E}(fg) = \nu_D(f)\nu_E(g)$。

证明。$t^a F_D$ 的除子为

$$a[0] + \sum_i r_i Z(P_i) - \left(a + \sum_i r_i \deg P_i \right) [\infty].$$

因此 $t^a F_D$ 将 $\mathcal{O}_X(D)$ 与 $\mathcal{O}_X(n[\infty])$ 识别起来，其截面是次数至多为 n 且在 $n < 0$处消失的整系数多项式。除子相加，且在 $\mathbb{Q}(t)$ 中乘以非零因子是单射。分子恒等式由 $F_{D+E} = F_D F_E$ 得出。

□

对于绕行标架的变换 $k \in \mathbb{Z}$，令

$$D' = D - k \operatorname{div}(t), \qquad f' = t^k f.$$

则 $n(D') = n(D)$ 且 $\nu_{D'}(f') = \nu_D(f)$。对于张量次数为 m 的过渡映射，取 $k = mn_{ij}$。

13.4 边界喷流上的一个整性条件

对于 $M \geq 1$，令

$$J_M = \mathbb{Z}[x]/(x^M), \qquad J_{M,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[x]/(x^M).$$

喷流 $j_M(f) = f(1+x)$ 模 x^M 定义在 $S(D)$ 上，因为 $P_i(1) \neq 0$。

定义 13.9 (具有整喷流的截面)。令

$$S_M(D) = \{ f \in S(D) : j_M(f) \in J_M \}, \qquad \iota_M(D) = \log[S(D) : S_M(D)] \quad (n(D) \geq 0).$$

定理 13.10 (满足喷流条件的乘法)。对于 $n(D) \geq 0$, $S_M(D)$ 是 $S(D)$的一个满秩有限指标子格。乘法限制为

$$S_M(D) \otimes S_M(E) \longrightarrow S_M(D+E),$$

且乘以任意非零截面仍保持单射。喷流截断给出 $S_{M+1}(D) \subseteq S_M(D)$，而标架变换 $(f, D) \mapsto (t^k f, D - k\operatorname{div}(t))$ 保持这些格不变。对于整数 $h \geq 1$，幂拉回 $\phi_h(t) = t^h$ 将 $S_M(D)$ 映到 $S_M(\phi_h^* D)$，并与乘积及复合相容。

证明。对有理喷流矩阵通分，得到 $cS(D) \subseteq S_M(D)$，其中某个 $c > 0$。由于j_M 是环同态，整 jets 在乘积下封闭；单射性可在 $\mathbb{Q}(t)$ 中推出。截断保持整性，并且对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，$(1+x)^k$ 都是整喷流单位。幂拉回诱导出环同态$J_M \to J_M$, $x \mapsto (1+x)^h - 1$，其定义良好，因为它的像包含于 (x)。这些代换与乘积可交换，且复合起来。

□

定理 13.11（截面指数作为格扩张）。假设 $n(D) = M - 1$ 并令

$$u_D = j_M(t^{-a} F_D^{-1}) \in J_{M,\mathbb{Q}}^{\times}.$$

对于可公度格，记作 $e_+(L \mid B) = \log \#(L/(L \cap B))$。那么

$$\boxed{\iota_M(D) = e_+(u_D J_M \mid J_M).}$$

在分子喷流坐标中，截面格为

$$\nu_D(S_M(D)) = J_M \cap u_D^{-1} J_M.$$

该等式通过整同一 $p(t) \mapsto p(1+x)$ 模 x^M 来理解。

证明。 二项式基变换 $p(t) \mapsto p(1+x)$ 是整性的幺模变换。截面喷流为 $u_D j_M(p)$，因此整性给出了所述交。乘以 u_D 可得到整同一

$$J_M/(J_M \cap u_D^{-1} J_M) \simeq u_D J_M/(u_D J_M \cap J_M),$$

这就证明了该公式。 □

推论 13.12 （带符号分圆截面指标）。 设

$$D_0 = 2Z(\Phi_2) - 3Z(\Phi_4) + Z(\Phi_8), \qquad R(t) = \frac{\Phi_2(t)^2 \Phi_8(t)}{\Phi_4(t)^3}.$$

对于 $m \geq 2$，定义

$$D_m^{\pm} = (m-1)[\infty] \pm m D_0.$$

它们的截面格的秩为 m，并且

$$\iota_m(D_m^+) = \iota_m(D_m^-) \geq \left(\frac{1}{8} m^2 - O(m \log m)\right) \log 2.$$

证明。由于 $\deg D_0 = 2-6+4 = 0$，有 $n(D_m^{\pm}) = m-1$，且 $u_{D_m^{\pm}} = R(1+x)^{\mp m}$。乘以 $R(1+x)^m$ 对应的矩阵是对角线元素全为一的三角矩阵。对于行列式为一的矩阵 T，余体积相等给出 $[TJ_m : I] = [J_m : I]$，其中 $I = TJ_m \cap J_m$；应用 T^{-1} 可知，T 和 T^{-1} 具有相同的展开指标。 $R^{\pm m}$ 的喷流的分母仅含 2 的幂，因此定理 A.2 的下界适用于其有理格指标。定理 13.11 将该指标等同于截面指数。 □

13.5 对偶截面及其边界贡献

假设 设 $n(D) \geq 0$。令 $V = \mathbb{Z}[t]_{\leq n(D)}$，并利用 ν_D 将 $S_M(D)$ 视为格 $L \subseteq V$。令

$$C_D : V_{\mathbb{Q}} \longrightarrow J_{M,\mathbb{Q}}, \qquad C_D(p) = j_M(t^{-a} F_D^{-1} p).$$

对于格 B，将 $B^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Z})$ 记作其有理对偶空间中的对象。下方的映射 C_D^* 是代数转置。

命题 13.13 (对偶格)。 在 $V_{\mathbb{Q}}^*$ 中，以下格相等：

$$\boxed{L^\vee = V^\vee + C_D^*(J_M^\vee).}$$

此等式在绕行标架变换下保持不变。

证明。 右侧的每个泛函在 L 上都是整性的，这就证明了一个包含关系。取一个整数 $d > 0$，使得 $dC_D(V) \subseteq J_M$。 C_D 模 J_M 的像是 $(d^{-1}J_M)/J_M$ 的一个子群 H，且 $V/L \simeq H$。 $L^\vee/V^\vee$ 的元素是 V/L 到 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的一个特征。 H 的每个特征都能延拓到有限群 $(d^{-1}J_M)/J_M$：将 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^M$ 的一个子群化为史密斯标准形即可直接得出这一点。后一个群的特征由 $J_M^\vee$ 表示。沿 C_D 拉回便得到反向的包含关系。标架变换将 C_D 替换为 UC_D，其中 U 是由 $(1+x)^k$ 给出的乘法，也是 J_M 的一个整性的幺模自同构。因此 $C_D^* U^*(J_M^\vee) = C_D^*(J_M^\vee)$。 □

命题 13.14 (整喷射对偶商)。 在 $J_{M,\,\mathbb{Q}}$ 令 τ 取 x^{M-1} 的系数，并记 $\langle f, g \rangle_\tau = \tau(fg)$。对于单位 $u \in J_{M,\,\mathbb{Q}}^\times$，令

$$L_- = J_M \cap u^{-1} J_M, \qquad L_+ = J_M \cap u J_M.$$

Then

$$L_-^{\vee_\tau} = J_M + u J_M,$$

并且存在一个有限商

$$0 \longrightarrow L_+ \longrightarrow L_-^{\vee_\tau} \longrightarrow \mathcal{B}_M(u) \longrightarrow 0$$

其阶数满足

$$\log \#\mathcal{B}_M(u) = e_+(uJ_M \mid J_M) + e_+(J_M \mid uJ_M).$$

若乘以 u 的行列式绝对值为一，则该量为 $2e_+(uJ_M \mid J_M)$。特别地，对于 $u = R(1+x)^{\pm m}$ 和 $M = m$，D_m^+ 和 D_m^- 的分子格具有满足下式的对偶商

$$\log \#\mathcal{B}_m(u) \geq \left(\frac{1}{4}m^2 - O(m\log m)\right)\log 2.$$

证明。在基 $1, x, \ldots\ldots, x^{M-1}$ 下，配对矩阵是反对角矩阵，且每个反对角元素都等于一。因此 J_M 关于此配对是幺模的。乘以 u 对 $\langle\ ,\ \rangle_\tau$ 是自伴的，因为喷射环是交换的。将命题 13.13 应用于乘以 u 以及与对偶的这一整同一，可得 $L_-^{\vee_\tau} = J_M + uJ_M$。令 $I = J_M \cap uJ_M$，并令 $S = J_M + uJ_M$。同构 $S/J_M \simeq uJ_M/I$ 给出

$$[S : I] = [uJ_M : I][J_M : I],$$

这就证明了阶数公式。余体积相等，因此当行列式的绝对值为一时，两个指标相等。最后的下界由推论 13.12 得出。 □

代数配对 $\tau(fg)$ 与下面 θ 恒等式中的正定度量是不同的配对。

在 $V_{\mathbb{R}}$ 上赋予正定欧几里得度量，并在所有子格上赋予限制度量。记欧几里得对偶格为 $B^\#$，并且

$$\Theta(B) = \sum_{x\in B} e^{-\pi\|x\|^2}, \qquad h_\theta(B) = \log\Theta(B).$$

定理 13.15（整喷射截面的 θ 对偶）。对于上述格，

$$h_\theta(L^\#) - h_\theta(V^\#) = \iota_M(D) + h_\theta(L) - h_\theta(V).$$

特别地，

$$\iota_M(D) - h_\theta(V) \leq h_\theta(L^\#) - h_\theta(V^\#) \leq \iota_M(D).$$

若系数度量的对角平方长度为 w_j^2，且

$$T := \sum_{j\geq 0} \log\Theta(w_j\mathbb{Z}) < \infty,$$

则此恒等式中的误差属于 $[-T, 0]$，且对 D、M 和 $n(D)$ 一致。

证明。泊松求和给出 $h_\theta(B^\#) - h_\theta(B) = \log \operatorname{covol}(B)$。将其应用于 L 和 V 并作差。它们的余体积比为 $[V\colon L]$。由于 $L \subseteq V$，有 $0 \leq h_\theta(L) \leq h_\theta(V)$。对于对角度量，正交性给出 $h_\theta(V) = \sum_{j=0}^{n(D)} \log\Theta(w_j\mathbb{Z}) \leq T$。 □

具有 $w_j = e^{a|j|}(1+|j|)^s$，$a > 0$ 的环带系数度量满足收敛条件，因为 $\Theta(w_j\mathbb{Z}) - 1 = O(e^{-\pi w_j^2})$ 当 $j \to \infty$ 时成立。因此，推论 13.12 也给出了具有有界误差的二次相对对偶 theta 大小。

13.6 正度量与截面的乘法

设分子空间 $V_n = \mathbb{Z}[t]_{\le n}$ 带有满足以下条件的正定厄米范数

$$\|pq\|_{n+k} \le C\|p\|_n\|q\|_k$$

取一个固定的 常数 $C \ge 1$。将这些范数传递到 $S_M(D)$ 上，方式为 ν_D。那么定理 13.10 给出 s

$$\|fg\|_{D+E} \le C\|f\|_D\|g\|_E.$$

将所有范数按 C 缩放后，乘法便压缩到次数为$n(D)+n(E)$的公共目标度量中。

命题 13.16 (小截面与 theta 单调性)。 使用这样一个压缩范数族，并设

$$\widehat{\Gamma}_M(D) = \{f \in S_M(D) : \|f\|_D \le 1\}.$$

这些集合是有限的。非零的 $g \in \Gamma_M$（E）会诱导一个单射

$$\widehat{\Gamma}_M(D) \longrightarrow \widehat{\Gamma}_M(D+E)$$

以及不等式

$$h_\theta(S_M(D)) \le h_\theta(S_M(D+E)).$$

若常数分子1 的范数固定，则所有满足 n（D） $= 0$ 的D 的小截面计数和 *theta* 大小都有一致上界。

证明。 有界球与有限秩格相交于有限多个点。乘以 g 是单射且不增大范数，因此给出了所述的单射。源 theta 级数的每一项都不大于目标级数中由其像所对应的项。对于 $n(D) = 0$， $S_M(D)$ 的分子格是 $\mathbb{Z}$ 中常数范数固定的子群，这就证明了最后的断言。

□

13.7 与本原接触的相容性

命题 13.17 （分圆多项式特化后的张量积）。 设 P、Q 是两个不同的首一分圆多项式，且 r、$s \ge 1$。对于任意张量次数 m、n，存在一个自然等价

$$\left(\mathscr{L}_v^{[m]} \otimes_A A/(P^r)\right) \otimes_A^{\mathbb{L}} \left(\mathscr{L}_v^{[n]} \otimes_A A/(Q^s)\right) \simeq \mathscr{L}_v^{[m+n]} \otimes_A A/(P^r, Q^s).$$

最终系数群是有限群，其阶为 $|\mathrm{Res}(P,Q)|^{rs}$。

证明。 绕数系数线是可逆的，因此可以将它们的张量积移至导出系数张量积之外。模 $A/(P^r)$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的无挠模，乘以Q^s 是单射，因为在与 $\mathbb{Q}$ 张量化后它是可逆的。因此，其两项分解在张量积后没有负次同调。其余核是 $A/(P^r, Q^s)$，其行列式为 $\mathrm{Res}(P,Q)^{rs}$。

□

14 本原接触与多项式截面

令 $S = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$。

定义 14.1。 对于常数项为 ± 1 且 $r \ge 1$ 的首一多项式 P，定义整系数增厚

$$M(P,r) = \mathrm{cofib}(P(t)^r : HS \longrightarrow HS) \simeq H(S/(P^r)).$$

F或对于不同的分圆多项式 $P = \Phi_u$、 $Q = \Phi_v$，记 $d = \deg P$ 和 $e = \deg Q$.

定理 14.2（二次接触指标）。对于 $r,\ s\ge 1$,

$$M(P,r)\otimes^{L}_{HS} M(Q,s)\simeq H(S/(P^r,Q^s)),$$

且右侧的群是有限群，其中

$$\boxed{\log \#S/(P^r,Q^s)=rs\log|\operatorname{Res}(P,Q)|.}$$

存在一个截面乘法表示

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}[t]_{<se}\oplus\mathbb{Z}[t]_{<rd}\xrightarrow{(A,B)\mapsto P^rA+Q^sB}\mathbb{Z}[t]_{<rd+se}\longrightarrow S/(P^r,Q^s)\longrightarrow 0. \tag{48}$$

证明。导出张量积和指标由命题13.17在零张量次数下推出。映射 (48) 是方形西尔维斯特映射。由互素性和次数界可知，其核为零。除以首一 P^r 可知，其余核与该商相同。由于 t 模任一多项式均可逆，局部化不会增加任何关系。

□

式 (48中的空间都是普通无挠多项式截格。齐次化通过带标记的射影紧化$\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$上的截面实现该映射。坐标 t 将这些截面与绕行源的带标记劳朗系数实现相对应。

推论 14.3（中心化素数系数）。对于互不相同的正整数 u,v，定义对称量

$$J(u,v)=\frac{\log|\operatorname{Res}(\Phi_u,\Phi_v)|}{\sqrt{\varphi(u)\varphi(v)}}.$$

若 $u<v$，则这是 为零，除非 $v/u=p^a$ 对某个素数 p。若 $v=up^a$ 且 $p\mid u$，则 $J(u,v)=(\log p)p^{-a/\ 2}$.

证明。圆分多项式结式公式为 $|\operatorname{Res}(\Phi_u,\Phi_v)|=p^{\varphi(u)}$（素数幂情形），否则为1 [9, 定理 9]。对于 $u=1$，这是求值 $|\operatorname{Res}(\Phi_1,\Phi_v)|=\Phi_v(1)$，由 [9, 引理4]给出。对于 $p\mid u$，$\varphi(up^a)=p^a\varphi(u)$。

□

15 对偶接触格与一个二次 theta 律

设 $B_r=\mathbb{Z}[t]/P^r$。这些元素

$$t^jP^k,\qquad 0\le j<d,\quad 0\le k<r$$

构成一个整基：通过 P 的逐次首一多项式除法，可同时证明生成性与线性无关性。为其配备欧几里得度量，使该基成为标准正交基。令$L_{r,s}=Q^sB_r$，并取其欧几里得对偶$L^*_{r,s}$（于 $B_r\otimes\mathbb{R}$中）。对于欧几里得格 L，记

$$\Theta(L)=\sum_{x\in L}e^{-\pi\|x\|^2},\qquad h_\theta(L)=\log\Theta(L),\qquad \vartheta_{\mathbb{Z}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2}.$$

定理 15.1（接触格的 θ 恒等式）。接触格满足

$$h_\theta(L^*_{r,s})-h_\theta(L_{r,s})=rs\log|\operatorname{Res}(P,Q)|, \tag{49}$$

$$rs\log|\operatorname{Res}(P,Q)|\le h_\theta(L^*_{r,s})\le rs\log|\operatorname{Res}(P,Q)|+rd\log\vartheta_{\mathbb{Z}}. \tag{50}$$

特别地，在 $r=s=m$ 中，二次系数就是接触数，余项为 $O_P(m)$。

证明。定理 14.2 给出协体积$(L_{r,s})=[B_r:\ L_{r,s}]=|\operatorname{Res}(P,Q)|^{rs}$。泊松求和给出 $\Theta(L^*)=\operatorname{covol}(L)\Theta(L)$，从而证明了 (49)。由于 $L_{r,s}\subset B_r$ 且标记基是正交归一的，$1\le\Theta(L_{r,s})\le\vartheta_{\mathbb{Z}}^{rd}$。这证明了 (50)。将对数 θ 用作截面大小，是算术泊松对偶的通常格形式 [36, 命题 1 和 §8]；此处的二次系数来自加厚源指标。

□

命题 15.2（完美接触对偶）。设 $F=P^{r}$ 的次数为 n，并令 $\tau\colon\ B_r\to\mathbb{Z}$ 取 t^{n-1} 在首一余式中的系数。则 $(b,c)\ \mapsto\ \tau(bc)$ 是一个幺模对称配对。在 $A=B_r/Q^sB_r$ 上，

$$\lambda(\bar b,\bar c)=\tau(bc/Q^s)\pmod{\mathbb{Z}}$$

是一个取值于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的完美对称配对。

证明。在单项式基下，当 $i+j<n-1$ 时，矩阵元素 $\tau(t^it^j)$ 为零；当 $i+j=n-1$ 时为一，因此其行列式为 ±1。乘以 Q^s 对于此配对是自伴的，并且 $\bar{\ }$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可逆。因此，改变任一提升都会使 λ 改变一个整数。若 $\lambda(b,\ -)=0$，则幺模性意味着 $b/Q^s\in B_r$，从而证明非退化性。两个有限群的阶相等，因此诱导到特征对偶的映射是同构。 □

在将 $t\mapsto t^{k}$ 同时代换为 $k\ge1$ 后，标记基分裂为 k 个剩余类块。theta 和与指标都是相应基量的乘积；它们的对数乘以 k。这是关于指定标记基的度量陈述。

16 支集接触与模数数据

令 $S=\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ 和 $X=\operatorname{Spec}S$。这是标记绕行坐标的整系数实现。对于不同的分圆多项式 P、Q 以及整数 r、$s\ge1$，置 $T=V(P,\ Q)$，并置$A_{r,\,s}=S/(P^{r},\ Q^{s})$。记 $K_0^{T}(X)$ 为 X 上上同调支集包含于 T 的完美复形的格罗滕迪克群。

命题 16.1（带支撑接触类）。P^{r}、Q^{s} 的 *Koszul*复形表示 $A_{r,\,s}$ 于 $K_0^{T}(X)$ 中。于是有

$$[A_{r,s}]=rs[A_{1,1}],\qquad\sum_{x\in T}\operatorname{length}_{S_x}(A_{r,s,x})\log\#\kappa(x)=rs\log\lvert\operatorname{Res}(P,Q)\rvert.$$

该类在 $K_0(X)$ 中的像为零。此外，$\mathrm{CH}^{2}(X)=0$。

证明。两个多项式构成正则序列：$S/(P^{r})$ 在 $\mathbb{Z}$ 上是自由的，而 Q^{s} 在其有理化上可逆，因此是非零因子。于是得到 Koszul 分解。依次按 P 和 Q 的幂进行过滤，得到 rs 个同构于 $S/(P,Q)$ 的子商。每个模都有有限自由分解，因此带支撑的加性成立。算术度是有限模的阶的对数，其计算见定理 14.2。忘却支撑后得到交错类$[S]-2[S]+[S]=0$。X 的每个闭点都具有 $(p,\,f(t))$ 的形式，其中 $f\neq t$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上不可约。在竖直曲线 $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_p[t,t^{-1}]$ 上，有理函数 f 的除子正是该点，重数为一。因此，每个余维二循环都与零有理等价。

□

16.1 标记坐标中的幂零模数

令 $x=t-1$、$B_m=\mathbb{Z}_2[x]/(x^{m})$ 和 $A_m=\mathbb{Q}_2[x]/(x^{m})$。对于 $m\ge3$，考虑

$$R(t)=\frac{\Phi_2(t)^{2}\Phi_8(t)}{\Phi_4(t)^{3}}.$$

分子和分母的次数均为六，且 $R(1)=1$。

命题 16.2（具有平凡转移行列式的相对单位）。在 A_m 中，增广为一的单位 $R(1+x)^{m}$ 是非平凡的，并且

$$\log R(1+x)^{m}=\frac{3m}{4}x^{2}+O(x^{3}).$$

其作为 $\mathbb{Q}_2$-空间上的乘法算子的行列式 A_m 为一。对于 $\mathbf{P}^{1}_{\mathbb{Q}_2}$上的模数 $D_m=m[1]$，

$$\operatorname{Pic}^{0}(\mathbf{P}^{1}_{\mathbb{Q}_2},D_m)\simeq1+x\mathbb{Q}_2[x]/(x^{m}).$$

因此，相对单位记录了转移行列式未能保留的信息。

证明。 利用 $\Phi_2 = t+1$、 $\Phi_4 = t^2+1$、 $\Phi_8 = t^4+1$，泰勒展开得到 $R(1+x) = 1+3x^2/4+O(x^3)$。对数是一个有限的幂零级数。其显示的系数在 $\mathbb{Q}_2$ 中非零。在有序单项式基下，乘以一个增广为一的单位所对应的矩阵是三角矩阵，且所有对角线元素均为一。模数的单位与皮卡序列给出

$$\mathrm{Pic}^0(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}_2}, D_m) = A_m^{\times}/\mathbb{Q}_2^{\times}.$$

每个单位都唯一地分解为其常数项与一个增广为一的单位。这证明了该识别。 $K_1(A_m) \to K_1(\mathbb{Q}_2)$ 的核是同一个增广为一的单位群，因为这些都是交换局部环。

□

这里 Pic^0 是次数为零的线丛群，这些线丛在 D_m 上带有平凡化。这是 [4, 定理4.1 和推论4.2] 中讨论的权重一模数构造。此处采用该构造，是为了保留 $t = 1$ 处选定的喷流。在整性素数 2 处，分圆除子与该模数相交；整性接触由 B_m 及其在 A_m 中的分式格记录。

16.2 接触除子的算术交

将 P^r， Q^s 在 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ 上齐次化，得到有限交 Z。设 $a = r$ 的次数为 P， $b = s$ 的次数为 Q。向量丛复形

$$[\mathcal{O}(-a-b) \longrightarrow \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \longrightarrow \mathcal{O}]$$

其唯一的上同调为最高次数上的 O_Z。用 $\mathsf{O}(a+b-1)$ 扭转可恢复（48），因为当 $i = 0$ 时， $H^i(\mathsf{O}(-1)) = 0$。为它的三个向量丛项赋予光滑且共轭不变的厄米度量。算术陈特征恒等式 [23, 定理 1.1，第 614] 页，将这个一般处正合复形的缺陷表示为一个有限支集类和一个 Bott–Chern形式。对于这个 Koszul复形，有限部分的次数为 $\log \#\Gamma(Z, \mathsf{O}_Z)$ [23,，见公式（2.8）和引理2.2，第617–618]页。定理 14.2 将此次数计算为 $rs \log |\mathrm{Res}(P, Q)|$。该形式记录了这些相同丛上的度量。

17 除子截面的 Hermitian 度量

分子识别 ν_D 将公共的正定 Hermitian 度量传递到除子截面格 $S_M(D)$。

17.1 与张量相容的度量

设 $V_n = \mathbb{C}[t]_{\le n}$，其中 $n \ge 0$。齐次化将 V_n 与二元次数为n 的齐次多项式对应起来。定义

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \right\|^2_{B,n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^{-1} |a_j|^2. \tag{51}$$

这是对称张量度量的 Bombieri–Weyl 归一化；它与反极归一化的关系为 $\|P\|^2_{B,\ n} = \|P\|^2_{\mathrm{ap}}/n!$ [1, §2，公式 (10) 及其后的公式]。

命题 **命题 17.1**（乘法与 Fubini–Study度量）。 对于 $p \in V_n$ 和 $q \in V_m$，

$$\|pq\|_{B,n+m} \le \|p\|_{B,n} \|q\|_{B,m}. \tag{52}$$

所有这些 范数都由 $O_{\mathbb{P}^1}(1)$ 上的一个 *Fubini–Study*度量的张量幂得到 ：

$$\|p\|^2_{B,n} = (n+1) \int_{\mathbb{C}} \frac{|p(z)|^2}{(1+|z|^2)^n} \frac{dA(z)}{\pi(1+|z|^2)^2}. \tag{53}$$

因子 $n+1$ 使截面范数归一化。

证明。 在 $\mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2$中，单项式 $X^{n-j}Y^j$ 是 $\binom{n}{j}$ 个正交归一初等张量的平均值，因此其范数平方为 $\binom{n}{j}^{-1}$。乘法是张量积的正交对称化，从而证明了（52）。旋转使单项式在（53）中正交，而贝塔积分给出

$$(n+1)\int_0^\infty \frac{u^j}{(1+u)^{n+2}}\,du = \frac{j!(n-j)!}{n!}.$$

这证明了整性的积分公式。 □

对于 $n(D) \ge 0$，赋予 $f \in S_M(D)$ 范数 $\|f\|_D = \|\nu_D(f)\|_{B,\ n(D)}$。分子乘积恒等式给出

$$\|fg\|_{D+E} \le \|f\|_D \|g\|_E. \tag{54}$$

因此，命题 13.16适用于这些格，并在每个目标上取一个度量。对于 Laurent区间$I = [a,b] \cap \mathbb{Z}$，令 $\|t^a p\|_I = \|p\|_{B,\ b-a}$。乘积使用 $I+J$，而 t^k 是从区间 I到$I+k$的等距映射。

17.2 截面格的大小

置 $\Lambda_n = (\mathbb{Z}[t]_{\le n},\ \|\cdot\|_{B,\ n})$。关于格的theta大小和泊松对偶性，请参见 [7, §0.2.4.1、公式 (0.2.3)–(0.2.7)]。

命题17.2 （二次theta大小）。 设 $\vartheta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi k^2}$，

$$0 \le h_\theta(\Lambda_n) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \log \binom{n}{j} \le (n+1)\log \vartheta_{\mathbb{Z}}. \tag{55}$$

因此，

$$h_\theta(\Lambda_n) = \frac{1}{4}n^2 + O(n\log(n+2)).$$

证明。 这些单项式构成正交整基。因此

$$\log \operatorname{covol}(\Lambda_n) = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \log \binom{n}{j}.$$

对偶格具有长度为 $\binom{n}{j}^{1/2} \ge 1$ 的正交基，因此其theta对数介于零与 $(n+1)\log\vartheta_{\mathbb{Z}}$ 之间。泊松求和给出 $h_\theta(\Lambda_n) = -\log\operatorname{covol}(\Lambda_n) + h_\theta(\Lambda_n^*)$，从而证明了（55）。对于渐近情形，写作

$$\sum_{j=0}^{n}\log\binom{n}{j} = (n+1)\log(n!) - 2\sum_{j=0}^{n}\log(j!).$$

利用斯特林估计并求和，或在 $[0,1]$，上对 $-x\log x-(1-x)\log(1-x)$ 积分，得到$n^2/2 + O(n\log(n+2))$。 □

该构造可推广到数域 K。赋予 $\mathcal{O}_K[t]_{\le n}$ 范数

$$\|p\|_{K,n}^2 = \sum_{\sigma : K\hookrightarrow\mathbb{C}} \|\sigma(p)\|_{B,n}^2,$$

同时包含共轭嵌入。乘法仍然是压缩的，因为对于非负的A_σ，B_σ，

$$\sum_\sigma A_\sigma B_\sigma \le \Big(\sum_\sigma A_\sigma\Big)\Big(\sum_\sigma B_\sigma\Big).$$

取 $d = [K:\ \mathbb{Q}]$，判别式为 Δ_K，余体积为

$$\log\operatorname{covol}(\mathcal{O}_K[t]_{\le n}) = \frac{n+1}{2}\log|\Delta_K| - \frac{d}{2}\sum_{j=0}^{n}\log\binom{n}{j}. \tag{56}$$

每个 Minkowski 系数格的余体积为 $|\Delta_K|^{1/2}$，实维数为 d；乘以 $\binom{n}{j}^{-1/2}$即可证明（56）。在逐坐标复共轭意义下，经等距映射后，其欧几里得对偶是以下各项的正交和：$\binom{n}{j}^{1/2}\mathcal{O}_K^\vee$，其中 $\mathcal{O}_K^\vee$是迹对偶格。其 theta 和至多为 $\Theta(\mathcal{O}_K^\vee)^{n+1}$，因此由泊松求和可得 $h_\theta = dn^2/4 + O_K(n\log(n+2))$。结合有限处的乘法系数高斯范数，这些范数便在每个截面格上给出一个阿代尔度量。

17.3 接触映射的行列式范数

设 $P, Q \in \mathbb{Z}[t]$ 是互不相同的首一分圆多项式，设 $r, s \geq 1$，并令 $a = r\deg P$、$b = s\deg Q$$n = a + b$。在 Sylvester映射的源空间和目标空间上赋予

$$A_{P^r,Q^s} : \mathbb{Z}[t]_{<b} \oplus \mathbb{Z}[t]_{<a} \longrightarrow \mathbb{Z}[t]_{<n}, \qquad (u, v) \longmapsto P^r u + Q^s v,$$

次数分别为 $b-1, a-1, n-1$ 的 Bombieri 度量。定义

$$G(N) = -\sum_{j=0}^{N} \log \binom{N}{j}, \qquad E_B(a,b) = \frac{1}{2}\{G(a+b-1) - G(a-1) - G(b-1)\}.$$

欧几里得格之间的映射的行列式公式给出

$$\log \| \det A_{P^r,Q^s} \| = rs \log |\operatorname{Res}(P,Q)| + E_B(a,b). \tag{57}$$

如果 $C_P = \|P^r\|_{B,a}$ 和 $C_Q = \|Q^s\|_{B,b}$，则

$$rs \log |\operatorname{Res}(P,Q)| + E_B(a,b) \leq \frac{n}{2} \log(C_P^2 + C_Q^2). \tag{58}$$

事实上，这两个乘法映射的范数至多为 C_P，C_Q，因此它们的直和范数至多为 $(C_P^2 + C_Q^2)^{1/2}$，其行列式范数则由该 n 次幂所界定。

18 Laurent截面的希尔伯特空间

这里 t 是标记的劳朗坐标。

定义 18.1。对于 $a > 0$ 和 $s > 1/2$，令

$$w_{a,s}(n) = e^{a|n|}(1 + |n|)^s, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

令 $\mathcal{H}_{a,\,s}$ 由满足以下条件的 Laurent级数 $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n$ 组成：

$$\|f\|_{a,s}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_{a,s}(n)^2 |c_n|^2 < \infty. \tag{59}$$

Hermitian内积关于第一个变量是线性的。

Put

$$K_s = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + |n|)^{-2s} \right)^{1/2}, \qquad C_s = 2\max(1, 2^{s-1}) K_s.$$

定理 18.2 (乘积与整系数 theta 大小)。*$H_{a,\,s}$ 中的每个元素在 $e^{-a} \lhd |t| < e^a$ 上全纯，并在其闭包上连续。Laurent 多项式稠密，且逐点乘法连续，满足*

$$\|fg\|_{a,s} \leq C_s \|f\|_{a,s} \|g\|_{a,s}. \tag{60}$$

对合 $f^\star(t) = \overline{f(1/\bar{t})}$ 是等距的。整系数 *Laurent* 模 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 具有有限的 *theta su* m

$$\Theta_{a,s} = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi w_{a,s}(n)^2 k^2} \right) < \infty. \tag{61}$$

证明。 由柯西–施瓦茨不等式可得 $\sum_n |c_n t^n| \le K_s \|f\|_{a,s}$，并且在闭环带上一致收敛。导数级数在更小的环带上收敛。截断证明了稠密性。

记 $A_n = e^{a|n|}|c_n|$ 和 $B_n = e^{a|n|}|d_n|$ 为两个系数序列。指数权具有次乘性，并且

$$(1+|k+\ell|)^s \le c_s\{(1+|k|)^s + (1+|\ell|)^s\}, \qquad c_s = \max(1, 2^{s-1}).$$

因此，Young 的 $\ell^2 * \ell^1 \to \ell^2$ 不等式给出乘积范数的上界：

$$c_s\big(\|(1+|n|)^s A_n\|_2 \|B\|_1 + \|A\|_1 \|(1+|n|)^s B_n\|_2\big).$$

柯西–施瓦茨不等式给出每个 ℓ^1 范数的上界： K_s 乘以其加权 ℓ^2 范数，从而证明了（60）。偶权使系数共轭和反转成为等距变换。

整系数有限范数序列的支集有限，因为 $w_{a,\,s}(n) \to \infty$。在有限区间上应用单调收敛可得（61）。其有限性可由以下界求和得出，在 $x = w_{a,\,s}(n)$，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi x^2 k^2} - 1 \le \frac{2e^{-\pi x^2}}{1-e^{-\pi x^2}}.$$

□

整系数模是其有限 Laurent 张成空间（配备诱导度量）的有向并；按 [6,推论 5.8.3 的术语，这是一个归纳欧几里得格；§6.1，（6.1.1）–（6.1.3）]。

系数锥 $c_n \ge 0$ 是闭的、适当的，并且在乘法和框架平移下保持不变。对于每个整数 $h \ge 1$，幂拉回将其映射到 $\mathcal{H}_{a/h}$ 中相应的锥，s （命题 18.5）。模 L的系数收集将其映射到 $\mathbb{R}[C_L]$中的锥上。这些结论可逐系数验证，并由乘法的连续性得到。

在 $\mathbb{Z}[t]_{\le N}$ 上，对角度量变换给出

$$\|p\|_{B,N}^2 \le \|p\|_{a,s}^2 \le e^{2aN}(N+1)^{2s}2^N \|p\|_{B,N}^2. \tag{62}$$

从 Bombieri 度量到环带系数度量的对数余体积变化为

$$\frac{aN(N+1)}{2} + s\log((N+1)!) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N} \log\binom{N}{j}. \tag{63}$$

两个公式都由平方长度比 $w_{a,\,s}(j)^2\binom{N}{j}$ 得出。每个整系数 Laurent 区间的环带 theta 大小至多为 $\log \Theta_{a,\,s}$。

18.1 有界除法与喷流商空间

引理 18.3 （在单位圆上的点处进行除法）。 设 $|\zeta| = 1$，且令 $f \in H_{a,\,s}$ 满足 $f(\zeta) = 0$。则 $q = f/(t-\zeta)$ 属于 $H_{a,\,s}$ 并且

$$\|q\|_{a,s} \le \frac{1}{1-e^{-a}}\|f\|_{a,s}. \tag{64}$$

证明。 写出 $f = \sum f_n t^n$。商系数为

$$q_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k>n} \zeta^{k-n-1} f_k, & n \ge 0, \\ \displaystyle -\sum_{k\le n} \zeta^{k-n-1} f_k, & n < 0. \end{cases} \tag{65}$$

这些和绝对收敛，并且 $f(\zeta) = 0$ 在零次时也给出 $f_n = q_{n-1} - \zeta q_n$。对于 $n \ge 0$，$w(n)/w(n+\ell) \le e^{-a\ell}$（$\ell \ge 1$）；对于 $n < 0$，$w(n)/w(n-\ell) \le e^{-a\ell}$（$\ell \ge 0$）。杨氏不等式分别将两个不相交的系数部分界定为 $(e^a-1)^{-1}$ 和 $(1-e^{-a})^{-1}$。将它们的平方界相加即可证明 (64)，而 Laurent 恒等式则确定了全纯商。

□

定理 18.4 (闭圆分圆理想)。 设 $P(t)$ 是一个次数为 d 的首一多项式，其所有根都位于单位圆上，并且设 $r \geq 1$。对于 P的每个不同根 ζ，设 m_ζ 为其重数。则

$$P^r \mathcal{H}_{a,s} = \{f \in \mathcal{H}_{a,s} : f^{(j)}(\zeta) = 0 \quad (0 \leq j < r m_\zeta,\ P(\zeta) = 0)\}. \tag{66}$$

此理想是闭的。乘以 P^r 的映射是单射，在其像上有有界逆，且其逆的范数至多为 $(1 - e^{-a})^{-rd}$。对 rd 个喷流进行联合求值可诱导出一个线性同构

$$\mathcal{H}_{a,s}/P^r \mathcal{H}_{a,s} \longrightarrow \mathbb{C}^{rd}.$$

该商空间具有正定 *Hermitian* 内积，以及由逐点乘法诱导的连续乘法。

证明。 在 $|\zeta| = 1$ 处的每个导数求值都是连续的：其系数界由下式得出

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n(n-1)\cdots(n-j+1)|^2 w_{a,s}(n)^{-2} < \infty.$$

从左到右的包含映射（66）由求导可得。反过来，将 P^r分解为其 rd 个一次因子，并依次应用引理 18.3 。每次除法后，剩余零点都具有所需的重数。这也证明了逆映射的范数界。（ 66 ）右侧是有限个闭核的交。次数低于 rd的多项式的埃尔米特插值证明了联合喷流映射的满射性。闭子空间的希尔伯特商空间是正定的；利用最小范数提升和（60），其乘法是有界的。

□

商内积有明确的表达式。用 $\nu = (\zeta, j)$ 为喷流坐标编号，并令

$$b_{\nu,n} = n(n-1)\cdots(n-j+1)\zeta^{n-j}, \qquad K_{\nu\mu} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{\nu,n} \overline{b_{\mu,n}} w_{a,s}(n)^{-2}.$$

联合求值 J 的满射性使 $K = JJ^*$ 正定。喷流向量 v 的最小范数提升为 $J^* K^{-1} v$ ，其平方商范数为 $v^* K^{-1} v$。

若上面的多项式 P 具有整数系数，且常数项为 ± 1，则格 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(P^r)$ 嵌入此喷流商空间。

18.2 有限覆盖与甲板变换不变度量

命题 18.5 (幂拉回与平均化)**.** 对于整数 $h \geq 1$，映射 $F_h f(t) = f(t^h)$满足

$$\|F_h f\|_{a/h,s} \leq h^s \|f\|_{a,s}.$$

平均化映射

$$A_h \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{hn} t^n$$

是从 $H_{a/h,\ s}$ 到 $H_{a,\ s}$的压缩，其中 $A_h F_h = 1$。算子 $F_h A_h$ 是投影到指数可被 h 整除的项上的正交投影，且等于 $h^{-1} \sum_{\zeta^h = 1} f(\zeta t)$。这些映射在幂覆盖塔下复合。

证明。 对于拉回，指数因子保持不变，而 $1 + h|n| \leq h(1 + |n|)$ 控制 Sobole夫因子。对于 A_h, $w_{a,\ s}(n) \leq w_{a/h,\ s}(hn)$，由此可证压缩。其余断言逐个系数即可得出。

□

对于 b，$k \in \mathbb{Z}$，权重为 $w_{a,\ s}(n-b)$ 时，乘以 $t^k$is 在框架中心 b到 $b+k$之间是等距的；乘积会将中心相加。

命题 18.6（有限绕行覆盖上的度量）。对于 $L \geq 1$，通过将系数模 L 收集，令 $H_{a,\ s}/\ (t^L-1)$ $H_{a,\ s}$ 与$\mathbb{C}[C_L]$ 对应。置

$$\beta_{L,r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{a,s}(r+kL)^{-2}, \qquad 0 \leq r < L.$$

对于剩余系数 $b_0, \ldots, b_{L-1}$，商范数为

$$\|b\|_{\mathrm{quot}}^2 = \sum_{r=0}^{L-1} \frac{|b_r|^2}{\beta_{L,r}}. \tag{67}$$

其在 L 覆盖变换下的平均值为

$$\frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} \|t^j b\|_{\mathrm{quot}}^2 = c_L \sum_{r=0}^{L-1} |b_r|^2, \qquad c_L = \frac{1}{L}\sum_{r=0}^{L-1} \beta_{L,r}^{-1}. \tag{68}$$

将这个平均后的范数平方乘以 L/c_L，便得到有限覆盖上的覆盖变换不变的平方范数 $L\sum_r |b_r|^2$。

证明。由加权柯西–施瓦茨不等式可知，系数收集是连续的。其核由在所有 L次单位根处取值为零的函数组成，因此定理 18.4 将其核认定为 $(t^L-1)\mathcal{H}_{a,\ s}$。对于固定的剩余类 r，在满足 $\sum_k c_{r+kL} = b_r$ 的条件下，使 $\sum_k w_{a,\ s}(r+kL)^2|c_{r+kL}|^2$ 最小。由柯西–施瓦茨不等式可知，最小值为 $|b_r|^2/\beta_{L,\ r}$，并在以下情形下取到

$$c_{r+kL} = \frac{b_r w_{a,s}(r+kL)^{-2}}{\beta_{L,r}}.$$

剩余类彼此正交，从而证明了（67）。覆盖变换循环地置换剩余系数；因此，平均化会将每个系数的权重替换为它们的算术平均值，从而得到（68）。

□

19 加权泊松商与零点求值

令 $d = [K:\ \mathbb{Q}]$，并令 $\sigma_K(r)$ 为有限坐标全为 1、阿基米德坐标为 $r^{1/d}$ 的阿代尔类。由于阿基米德次数之和为 d，有 $|\sigma_K(r)| = r$，从而得到 $C_K \simeq C_K^1 \times \mathbb{R}_{>0}$。固定 χ 作为 C_K^1 上的连续酉特征，并将其在 $\sigma_K(\mathbb{R}_{>0})$ 上平凡延拓；将 C_K^1 的哈尔测度归一化为总质量 1。我们使用特征分量 $f(k\sigma_K(r)) = \chi(k)^{-1} f(\sigma_K(r))$。记 $t =$ 为 $\log\ |c|$，并通过 $g(t) = e^{t/2} f(\sigma_K(e^t))$ 将径向函数居中。居中后，特征分量中的卷积变为 t 上的普通卷积，而对合 (45) 变为$g^\sharp(t) = g(-t)$。

设 E_∞ 为由光滑函数构成的空间，这些函数及其所有导数在两个方向上都比任何指数函数衰减得更快；其弗雷歇拓扑由所有正整数指数权和 Schwartz 半范数给出。设 $P \subset E_\infty$ 为所选特征分量中 $\theta H_\cap$ 的中心化像。等变性给出平移不变性，而 P 是一个卷积理想 [28, §5.6, 第 45]页。对于 $f = \Sigma\Phi$ 两个矩都为零的情形，(37)给出 $f^\sharp = \Sigma\widehat{\Phi}$。$\widehat{\Phi}$的两个矩均为零，且 χ的酉性使 $f^\sharp$ 仍处于同一分量中。因此 P 是 $\sharp$-不变的。令

$$F_g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zt} g(t)\, dt.$$

theta 像的梅林恒等式表明，完备化的 Hecke L函数 $L(s,\ \chi)$在开临界带上是一个因子。因此，若 ρ 是 $L(s,\ \chi)$的一个阶数为 m_ρ的非平凡零点，则

$$F_p^{(j)}(\rho - \tfrac{1}{2}) = 0 \quad (p \in P,\ 0 \leq j < m_\rho). \tag{69}$$

This 这是谱计算证明中使用的整除性 [28,定理 5。11]。

数域 K 是任意的。对于平凡特征，这些是戴德金ζ函数 ζ_K 的非平凡零点。更一般地，C_K 上的每个连续酉Hecke特征都具有形式 $\chi|\cdot|^{i\tau}$，其中 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 χ 已按上述方式归一化。纯范数扭曲会使零点沿垂直方向平移。因此，此处考察的特征分量涵盖了除这种平移外的酉Hecke族，包括无限阶特征 [28,第 1–2 页及定理 5.11]。

定义 19.1（固定权重泊松商）。对于 $\alpha > 1/2$，令

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{g \in C^\infty(\mathbb{R}) : p_{N,j}(g) < \infty \text{ for all } N, j \geq 0\}, \\ p_{N,j}(g) &= \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{\alpha|t|}(1+|t|)^N |g^{(j)}(t)|, \\ P_\alpha &= \overline{P}^{E_\alpha}, \qquad Q_\alpha = E_\alpha/P_\alpha. \end{aligned}$$

拓扑　由这些半范数定义在 E_α 上的拓扑，而 Q_α 上的拓扑是商拓扑　　y.

定理 19.2（有限零点射流的保持）。以下陈述成立。

（i） E_α 和 Q_α 是核弗雷歇空间。C_c^∞（$\mathbb{R}$）和 E_∞ 在 E_α中均稠密。

（ii）卷积、♯和平滑平移可下降到 Q_α。

(iii) 对于每个实际非平凡零点 ρ 和 $0 \leq j < m_\rho$,

$$\ell_{\rho,j}(g) = \int_{\mathbb{R}} t^j e^{(\rho-1/2)t} g(t)\, dt$$

可下降为 Q_α上的连续泛函。对于任意有限个互异的点对 (ρ, j)，联合求值映射都是满射。

(iv) 自然映射 $Q_\infty = E_\infty/P \to Q_\alpha$ 是连续的，且像稠密。它在连续对偶上的转置是单射，并将每个显示的零点射流送到其原始的求值泛函。

证明。乘以 $\cosh(\alpha t)$ 给出弗雷歇同构 $E_\alpha \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$。事实上，其导数由 $C_j e^{\alpha|t|}$ 控制，而其倒数的导数由 $C'_j e^{-\alpha|t|}$ 控制。莱布尼茨公式证明了两族半范数不等式。完备性和核性随之成立，闭子空间的商也具有核性。

如果 η 是光滑的、紧支撑的，并且在零点附近等于一，那么 $\eta(t/R)g \to g$ 对每个 $p_{N,\,j}$都成立。利用 $p_{N+1,\,j}$ 以及因子 $O(R^{-1})$ 可以控制尾部；截断函数的导数满足相同的估计，只需使用有限个导数半范数。这证明了稠密性。包含映射 $E_\infty \subset E_\alpha$ 是严格的，$\exp(-\beta\sqrt{1+t^2})$（其中 $\beta > \alpha$）说明了这一点。

不等式

$$e^{\alpha|t|} \leq e^{\alpha|u|} e^{\alpha|t-u|}, \qquad 1+|t| \leq (1+|u|)(1+|t-u|)$$

给出连续卷积估计

$$p_{N,j}(g * h) \leq 2 p_{N+2,0}(g) p_{N,j}(h). \tag{70}$$

这里有 $2 = \int_{\mathbb{R}} (1+|u|)^{-2} du$。选取紧支撑的 $g_n \to g$ 和趋于 $p \in P_\alpha$的 $p_n \in P$。那么$g_n * p_n \in P$并收敛到 $g * p$，从而证明理想性质。对合保持所有半范数。对于 $T_a g(t) = g(t-a)$,

$$p_{N,j}(T_a g) \leq e^{\alpha|a|}(1+|a|)^N p_{N,j}(g).$$

在 a中的微分受下一个导数半范数控制，因此平移作用是光滑的。它的稳定性以及 ♯ 的稳定性从 P 延拓到其闭包。

对于 $z = \rho - 1/2$，有 $|\Re z| < 1/2 < \alpha$，并且

$$|\ell_{\rho,j}(g)| \leq \frac{2j!}{(\alpha - |\Re z|)^{j+1}} p_{0,0}(g). \tag{71}$$

公式（69）和连续性表明，每个泛函都湮灭 P_α。在 C_c^∞上任意有限集泛函之间的线性关系将使

$$\sum_{\rho,j} a_{\rho,j} t^j e^{(\rho-1/2)t}$$

零分布。指数多项式的线性无关性给出 $a_{\rho,\,j} = 0$ 对所有指标均成立。有限维目标空间中不存在消灭该像的非零泛函，由此可证满射性。最后， E_∞ 的稠密性可推出商映射的稠密性及其转置的单射性。□

零点射流的权重无需借助对偶群作用的约定即可读出。由 $R_a = e^{a/2} T_a$，变量替换可得

$$\ell_{\rho,k}(R_a g) = e^{\rho a} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} \ell_{\rho,j}(g). \tag{72}$$

这是作用在泛函上的转置作用；逆变作用则使用 R_{-a}。求值公式描述了作用在每个有限零阶喷流块上的情形。

20 算术绕行曲线

定义 20.1 (算术绕行曲线)。 固定一个数域 K、一个满格 $\Lambda \subset K$、迹特征 ψ_K以及 ϖ_v 处有限处的一致化元。对每个有限处，选取定义 (u_v, χ_v) 7.3所述的剩余框架。与这些数据相关联的算术绕行曲线记为

$$\mathfrak{W}(K, \Lambda, \psi_K; (\varpi_v, u_v, \chi_v)_{v \nmid \infty}),$$

是以下结构化对象：

(i) C_K-空间 Y_K、其开图表 N_v、公共开集 C_K及边界轨道 Z_v；(ii) 主覆盖 Q_v、其有限商，以及对于开子群 $H \subseteq \mathsf{O}_v^{\times}$的覆盖 $\mathsf{Q}_{v,H}$，连同商映射及其有限稳定转移；(iii) 层 $(\mathsf{B}_v, \mathsf{D}_v, \mathsf{L}_v)$、其代数与模映射，以及定义 6.11 的范畴系统 E_S；(iv) 原始接触层及定义 7.8 中选定的直和项 T_{v,u_v}；(v) 对应环谱 $\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}$、同态 $R_S \to \mathscr{A}\mathsf{sph}_K$、来自图-余跨范畴的函子，以及第8节的边界函子；(vi) Schwartz 空间 $\mathsf{S}(\mathbb{A}_K)$、其由定义 4.6 给出的格测试、傅里叶变换、θ 映射，以及定义 10.4 的复形 C_K^{FP}，并带有 $\mathscr{A}_K$的作用；(vii) (29)–(32) 的正规坐标实现映射、定理 11.2 的完备迹，以及定义 12.1 的正规行列式函数；(viii) 分次截面代数 $\mathscr{S}_v$ 及其第13节的有限周期特化，连同系数锥、厄米度量、商映射和加性转移；(ix) 带标记的射影系数实现及其格 $S_M(D)$、分子识别和喷流映射，以及第17节和第18节的 Bombieri 度量和环带系数度量；(x) 固定权商 Q_α，针对每个酉特征分量及 $\alpha > 1/2$，以及第19节中来自相应原始泊松商的映射。

关联映射和系数映射采用前几节中构造的映射。对于有限集结构映射，只要某个赋值属于多个集合S，就对它使用同一个一致化元。

各项运算按以下形式组合在一起。

定理 20.2 (缠绕构造的相容性)。 对于定义 *20.1*中的数据，以下陈述成立。

(i) 在每个赋值覆盖以及 $h\,\mathrm{Cospan}(\mathrm{Corr}_K)$ 中，$C_{\tau,g}$ 的实现保持缝合和指定的有限转移。对于周期 L，相应的置换层为 $\mathrm{Loc}_v(R_L) = \mathbb{S}_{Y_K}[Q_{v,L}]$。

(ii) 两个正规系数提升由下降序列联系起来

$$\mathrm{Loc}_v(E) \xrightarrow{1-t_v} \mathrm{Loc}_v(E) \longrightarrow \Delta_{Y_K}(\mathbb{S}_{\mathrm{aug}} \otimes_R E).$$

该构造与有限集过渡函子相容。

(iii) 在赋值 v 处，所选的角向细化实现了本原接触，其选定的指标化纤维自同态环在奇剩余特征下为 k_v，在剩余特征为二时为 $W_2(k_v)$。

（*iv*）对于每个有限集 S，扩张到 $\mathscr{A}_K^{\mathrm{sph}}$ 会通过 *Amitsur* 全化（*23*）恢复 R_S-模及其映射谱。同样的断言也适用于指标化有限循环层级。（*v*）正规覆盖的过渡函数是 *Schwartz* 实现中的赋值平移。*Laurent* 源算子和平滑核的作用具有完整的配对（*47*），其中包含其实项和复项。（*vi*）张量次数在 $\mathscr{S}_v$ 上给出一个下降截面乘积。在有限周期下，系数锥是适当的，而所显示的 *Hermitian* 范数使乘法具有压缩性。商映射是压缩映射；归一化转移是等距乘法嵌入，并具有指定的幂等单位像。（*vii*）在每个标记射影系数实现上，整喷射截格相乘为 $S_M(D+E)$，且每个非零乘子都是单射。对于 $n(D) \geq 0$，命题 *13.13* 和定理 *13.15* 给出对偶格及相对 *theta* 恒等式。当 $n(D) = M-1$ 时，定理 *13.11* 给出该指标。

(viii) 在环带系数完备化中，分圆多项式在其消失理想上的除法是有界的。有限周期商度量经平均化和归一化后，得到甲板变换不变系数度量。对于任意有限个 N 互异的零点喷射 $\ell_{\rho,\,j}$ 满足 $0 \leq j < m_\rho$，求值映射 $Q_\alpha \to \mathbb{C}^N$ 连续且满射。

证明。 图实现及其余纤维序列见命题 3.4。在 Q_v上的伴随下降给出定义5.5中的赋值实现；有限扭子上的构造与定义 3.5中的商映射与转移映射相容。命题 8.6 给出对应实现。周期层的识别及正规序列由定理 6.10得出，而命题 6.12 给出其在位点集上的相容性。

命题7.4 的循环细化和命题7.9 的选定层给出按指标的自同态断言。Amitsur 陈述见定理 8.5，其中包括其有限层基变换。命题 9.1 和 9.2 确定了正规过渡函数和 Schwartz 过渡函数。最后，命题 11.5 通过卷积计算复合源作用，定理 11.2 则计算其迹。命题 13.2 、 13.4 和 13.5 证明分次有限周期断言。定理 13.10给出满足喷射条件的截面乘积，其后关于指标与对偶的陈述给出所述格恒等式。定理18.4和19.2证明了两个商断言。命题18.6计算有限覆盖度量。

□

截面度量和 theta 恒等式涉及指定的系数格。将它们的配对与完整的算术迹相识别，并在其零表示上获得正性，仍是一个开放问题。与相反扭曲截面的对偶性比较必须纳入命题 13.14 中计算出的有限商。

21 算术绕行曲线的层上同调

对于空间 Y_K 以及第 5 节的赋值覆盖，我们构造了一个层 $\mathscr{F}_K$，用于比较中间傅里叶–Poisson 表示与曲线的上同调。有限图使用测试函数上的赋值作用。在每个阿基米德边界处，粘接映射是命题 10.3 的阿德尔泊松求和映射。复 C_K-模的比较形式为

$$H^1(C_K^{\mathrm{FP}}) \xrightarrow{\ \iota\ } H^1(Y_K, \mathscr{F}_K) \xrightarrow{\ r_{v,w}\ } H^1(C_K^{\mathrm{FP}})^{C_K^1}.$$

它们的复合是 C_K^1 的系数作用的平均。第一个映射使用所有图表。第二个映射使用一个有限处 v 和一个阿基米德处 w。

21.1 层上同调中的中间傅里叶–泊松项

置 $C = C_K$， $C^1 =$核 $|\cdot|$， $E = H_-$， $M = H_\cap$， $P = \theta M$以及 $Q = E/P$。因此 $[M \xrightarrow{\theta} E]$在零次和一次中，是定义10.4中的傅里叶–泊松复形的中间直和项。在这一比较中，普通开集位上的系数是复向量空间。记 ΔA 为纤维为 A 的常值层，并将 $\mathrm{LC}(S,\ A)$ 记为在每个点的某个邻域上 $S \to A$ 恒定的函数。

根据定义5.1 存在一个开覆盖 $Y_K = U_f \cup U_a$，其中$U_f = \bigcup_{v\nmid\infty} N_v$和$U_a = \bigcup_{w|\infty} N_{w\circ}$ 它们的交集为 C。在有限图上 N_v 取定义5.5 中的层，其对应于纤维为 E 且甲板变换生成元为$T_v = \lambda_{j_v(\varpi_v)}$的赋值覆盖。其穿孔框架为（7）。在无穷图表上，对于j_w： C，$\to N_w$，使用层的推出

$$\Delta M \ \amalg_{j_{w!}\Delta M}\ j_{w!}\Delta E.$$

这些箭头分别是限制与零延拓的余单位，以及由 θ诱导的映射。现在，每个图表在 C上限制为 ΔE。通过恒等式粘合，得到 Y_K上的 $\mathscr{F}_K$。对于 $a \in C$，比较使用基底上的 a平移，以及其在系数空间上的给定作用。此定义良好，因为该作用与每个 T_v 相交换，并与 θ相互交织。

命题 21.1. 在复向量空间的导出范畴中存在一个态射 $[M \xrightarrow{\theta} E] \to R\Gamma(Y_K, \mathscr{F}_K)$。在一阶上，它诱导出一个 C-等变单射

$$\iota : Q \longhookrightarrow H^1(Y_K, \mathscr{F}_K).$$

设 $G = C^1/(C^1)^\circ$，并设 $D_a \subset G$ 由实赋值处的 $j_w(-1)$ 的像生成。限制到 $H^1(U_f, \mathscr{F}_K) \oplus H^1(U_a, \mathscr{F}_K)$ 的核可识别为

$$\mathrm{LC}(G, E)/\mathrm{LC}(G/D_a, P).$$

在这个商中，ι 将一个类映到它的常值函数。先在 G 上取归一化哈尔平均，再模掉 P，便得到一个左逆。其常值类构成了仅对自变量按 C^1 平移的不变子空间，同时系数纤维保持不变。

证明。固定一个范数的连续分裂 $\sigma\colon \mathbb{R}_{>0} \to C^\times$。$\Delta E$ 在 C 上的每个截面都经由$c \mapsto [c\sigma(|c|)^{-1}] \in G$因子分解，且值域有限；这是因为正射线连通，而$C^1$紧。假设这样的截面 f 可延拓到一个有限图。令 $h = j_v(\varpi_v)$。在赋值覆盖中，序列 $[c, \varpi_v^n]_{\mathcal{O}_v^\times}$趋于 $[c, 0]_{\mathcal{O}_v^\times}$。在这个提升中，对所有充分大的 n，截面都取同一个常值 $m \in E$。穿孔框架给出 $f(ch^n) = T_v^{-n} m$。由于取值有限，其中两个值必相同，因此 T_v 的某个正整数次幂固定 m。反复迭代这个幂会使范数趋向一端，在那里每个 H_- 测试都趋于零，所以 $m = 0$。因此，对所有充分大的 n，都有 $f(ch^n) = 0$。紧群C^1中的元素 $h\sigma(|h|)^{-1}$ 具有任意大的正整数次幂趋近恒等元。沿着这样的幂，最终有 $f(ch^n) = f(c)$。因此，从 U_f 出发的限制为零，而在稠密穿孔上消失的有限图截面本身也为零。

在 $[c, 0] \in N_w$处，对于 $w \mid \infty$，推出茎为 M，因此截面在该点附近与某个常值 $m \in M$的像一致。路径 $[c, r]$和 $[c, ru]$，其中 $r > 0$趋于零而 u是任意阿基米德单位，给出 $f(c) = f(cj_w(u)) = \theta m$。能够对 G产生非平凡作用的角分量只有实符号。反过来，$\mathrm{LC}(G/D_a, P)$ 的每个元素都能延拓到 U_a：将它的有限多个取值提升到 M，然后在 N_w 上将提升后的函数取值于 $c\sigma(|c|)^{-1}$ 在 G/D_a中的像。此定义与代表元 $[c, z]$的选择无关，因为 $j_w(K_w^\times)$ 在 G/D_a 中的像是平凡的。由命题 10.3，θ 是单射。因此，在穿孔处消失的截面，其边界茎也为零。

覆盖微分取有限限制减去阿基米德限制。在刚刚得到的这些识别下，这两项及其微分为

$$[\,\mathrm{LC}(G/D_a, P) \xrightarrow{-\mathrm{incl}} \mathrm{LC}(G, E)\,].$$

将 $m \in M$ 映射到取常值 $-m$ 的阿基米德截面（其穿孔限制为 $-\theta m$），并将 $e \in E$ 映射到取值为 e的常值函数。这些映射构成了从 $[M \xrightarrow{\theta}$出发的链映射

E]。每个开集及其交集的零次截面到相应导出截面的映射，诱导出从覆盖复形到 $R\Gamma(Y_K, \mathscr{F}_K)$ 的映射。Mayer–Vietoris 三角将其一次映射识别为所示余核的连接单射 [34, 标签 01EB 和 08BX]。

由紧性可知，LC(G, E) 中的函数可经由有限群 G 的一个有限商分解。其 Haar 平均是一个有限和，且分母属于 P。若 f 的类在基底平移下保持不变，则每个平移后的元素与 f 之差都属于 LC$(G/D_a, P)$。对有限个平移取平均可知，常值平均代表同一个类。反过来，每个常值类都保持不变。这也证明了所述的分裂。 □

这个单射需要有限绕行作用。若将有限图表系数系统中的所有 T_v 都替换为恒等式，同时使用相同的穿孔标架，则每个常值 $e \in E$ 都可延拓到 U_f。此时其连接类便消失。

命题 21.2. </style}对于 ,, 它们的像的杯积在 ($Y_K, \mathscr{F}_K \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{F}_K$) 中就已经消失。对于系数 $\mathscr{F}_K \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{F}_K$， $\iota(x) \smile \iota(y)$ 中也有同样的消失。

证明。根据命题 21.1，两个像在两个开集上的限制均为零。设 $Z_f = Y_K \setminus U_f$ and$Z_a = Y_K \setminus U_a$。对于层 A、B，支撑三角将一个在 U_f 上消失的类提升到 A $\to Rj_{f*}$(A$|_{U_f}$) 的纤维的上同调中，该纤维支集于 Z_f。这里 $j_f\colon U_f \hookrightarrow Y_K$ 是开嵌入。在 U_a 上消失的类以同样方式提升到一个支集于 Z_a [34, Tag 0G72]的复形。两个支撑复形的导出张量积的茎均为零，因为 $Z_f \cap Z_a = \varnothing$。复向量空间的层的张量化在茎上是正合的。杯积的自然性将两个提升的乘积映到原始类的乘积 [34, Tag 0FKU]。这证明了第一个断言。系数共轭与限制可交换，因此同样的论证给出第二个断言。 □

因此，通过从所示层的张量出发的态射再取迹所得到的这些像的任意配对都为零。限制核之外的对偶类未必具有这一消失性质。

21.2 球面泊松像的周期化

令 $P = \theta H_{\cap}$、$Q = H_-/P$，以及

$$E_{\mathrm{D}} = H_-^{C_K^1}, \qquad P_{\mathrm{D}} = P \cap E_{\mathrm{D}} = \theta(H_{\cap}^{C_K^1}), \qquad Q_{\mathrm{D}} = E_{\mathrm{D}}/P_{\mathrm{D}} \simeq Q^{C_K^1}.$$

取 $K^\times$-余不变元后，C_K^1 作用于 H_+。其 Haar 投影与 θ可交换，而对不变商类的一个提升进行平均化即可证明最后一个同一性。命题 10.3 给出了有限整单位所固定的阶段上的一个闭 theta 像。它与 E_{D} 的交为 P_{D}，因而是闭的。在非中心化坐标 $t = \log|c|$中，令 $T_u f(t) = f(t+u)$ 表示 $u \in \mathbb{R}$。因此，$T_{\log q_v}$是 $j_v(\varpi_v)$ 在 E_{D}上的作用。空间 P_{D} 是一个卷积理想。事实上，紧支撑光滑核对 P_{D} 中元素的平移所作的积分，由于闭性而属于 P_{D}。在 E_{D} 中截去核的尾部，可使卷积在每个指数加权 Schwartz 半范数下收敛。

命题 21.3. 对于每个 $h > 0$，周期化 $\Pi_h f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+kh)$ 将 P_{D} 映射到满射 $C^\infty(\mathbb{R}/h\mathbb{Z})$。在 Q_{D} 上的诱导算子 $1 - T_h$ 是连续线性自同构，且具有连续逆算子。

证明。首先选取 $\Phi \in$ S$(\mathbb{A}_K)$，使得 $\Phi(0) = 1$且 $\int \Phi = 0$，如命题 10.3 所示。令 $F(t)$ 为在范数 e^t处对 $\Sigma\Phi$取的范数为一的平均，使用概率 Haar 测度。(34) 中的加权界和泊松恒等式 (37) 给出 $F(+\infty) = 0$ 以及 $F(-\infty) = -1$。差值 $F - T_h F$属于 P_{D}，因为在 H_+ 中，其源是对任意满足 $|b| = e^{-h}$的 $b \in C_K$，取 $[\Phi] - \lambda_b[\Phi]$ 的 C_K^1-平均；而此差值的两个矩均为零。通过望远镜求和得到 $\Pi_h(F - T_h F) = -1$。

对于 $a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，令 $M_a(s) = \int e^{st} a(t)\, dt$。存在一个径向泊松检验函数 $p_a \in P_{\mathrm{D}}$，满足

$$M_{p_a}(s) = c_K(s-1)\zeta_K(s) M_a(s) \qquad (c_K > 0).$$

在有限处取 $\mathbf{1}_{\prod_{v \nmid \infty} \mathcal{O}_v}$。在 $K_\infty^\times$上从核中 t分离出对数范数，并取 $(-a'(t) - a(t))b(y)$，其中 b 是核上积分为一的紧支撑光滑函数。该函数具有紧

支撑于 $K_\infty^\times$ 内，并通过零光滑延拓。它在零点的值为零，并且其加性积分为零，因为 $\int e^{t}(-a'-a)\,dt=0$。应用 Σ 并对 C_K^1 取平均。展开 $\mathrm{R}s>1$ 的积分即可得到所显示的恒等式。取乘法测度使 $\mathrm{O}_v^\times$ 的测度为一，则在 $\mathrm{O}_v\backslash\{0\}$ 上的积分为 $\sum_{n\ge0}q_v^{-ns}$。在 $K_\infty^\times$ 上的积分为 $(s-1)M_a(s)$，而 c_K 计入了商测度。p_a 的衰减性使左侧为整函数，而 ζ_K [30, §5.11，定理 5.22(b)] 的亚纯延拓将恒等式延拓至 $\mathbb{C}$。

令 $s_n=2\pi i n/h$。对于 $n\neq0$，有 $|\zeta_K(s_n)|^{-1}\ll_{K,\,h}(1+|n|)^B$，其中某个 B。对于 $|u|\ge2$，在条带 $-1/2\le\mathrm{R}s\le3/2$ [25, 中的凸性界、命题 3.8]，右侧的绝对收敛以及柯西公式给出 $|\zeta_K(\sigma+iu)|+|\zeta_K'(\sigma+iu)|\ll_K(1+|u|)^b$，对于 $1\le\sigma\le2$。来自 $3+4\cos x+\cos(2x)\ge0$ 给出

$$\zeta_K(1+\delta)^3|\zeta_K(1+\delta+iu)|^4|\zeta_K(1+\delta+2iu)|\ge1.$$

因此 $|\zeta_K(1+\delta+iu)|\gg_K\delta^{3/4}|u|^{-b/4}$。取 $\delta=|u|^{-5b-4}$，即可吸收位移 $O_K(\delta|u|^b)$，使其在大 $|u|$ 时满足 $\sigma=1$。与 $\delta\downarrow0$ 相同的不等式排除了对每个固定的 $u\neq0$ 在 $1+iu$ 处存在零点的可能。在 [25, §2.1, (2.1)–(2.2), p. 279] 中约去对称因子 $s(s-1)$，得到 $\mathrm{Z}_K(s)=\mathrm{Z}_K(1-s)$，其归一化采用命题 12.4。由斯特林公式，对于 $|u|\ge2$，

$$|\zeta_K(iu)|\asymp_K|u|^{[K:\mathbb{Q}]/2}|\zeta_K(1-iu)|.$$

这就得到了当 $|n|$ 较大时所声称的多项式界。对于其余非零的 s_n，由于伽马因子有限且非零，函数方程将非零性转移过去。

使用圆系数 $\int_0^h e^{s_nt}b(t)\,dt$。$\Pi_hf$ 的系数为 $M_f(s_n)$。对于给定的均值为零的光滑圆数据 (d_n)，令 $b_0=0$ 和 $b_n=d_n/(c_K(s_n-1)\zeta_K(s_n))$，其中 $n\neq0$。这些系数快速衰减。选取具有未归一化系数 b_n 的光滑 h 周期函数，并将其乘以一个固定的紧支撑光滑函数，使其所有 h 平移之和为一。所得 a 满足 $M_a(s_n)=b_n$，对每个 n 均成立，因此 Π_hp_a 给出所要求的数据，包括零均值。前面的望远镜求和检验给出了任意常数。

在 E_{D} 上，$\ker\Pi_h=(1-T_h)E_{\mathrm{D}}$。若 $\Pi_hf=0$，则这两个和

$$g(t)=\sum_{k\ge0}f(t+kh)=-\sum_{k<0}f(t+kh)$$

分别在正、负半轴上对每个导数都给出快速指数界，并且 $(1-T_h)g=f$。$\Pi_h|_{P_{\mathrm{D}}}$ 的满射性现在推出 $1-T_h$ 在 Q_{D} 上的满射性。若 $T_hx=x$ 在那里，则轨道 $u\mapsto T_ux$ 是 h 周期的。每个光滑圆核都是 P_{D} 中某个元素的周期化，因此通过卷积消去该轨道。与 $T_{-u}x$ 积分得到通常的直线卷积的商。由连续性，圆上的近似恒等元收敛到 x，因此 $x=0$。最后，Q_{D} 是弗雷歇空间，故开映射定理保证逆映射连续。 □

21.3 第一上同调上的截面

记为 $E=H_-$、$M=H_\cap$、$P=\theta M$ 和 $Q=E/P$。在交叠 C_K 上，常值截面给出连接映射 $\iota\colon Q\to H^1(Y_K,\mathscr{F}_K)$（命题 21.1）。在梅耶–维托里斯复形中，取有限限制减去阿基米德限制，并将正的交叠坐标用于连接映射。我们在复向量空间中取层上同调。

命题 21.4。 固定一个有限处 v 和一个无限位置 w。令 $V=\prod_{u\nmid\infty}\mathcal{O}_u^\times\subset C_K$，$G_V=C_K/V$，并令 d 为 $h=j_v(\varpi_v)$ 模 V 在 $\pi_0(G_V)$ 中对应分支的阶。令 $T=T_v^d$。存在一个与系数作用交换的映射，

$$B_{v,w}:H^1(Y_K,\mathscr{F}_K)\longrightarrow E/(T-1)P,\qquad B_{v,w}\iota([e])=[-(T-1)e]. \tag{R}$$

令 $\mathrm{pr}:\,E/(T-1)P\to Q$ 为商映射，并令 $\Pi_{\mathrm{D}}:\,Q\to Q_{\mathrm{D}}$ 为投影到命题 *21.3* 中 C_K^1-不变的系数分量上的概率 *Haar* 投影算子。可以选取 $B_{v,\,w}$ 使得

$$r_{v,w}=-(T-1)^{-1}\Pi_{\mathrm{D}}\,\mathrm{pr}\,B_{v,w}:H^1(Y_K,\mathscr{F}_K)\longrightarrow Q_{\mathrm{D}},\qquad r_{v,w}\iota=\Pi_{\mathrm{D}}.$$

特别地，$r_{v,\,w}$ 是 $\iota|_{Q_{\mathrm{D}}}$ 的收缩，并且对于底空间和系数上的同时平移是等变的。

证明。 将 V嵌入，其中阿基米德分量均取为 1。记 $q\colon\ Y_K \to Y\prime = V\backslash Y_K$。由于$j_v^{-1}(V) = \mathcal{O}_v^\times$，下面的有限图及其绕行覆盖为

$$N_v' = (G_V \times D)/\mathbb{Z}, \qquad \widetilde{N}_v' = G_V \times D, \qquad (c,n)\cdot m = (ch^m, n-m).$$

这里 $D = K_v/\mathcal{O}_v^\times = \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ 按赋值定义，正尾集在固定端点 $+\infty$处构成一个基。对数范数提供宽度小于 $\log q_v$的覆盖平凡化。原覆盖等变地映射到其拉回，并在挠子纤维上诱导一个双射。在其他图表上，两个覆盖均使用给定的穿孔平凡化。原像保持常值层、沿开嵌入的零延拓以及推出，因此有限部分和阿基米德部分的描述为 $\mathscr{F}_K = q^{-1}\mathscr{F}_K'$相应的层在 Y'上给出。

对于 Y'上的层 A，单位 $A \to Rq_*q^{-1}A$ 具有自然的截面。每个图表 N_u 都是豪斯多夫的，并且具有 V-不变性。在该图表上，映射到 $V\backslash N_u$ 的轨道投影是闭映射，且具有紧纤维，因而是适当的。它在 y的轨道处的纤维是仿有限空间 $V/\operatorname{Stab}_V(y)$。适当基变换 [34, Tag 09V6]将 $R^iq_*q^{-1}A$ 的茎识别为该纤维的、取常值 $A_{q(y)}$的上同调。有限开闭细化消除了 $i>0$的群。商图覆盖 Y'。在每个轨道上使用 V上的概率 Haar 测度对截面取平均，其值取在下方的单个茎中。为验证该映射的层条件，将每个 gy 附近的截面表示为来自下方的拉回。取一个有限开闭划分 $V = \coprod V_i$，使得每个 V_iy 在某个邻域中具有一个代表元 a_i。由紧性可知，这些包含关系在 y的某个邻域 W 上仍然成立。在开集 $q(W)$上，平均值为 $\sum_i \mu(V_i)a_i$。它固定拉回并与限制交换，因此将常值的连接类从 Y_K 带到 Y'。

从 G_V 到有限理想类群的赋值映射具有开核 $K_\infty^\times/\mathsf{O}_K^\times$；根据狄利克雷定理，单位是闭且离散的。因此， G_V 是一个具有有限多个分支的阿贝尔李群。其范数一子群是紧的，并且由于 $\log|h| = -\log q_v$， G_V/h 是紧的。记 $O = (G_V/h)^\circ$ 为一个环面，并令 N_e 为其在第一坐标投影下的原像，其中 $p\colon N_e \to O$。 N_e 上关于系数系 L 的绕行系数为 $p^{-1}L$；该系数系与 O 上的 $G_V \to G_V/h$ 相关联。它在 $\Lambda = \pi_1(O,[1])$ 上的单值化为 $T_v^{\nu(\cdot)}$，其中 $\nu(\Lambda) = d\mathbb{Z}$。事实上，一个从 1 出发的提升当且仅当 $h^j \in G_V^\circ$ 时，才能以 h^j 为终点。一个以 h^j 为终点的提升闭路将向量 a 传送至 $T_v^j a$，因为根据定义 5.5，伴随丛将 $(p+j,a)$ 与 $(p,T_v^j a)$ 认同。这确定了 ν 的符号。

我们断言 $p^*\colon\ R\Gamma(O,\ L) \to R\Gamma(N_e,\ p^{-1}L)$ 是一个同构。在可缩坐标盒 $U\subset O$ 上，该映射是 $U\times D \to U$ 常系数映射。将 D 分解为紧既开又闭尾部$D_+ = \{0,\ 1,\ \dots,\ +\infty\}$ 以及离散负层次。由适当基变换可知， $U\times D_+ \to U$的正次直像消失。其零次直像是纤维为 $\mathrm{LC}(D_+,\ E)$ 的常值层，这可由连通子盒上的情形看出。每个负层级都是 U 的一个副本，而在它们的不交并上的上同调是一个乘积；向量空间范畴中的乘积是正合的。因此， $R^ip_*p^{-1}L = 0$ 对于 $i>0$ 成立，且零次直像的纤维是以 $\mathbb{Z}$ 为指标、取值于 E 的序列空间，这些序列在正向端最终为常值。端点求值通过常值序列将 L 分裂出来。在其核上，一个次数为 d 的本原元 $\gamma\in\Lambda$ 通过指标移位 d及一个可逆系数作用。对于正向移位，方程 $a_n - U_0a_{n+d} = b_n$在每个 n处都有唯一的零尾解 $\sum_{j\ge0}U_0^jb_{n+jd}$。反向移位也有相同结论。将 γ 补成一个格基。环面的万有覆盖胞腔链是圆周分解的张量积。在该核上，其上链是可缩的，因为其中一个交换差分可逆。这就证明了所述断言，且与 $[1]$上点 $1\in C_K/V$ 处的求值相容。具有这些系数的群上同调模型见 [8,§3，接在 (3.4)]之后。

在阿基米德坐标卡中，使用由 $r\mapsto[1,r]$模 V 给出的弧 $[0,1]\to N_w'$。端点 1 位于同一点之上。对于 j，拉回系数是沿 $j_!\Delta M$ 将 ΔM 与 $j_!\Delta E$ 进行推出所得的结果：$(0,\ 1]$，$\to[0,1]$。由于 $j_!\Delta M\to\Delta M$ 是单同态，该推出同样是导出的。对于每个向量空间 B，由 $([0,1],\{0\})$ 的相对上同调可得 $R\Gamma([0,1],\ j_!\Delta B) = 0$。因此，该弧具有导出截面 M 和端点映射 θ。

将 Y' 上的双开集 Mayer–Vietoris图限制到 N_e、w 处的弧以及公共点 1。求值方块是交换的。因此，目标同伦纤维就是 $R\Gamma(O,\ L)\oplus M\to E$ 的同伦纤维，其映射为求值之差。在带基点环面的正规化群上链中，其一阶

类是模.....的数对 $(u,\ b)\in Z^1(\Lambda,\ E)\oplus E$

$$((T_v^{\nu(\cdot)}-1)a,\ a-\theta m),\qquad a\in E,\quad m\in M.$$

若 $\nu(\alpha)=0$，则 $\alpha\gamma=\gamma\alpha$ 上的余循环恒等式给出 $(T-1)u(\alpha)=0$。T-周期元素在范数趋向端点时因一致衰减而消失。因此，u 可经由 $d\mathbb{Z}$ 分解，并由其任意取值 $u(\gamma)$ 唯一确定。纤维的第一上同调通过 $[(u,b)]\mapsto[u(\gamma)-(T-1)b]$ 与 $E/(T-1)P$ 相对应，且与次数为 d 的回路无关。连接类为 $(0,e)$，由此得到 (R)。

在 Q_{D} 上，算子 T 是 $T_{d\text{对数 }q_v}$，因此命题 21.3 给出了 $T-1$ 的逆元，该逆元出现在$r_{v,\ w}$ 中。由于 P 在 T 下不变，pr 有定义，且 Π_{D} 与 T 可交换。公式 (R) 现在给出$r_{v,\ w^\iota}=\Pi_{\mathrm{D}}$。

到目前为止，所有映射都与系数平移相交换。固定系数后，G_V° 在$H^1(Y_\prime,\mathscr{F}_\prime{}_K)$上的作用是平凡的。沿着一条基底平移路径，绕行覆盖的提升将系数系统在 $[0,1]\times Y_\prime$上的两个拉回识别起来。阿基米德推出具有相同的识别，因为该作用保持穿孔不变。在每个商图表上，区间投影都是适当映射，且纤维可缩。上述基变换定理表明，拉回系数上的单位是同构，因此两个端点限制都逆于同一个拉回。将$Y_\prime$ 上的带基点映射对作用在底空间上的有限群 G_V/G_V°取平均，再与上述 V 平均复合。基底平移固定常值函数的连接类，因此（R）仍成立。所得映射在基底平移下不变，并与系数平移相交换。

□

A 二进展开估计

Let

$$R(t)=\frac{\Phi_2(t)^2\Phi_8(t)}{\Phi_4(t)^3}.$$

周期一接触在 $B_m=\mathbb{Z}_2[x]/x^m$ 上测量，其中有 $x=t-1$，位于 $\mathbb{Q}_2[x]/x^m$ 内。乘以 $R(1+x)$ 在此处可逆，因为 $R(1)=1$。定义分式格 $L_m=R(1+x)^mB_m$。

定义 A.1. 对于两个秩相同且可公度的 $\mathbb{Z}_2$格，定义

$$e_+(L\mid B)=\log\#(L/(L\cap B)).$$

这是相对于 B 的展开指标。

定理 A.2（分圆喷流的二次展开）。乘以 $R(1+x)^m$ 在 $B_m\otimes\mathbb{Q}_2$ 上的行列式为一，但是

$$\boxed{e_+(L_m\mid B_m)\geq(\tfrac{1}{8}m^2-O(m\log m))\log 2.}$$

证明。将基 $1,\ x,\ \ldots\ldots,\ x^{m-1}$的指标记为 $0,\ \ldots\ldots,\ m-1$；下文取 $m\geq 2$，这已足以满足渐近性陈述。每个这样的乘法矩阵都是对角线为 $R(1)^m=1$ 的三角矩阵，由此得出行列式陈述。在 $\mathbb{Q}_2[[x]]$中分解，

$$R(1+x)=A(x)U(x),\quad A(x)=(1+x/2)^2,\quad U(x)=\frac{\Phi_8(1+x)/2}{(\Phi_4(1+x)/2)^3}.$$

在 $\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ 的整数环中，$U(\sqrt{2}y)$ 及其逆元的整数幂级数系数和常数项均为 1。事实上

$$\Phi_4(1+\sqrt{2}y)/2=1+\sqrt{2}y+y^2,$$

and

$$\Phi_8(1+\sqrt{2}y)/2=1+2\sqrt{2}y+6y^2+4\sqrt{2}y^3+2y^4.$$

U 的每个正或负整数次幂也都具有同样的整性。因此，其 x^j 的系数的赋值至少为 $-j/2$。它在 B_m 上的乘法矩阵的一个 $k\times k$ 子式的赋值至少为

$$-\tfrac{1}{2}(\textstyle\sum \text{row indices} - \sum \text{column indices}) \geq -\tfrac{1}{2}k(m-k) \geq -\tfrac{1}{8}m^2.$$

史密斯标准形表明，$e_+(XB_m \mid B_m)/\log 2$ 是 X的所有子式（包括空子式）中最大的负赋值。因此

$$e_+(U^{\pm m}B_m \mid B_m) \leq \tfrac{1}{8}m^2\log 2. \tag{73}$$

令 $k=\lfloor m/2\rfloor$。在 $A^m=(1+x/2)^{2m}$的乘法矩阵中，取行 $m-k,\dots,m-1$和列 $0,\dots,k-1$。其行列式为

$$2^{-k(m-k)}\det\left[\binom{2m}{m-k+i-j}\right]_{0\leq i,j<k}.$$

二项式行列式等于

$$\prod_{i=0}^{k-1}\frac{(2m+i)!\,i!}{(m-k+i)!\,(m+k+i)!}.$$

例如，将一般公式中的 $2m$ 替换为 n，并将 $m-k$ 替换为 d，可由相邻子式恒等式通过诱导得出

$$D_k(n,d)D_{k-2}(n,d) = D_{k-1}(n,d)^2 - D_{k-1}(n,d-1)D_{k-1}(n,d+1),$$

其中 $D_0=1$ 和 $D_1=\binom{n}{d}$；所示阶乘乘积满足相同的恒等式。公式$v_2(n!)=n-s_2(n)$ 消去了线性阶乘项。余下二进制数字和的绝对值总和为 $O(m\log m)$。因此

$$e_+(A^mB_m \mid B_m) \geq \{k(m-k)-O(m\log m)\}\log 2.$$

展开指标满足三角不等式，并且在同时施加可逆线性映射时保持不变。由于 $A^m=R^mU^{-m}$，

$$e_+(A^mB_m \mid B_m) \leq e_+(R^mB_m \mid B_m) + e_+(U^{-m}B_m \mid B_m).$$

利用（73）和 $k(m-k)=\lfloor m^2/4\rfloor$ 可证明该结果。 □

声明

ChatGPT 被用于生成证明。

参考文献

[1] J. M. Aldaz 和 Hermann Render，齐次多项式乘积上的 *Bombieri*不等式渐近界，2024，作者预印本，arXiv:2402.19153v1，2024年2月29日。[2] Ko Aoki，*Berkovich 2*-动机与赋范环叠，2026，作者预印本，arXiv:2603.01877v1，提交于2026年3月2日。[3] Matthew Baker、Tong Jin 和 Oliver Lorscheid，为 $\mathbb{F}_1$-几何构建新的基本模块：带与带概形，《伦敦数学学会杂志》**111** (2025)，第4期，e70125，出版方文本。[4] Federico Binda 和 Shuji Saito，带模相对循环与调节子映射，《Jussieu 数学研究所杂志》**18** (2019)，第6期，1233–1293；所引位置参照作者版本，arXiv:1412.0385v3，2017年9月5日。DOI 10.1017/S1474748017000391。[5] James Borger，*Lambda*-环与一元域，2009，作者手稿，2009年6月17日；arXiv:0906.3146。

[6] Jean-Benoît Bost，《欧几里得格的 Theta 不变量与算术曲线上的无穷维厄米向量丛》，Progress in Mathematics，第334卷，Birkhäuser，2020年；所引位置参照作者版本，arXiv:1512.08946v2。[7] Jean-Benoît Bost 和 François Charles，《数论几何的无穷维几何：厄米拟相干层与 Theta 有限性》，作者手稿，未注明日期；访问于2026年11月21日。[8] Kenneth S. Brown，《群上同调讲义》，载于《群上同调与代数 K理论》，Advanced Lectures in Mathematics，第12卷，International Press，马萨诸塞州萨默维尔，2010年，作者手稿，第131–166页。MR 2655176[9] Bartłomiej Bzdęga、Andrés Herrera-Poyatos 和 Pieter Moree，《单位根处的分圆多项式》，2017年，作者版本，arXiv:1611.06783v2，2017年1月9日。发表于 Acta Arithmetica 184 (2018)，215–230，DOI 10.4064/aa170112-20-12。[10] Shachar Carmeli、Thomas Nikolaus 和 Allen Yuan，《球形群环之间的映射》，Inventiones Mathematicae 246 (2026)，1023–1074，出版方文本，2026年9月11日在线发表。[11] Alain Connes 和 Caterina Consani，《 $\mathbb{F}_1$ 上的概形与ζ函数》，Compositio Mathematica 146 (2010)，第6期，1383–1415，DOI 10.1112/S0010437X09004692。[12] ，《算术位形的几何》，Advances in Mathematics 291 (2016)，274–329，作者网站上的已发表文本。[13] ，《缩放位形的几何》，Selecta Mathematica. New Series 23 (2017)，第3期，1803–1850，作者网站上的已发表文本。[14] ，《Spec Z 的黎曼–罗赫定理》，Bulletin des Sciences Mathématiques 187 (2023)，103293，作者网站上的已发表文本；arXiv:2205.01391。[15] ，《关于 $\mathbb{F}_1$的形而上学》，Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni 35 (2024)，第1期，121–154，出版方文本。[16] ，《环 Z 的黎曼–罗赫定理》，Comptes Rendus. Mathématique 362 (2024)，229–235，出版方文本；作者版本 arXiv:2306.00456v1。[17] ，《纽结、素数与类域论》，2025年；所引位置参照作者版本，arXiv:2501.06560v1，2025年1月11日。[18] ，《Spec Z 与 Fargues–Fontaine 曲线的绝对几何》，2026年，作者版本，arXiv:2606.06604v1，2026年6月4日。[19] ，《Spec Z 的雅可比行列式》，2026年，作者版本，arXiv:2602.15941v1，2026年2月17日。[20] ，《绝对扭子直线与 Spec Z 的几何》，2026年，作者版本，arXiv:2609.00299v1，2026年8月31日。[21] Anton Deitmar，《 $\mathbb{F}_1$上的概形、数域与函数域——两个平行世界》，Progress in Mathematics，第239卷，Birkhäuser，2005年，修订后的作者手稿，arXiv:math/0404185v7，2006年7月26日，第87–100页。[22] Pierre Deligne，《韦伊猜想：I》，Publications Mathématiques de l'IHÉS 43 (1974)，273–307，DOI 10.1007/BF02684373。[23] Henri Gillet 和 Christophe Soulé，《关于算术陈特征》，Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques 23 (2014)，第3期，611–619，出版方文本，DOI 10.5802/afst.1418。[24] Emmanuel Hallouin 和 Marc Perret，《从欧几里得观点看若干相对情形下有限域上曲线的点数》，Journal de théorie des nombres de Bordeaux 33 (2021)，第1期，125–138，DOI 10.5802/jtnb.1155。[25] Elchin Hasanalizade、Quanli Shen 和 Peng-Jie Wong，《戴德金ζ函数零点计数》，Mathematics of Computation 91 (2022)，第333期，277–293，DOI 10.1090/mcom/3665。[26] Oliver Lorscheid，《蓝图的几何。第一部分：代数基础与概形理论》，Advances in Mathematics 229 (2012)，第3期，1804–1846，作者手稿，arXiv:1103.1745v2，2012年1月5日。[27] Akhil Mathew，《稳定同伦论的伽罗瓦群》，Advances in Mathematics 291 (2016)，403–541，已发表文本，DOI 10.1016/j.aim.2015.12.017。

[28] Ralf Meyer，《与素数及 L-函数零点相关的伊代尔类群表示》，2005，作者修订版，arXiv:math/0311468v3，2005年3月16日。发表于《杜克数学杂志》127（2005），第3期，519–595，DOI 10.1215/S0012-7094-04-12734-4。[29] J. S. Milne，《代数数论》，2020，作者课程讲义，3.08版，2020年7月19日。 https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ANTc.pdf。[30] Bjorn Poonen，《Tate论文》，2015，MIT 18.786《数论 II》春季课程讲义，2015年春季。 https://math.mit.edu/~poonen/786/notes.pdf。[31] Peter Scholze，《Berkovich动机》，《美国数学会杂志》39（2026），697–764，作者手稿，日期为2026年1月21日。[32] Christophe Soulé，《单元素域上的簇》，《莫斯科数学杂志》4（2004），第1期，217–244，作者手稿，arXiv:math/0304444v1，2003年4月28日。[33] N. P. Strickland，《Moore谱的阿贝尔嵌入》，《代数与几何拓扑》13（2013），2101–2139，出版方文本，DOI 10.2140/agt.2013.13.2101。[34] Stacks Project作者，《Stacks Project》，标签 04GK、01EB、08BX、0G72、0FKU、09V6。[35] Bertrand Toën 和 Michel Vaquié，《SpecZ之下》，《K理论杂志》3（2009），第3期，437–500，作者网站上的已发表文本。[36] Gerard van der Geer 和 René Schoof，《数域Arakelov除子及其 Θ除子的有效性》，1999，作者版本，arXiv:math/9802121v3，1999年6月29日。发表于 Selecta Mathematica 6（2000），377–398，DOI 10.1007/PL00001393。[37] Xinyi Yuan 和 Shou-Wu Zhang，《阿代尔线丛的算术Hodge指标定理》，Mathematische Annalen 367（2017），1123–1171，由第二作者托管的出版方排版最终文章；定理3.2。[38] Ningchuan Zhang，《色性同伦论中狄利克雷 L-函数的类比》，Advances in Mathematics 399（2022），108267，所引位置参见作者版本，arXiv:1910.14582v4，2022年2月3日。