任意维度中由实线上不确定性不等式实现的动理学正则性传递

PASCAL AUSCHER

arXiv:2611.30703v1 [math.AP] 23 Nov 2026

摘要。本文旨在说明，一维不确定性不等式能够轻易诱导出任意维度动理学方程中的正则性传递不等式。

1. 引言

对于具有时间 $t \in \mathbb{R}$、位置 $x \in \mathbb{R}^d$ 和速度 $v \in \mathbb{R}^d$ 的动理学方程而言，正则性传递意味着：沿输运场 $T = \partial_t + v \cdot \nabla_x$ 和速度场 ∇_v 的特征线具有正则性，可推出沿位置场 ∇_x 具有正则性。正则性也可能传递到时间方向，但速度增长可能会有所损失。这一点在 Hörmander [9]，著名的亚椭圆性理论中得到了表述，其依据是前两个场之间的交换子产生第三个场。根据尺度规则，此类现象可以得到非常精确的形式。这对于 Landau 方程和 Boltzmann 方程的正则性理论尤其有帮助。

不确定性不等式与动理学方程中的正则性传递之间的联系，在 Alexandre 等人 [1] 的一篇文章中得到了明确体现。该文章旨在说明，对时间t 和位置 x进行傅里叶变换并固定对偶变量 ω 和 φ后，动理学正则性传递归结为关于带有势 q^2 的某些算子的 Fefferman–Phong 型不等式，其中 $q = |\omega + v \cdot \varphi|$。[1,定理 1.1] 中的主导项是分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta_v)^\beta$ $0 < \beta < 1$。当 $\beta = 1$ 时所需的 Fefferman–Phong 不等式可见于 [12, 定理 6]。所得传递结果的一个特殊情形，在 $0 < \beta \leq 1$ 时为

$$\|D_x^{\beta/(\beta+1)} f\|_2 \lesssim \|D_v^\beta f\|_2 + \|Tf\|_2 \tag{1}$$

对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^{1+2d})$，其中 $D_x = (-\Delta_x)^{1/2}$，$D_v = (-\Delta_v)^{1/2}$。正是齐次性给出了传递后的 x-正则性指数的精确值。我们指出，对于所有 $\beta > 0$，该不等式由 Bouchut 不等式 [4, 命题 1.1]推出。那里的方法使用相同的傅里叶变换，但不依赖不确定性估计。

在 Nyström 最近的一项工作中，[14], 采用了类似的化归到 Fefferman–Phong 不等式的方法来证明

$$\|D_x^{1/3} f\|_2 \lesssim \|\nabla_v f\|_2 + \||T|^{1/2} f\|_2 \tag{2}$$

对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^{1+2d})$，其右端有限，其中 $|T|$ 是 $-T^2$的正自伴平方根。所涉及的薛定谔算子为 $-\Delta_v + q$。注意，(2) 和带有 $\beta = 1$ 的 (1) 具有相同的齐次性。

我们要探讨的问题是，上述两个不等式是否属于一个更大的族
正则性传递不等式是否都与不确定性估计有关

日期：2026年11月22日。2010 数学主题分类。主要分类：42B10、42B37、35Q80；次要分类：35Q20、35Q84。关键词和短语。不确定性不等式，动理学正则性传递。感谢 Lukas Niebel 和 Moritz Egert 提供有益的意见和参考文献。我们仅使用 GPT 6-Astra 来查找有关本文所使用的一维不确定性不等式的适当已知文献。获得正则性传递的方法完全由作者独立发展。作者已将 CC BY-NC 4.0 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/ 公共版权许可应用于本文档，并将其应用于由本次投稿产生的、直至作者接受稿的所有后续版本。

以及它们是否有一种简单且通用的证明。不确定性不等式在 [1] 中关于 v 变量的证明，采用伪微分演算，并结合基于势的等值集的复杂几何论证。 [14] 中的不等式由于梯度的存在而更为简单，但仍需要复杂的几何推理。其他使用伸缩和齐次群结构的工具，例如 [14] 中所发展的工具，在处理分数阶指数时，实现起来可能相当棘手。

这三个问题的答案都是肯定的。这组不等式表述如下。

定理 1.1。 对于任意 $\alpha > 0, \beta > 0$，存在常数 $C_{\alpha,\beta} > 0$，使得对空间中的所有 f

$$\mathcal{V}_{\alpha,\beta} = \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})\,;\, D_v^\beta f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d}), |T|^\alpha f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})\}$$

均有

$$\|D_x^{\alpha\beta/(\beta+\alpha)} f\|_2 \le C_{\alpha,\beta}(\|D_v^\beta f\|_2 + \||T|^\alpha f\|_2). \tag{3}$$

当 $0 < \beta$ 且 $\alpha = 1$ 时，由于 T 与 $|T|$ 酉等价，这与 (1) 相同。当 $\beta = 1$ 且 $\alpha = 1/2$ 时，由于 ∇_v 与 D_v 酉等价，这与 (2) 相同。

下面介绍证明策略。在 [2]，中，不等式 (1) 通过不同的方法得到证明：该方法使用伽利略变量变换，并对位置和速度变量作部分傅里叶变换。论证还用到了柯尔莫戈洛夫算子的基本解（$\partial_t + v \cdot \nabla_x$）$+ (-\Delta_v)^\beta$。在与 x 对偶的变量 φ 以及与 v 对偶的变量 ξ 中，该算子变为$\partial_t + |\xi - t\varphi|^{2\beta}$，从而得到计算基本解傅里叶变换的著名表达式。因此，其中的论证旨在导出涉及 T 的估计。开发这种方法是为了得到一组适用于弱解的不等式。此外，具体使用 T 还可以探究其他性质，例如方程解在适当空间中的时间连续性，以及柯西问题的可解性。 [2] 中使用的所有变换在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})$ 上都是等距的（除去一个取决于普朗歇尔傅里叶变换归一化方式的常数），因此尝试这种方法是很自然的。将 (3) 改写到这些新变量中后，我们会发现，该不等式很容易化为 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 中算子 $D_t^{2\alpha} + |t|^{2\beta}$ 的一维不确定性不等式。换言之，这里不需要像 [1] 和 [14] 中那样运用几何论证。

这个不等式是众所周知的。它可以写成乘法形式

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \le M_{\alpha,\beta} \||t|^\beta f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \|D_t^\alpha f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \tag{M}$$

或等价的加法形式

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 \le A_{\alpha,\beta} \left(\||t|^\beta f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 + \|D_t^\alpha f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 \right). \tag{A}$$

这两个不等式对自然定义域中的每个 f 都成立

$$V_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\,;\, |t|^\beta f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}),\ D_t^\alpha f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

乘法不等式可以由 Hirschman 的熵不确定性原理 [8]得到。它是 Cowling 和 Price [6]提出的海森堡–泡利–魏尔不等式的一个特例。关于综述，参见 [7] 。这类不等式可以推广到配备次拉普拉斯算子的黎曼流形和单模李群，参见 [11]及其中的参考文献。这里同样只需考虑一维情形。$V_{\alpha,\beta}$ 到$L^2(\mathbb{R})$的嵌入的紧性，为 Fefferman–Phong 型加法不等式提供了一个简单的证明。

下文中，我们首先从 (A) 推导正则性传递不等式。接下来，我们回顾获得 (A) 的两种方法。一种是对 (M) 的熵证明，另一种是通过自包含的紧性论证证明 (A)。

2. 从不确定性到正则性传递

由下式定义的伽利略变量变换

$$\Gamma f(t,x,v) = f(t,x+tv,v)$$

是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})$ 上的等距变换。我们对变量 $(\varphi,\ \xi)$ 所作的（部分）傅里叶变换定义为，这些变量与 $(x,\ v)$ 互为对偶：

$$\widehat{f}(t,\varphi,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} e^{-i(x\cdot\varphi+v\cdot\xi)} f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

对于 $f\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})$,

$$g(t,\varphi,\xi) = \widehat{\Gamma f}(t,\varphi,\xi) = \widehat{f}(t,\varphi,\xi-t\varphi),$$

因此，对于任意 $\gamma>0$（这些函数几乎处处有定义），$|T|^\alpha f$、$D_v^\beta f$ 和 $D_x^\gamma f$ 分别变为 $D_t^\alpha g$、$|\xi-t\varphi|^\beta g$ 和 $|\varphi|^\gamma g$。对于第一项，我们需要假设 $|T|^\alpha f\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})$。令 $\gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}$。

因此，假设 $f\in\mathcal{V}_{\alpha,\ \beta}$。根据 Plancherel恒等式，(3) 等价于（相差一个因子 2 中的可比常数）

$$\int_{\mathbb{R}^{1+2d}} \left(|D_t^\alpha g|^2 + |\xi-t\varphi|^{2\beta}|g|^2\right)\mathrm{d}(t,\varphi,\xi) \geq \widetilde{C}_{\alpha,\beta}^{-1}\int_{\mathbb{R}^{1+2d}} |\varphi|^{2\gamma}|g|^2\,\mathrm{d}(t,\varphi,\xi). \tag{4}$$

由富比尼定理，只需证明

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|D_t^\alpha u|^2 + |\xi-t\varphi|^{2\beta}|u|^2\right)\mathrm{d}t \geq \widetilde{C}_{\alpha,\beta}^{-1}\int_{\mathbb{R}} |\varphi|^{2\gamma}|g|^2\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

对于几乎处处的 (φ,ξ) 和 $u(t)=g(t,\varphi,\xi)$。

固定这样一个 (φ,ξ)，使得 $\varphi\neq 0$, $u\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$，且左侧的 t-积分有限。令 $\delta=d(\xi,\mathbb{R}\varphi)$ 为 ξ 到直线 $\mathbb{R}\varphi$ 的欧几里得距离。注意，

$$|\xi-t\varphi|^2 = \delta^2+|t-t_{\varphi,\xi}|^2|\varphi|^2 \geq |t-t_{\varphi,\xi}|^2|\varphi|^2$$

其中 $t_{\varphi,\xi}$ 是二次多项式 $|\xi-t\varphi|^2$ 取得最小值 δ^2 时 t 的取值。更准确地说，$t_{\varphi,\xi}\varphi$ 是 ξ 在 $\mathbb{R}\varphi$ 上的正交投影，因此 $\xi-t_{\varphi,\xi}\varphi$ 与 $(t-t_{\varphi,\xi})\varphi$ 正交，等式由此得出。因此，

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|D_t^\alpha u|^2 + |\xi-t\varphi|^{2\beta}|u|^2\right)\mathrm{d}t \geq \int_{\mathbb{R}} \left(|D_t^\alpha u|^2 + |t-t_{\varphi,\xi}|^{2\beta}|\varphi|^{2\beta}|u|^2\right)\mathrm{d}t.$$

通过作变量代换 $t\to\tau=t-t_{\varphi,\xi}$，我们可以将 $t_{\varphi,\xi}$ 替换为 0，特别地，$u(\tau+t_{\varphi,\xi})\in V_{\alpha,\beta}$。接着对带有 $\lambda=|\varphi|^{-2\beta/\beta+\alpha}$ 的 $f_\lambda(\tau)=\lambda^{1/2}f(\lambda\tau)$ 应用 (A)，跟踪缩放指数并还原变量代换，可得

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|D_t^\alpha u|^2 + |t-t_{\varphi,\xi}|^{2\beta}|\varphi|^{2\beta}|u|^2\right)\mathrm{d}t \geq A_{\alpha,\beta}^{-1}|\varphi|^{2\gamma}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\,\mathrm{d}t$$

~其中，$A_{\alpha,\ \beta}$ 是（A）中的常数。我们已经证明了（5），其中 $C_{\alpha,\ \beta}=A_{\alpha,\ \beta}$。注意，我们消去了一个仅由 D_v^β 项控制的项。

3. 乘法不等式的熵证明

我们采用以下傅里叶变换约定：

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\omega} f(t)\ \mathrm{d}t,$$

其逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\omega}\widehat{f}(\omega)\ \mathrm{d}\omega.$$

在此约定下，普朗歇尔恒等式在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 范数中表示为

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\,\|_2^2.$$

我们首先回顾 Hirschman 的一维熵不确定性不等式。

定理 3.1。 令 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 满足 $\|f\|_2 = 1$。则

$$-\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \log |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f}(\omega)|^2}{2\pi} \log\left(\frac{|\widehat{f}(\omega)|^2}{2\pi}\right) \, \mathrm{d}\omega \geq \log(\pi e). \tag{1.1}$$

我们将其与下面基于矩估计的经典熵不等式结合起来，具体参见 [10]。为完整起见，这里回顾最佳常数和等号情形。

引理 3.2。 设 $s > 0$，且 ρ 是 $\mathbb{R}$ 上的概率密度，满足

$$m_s = \int_{\mathbb{R}} |x|^s \rho(x) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Then

$$-\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \log \rho(x) \, \mathrm{d}x \leq \log\left(K_s m_s^{1/s}\right), \tag{1.2}$$

其中

$$K_s = 2e^{1/s}\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right) s^{1/s}.$$

证明。 对于 $\lambda > 0$，考虑概率密度

$$q_\lambda(x) = \frac{1}{Z_\lambda} e^{-\lambda|x|^s},$$

其中

$$Z_\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|x|^s} \, dx = 2\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\lambda^{-1/s}.$$

对不等式 $\rho(x) \log \frac{\rho(x)}{q_\lambda(x)} \geq \rho(x) - q_\lambda(x)$ 积分，得到

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \log \frac{\rho(x)}{q_\lambda(x)} \, dx \geq 0.$$

因此

$$-\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \log \rho(x) \, \mathrm{d}x \leq \log Z_\lambda + \lambda m_s.$$

取

$$\lambda = \frac{1}{s m_s}$$

得到

$$-\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \log \rho(x) \, \mathrm{d}x \leq \log\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)(s m_s)^{1/s}\right) + \frac{1}{s}.$$

这正是 (1.2)。当取该 q_λ 时等号成立。 □

我们将其改写为适用于 (M) 的形式。对于归一化函数，注意到 $|f(t)|^2$ 和 $|\widehat{f}_{\frac{(\omega)}{2\pi}}|^2$ 是概率密度。将引理应用于空间密度 $|f(t)|^2$，其中 $s = 2\beta$。我们得到

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \log |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t &\leq \log\left(K_{2\beta}\left(\int_{\mathbb{R}} |t|^{2\beta} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/(2\beta)}\right) \\ &= \log K_{2\beta} + \frac{1}{\beta} \log \left\| |t|^\beta f \right\|_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

对于频率密度 $|\widehat{f}_{\frac{(\omega)}{2\pi}}|^2$，取 $s = 2\alpha$。由 Plancherel恒等式和 D_t^α 的定义可得，

$$\int_{\mathbb{R}} |\omega|^{2\alpha} \frac{|\widehat{f}(\omega)|^2}{2\pi} \, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\omega|^{2\alpha} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega = \|D_t^\alpha f\|_2^2.$$

因此，

$$-\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f}(\omega)|^2}{2\pi} \log\left(\frac{|\widehat{f}(\omega)|^2}{2\pi}\right) d\omega \log K_{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \log \|D_t^\alpha f\|_2. \tag{1.4}$$

结合（1.1）、（1.3）和（1.4），我们得到

$$\frac{1}{\alpha}\log\|D_t^\alpha f\|_2+\frac{1}{\beta}\log\left\||t|^\beta f\right\|_2\geq\log(\pi e)-\log K_{2\alpha}-\log K_{2\beta}.$$

取指数可得

$$\|D_t^\alpha f\|_2^{1/\alpha}\left\||t|^\beta f\right\|_2^{1/\beta}\geq\frac{\pi e}{K_{2\alpha}K_{2\beta}}.$$

将两边提升至 $\alpha\beta/(\alpha+\beta)$ 次方，得到

$$\|D_t^\alpha f\|_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left\||t|^\beta f\right\|_2^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\geq\left(\frac{\pi e}{K_{2\alpha}K_{2\beta}}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}.$$

这就证明了归一化函数的 (M)。一般情形由齐次性得到。

4. The additive inequality by compactness

现在我们基于紧性给出 (A) 的证明。我们赋予 $V_{\alpha,\beta}$ 范数

$$\|f\|_{V_{\alpha,\beta}}=\|f\|_2+\|D_t^\alpha f\|_2+\left\||t|^\beta f\right\|_2.$$

注意到，容易证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$V_{\alpha,\beta}$中稠密包含。

命题 4.1。 对任意 α、$\beta>0$，该嵌入

$$V_{\alpha,\beta}\hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$$

是紧的。

证明。 设 (f_n) 是 $V_{\alpha,\beta}$ 中的有界序列。为证明 (f_n) 存在一个在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 中强收敛的子序列，我们验证下文 Kolmogorov–M. Riesz-Fréchet 判据（参见例如 [5], 第 4 章）的两个条件 (2.1) 和 (2.2)。首先，对任意 $R>0$,

$$\int_{|t|>R}|f_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\leq R^{-2\beta}\int_{\mathbb{R}}|t|^{2\beta}|f_n(t)|^2\,\mathrm{d}t=R^{-2\beta}\left\||t|^\beta f_n\right\|_2^2.$$

由于 (f_n) 在$V_{\alpha,\beta}$ 中有界，

$$\sup_n\int_{|t|>R}|f_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\longrightarrow 0\qquad\text{as } R\longrightarrow\infty. \tag{2.1}$$

接下来，令 $s=\min(\alpha,1)>0$. 由 Plancherel恒等式,

$$\|f_n(\cdot+h)-f_n\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|e^{ih\omega}-1|^2|\widehat{f}_n(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

利用

$$|e^{ih\omega}-1|^2\leq C_s|h|^{2s}|\omega|^{2s}\leq C_s|h|^{2s}(1+|\omega|^{2\alpha})$$

我们得到

$$\|f_n(\cdot+h)-f_n\|_2^2\leq C_s|h|^{2s}\left(\|f_n\|_2^2+\|D_t^\alpha f_n\|_2^2\right).$$

Thus

$$\sup_n\|f_n(\cdot+h)-f_n\|_2\longrightarrow 0\qquad\text{as } h\longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

□

(A) 的证明。 我们用反证法进行论证。假设该不等式不成立。那么存在一个序列 $(f_n)\subset V_{\alpha,\,\beta}$ 使得

$$\|f_n\|_2=1$$

and

$$\|D_t^\alpha f_n\|_2^2+\left\||t|^\beta f_n\right\|_2^2\longrightarrow 0. \tag{2.3}$$

特别地，(f_n) 在 $V_{\alpha,\ \beta}$ 中有界。由嵌入的紧性，经过取子序列，存在 $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 使得

$$f_n \longrightarrow f \qquad \text{strongly in } \mathrm{L}^2(\mathbb{R}).$$

因此

$$\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 1. \tag{2.4}$$

乘以 $|t|^\beta$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的闭算子，由(2.3)可得 $|t|^\beta f = 0$。几乎处处成立。由于 $|t|^\beta > 0$ 几乎处处成立，这意味着 $f = 0$ 几乎处处成立。这与(2.4)矛盾。该矛盾证明了加法不等式。□

5. 结论性 remarks

备注 5.1。 通过缩放论证，将(A)应用于 $f_r(t) = r^{1/2} f(rt)$ 并进行优化，可由加法不等式推出乘法不等式。反之，使用算术—几何平均不等式。

备注 5.2。 我们关于(3)的论证避免了使用例如 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+2d})$ 在 $\mathcal{V}_{\alpha,\beta}$ 中的稠密性。不过，这一性质确实成立。对此有多种证明方式，但都涉及技术性论证。

注 5.3. 请注意，$\mathcal{V}_{\alpha,\beta} \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})$ 的紧性并不显然，因为式（3）中没有出现 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})$ 范数。确定齐次右端项对应的 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{1+2d})$ 的完备化并非易事。

注 5.4. 为简洁起见，我们仅讨论这一组不等式；不过，建立具有负正则性或正正则性的 Sobolev 版本以及 L^p 版本的有效性也很有意义，而且可能更为复杂。 [4]和 [3]中已经给出了一些此类不等式。 [3] 或 [13] 中发展的技术或许会有所帮助。

参考文献

[1] R. Alexandre、Y. Morimoto、S. Ukai、C. J. Xu 和 T. Yang。不确定性原理与动理学方程。*J. Funct. Anal.* 255 (2008), 第 8 期，2013–2066。[2] P. Auscher、C. Imbert 和 L. Niebel。Kolmogorov-Fokker-Planck 方程的弱解：正则性、存在性与唯一性，2024 arXiv:2403.17464 。P. Auscher 和 L. Niebel。动理学 Sobolev 空间，[3] 2026 arXiv:2603.17491 。F. Bouchut。动理学方程中的次椭圆正则性。*J. Math. Pures Appl. (9)*, 81(11):1135–1159, 2002。[4] [5] H. Brezis。泛函分析、*Sobolev* 空间与偏微分方程。 ISBN 978-0-387-70913-0 Springer 2011。[6] M. Cowling 和 J. F. Price。带宽与时间集中：Heisenberg–Pauli–Weyl 不等式。*SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 151–165。[7] G. B. Folland 和 A. Sitaram。不确定性原理：数学综述，*J. Fourier Anal. and App.* **3** (1997), 207–238。[8] I. I. Hirschman。熵札记。*American J. of Math.* **79** (1957), 152–156。[9] L. Hörmander。次椭圆二阶微分方程。*Acta Math.*, 119:147–171, 1967。[10] E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。Rényi 熵与广义 Fisher 信息的 Cramer–Rao 不等式及矩—熵不等式。*IEEE Trans. on Information Theory*, 51 (2005), 第 2 期，473–478。[11] A. Martini。广义不确定性不等式，*Mathematische Zeitschrift* **265** (2010), 第 4 期，831–848。[12] Y. Morimoto 和 T. Morioka。薛定谔算子的正性与二阶退化椭圆算子的次椭圆性。*Bull. Sci. Math.* 121 (1997), 507–547。

[13] arXiv:2605.13582 L.

[14] 2026 arXiv:2611.03104 Niebel。沿临界轨迹通过动理学磨化传递正则性。K. Nyström。动理学 Kato 平方根问题，。

巴黎萨克雷大学、法国国家科学研究中心、奥赛数学实验室，91405 奥赛，法国电子邮箱地址：
pascal.auscher@universite-paris-saclay.fr