arXiv:2611.30705v1 [math.AC] 23 Nov 2026

F-相容环的正则模型

MOHSEN ASGHARZADEH

摘要。设 R 是特征为 $p>0$、完美化为 R^∞ 的诺特局部环。我们研究相干性 R^∞ 是否蕴含存在某个正则诺特局部环 $R^\infty \cong S^\infty$，使得 S 对于正规诺特局部整环，相干性 R^∞ 蕴含 R 是 p-几乎阶乘的，等价地，R^∞ 是最大公因子整环；若有限正则扩张 $R \subseteq S$ 满足 $S^q \subseteq R$，则得到一致界 $q\mathrm{Cl}(R) = 0$。在非诺特方向上，我们构造了这样的环：对每个素数 p 和每个 $d \geq 2$，都存在一个维数为 d 的完美相干局部赋值整环，它不是任何诺特环的完美化。在正面方向上，我们刻画了仿射半群局部环的相干性。最后，我们给出一个没有正则模型的 F-相干环。

1. 引言

本文的核心问题如下。

(Q)：对于某个正则诺特局部环 S，R^∞ 相干? $\implies$ $R^\infty \cong S^\infty$

这里 $R^\infty = \bigcup_{e\geq 0} R^{1/p^e}$ 是诺特局部环 R 的完美化，其特征为 $p>0$。按照 [14] R 称为 F-相干，当且仅当 R^∞ 是相干的。关于(Q) 的无约束版本，是 Shimomoto 在寻找反例的过程中提出的，其动机是对以下预期进行探究：-相干环应当具有一个“正则模型”。我们证明：

定理 1.1。对于每个素数 p，存在一个可数的正规诺特局部整环 R，满足$\widehat{R} \simeq \mathbb{F}_p[[u^2, u^3, v]]$，使得 R^∞ 是相干的，并且 $R^\infty \not\cong S^\infty$ 对于每个正则诺特局部环 S。

特别地，这表明 F-相干环的范围严格超出了正则环的纯不可分扩张。作者偶尔会思考，即使该环具有孤立奇点，这种现象是否仍可能发生。本文还明确证明了另外两个结果：

(A) 对于正规诺特局部整环 R，R^∞ 的相干性迫使 R 成为 p-几乎阶乘的：每个除子类都被 p的某个幂所消去。等价地，R^∞ 是最大公因子整环。此外，若 R 存在有限扩张 $R \subseteq S$，使得 S 正则且对于某个 $q = p^e$，$S^q \subseteq R$，那么$q\mathrm{Cl}(R) = 0$。这是任何正规反例都必须满足的条件，但并非充分条件。

(B) 对于仿射半群局部环，完美化的相干性等价于锥满足单纯条件，且正规化的类群的 p-主部分有限；在这种情况下，存在具有一致弗罗贝尼乌斯包含的有限正则扩张。因此，问题（Q）在此情形下有肯定答案。

引言的其余部分将说明这些结果是如何组织的，以及还有哪些问题尚待解决开放。其机制是定理 2.2 所证明的等价性：R^∞ 是最大公因子整环、对每个高度一素理想 P 都存在一个幂 p^e，使得 $P^{(p^e)}$ 为主理想，以及 $\mathrm{Cl}(R)$ 是 p-主挠元这三个条件彼此等价。从相干性到最大公因子整环的蕴含利用了这一事实：诺特局部整环的相干完美化是最大公因子整环；这一点引自 [15, 第 2]节。我们还记录了，当 R 是优秀且既约的时，F-相干性会传递到正规化，因此在优秀情形下可以假设正规性。

（A）中的一致界是命题 2.4。对于四生成元单项式环 $R_n = k[[u^n, u^{n-1}v, uv^{n-1}, v^n]]$ 及其 $n = p^e \geq 4$ 正规化 B_n，它给出 $n\mathrm{Cl}(B_n) = 0$；相关讨论直接验证了 B_n 是非正规环 R_n的正规化。同一讨论提醒我们，(Q) 只要求完美化的同构；不能

2020 数学主题分类。13A35, 13H10。
K关键词和短语。 F-相干环；正则环；完美代数，素特征方法

在没有论证的情况下，假定正则模型会产生具有一致的弗罗贝尼乌斯包含的有限扩张。近似阶乘性由关于相干性本身的精确判据得到补充，即命题 2.5。对于诺特域 I 中的有限生成理想 u 和元素 R，理想链 $J_e = (I^{[q]} :_R u^q)^{1/q}A$ 在 $A = R^\infty$ 中最终稳定，当且仅当 A 是相干的。这明确表明，近似阶乘性控制最大公因子和除子类，但不控制相干性所需的关系，并提供了一个后续例子所使用的具体检验。小节 2.2 讨论了正则模型的若干约化。例如，假设 R 具有正则模型。那么命题 2.14 表明，R 是普遍余维链的。这正是定理 1.1 背后的动机。

（B）中的正族证明如下。定理 3.4讨论仿射半群局部环；推论 3.5 将其推广到代数闭域上原点处的任意二项式理想，而推论 3.6 则表明，在这一类中，相干性在完备化下保持不变。推论 3.7 对本原二项式超曲面进行了分类：其中的例子包括 $xy - z^n$，当且仅当 n 是 p的幂时才相干；还包括一个正规超曲面，其正规化是正则的，但在任何特征下都不是 F-相干的。第 4 节给出一系列计算示例，为 (Q)提供支持。此外，我们使用字典序单项式赋值，其取值排除了所有诺特模型。这解决了非诺特类比问题，但仍未解决(Q) 。第 5 节通过弱化优秀、完备乃至约化性等假设，重现 Shimomoto [14] 关于 F-相干环的 F-奇点的一些优美结果。在最后一节中，我们给出定理 1.1 的证明。我们还请读者参阅 [4, 5, 6, 7] ，了解关于 R^∞的一些近期同调研究。谨向我的合作者致谢，感谢大家围绕 R^∞展开的许多富有成效的讨论。

2. 几乎阶乘及一些约化

2.1. **几乎阶乘**。

定义 2.1。若一个正规诺特局部整环 R 的除子类群 $\mathrm{Cl}(R)$ 是挠元，则称其为几乎阶乘的。按照本文的术语，若每个类都被 p的某个幂湮灭，则称其为 p-几乎阶乘的。该定义不要求存在统一的幂。

等价地，近似阶乘性意味着：对于每个高度一素理想 P，存在某个符号幂 $P^{(m)} = P^m R_P \cap R$ 是主理想。 p-版本要求 $m = p^e$。对于局部正规整环，这就是通常的 $\mathbb{Q}$-阶乘条件。我们对正规诺特整环的高度一素理想使用归一化赋值 v_P： $\mathrm{Frac}(R)^\times \to \mathbb{Z}$。它们唯一延拓到 $\mathrm{Frac}(R)^\infty$，由$v_P(z) = p^{-e}v_P(z^{p^e})$。正规性给出归属判据

$$z \in R \iff v_P(z) \geq 0 \text{ 对于每个高度一素理想 } P, \qquad z \in \mathrm{Frac}(R)。$$

定理 2.2。设 R 是一个特征为 p的正规诺特局部整环，并令 $A = R^\infty$。以下各条件等价：

(1) A是最大公因子整环。*(2)* 对每个高度一素理想 $P \subset R$，存在 $e \geq 0$ 和 $c \in R \setminus \{0\}$，使得

$$\mathrm{div}_R(c) = p^e P, \qquad \textit{equivalently} \qquad P^{(p^e)} = cR.$$

(3) $\mathrm{Cl}(R)$ 是 p-主挠元。

证明。(1) $\Rightarrow$(2)。写作 $P = (a_1, \ldots, a_r)$，并令 $d \in A$ 为这些生成元的最大公因子。根据最大公因子整环的性质，这样的元素存在。选取 $q = p^e$ ，使得 $d^q \in R$。对于每个高度一素理想 $Q \subset R$， $A_{R\setminus Q} \cong (R_Q)^\infty$ 是赋值整环： R_Q 是离散赋值环。最大公因子在局部化下保持不变。一种说明方法是利用 $aA \cap bA = (ab/\gcd(a,b))A$ 以及局部化保持有限交这一事实。因此

$$v_Q(d) = \min_i v_Q(a_i) = \begin{cases} 1, & Q = P, \\ 0, & Q \neq P. \end{cases}$$

在 P 处，由于 a_i生成 PR_P，最小值为一；而在 $Q \neq P$ 处，至少有一个 a_i位于 Q之外。因此，$\mathrm{div}_R(d^q) = qP$。于是，由这些赋值不等式刻画的理想恰好是 $d^q R = P^{(q)}$。

(2)$\Longleftrightarrow$ (3)。高度一素理想生成因子群，并且每个因子都有有限支集。因此，能够消去各个素理想类的 p 的幂也能消去每个类，反之亦然。
(3) $\Rightarrow$ (1)。取非零的 a、$b \in R$，并构造有效因子 $D = \sum_{\mathrm{ht}\, P=1} \min\{v_P(a)\ v_P(b)\}\ P$.只有有限个项非零。对于某个 $q = p^e$，因子 qD 是主因子 $qD = \mathrm{div}_R(c)$，其中 $c \in \mathrm{Frac}(R)^\times$. 由于 qD 是有效的，正规性蕴含 $c \in R$。令 $d := c^{1/q} \in A$。a^q/c 和 b^q/c 的赋值均为非负，因此它们属于 R。于是 d 在 A中整除 a、b。若 $h \in A$ 是另一个公因子，则对每个 P，都有 $v_P(h) \le v_P(d)$。取 p的一个幂 Q，使其可被 q整除，并满足 $h^Q \in R$。分式 $(d/h)^Q = c^{Q/q}/h^Q \in \mathrm{Frac}(R)$ 的赋值处处非负，因此它属于 R。因此 $d/h \in A$。这证明 d 是 a、b 在A中的最大公因子。对于任意非零的 a、$b \in A$，先将二者同时提升到一个共同的 p次幂，使其属于 R，然后对所得的最大公因子应用 A 的逆弗罗贝尼乌斯自同构。□

推论 2.3。若 R 是一个具有相干完美化的正规诺特局部整环，则 R 是p-几乎阶乘的，并且 *2.2*对每个高度一素理想都成立。

几乎阶 在优秀情形下的阶乘性结论也见于 [13, 注 4.9].

证明。诺特局部整环的相干完美化是一个最大公因子整环；参见 [3, 推论 3。7]。应用定理2.2。□

若原环 R 是优秀且既约的，但不正规，则 F-相干性使其成为整环，并使其有限正规化 B 包含于 R^∞中，参见 $B^\infty = R^\infty$ [14, 第 3]节。该正规化是局部的，且为 p-几乎阶乘的。这是关于 $\mathrm{Cl}(B)$ 的陈述，并非断言非正规环 R 是几乎阶乘的。

命题 2.4。设 $R \subseteq S$ 是特征为p的诺特局部整环之间的一个有限扩张，其中 R 正规，S 正则，且对于固定的 $q = p^e$，$S^q \subseteq R$。则 $q\mathrm{Cl}(R) = 0$.
证明。该扩张在谱上诱导一个双射，并保持高度。对于一个高度一$P \subset R$，令 $Q \subset S$ 为其上方唯一的高度一素理想。由于 S 是阶乘的，可写作 $Q = tS$。令 r 为离散赋值环扩张 $R_P \subseteq S_Q$的分歧指数。因此 $v_Q|_{\mathrm{Frac}(R)} = r\, v_P$。由于$t^q \in R$，有 $r \mid q$，且 $\mathrm{div}_R(t^q) = (q/r)P$. 在另一个高度一素理想处没有贡献：相应的 S 的素理想不同于 tS。因此，$[P]$ 的阶整除q/r，进而整除 q。这些素理想类生成 $\mathrm{Cl}(R)$。□

近似阶乘性控制最大公因子，却不能保证相干性所需的全部关系。下面的判据明确阐明了这一区别。
命题 2.5。设 R 是特征为 p的诺特域，$A = R^\infty$是一个有限生成理想，且 $I \subseteq R$。对于 $u \in R$，定义 $q = p^e{:}\ = (I^{[q]} :_R u^q)$，$J_e :{=} C_e^{1/q} A$. 其中，$I^{[q]}$ 由 I中元素的 q次幂生成，而 $C_e^{1/q} A$ 是由所有 $c^{1/q}$, $c \in C_e$生成的理想。则 $J_0 \subseteq J_1 \subseteq$ 且$(IA :_A u) = \bigcup_{e \ge 0} J_e$. 每个 J_e 都是有限生成的。环 A 是相干的，当且仅当对于每个 I, u，此链最终稳定。

证明。若 $c \in C_e$，则 $c^p \in C_{e+1}$，从而证明了这些包含关系。对 $cu^q \in I^{[q]}$ 取 q次根，可得$J_e \subseteq (IA{:}\ u)$。反过来，写作 $au = \sum_i f_i b_i$，其中 $f_i \in I, a, b_i \in A.$。选取 $q = p^e$，使a, b_i 属于 $R^{1/q}$。于是 $a^q u^q \in I^{[q]}$，故 $a \in C_e^{1/q}$。R 的诺特性保证 C_e，因此 J_e是有限生成的。若 A 相干，则冒号理想（$IA : u$）是有限生成的；其生成元都属于某个共同的 J_e，因此这条链会稳定。反过来，链稳定意味着所有这些冒号理想都是有限生成的。对于 A中的任意有限生成理想及元素，某个共同的 Frobenius 自同构可将其生成元和该元素移入 R。因此，A 中的所有有限生成理想的冒号理想都是有限生成的。这意味着相干性成立：对理想生成元的个数归纳，并将其表示关系投影到最后一个坐标。其像是相应的冒号理想，而核是前一个表示关系模。湮灭子不会带来额外条件。□

Simpson 的阶乘性例子 [15,例 2.6],明确给出障碍 :
例 2.6。设 $p \equiv 1$ （模 5） 为素数，并令 $R :{=} \frac{\mathbb{F}_p[[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]]}{(x_0^5+x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5)}$ · 这是一个完全诺特局部唯一分解整环。然而，其完美化是一个非相干最大公因子整环。

证明。该环的维数为四，并且具有一个孤立奇点： $p \neq 5$，其雅可比理想的根基是极大理想。根据 Serre 判据，该超曲面是正规的。对于维数至少为四的孤立局部完全交，Grothendieck 旁阶乘性定理使其成为阶乘的，正如 [15, 例 2.6]中所示。因此，根据定理 2.2，其完美化 A是一个最大公因子整环。令 $I:=(x_1,x_2,x_3,x_4)R$, u； $=x_0^4.(x_0x_1x_2x_3x_4)^{p-1}$ 在 $(\sum x_i^5)^{p-1}$中的系数为 $(p-1)!\ (((p-1)/5)!)^5 \underline{\neq 0\ (\text{模}\ p)}$。Fedder 判据 [10] 表明 R 是 F-纯的。因此 $IA\cap R=I$。由于 $u\notin I$，理想 $J=(IA:_A u)$ 是真理想。对于每个 $q=p^e=5m+1$，定义关系给出 $u^q=(-1)^{4m}x_0^4(x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5)^{4m}$. 在一个四个指标之和为 $4m$ 的展开项中，要么某个指标至少为 $m+1$，要么四个指标全部等于 m。第一类项属于 $I^{[q]}$；乘以 x_1 后，第二类项也属于其中。因此

$$(*): \quad x_1u^q\in I^{[q]}, \qquad x_1^{1/q}\in J \quad \text{for every } q=p^e.$$

R 上的通常阶是一个赋值，因为 $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} R=\mathbb{F}_p[x_0,\dots,x_4]/(\sum x_i^5)$ 是一个整环。通过取 p 次方根将其延拓到 A，并记作 v。它在 A 上非负，并且在每个非零非单位元上严格为正。若 $J=(g_1、\dots\dots、g_s)$，则理想的真性将推出 $v(a)\geq \min_i v(g_i)>0$。这与 $(*)$ 矛盾，因为 $v(x_1^{1/q})=1/q\to 0$。因此， J 不是有限生成的，且 A 不相干。□

下 文利用了这样一个事实： F-相干性沿忠实平坦映射下降 [14, 第 3 节].

例 2.7。 对每个素数 p，都存在一个特征为 p 的奇异诺特局部唯一分解整环 R，其

$$(*): \quad \dim R=3, \qquad \operatorname{edim} R=4, \qquad R^\infty \text{ is coherent},$$

且其完备化为 $\widehat{R}\cong T:=\underline{\mathbb{F}_p[[X,Y,Z,W]]/(XY-Z^p)}$ ·特别地， R 是一个抽象局部超曲面：其完备化是余维一完全交。因此， R 是阶乘的，因而几乎阶乘，并满足嵌入维数为四的版本 (Q) 的所有输入假设。

证明。完全局部整环 T 的维数为三、深度为三、嵌入维数为四。它是一个超曲面，且其素域中的每个非零元素都是非零因子。̂因此，Heitmann 完备化定理 [11] 给出一个诺特局部唯一分解整环 R，满足 $R\cong T$。̂典范单射 $R\to R\cong T$ 表明 R 的特征为 p。完备化保持维数和嵌入维数不变，故得到（$*$）中的两个等式。由于 $3<4$， R 是奇异的。通过 $X=s^p$将 T嵌入完全正则环 $S_0=\mathbb{F}_p[[s,t,W]]$ 中， $X=s^p$、 $Y=t^p$、 $Z=st$、 $W=W$。这将 T与 $\mathbb{F}_p[[s^p,t^p,st,W]]$等同起来，而 $S_0^p\subseteq T\subseteq S_0$.因此 $T^\infty=S_0^\infty$是相干的。̂完备化映射 $R\to R$ 是忠实平坦的，因此 F的相干性可下降到 R，从而证明所有结论。□

对于优异环，也有一个有用的化简：若 R 是一个反例，那么 R_{red} 的正规化将具有相同的相干完美化，且仍是一个反例。因此，根据推论 p，它将是一个正规2.3-几乎阶乘的诺特局部整环。因此，几乎阶乘这一结论是搜索反例时的一项必要限制；它并非缺失的诺特反例证明。

2.2. **可以对正则模型作化简**。 以下结果适用于所有 正则诺特模型，包括最初并不完备的模型。该定理不假设相干性。

引理 2.8。 设 R 是一个等特征的完备诺特局部整环，其系数域为 k，维数为 d，参数系为 b_1, . . . , b_d。那么，通过赋值 $Y_i\mapsto b_i$ 定义的同态 $k[[Y_1,\dots,Y_d]]\to R$ 是单射且有限的。

证明。 商环 $R/(b_1,\dots\dots,b_d)$ 是 k 上的有限维空间。提升一组基，并在 b_i 中逐次展开，表明 R 是所显示映射的像上的有限模；由于参数理想拓扑与极大理想拓扑一致，级数收敛。其核是素理想。有限性和 $\dim R=d$ 表明， d 维幂级数环对该核取商后维数仍为 d；因此核为零。这就是通常的参数子环形式的科恩结构定理。□

命题 2.9。 设 R 是一个特征为 $p>0$、剩余域 k 有限的完备诺特局部整环，并且 $A=R^{\infty}$。以下条件等价。

(1) $A\cong S^{\infty}$ 对于正则诺特局部环 S。*(2)* 在 R 中存在一个完备正则局部子环 $B\cong k[[Y_1,\dots,Y_d]]$，使得 R 在 B 上有限，且 $R^{Q}\subseteq B$ 对某个 $Q=p^{e}$成立。*(3)* 在 A 中存在一个完备正则局部环 U，它在 R上有限，并且对某个 $Q=p^{e}$，$U^{Q}\subseteq R$成立。

证明。 若 $d=0$，则 $R=k$，结论显然成立。假设 $d>0$。

(1) $\Rightarrow$ (2)。 利用已假设的同构，将 S 传递到 A 中，使得 $S\subseteq A=S^{\infty}$。完美化保持谱和剩余域（至相应的完美化）不变。因此 $\dim S=d$，且 S 的剩余域为 k：它嵌入有限域 k 中，且其完美化等于 k。完备环R 具有其典范系数域 k。这个 k 的拷贝也包含在 S中。事实上，若 $a\in k$，则某个 $a^{p^{e}}$ 属于 S。由于 k 有限，再取更高的 Frobenius 幂便可将 $a^{p^{e}}$ 映回 a。选取 S的正则参数 t_1，……，t_d，并选取 $q=p^{a}$，使得对所有 $1\le i\le d$，$b_i:=t_i^{q}\in R$。这些元素构成 R的一个参数系。事实上，同胚

$$\operatorname{Spec}R\longleftarrow\operatorname{Spec}A\longrightarrow\operatorname{Spec}S$$

证明 R 中包含所有 b_i 的唯一素理想就是其极大理想。由引理 2.8，$B:=k[[b_1,\dots,b_d]]\subseteq R$ 是一个完备正则局部环，而 R在 B上是有限的。这里，形式级数在完备环 R中取值。令 $S_0:=B^{1/q}\subseteq A$。它是一个系数域为 k、参数为 t_1、…、t_d的完备正则局部环。

Cla命题 2.10。 我们断言， S 在 A 中的原始副本包含于 S_0的这个副本中。

证明。完备环的一个抽象同构是不够的。首先，$\bigcap_{N\ge1}(t_1,\dots,t_d)^{N}A=0$。为证明这一点，在分式域$(B)$上取由 b_i中的总次数诱导的阶赋值；特别地，$v(b_i)=1$。将其扩张到有限域扩张 分式域(R)/分式域(B)，再扩张到分式域$(R)^{\infty}$。其赋值环包含 R，因为 R 在 B上是整的，因此它包含 A。此外，$v(t_i)=1/q$。所以 $(t_1,\dots,t_d)^{N}A$ 中的每个非零元素的赋值至少为 N/q，从而证明了 $\bigcap_{N\ge1}(t_1,\dots,t_d)^{N}A=0.$。由科恩结构定理，$\widehat{S}\cong k[[t_1,\dots,t_d]]$。因此$\widehat{\ }$存在一个 k-同构 $\beta:S\to S_0$，将每个参数 t_i 映射到同名元素。$\widehat{\ }$对于 $s\in S$，取其在 S中的展开式的总次数小于 N的多项式截断 s_N。于是，在 A中，$s-s_N\in(t_1,\dots,t_d)^{N}A$且 $\beta(s)-s_N\in(t_1,\dots,t_d)^{N}A.$。由 $\bigcap_{N\ge1}(t_1,\dots,t_d)^{N}A=0$，$s=\beta(s)$。因此 $S\subseteq S_0\subseteq A$，从而 $A=S^{\infty}=S_0^{\infty}=B^{\infty}.$ $\square_{2.10}$

选取有限的 B-模生成元 $r_1,\dots,r_h$，使其生成 R。由此，取一个公公共的 $Q=p^{e}$，使所有 r_j^{Q}都包含在 B中。将 $r=\sum c_jr_j$连同 $c_j\in B$提升到其 Q 次幂，得到 $r^{Q}\in B$。因此，$R^{Q}\subseteq B$，如所需。

(2) $\Rightarrow$(3)。 取 $U=B^{1/Q}\subseteq A$。于是 $R\subseteq U$、$U^{Q}=B\subseteq R$，且 U是完备正则的。由于 k 是完美的，$B^{1/Q}$ 在 B 上有限；同一组有限模生成元也生成它在中间环 R 上的模。

(3) $\Rightarrow$(1)。 嵌入关系 $U^{Q}\subseteq R\subseteq U$给出 $R^{\infty}=U^{\infty}$。 $\square$

下面介绍另一种情形，在这种情形下，任意正则模型都可以变为有限模型。它讨论在闭点处局部化的多项式商环，而不假设它们的完备化就是原环。

引理 2.11。 设 R 是一个特征为 p且剩余域完美的优秀正规诺特局部整环。若 $R\subseteq V\subseteq R^{\infty}$且 V是正则诺特局部环，则 V在 R上有限。

证明。 记 $K=\operatorname{Frac}(R)$、$L=\operatorname{Frac}(V)$ 和 $d=\dim R$。该扩张是整的且纯不可分，并在谱上诱导同胚。因此 $\dim V=d$，理想$\mathfrak{m}_RV$ 是 $\mathfrak{m}_V$的 primary，且剩余域相同，因为 R 的剩余域是完美的。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$所诱导的同态 $R\longrightarrow V$是有限的。事实上，$V/\mathfrak{m}_RV$在公共剩余域上是有限维的。提升有限个生成元并应用完备模论证即可证明其有限性。根据关于 primary 理想的断言，两个阿迪克拓扑一致。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$优良性和正规性使得 R 成为正规整环； V 是正则局部整环。二者的$\widehat{\ }$维数均为 d。因此，该有限同态的核为零。置 $H :=$Frac(R)，并置 $\widehat{\ }$ $\sim E :=$ Frac(V)。于是 E/H 是有限的，且 L 嵌入 E中。优良性使 $R \to R$ 为正则的，因此H/K 是可分域扩张。由此，它与代数纯不可分扩张 L/K线性不交。等价地， $H \otimes_K L$ 是一个域，并嵌入 E中。于是$[L\colon K] = [HL\colon H] \leq [E\colon H] < \infty$. 当 L/K 最初允许为无限时，通过考察其有限子扩张，这也证明了有限性。由于 R 是优秀的，其在有限扩张 L/K 中的正规化 N在 R上是有限的。整中间环 V是 N的一个 R-子模。 R 的诺特性现在使 V成为有限的。□

命题 2.12。 设 k 为有限域，且设 R 是在闭点处本质上有限型于 k上的正规局部整环。若对于正则诺特局部环 S有 $R^\infty \cong S^\infty$ ，则存在一个有限正则局部扩张

$$(*)\colon \quad R \subseteq U \subseteq R^\infty, \qquad U^Q \subseteq R \quad \textit{for some } Q = p^e.$$

反之，$(*)$ 给出这样的正则模型。

证明。将 S 视为 $A = R^\infty$的子环。如定理 2.9 中所述，有限域 k 包含于S中。写作 $R = C_{\mathfrak{n}}$，其中 C 是有限型 k-整环，并选取有限多个 k-代数生成元c_i 作为 C的生成元。对于某个 $q = p^a$，所有 c_i^q 都属于 S；因此 $C^q \subseteq S$。若 $h \in C \setminus \mathfrak{n}$，则 $h^q \in S$ 不在 A的极大理想中，因此是 S中的单位。由此可得 $R^q \subseteq S$。于是 $R \subseteq S^{1/q} \subseteq A$. $S^{1/q}$ 是正则诺特环。由于该点是闭点， R 的剩余域是有限的，并且 R 是优秀的。引理 2.11 证明了 $U := S^{1/q}$ 在 R上有限。 U 的有限多个 R-模生成元的某个公共 p-次幂属于 R，从而得到所需的一致 Q。逆向结论由取完美化得到。 □

此外，还存在一种与除子类无关的障碍。

命题 2.13. 如果诺特局部整环 R 对某个正则诺特局部环 S具有 $R^\infty \cong S^\infty$ ，那么 R 是串联的。

证明. 完美化诱导谱之间的同胚，并保持素理想上的序关系、嵌入关系以及饱和链。因此， R 的谱具有与 S的谱相同的链长性质。正则诺特局部环是科恩–麦考利环，因而是串联的。□

因此，一个非串联的 F-相干诺特局部整环也会对（Q）给出否定答案。构造这样一个整环或许会很有意思。

命题 2.14. 设 R 和 S 是特征为 $p > 0$ 且满足 $R^\infty \cong S^\infty$的诺特环。那么， R 是普遍余维链的，当且仅当 S 是普遍余维链的。特别地，如果 S 是正则的，那么 R 是普遍余维链的。

证明。 存在一种自然的描述 $R[T_1, \dots, T_n]^\infty \cong R^\infty[T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}]$. 事实上，每个多项式都只有有限个系数和单项式，因此某个共同的 Frobenius 幂会将其置于某个有限阶段。由此，所假设的同构诱导出 $\left(R[T_1, \dots, T_n]\right)^\infty \cong \left(S[T_1, \dots, T_n]\right)^\infty$.完美化在素谱上诱导出同胚，包括非约化环的情形。因此，这两个多项式环的谱是同胚的。它们的素理想偏序集具有相同的饱和链，因此一个多项式环是串联的，当且仅当另一个也是串联的。对于诺特环，普遍余维链等价于其所有多项式环均为串联的。此外，诺特科恩–麦考利环，特别是正则环，都是普遍余维链的。 □

3. 仿射半群环的肯定答案

设 k是一个完美域。设 M是格中的一个有限生成子幺半群，满足 $M \cap (-M) = \{0\}$。设 L 是由 M生成的群，且 $d :=$ 的秩为 L.。因此， M是一个正仿射半群。

记号 3.1。 令 $C := \mathbb{R}_{\geq 0} M \subseteq L_{\mathbb{R}}$、 $M := \overline{C} \cap L$、 $G := \mathbb{Z}[1/p]$、 $L_p := L \otimes_{\mathbb{Z}} G$，并定义$M_p := \bigcup_{e \geq 0} p^{-e} M \subseteq L_p$.对于幺半群 N，记 $k[N]$为其幺半群代数，其中的单项式为X^u、 $u \in N$。令 $\mathfrak{m} := (X^u\colon \ 0 \neq u \in M)$ 且 $R := k[M]_{\mathfrak{m}}$.情形 $d = 0$恰好是 $R = k$，因此假设 $d \geq 1$。

引理 3.2。 令 σ_1，……， $\sigma_r \in L^*$ 为 C的各个面的本原整支撑形式，使得对于所有 i都有 $C = \{ u \in L_{\mathbb{R}} : \ \sigma_i(u) \ \geq 0 \}$。对于 $B := k[M]_{\mathfrak{m}}$，其中 $\overline{\mathfrak{m}}$ 为单项式极大理想，存在一个正合列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathrm{Cl}(B) \longrightarrow 0, \qquad \sigma(u) = (\sigma_1(u), \ldots, \sigma_r(u)).$$

证明。 全局环面除子正合列将 $\mathrm{Cl}(k[M])$ 等同于 σ的余核：坐标除子对应于各面，且 X^u 的除子具有系数 $\sigma_i(u)$。这是通常的环面除子正合列；参见 [8, 定理 4.1。3]。为完整起见，在单项式极大理想处的局部化不改变此类群。局部化映射是满射。每个整体类都有一个代表元，它是有限生成的 L 分次除子分式理想 I。若 I在局部化后成为主理想，则 $\dim_k I/\mathfrak{m}I = 1$. 选取一个表示非零齐次剩余类的单项式。对$M$上的任意正整分次应用分次中山引理，可知该单项式整体生成 I。因此类群上的局部化映射也是单射。最后， σ 是单射，因为 C 是全维且尖的。 □

事实 3.3。 若优秀约化诺特环 R 具有相干完美化，则其有限正规化 B 位于 R^∞ 中，且 $B^\infty = R^\infty$. 。此处 $B \subseteq R^\infty$ 表示 B 的每个元素在 R 中都有一个 p 次幂，参见 [14, 3。8]。

定理 3.4。 采用上述记号，以下各条件等价。

(1) R^∞ 是相干的。*(2)* 存在一个 G-基 b_1、…、b_d，使得 L_p 的 $M_p = G_{\geq 0}b_1 + \cdots + G_{\geq 0}b_d$.*(3)* 以下两个条件均成立：

$$\overline{M} \subseteq M_p, \qquad \mathrm{coker}(\sigma : L \longrightarrow \mathbb{Z}^r) \ \textit{is a finite } p\textit{-group.}$$

(4) 存在局部整环 $R \subseteq S$ 的有限扩张，使得 S 是正则的，并且对于 p的某个幂 Q，有 $S^Q \subseteq R$。

*I*特别地，只要 R^∞ 是相干的，就存在一个正则局部环 S，满足 $R^\infty = S^\infty$.

证明。 首先注意到 $R^\infty = k[M_p]_{\mathfrak{m}_p}$， 其中 $\mathfrak{m}_p$ 是非正常数单项式构成的理想。对于$u \in L_p$，将使用以下初等成员判定：

$$(+): \qquad X^u \in k[M_p]_{\mathfrak{m}_p} \quad \Longleftrightarrow \quad u \in M_p.$$

事实上，如果对于某个 $f \in k[M_p] \setminus \mathfrak{m}_p$有 $fX^u \in k[M_p]$，则 f 的非零常数项给出了指数为 u的非零项；没有其他项能够将其抵消。(1) ⇒ (3)。 R 的正规化为 $B = k[\overline{M}]_{\overline{\mathfrak{m}}}$， 一个有限扩张。正规化在顶点上方有唯一的点，因为 M 中的每个非恒定单项式都有一个正整数次幂属于 M。根据上文提到的正规化定理， $B \subseteq R^\infty$ 和 $B^\infty = R^\infty$。将 (+) 应用于其单项式，得到 $M \subseteq M_p$。此外， B 是优秀的、正规的且 F-相干。因此 $\mathrm{Cl}(B)$ 是 p-主挠元群。由引理 3.2，它是有限生成的，因此是一个有限 p-群。

(3) ⇒ (2)。3.4(3) 的第一个条件给出 $M_p = C \cap L_p$. 要证明这一点，将 $C \cap L_p$ 中的一个元素乘以 p 的适当次幂，使其属于 M，然后使用 $M \subseteq M_p$。将 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathrm{Cl}(B) \longrightarrow 0$张量化，其中 G，3.4(3) 的第二个条件给出一个同构$\sigma_G : L_p \xrightarrow{\sim} G^r$. 因此 $r = d$。由于支撑不等式定义了 C，此同构将 $C \cap L_p$ 映到 $G^d_{\geq 0}$。标准基向量的原像给出所需的 b_i。特别地， C 是单纯的。

(2) ⇒ (4)。 选择 M 的幺半群生成元 m_1、……、m_N。它们在基 b_i 下的坐标是 G 的非负元素。选择 $q = p^e$ 消去它们的所有分母，并令 $u_i = X^{b_i/q}$ 和 $S_0 = k[u_1, \ldots, u_d] \subseteq k[M_p]$. 。 u_i 是代数独立的，而 q 的选择保证了 $k[M] \subseteq S_0$。每个 b_i/q 都属于 M_p。因此，对于 p 的某个公共幂 Q，每个 u_i^Q 都属于 $k[M]$。所以 $S_0^Q \subseteq k[M]$， 且 S_0 在 $k[M]$ 上是有限的。在顶点处局部化之后，$R \subseteq S := k[u_1, \ldots, u_d]_{(u_1, \ldots, u_d)}$ 是有限的，并且 $S^Q \subseteq R$。事实上，如果某个分母的常数项非零，则其 Q 次幂属于 $k[M] \setminus \mathfrak{m}$，因此在对 $k[M]$ 局部化后它已经可逆。这个 S 是正则的。

(4) $\Rightarrow$ (1)。包含关系 $R \subseteq S \subseteq R^{\infty}$ 蕴含 $R^{\infty} = S^{\infty}$。正则环 S 的完美化是相干的。□

推论 3.5。设 k 为特征 $p > 0$的代数闭域。设 $I \subseteq (X_1, \ldots, X_n)$ 是 $k[X_1, \ldots, X_n]$中的二项式理想，并设 $R = (k[X_1, \ldots, X_n]/I)_{(X_1, \ldots, X_n)}$。若 R^{∞} 是相干的，则存在一个正则局部环 S，使得 $R^{\infty} \cong S^{\infty}$。

证明。回顾 R_{red} 是一个整环。因此，恰有一个极小素理想 P 在 I 原点处的局部化中存活，并且 $R_{\mathrm{red}} \cong (k[X]/P)_{(X)}$。在代数闭域上，二项式理想的极小素理想也是二项式理想。此外，一个素二项式理想删除其包含的变量并对剩余变量进行缩放后，定义了一个仿射半群整环 [9]。由于 $P \subseteq (X)$，没有存活的非恒定单项式会变成单位：否则，一个具有非零常数项的二项式将属于 P。因此，该半群是正的，给定点就是其单项式顶点。应用定理 3.4；从 R 过渡到 R_{red} 不会改变完美化。□

推论 3.6。对于定理 *3.4*中的半群局部整环，

$$R^{\infty} \text{ is coherent} \iff \widehat{R}^{\infty} \text{ is coherent.}$$

证明。一个方向由沿 $R \to R$的忠实平坦下降可得。对于另一个方向，定理 3.4 给出了一个有限局部扩张 $R \subseteq S$，其中 S 正则，且 $S^Q \subseteq R$。完备化在有限 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$-模上是 R正合的，因此得到一个单射 $R \subseteq S$. 上的 $\mathfrak{m}_R S$-进拓扑与极大理想进拓扑一致。因此，S 是完备正则的。由 S -次幂映射的连续性，以及 Q在有限 $\widehat{R}$ -模 $\widehat{R}$中的闭性，$\widehat{S}$可知 $\widehat{S}^Q \subseteq \widehat{R}$。它们的完美化相同。对于可能非既约的二项式商环，对 R_{red}应用此论证。优良性保证其完备化是既约的，而幂零元不影响完美化。□

The $\mathbb{R}^n$ 中的正正交象限是所有坐标均非负的点的集合 .

推论 3.7. 设 k 是特征为 $p > 0$的完美域，并设

$$R := \left(\frac{k[X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_s, W_1, \ldots, W_t]}{(X_1^{a_1} \cdots X_r^{a_r} - Y_1^{b_1} \cdots Y_s^{b_s})} \right)_{\mathfrak{m}},$$

其中 $\mathfrak{m}$ 由所有变量生成，r、$s \geq 1$，所有指数均为正，且最大公因子$(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) = 1$。则 R^{∞} 恰好在下列情形下相干：

(*1*) $r = s = 1$，无进一步限制；(*2*) $r = 1$、$s \geq 2$，且对某个 $e \geq 0$有 $a_1 = p^e$；(*3*) $s = 1$、$r \geq 2$，且对某个 $e \geq 0$有 $b_1 = p^e$。

在每一个肯定情形中，完美化都来自一个正则局部环。同一判据对完备超曲面 R成立。

证明. 条件最大公因子$(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) = 1$ 使该二项式为本原的，因此其商环是正仿射半群整环。变量 W_i 贡献独立的自由幺半群因子。首先假设 $r, s \geq 2$。设 $V = \mathbb{R}^{r+s}/\mathbb{R}v$，其中

$$v = (a_1, \ldots, a_r, -b_1, \ldots, -b_s), \qquad a_i, b_j > 0.$$

令 $\bar{e}_i$（其中 $i = 1, \ldots, r$）和 f_j（其中 $j = 1, \ldots, s$）分别为标准坐标向量的像。锥 C 由这些 $r + s$ 向量生成。

断言 3.8。$\bar{e}_i$ 互不相同且是极端的，即 $\bar{e}_i$ 不是其他向量的非负组合。

证明。*</style>*假设，其中，$\mu_j \geq 0$. 提升到 $\mathbb{R}^{r+s}$后，这意味着对于某个 $c \in \mathbb{R}$，有 $e_i - (\sum_{k \neq i} \lambda_k e_k + \sum_j \mu_j f_j) = c\,v$。比较坐标：

- i第 X 个坐标：$1 = c\,a_i$，因此 $c = 1/a_i > 0$。
- k 个 X坐标（$k \neq i$）：$-\lambda_k = c\,a_k > 0$，因此 $\lambda_k < 0$ ——这与 $\lambda_k \geq 0$矛盾。

因此， $\bar{e}_i$ 是极端的。 Y情形是对称的（使用一个 v 为负的坐标）。因此，所有$r+s$ 射线都是极端的。两个坐标向量只有在模 $\mathbb{R}v$意义下其中一个是另一个的正倍数时，才可能映射到同一条射线。但 $\bar{e}_i$ 和 $\bar{e}_k$ 在X坐标上具有相同的符号模式，并且在 Y坐标上为零；正倍数将迫使符号模式相匹配，而 $\bar{e}_i$ 与 f_j、以及 $\bar{e}_i$ 与 $\bar{e}_k$ 并不满足这一点；对于 $i \neq k$ i个坐标的比较还会导致矛盾。因此，这些射线彼此不同。$\square_{3.8}$

该锥的维数为 $r+s-1$，但有 $r+s$ 条极射线，因此它不是单纯的。添加W_i 并不会改变这一失败结果。定理 3.4 排除了相干性。现在假设 $r=1$、 $s \geq 2$，令 $c=a_1$，暂时省略独立的 W_i。现在 $r=1$，因此 $v=(c、-b_1、\ldots\ldots、-b_s)$，其中$c=a_1>0$、 $b_j>0$。令 $w:=(\frac{b_1}{c}、\ldots\ldots、\frac{b_s}{c})$。该格为 $L=\mathbb{Z}^s+\mathbb{Z}w \subseteq \mathbb{Q}^s$，实现在 $\mathbb{R}^s$ 中（利用该关系消去了X_1坐标）。该幺半群由 $\{e_i、 w\}_i$.生成

断言 3.9。 $\mathbb{R}_{\geq 0}M=\mathbb{R}^s_{\geq 0}$，即正正交象限。

证明。 显然 $M \subseteq \mathbb{R}^s_{\geq 0}$，因为所有生成元的坐标均为非负，所以 $\mathbb{R}_{\geq 0}M \subseteq \mathbb{R}^s_{\geq 0}$。反之，每个标准基向量 $e_i \in M$，因此 $\mathbb{R}^s_{\geq 0}=\mathbb{R}_{\geq 0}\{e_1、\ldots\ldots、e_s\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}M$。$\square_{3.9}$

由于该锥就是正正交象限， $M \cap \mathbb{R}_{\geq 0}e_i = M \cap$（第 i 个坐标射线）。位于此射线上的 M 中的元素具有 te_i 的形式，其中 $t \geq 0$。但是， M 中的元素是 e_k's 和 w 的非负整数线性组合；第 j 个坐标（$j \neq i$）为 $\lambda_j + \lambda_w b_j/c$。要使其与 λ_j， $\lambda_w \geq 0$ 和 $b_j/c>0$ 一起为零，我们需要 $\lambda_j=\lambda_w=0$。于是该元素为 $\lambda_i e_i$，其中 $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，即 $t \in \mathbb{N}$。因此$M \cap \mathbb{R}_{\geq 0}e_i = \mathbb{N}e_i$。在 $G=\mathbb{Z}[1/p]$ 上采用同样的论证可得 $M_p \cap \mathbb{R}_{\geq 0}e_i = G_{\geq 0}e_i$。

这正是证明所使用的内容： M_p 的自由 G 生成元必须位于极射线上，而在第 i 条射线上， G-张成空间为 Ge_i，从而迫使 $L_p=G^s$，因此得到 $b_i/c \in G$。消去唯一关系后，该锥位于 $\mathbb{R}^s$ 中，而结论是 $\mathbb{R}_{\geq 0}M=\mathbb{R}^s_{\geq 0}$， 也就是说，由幺半群 M 张成的锥就是整个正正交象限。这一点之所以重要，是因为：

- $\mathbb{R}^s_{\geq 0}$ 的极射线恰好是坐标射线 $\mathbb{R}_{\geq 0}e_i$;
- 幺半群 M 与第 i条坐标射线的交仅为 $\mathbb{N}e_i$ （而 M_p 的交仅为 $G_{\geq 0}e_i$）；
- 因此，如果 M_p 是一个自由 G-幺半群（定理 3.4 的条件 (2)），其生成元必定位于这些坐标射线上，这就迫使 $L_p=G^s$，从而 $b_i/c \in G$。

这正是得出 $c=p^e$ 所需的步骤。反之，如果 $c=p^e$，则正则局部子环 $A=k[Y_1,\ldots,Y_s,W_1,\ldots,W_t]_{(Y,W)}$ 具有一个有限纯不可分扩张 $A \subseteq R$，因为$X_1^c=\prod Y_j^{b_j}$。因此 $R^\infty=A^\infty$，它是相干的。情形 $s=1$， $r \geq 2$ 是对称的。

最后，如果 $r=s=1$，令 $a=a_1$， $b=b_1$。参数化 $X=u^b$， $Y=u^a$ 将R与 $k[u^a,u^b,W]_{(u^a,u^b,W)}$ 对应起来。由于 $\gcd(a,\ b)=1$，由 a， b生成的数值半群包含每一个充分大的整数。取 $q=p^e$ 为该半群中的一个幂。于是$R \subseteq S=k[u,W]_{(u,W)}$且 $S^q \subseteq R$.这就给出了所需的正则模型。关于完备化的断言由推论3.6得出。 $\square$

例 3.10。 对于 $R_n:=\big(k[x,y,z]/(xy-z^n)\big)_{(x,\ y,\ z)}$，有

$$R_n^\infty \ \ coherent \quad \Longleftrightarrow \quad n=p^e \quad (e \geq 0).$$

对于 $n=p^e$，正则扩张是 $S=k[u,v]_{(u,v)}$，其中有 $x=u^n$、 $y=v^n$、 $z=uv$ 和 $S^n \subseteq R_n$。对于 $n>1$，这些是具有正则完美化的奇异超曲面。当 n 不是 p 的幂时，失败本身就是相干性的问题；这样的环不是 (Q) 的反例。

例 3.11。 超曲面 $\big(k[x,y,z,w]/(xy-zw)\big)_{(x,\ y,\ z,\ w)}$ 在任何特征下都不是 F-相干的。其锥具有四条极射线，维数为三，正如定理 3.7的第一种情形。

例 3.12。考虑 $R=\big(k[x,y,z]/(z^6-x^2y^3)\big)_{(x,y,z)}$. 根据 3.7，对于任意素特征，它都不是 F-相干的。尽管如此，它的正规化是正则环 $S=k[u,v]_{(u,v)}$，其中$x=u^3$、 $y=v^2$ 和 $z=uv$.。事实上， u、 v 都是整元，且 $v=z^3/(xy)$、 $u=z/v$ 属于 R 的分式域。这种正规化不满足环论意义上所要求的纯不可分性：只有当指数是 3 的倍数时，纯 u 次幂才属于 R；只有当指数是 2 的倍数时，纯 v 次幂才属于相应的环。

4. 一些例子

4.1. **没有正则模型的完美相干环。** 下面的反例是一个非诺特 特征为 $p>0$ 且维数为二的局部环。它的完美化是相干的，但并非任何诺特环的完美化，因此也不是任何正则诺特环的完美化。这并未回答关于诺特局部环的相应问题；该问题提出于 [14]。

引理 4.1. 设 A 是一个特征为 $p>0$ 的诺特环。若 A^∞ 是赋值整环，则 维数 $A\leq 1$。

证明。 用 $A_{\rm red}$ 替换 A 不会改变其维数或完美化。因此，我们可以将 A 识别为整环 B 的子环: $=A^\infty$。扩张 $A\subseteq B$ 是整扩张，并诱导出同胚 $\operatorname{Spec} B\longrightarrow \operatorname{Spec} A$。事实上， B 中的每个元素的某个 p 次幂属于 A，因此，在 $\operatorname{Spec} A$ 中位于 $\mathfrak{q}\in$ 之上的唯一素理想由满足对某个 $e\geq 0$ 有 $b^{p^e}\in\mathfrak{q}$ 的那些 $b\in B$ 构成。于是， A 是一个局部整环，设其极大理想为 $\mathfrak{n}$，且 $\dim A=\dim B$ 和 $\sqrt{\mathfrak{n}B}=\mathfrak{m}_B$。若 $\mathfrak{n}=0$，则 $\dim A=0$。否则，写成 $\mathfrak{n}=(a_1、\ldots\ldots、a_r)$。在赋值整环中，有限生成理想由其某个生成元生成。因此，对某个 i，有 $\mathfrak{n}B=a_iB$ ，且 $\sqrt{a_iB}=\mathfrak{m}_B$。由于 $A\subseteq B$ 是整的，收缩给出 $\sqrt{a_iA}=\sqrt{a_iB}\cap A=\mathfrak{n}$。主理想定理给出 $\dim A=\operatorname{ht}\mathfrak{n}\leq 1$。□

例 4.2. 对于每个素数 p，存在一个特征为 p 的局部整环 V，满足

$$\dim V=2,\qquad V^\infty=V,\qquad V \text{ is coherent},$$

使得对于每个诺特环 A，都有 $V\ncong A^\infty$ 。

证明。 令 k 为特征为 p 的完美域，例如 $k=\mathbb{F}_p$。在 $k(x,y)$ 的一个固定代数闭包中，定义 $K_e:=k(x^{1/p^e},y^{1/p^e})$ 以及 $K:=\bigcup_{e\geq 0}K_e$，其中 x,y 代数独立。域 K 是完美的。令 $G=\mathbb{Z}[1/p]$，并赋予 $\Gamma=G\oplus G$ 字典序。通过对一个非零多项式规定下式，在 K_e 上定义一个赋值，

$$v\left(\sum_{i,j}c_{ij}x^{i/p^e}y^{j/p^e}\right)=\min_{\rm lex}\left\{\left(\frac{i}{p^e},\frac{j}{p^e}\right):c_{ij}\neq 0\right\},$$

并通过 $v(f/g)=v(f)-v(g)$ 延拓到有理函数。这些赋值随着 e 的增加彼此相容。因此，它们定义了一个赋值 $v:\ K^\times\longrightarrow\Gamma$，其值群为 Γ。令

$$V:=\{0\}\cup\{a\in K^\times:v(a)\geq(0,0)\}.$$

这是一个局部赋值整环，其分式域为 K，极大理想为 $\mathfrak{m}=\{0\}\cup\{a\in K^\times:v(a)>(0,0)\}$。我们直接验证其维数。定义

$$P:=\{0\}\cup\{a\in V\setminus\{0\}:\text{the first coordinate of } v(a) \text{ is positive}\}.$$

它是一个素理想，并且 $(0)\subsetneq P\subsetneq\mathfrak{m}$，因为 $x\in P$和 $y\in\mathfrak{m}\setminus P$。如果 $a\in\mathfrak{m}\setminus\{0\}$ 的值为$v(a)=(\alpha,\ \beta)$，那么

$$\sqrt{aV}=\begin{cases}P, & \alpha>0,\\ \mathfrak{m}, & \alpha=0 \text{ and } \beta>0.\end{cases}$$

对于第一种情形，任意正第一坐标的充分大的正整数倍都超过 α。对于第二种情形，对于正第二坐标同样成立，而任意正第一坐标已经超过 $(0,\beta)$。因此每个非零素理想都包含 P；如果它严格包含 P，则它包含 $\mathfrak{m}\setminus P$中的一个元素，因而等于 $\mathfrak{m}$。所以这些就是全部素理想，且 $\dim V=2$。由于 K 是完美的，每个 $0\neq a\in V$在K中都有唯一的 p次根，并且 $v(a^{1/p})=\frac{1}{p}v(a)\geq(0,0)$。因此$a^{1/p}\in V$，所以 V上的 Frobenius 是双射，且 $V^\infty=V$。 V的每个非零有限生成理想都是主理想，并且由于 V是整环，它是秩一自由的。因此每个有限生成理想都是有限表示的，从而证明了相干性。最后，如果$V\cong A^\infty$ 对于一个诺特环 A成立，则引理 4.1 将推出 $\dim V=\dim A\leq 1$，这与 $\dim V=2$矛盾。□

注 4.3。 环 V 必然是非诺特的。更明确地说，它的极大理想不可能是主理想：如果 $\mathfrak{m} = aV$ 且 $a \neq 0$，那么 $a^{1/p} \in \mathfrak{m}$，但 $v(a^{1/p}) = \frac{1}{p}v(a) < v(a)$，所以$a^{1/p} \notin aV$。由于 V的每个有限生成理想都是主理想， $\mathfrak{m}$ 不是有限生成的。

注 4.4。 相同的构造适用于任意维数 $d \geq 2$：将 $k\left(x,\ y\right)$ 替换为$k\left(x_1,\ \ldots,\ x_d\right)$，取其完美化，并使用值群为$\mathbb{Z}[1/p]^d$的字典序单项式赋值。其赋值环是完美且相干的，维数为 d，而引理 *4.1* 排除了任何诺特模型。

4.2. **诺特例子**。 在上述假设下，二项式结论是肯定的；那里不存在反例。对于任意完全交或任意非二项式超曲面，本文既未确立一般性的肯定答案，也未给出一个保持相干性的反例。未加限制的问题（Q）。

例 4.5。 设 $A = k[X_1, \ldots, X_d]_{(X)}$，其中 k 是完美的。设 $q_i = p^{e_i}$ 并选取

$$f_i \in k[X_1, \ldots, X_d, Z_1, \ldots, Z_{i-1}], \qquad f_i(0) = 0.$$

在原点处局部化环 $R\colon = A[Z_1, \ldots, Z_c]/\left(Z_1^{q_1} - f_1,\ \ldots,\ Z_c^{q_c} - f_c\right)$。则 R是一个局部完全交，并且作为 A 上的有限自由模； $R^\infty = A^\infty$. 特别地，其完美化是相干的，并具有一个正则诺特模型。完备化后这一结论仍然成立。

证明。 通过首一方程逐次除法，得到一个 A-基 $Z_1^{j_1} \cdots Z_c^{j_c}$， 对于 $0 \leq j_i < q_i$.这些方程构成一个正则序列：在每一步中，下一个方程都是关于一个新变量的首一方程，因此是非零因子。对 i 归纳可知，对于 $Q = \prod_i q_i$，每个 Z_i 的 Q 次幂都属于 A。因此，商环中的每个元素的 Q 次幂都属于 A。在 (X) 上方有唯一的极大理想，即原点；对其中元素之外的元素取逆仍保留 Q 次幂的性质。因此 $R^Q \subseteq A$，且嵌入 $A \to R$ 在完美化上诱导出一个同构。若存在幂零元，它们会在完美化过程中消失。同一个关于 A的有限自由表示 $\widehat{}$证明了完备情形的结论。□

下文将 [14, 所处理的情形从 Example 3.5] 推广到 $n = 4$:

例 4.6。 设 k 是特征为 $p > 0$ 的完美域，并设 $n = p^e \geq 4$。令

$$S := k[[u, v]], \qquad a := u^n, \quad b := u^{n-1}v, \quad c := uv^{n-1}, \quad d := v^n,$$

且令 $R_n\colon = k[[a, b, c, d]] \subseteq S$. 于是:

(1) R_n 是一个完备诺特局部整环，维数 $R_n = 2$ 且嵌入维数 $R_n = 4$。*(2)* $R_n^\infty = S^\infty$，因此其完美化是相干的。*(3)* 深度 $R_n = 1 < 2 =$ 维数(R_n)。*(4)* 其正规化为 $B_n = k[[u^n, u^{n-1}v, u^{n-2}v^2, \ldots, uv^{n-1}, v^n]]$，且嵌入维数 $B_n = n + 1$。

因此，即使嵌入维数 $R_n = 4$ 且完美化相干，正规化的嵌入维数仍会随着 e 的增加而无界增长。

证明。令 $A := k[[a, d]]$。单项式 b, c 在 A 上是整的，因为 $b^n = a^{n-1}d$ 且$c^n = ad^{n-1}$.。像 $k[[a, b, c, d]] = A[b, c]$ 在 A 上是有限的；完备环 A 上的有限代数是完备的。它是 S 的子环，因此是整环，且维数为二。其极大理想由 a, b, c, d 生成。这四个互不相同的单项式的普通总次数均为 n，而其极大理想的平方中的每个元素在 $k[[u, v]]$ 中的阶至少为 $2n$ 。它们的类线性无关。因此 edim $R_n = 4$。由于 n 是 p 的幂， $S^n \subseteq k[[u^n, v^n]] = A \subseteq R_n \subseteq S$。因此 $R_n^\infty = S^\infty$。考虑单项式 $h = u^2v^{n-2}$. 。它不属于 R_n：其总次数为 n，但它不是 a, b, c, d 中的任何一个，并且 R_n 的次数为 n 的部分是它们的 k-线性张成。存在恒等式 $d\,b^{n-2} = a^{n-3}c^2$ ，且 $\frac{b^{n-2}}{a^{n-3}} = h \notin R_n$. 。因此， b^{n-2} 在 $R_n/a^{n-3}R_n$ 中表示一个被 d 消去的非零类。对 a^{n-3}, d 而言，它们是一个参数系： a, d 已经是参数系，这是由 A 上的有限性可知的。它们不是正则序列，因此 R_n 不是科恩–麦考利环。作为二维局部整环，它的深度至少为一；因此其深度等于一。接下来验证正规化的断言。环 B_n 恰由 S 中总次数可被 n 整除的级数组成。它在 A 上是自由的，基为

$\{1, t_i = u^{n-i}v^i : 1 \leq i \leq n-1\}$。对于 $i \geq 1$, $t_i = b^i/a^{i-1}$，因此前面的公式表明$B_n \subseteq$分式域(R_n)。它在 R_n 上有限，且它们的分式域相同。我们直接证明 B_n 是正规环。将 S 中的级数按照总次数模 n 分解为 n 个分量。若 $z \in S \cap$ 属于分式域(B_n)，写作 $z = f/g$，其中 $f, g \in B_n$, $g \neq 0$。比较方程 $gz = f$ 的各个分量，可知 z 中次数模 n 非零的所有分量都必须为零。因此 $S \cap$ 属于分式域(B_n) $= B_n$. 。分式域(B_n) 中一个关于 B_n 整的元素也关于 S 整，因此属于 S，因为 S 是正规环。故它属于 B_n。这证明了正规性，并将 B_n 识别为正规化。最后， B_n 的极大理想由总次数为 n 的 $n+1$ 个单项式生成，且这些单项式模其平方线性无关。因此 edim $B_n = n+1$。□

例4.7。 设 k 为完美的，且 $R := \frac{k[[x,y,z,w]]}{(z^p - x^2 - y^3 - w^5)}$. 则维数 $R = 3$，嵌入维数 $R = 4$，并且$R^\infty = k[[x,y,w]]^\infty$. 事实上，定义方程关于 z 是首一的，且 $R^p \subseteq k[[x,y,w]]$。该方程没有线性项，这给出了所述的嵌入维数。它是一个整环：$x^2 + y^3 + w^5$ 不是 p 次幂在 $k[[x,y,w]]$ 的分式域中，因为这个正则环是正规的，而该级数含有一个不能被 p 整除的单项式指数。因此 $T^p - (x^2 + y^3 + w^5)$ 在该域上不可约。在 $k[[u,v,t]]$ 内可以得到一个显式的正则扩张，方法是

$$x = u^p, \quad y = v^p, \quad w = t^p, \quad z = u^2 + v^3 + t^5.$$

In p特别地，这个非二项式超曲面具有相干完美化以及一个正则模 *el.*

例4.8。 令 $R := \frac{k[[x,y,z,w]]}{(z^p - x^{p+1},\ w^p - y^{p+1})}$. 这是一个维数为二、嵌入维数为四的整环，并且是完全交。在

$$x = u^p, \quad y = v^p, \quad z = u^{p+1}, \quad w = v^{p+1},$$

它与 $k[[u^p, v^p, u^{p+1}, v^{p+1}]] \subseteq S = k[[u,v]]$. 同构。为验证单射性，$R$ 中显示的商环作为 $k[[x,y]]$ 上的自由模，其基为 $z^i w^j$、 $0 \leq i$、 $j < p$；它们的像在模 p意义下具有不同的指数对，因此线性无关。由于 $S^p \subseteq R$，完美化一致。在此， S 也是正规化，因为 $u = z/x$ 和 $v = w/y$ 都位于 R的分式域中。

在既约诺特环 D中，记 $D^\circ = D \setminus \bigcup_{P \in \mathrm{Min}(D)} P$. 弗罗贝尼乌斯闭包和紧闭包分别为

$$I^F := \{u : u^q \in I^{[q]} \text{ for some } q = p^e\},$$
$$I^* := \{u : \text{some } c \in D^\circ \text{ satisfies } cu^q \in I^{[q]} \text{ for all } q \gg 0\}.$$

例4.9。 设 k 是特征为 $p \equiv 1$ （模4）的完美域。那么 $R := \frac{k[[x,y,z,w]]}{(x^4 + y^4 + z^4 + w^4)}$ 是一个嵌入维数为四的三维正规局部超曲面，但 R^∞ 不是相干的。

证明。设 $f = x^4 + y^4 + z^4 + w^4$ and $r = (p-1)/4$。在 f^{p-1} 中，$(xyzw)^{p-1}$ 的系数为 $(p-1)!$ $(r!)^4 \neq 0$ in k. 因此 $f^{p-1} \notin (x^p, y^p, z^p, w^p)$，且由 Fedder 判据 [10] 可知， R 是F-纯的。雅可比理想的根基是极大理想，因为 $p \neq 2$。因此 T 在其闭点之外是正则的；作为超曲面，它满足 S_2。Serre 判据表明它是正规局部整环。令 $I = (y,z,w)R$。类 x^3 不属于 I，因为 $R/I = k[[x]]/(x^4)$。然而我们有$x^3 \in I^*$。对于任意 $q = p^e = 4m+1$，定义方程给出 $x^{3q} = (-1)^{3m} x^3 (y^4 + z^4 + w^4)^{3m}$.对于指标为 $i+j+k = 3m$ 的项，要么 i、 j、 k 中至少有一个不小于 $m+1$，要么 $i = j = k = m$。在第一种情况下，该项已经属于 $(y^q, z^q, w^q)R$。在第二种情况下，乘以 y 后该项就属于其中。因此，固定的非零乘子 y 满足：对于每个 $q = p^e$，都有 $y(x^3)^q \in I^{[q]}$，这就证明了 $x^3 \in I^*$。由于 R 是 F-纯的， $I^F = I$，所以 $I^* \neq I^F$。但是，完美化的相干性迫使紧闭包与弗罗贝尼乌斯闭包相等 [14,Section 3]。矛盾表明 R^∞ 并不相干。□

5. 处理（不）满足优良性假设的情形

我们首先从 [14]中移除优秀假设。

命题 5.1。 设 R 是一个特征为 $p>0$的一维诺特局部整环。若 $A=R^{\infty}$ 是相干的，则 R 在分式域(R) 中的正规化 B 是一个离散赋值环，且 $R\subseteq B\subseteq A$ 满足 $B^{\infty}=A.$

证明。诺特局部整环的相干完美化是一个最大公因子整环，因而是整闭的；参见 [3, 推论 3.7]。对于 $b\in B$，表明 b 在 R 上整的首一方程，也表明它在 A上整。由于 $b\in$分式域(R) $\subseteq$分式域(A)，由整闭性可得 $b\in A$。因此 $R\subseteq B\subseteq A$。Krull–Akizuki 定理蕴含 B 是诺特的；它作为一个一维诺特整环在其自身分式域中的正规化，是一个戴德金整环。我们还必须检查它是否为局部环。环 A 在 B上整： A 的每个元素的某个 p次幂都属于 R。因此， B 的每个极大理想都是某个 A的极大理想的收缩。局部环的完美化仍是局部环，所以 A 只有一个极大理想。因此 B 只有一个极大理想，且是一个离散赋值环。最后，在分式域$(R)^{\infty}$中，由包含关系的完美化可得 $A=R^{\infty}\subseteq B^{\infty}\subseteq A^{\infty}=A$.这就证明了所声称的等式。□

在此论证中，正规化不必是关于 R 的有限生成模。只要它是诺特正则局部环，就足以解决该问题。完备一维情形也在 [3, 推论 3.14]中进行了处理。接下来我们从 [14]中去掉一个优假设。

命题 5.2。 设$(R、\ \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p>0$的诺特局部整环。若对于一个正则诺特局部环 S有 $R^{\infty}\cong S^{\infty}$，则 R^{∞} 是一个平衡的大科恩–麦考利 R-代数。因此，如果 R 的每个理想都是 *Frobenius* 闭的，那么 R 是科恩–麦考利的。

证明。通过该同构，将 S 与其在 $A=R^{\infty}$ 中的像等同。于是 $A=S^{\infty}$ 是 S这一副本的扩张。谱空间上的同胚给出 $\dim R=\dim S=d$。令x_1、…、 x_d为 R的任意一组参数系。选取一个公共的 $q=p^e$， 使得所有 x_i^q都属于 S。它们在 S 中的理想关于其极大理想为准主理想： S 中包含它们的一个素理想，会提升为 A 中包含每个 x_i的素理想，而其在 R 中的收缩必为 $\mathfrak{m}$。完美化下素理想的唯一性随后迫使它成为极大素理想。因此， x_1^q、…、 x_d^q是正则局部环 S的一组参数系，因而是一个 S-正则序列。根据 Kunz 定理， S 的逐次弗罗贝尼乌斯根扩张是平坦的，所以 $S\to A$ 是平坦的。该序列在A上仍为正则序列，并且其生成理想是适当的，因为 A 是局部的。对 A的弗罗贝尼乌斯自同构 $a\mapsto a^q$应用逆映射，得到 x_1、…、 x_d是 A-正则的。这就证明了第一个断言。对于第二个断言，记 I^F为 I的弗罗贝尼乌斯闭包。等式 $IA\cap R=I^F$可由将 IA 中的有限表达式提升到某个公共的 p 次幂而得。在该假设下，对每个理想 I都有 $IA\cap R=I$。若 $a\in R$且 $ax_i\in$（x_1、…、 x_{i-1}）R，则 A上的正则性给出 $a\in$（x_1、…、 x_{i-1}）A；收缩给出 $a\in$（x_1、…、 x_{i-1}）R。因此，所选参数系是 R-正则的，且 R是科恩–麦考利的。□

推论 5.3。 一个弱 F-正则诺特局部整环，若不是科恩–麦考利环，则其完美化不存在正则诺特局部模型。对于不是科恩–麦考利环的 F-纯诺特局部整环，同样的结论也成立。

证明。 在弱 F-正则的情形， $I\subseteq I^F\subseteq I^*=I$对于每个理想 I。在 F-纯的情形，每个理想也同样是 Frobenius 闭的。应用命题 5.2。□

令 $T=\widehat{R}$， $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}T$， $A=R^{\infty}$和 $B=T^{\infty}$.对于特征为 p 的环中的理想 I， $I^{[q]}$表示由其元素的 q 次幂生成的理想，其中 $q=p^e$。

引理 5.4。 若 $D\to E$ 是特征为 p 的环之间的平坦同态，则 $D^{\infty}\to E^{\infty}$ 是平坦的。特别地，$A\to B$ 是忠实平坦的。

证明。 考虑 D 和 E 的两个 Frobenius 直接系统。在每个阶段，垂直映射都是给定的平坦映射 $D\to E$。 E^{∞} 中一个系数位于 D^{∞} 的有限线性关系，可以在某个共同的有限阶段表示出来，并且该关系在推进到更后面的阶段后仍然成立。由平坦性可知，它可以表示为关于 D 的那个副本的关系的线性组合。取极限即证明了平坦性的方程判据。这并不要求 Frobenius 转移映射本身是平坦的。将其应用于 $R\to T$。完美化之间诱导的映射是

局部的：在有限阶段表示的元素是单位，当且仅当其代表元在该阶段是单位。非零局部环之间的平坦局部同态是忠实平坦的。□

引理 5.5。 设 A 是相干的。如果 $Q \subset T$ 是 $\mathfrak{n}$-*primary* 且 $u \in T$，那么 $(QB :_B u)$ 在 B 上有限生成。

证明。 取 N 使得 $\mathfrak{n}^N \subseteq Q$。同构 $R/\mathfrak{m}^N \simeq T/\mathfrak{n}^N$ 表明，对于 $I = Q \cap R$、$IT = Q$ 和 $R/I \simeq T/Q$.。为完整起见， I 包含 $\mathfrak{m}^N$；模 $\mathfrak{n}^N$ 化后， I 的像恰好是 $Q/\mathfrak{n}^N$，从而证明了 $IT = Q$。取 $a \in R$ 使得 $u - a \in Q$。于是

$$(QB :_B u) = (IB :_B a) = (IA :_A a)B.$$

最后一个等式由 $A \to B$ 的平坦性得到，这是通过对乘法映射 $A \to A/IA$、 $z \mapsto az$ 的核进行张量化得出的。理想 IA 是有限生成的，因此 A 的相干性蕴含 $(IA{:}_A\, a)$ 是有限生成的。其在 B 中的扩张因此也是有限生成的。□

引理 5.6。 设$(D, \mathfrak{d})$ 是特征为 $p > 0$ 的约化诺特局部环。对于固定的 $c \in D^\circ$，当 e 充分大时， D^∞ 的真有限生成理想不可能包含 c^{1/p^e} 。

证明。 设 $J = (b_1, \dots, b_s)$ 是这样的理想。取 D 的一个极小素理想 P，并令$E = D/P$。商映射诱导出一个满射局部映射 $D^\infty \to E^\infty$。 J 的像 J' 是真理想，而 c 的像 $\bar{c}$ 非零。若 E 是域，则 $J' = 0$，这已经构成矛盾。否则，在 Frac(E) 上选取一个离散赋值，使其赋值环支配 E；这样的赋值确实存在。通过 $v(z^{1/p^e}) = p^{-e}v(z)$，将其延拓到 Frac$(E)^\infty$ 上。它在 E^∞ 上取非负值，并且在 E^∞ 的每个非零非单位上取严格正值。在 b_i 的非零像中，令 $\delta > 0$ 为最小赋值。至少存在一个这样的像，因为 $\bar{c}^{1/p^e} \in J'$。 J' 的每个非零元素的赋值都至少为 δ，而 $v(\bar{c}^{1/p^e}) = p^{-e}v(\bar{c}) \longrightarrow 0$. 这个矛盾证明了该引理。□

命题 5.7。 假设 $T = R$ 是既约的，且 R^∞ 是相干的。那么

$$Q^* = Q^F \qquad \textit{for every } \mathfrak{n}\textit{-primary ideal } Q \subset T.$$

因此，如果 T 的每个理想都是 *Frobenius* 闭的，那么 T 是弱 F-正则的。

证明。假设 $u \in Q^* \setminus Q^F$。取 $c \in T^\circ$，使得对于所有充分大的 $q = p^e$，都有 $cu^q \in Q^{[q]}$。理想 $J = (QB :_B u)$ 是真理想，因为 $QB \cap T = Q^F$，并且根据引理 5.5，它是有限生成的。在 B 中取 q 次根，得到对于 $q \gg 0$ 有 $c^{1/q}u \in QB$ 和 $c^{1/q} \in J$。引理 5.6 导出矛盾。因此 $Q^* \subseteq Q^F$，而反向嵌入总是成立。若 T 的每个理想都是 Frobenius 闭的，则 T 的所有 $\mathfrak{n}$-准素理想都是紧闭的。对于任意真理想 $L \subset T$ 和 $u \in L^*$，单调性给出：对于每个 $N \geq 1.$，都有 $u \in (L + \mathfrak{n}^N)^* = L + \mathfrak{n}^N$。在 T/L 中取 Krull 交得到 $u \in L$。因此 T 的每个理想都是紧闭的。□

注记 5.8。 根与赋值论证与 *Shimomoto* 在紧闭判据 [14, 命题 3.12；命题 3。11]中使用的方法相同。这里额外的关键点是引理 *5.5*。

引理 5.9。 如果 R 的每个理想都是 *Frobenius* 闭的，则 T也具有同样的性质。特别地， T 是既约的。

证明。首先令 $Q \subset T$为 $\mathfrak{n}$-主理想，并按照引理 5.5 写成 $Q = IT$，其中 $I = Q \cap R$。若$u \in Q^F$，取 $a \in R$ 使得 $u - a \in Q$。对于某个 $q = p^e$， $a^q \in Q^{[q]} = I^{[q]}T$. $R \to T$ 的忠实平坦性给出 $a^q \in I^{[q]}$，从而有 $a \in I$ 和 $u \in Q$。因此 $Q^F = Q$ 对于任意真理想 $L \subset T$ 和$u \in L^F$，可推出对于每个 N都有 $u \in (L + \mathfrak{n}^N)^F = L + \mathfrak{n}^N$。Krull 交给出 $u \in L$。最后，(0)^F =(0)排除了非零幂零元。□

下面将舍弃既约假设 [14]。

推论 5.10。 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特局部环。若 R^∞ 相干，且 R 的每个理想都是 *Frobenius* 闭的，则 R 是弱 F-正则的，并且 R 是科恩–麦考利环。特别地，

$$\left.\begin{array}{l} R \textit{ weakly } F\textit{-regular}, \\ R \textit{ not Cohen–Macaulay} \end{array}\right\} \implies R^\infty \textit{ not coherent.}$$

证明。结合引理 5.9 与定理 5.7。完备的弱 F-正则局部环是科恩–麦考利环：它是正则局部环的商环，因此 [12, 命题 4.2(c)] 适用。科恩–麦考利性从 $\widehat{R}$ 下降到 R。若 R 是弱 F-正则的，则 $I \subseteq I^F \subseteq I^* = I$ 对于每个理想 I都成立，因此关于 Frobenius 闭包的假设是自动满足的。□

例 5.11. 设 R使得 $T = R \simeq k[[x,y,z,w]]/(xy, xz)$，并取元素 $a, b \in R$，它们在 T中的像分别为 $a = u(x+w)$ $b = vw, u, v \in T^\times$. 理想 $H = (aR^\infty :_{R^\infty} b)$ 不是有限生成的。特别地， R^∞ 既非相干环，也非最大公因子整环。

证明。令 $A = R^\infty$ 且 $B = T^\infty$。由引理 5.4 以及主元商理想的平坦基变换，得到$HB = (aB :_B b) = ((x+w)B :_B w) =: J$. 我们直接证明 J不是有限生成的。首先， J 是真理想。代换 $y = z = 0$, $w = -x$ 诱导出映射 $B \to k[[x]]^\infty$，该映射消去$x+w$，并将 w 映到非零元素 $-x$。因此 $w \notin (x+w)B$。对每个 $q = p^e$，都有$xy^{1/q} = 0$ 属于 B：它的 q次幂为 $x^q y = 0$，而 B是既约的。因此，$wy^{1/q} = (x+w)y^{1/q}$，其中 $y^{1/q} \in J$. 现在，考虑满射局部映射 $\pi\colon B \longrightarrow C = k[[y]]^\infty$，其定义为 $x, z, w \longmapsto 0$. 理想 $\pi(J)$ 包含于 C的极大理想 $\mathfrak{c}$ 中，因为 J 是真理想且 B 是局部的。另一方面，对每个 $e \geq 0$，它都包含 y^{1/p^e}。这些元素生成 $\mathfrak{c}$： C 中的每个非单位都可写为$f^{1/q}$，其中某个 $f \in yk[[y]]$，因此可被 $y^{1/q}$整除。于是 $\pi(J) = \mathfrak{c}$. 非零理想 $\mathfrak{c}$不是有限生成的。事实上，完美化意味着 $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2$：若 $h \in \mathfrak{c}$，则 $h = (h^{1/p})^p \in \mathfrak{c}^2$。如果$\mathfrak{c}$ 是有限生成的，中山引理便推出 $\mathfrak{c} = 0$，矛盾。因此 J不可能是有限生成的。若 H 在 A上有限生成，则其扩张 $J = HB$ 在 B上也有限生成。因此 H 不是有限生成的。相干环中，有限生成理想被单个元素取冒号所得的理想仍是有限生成的。此外，在最大公因子整环中，两个非零主元的冒号理想是主理想。由此可得上述两个结论。□

6. F-coherent ring without regular model

在本节中 $k := \mathbb{F}_p$。我们研究

$$\mathcal{O} := k[[u,v]], \quad T := k[[u^2, u^3, v]] = k[[v]] + u^2\mathcal{O}, \quad P := u^2\mathcal{O} \subset T.$$

环 T是完备的，其极大理想为 $\mathfrak{n} = (u^2,\ u^3,\ v)T$。在任意特征下，它都同构于 $k[[X,Y,V]]/(Y^2 - X^3)$。我们首先注意到 $T/P \cong k[[v]]$. 特别地， P是 T的素理想。此外，$\mathrm{Frac}(T) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}) = H$，因为 $u^2\mathcal{O} \subseteq T$且 $u = \frac{u^3}{u^2} \in \mathrm{Frac}(T)$。 u在 T上是整的，并且有：

事实 6.1。$\mathcal{O} \cap T_P = T$以及 $u \notin T_P$。

证明。为证明这一点，首先假设 $g \in T \setminus P$以及 $h \in \mathcal{O}$，且 $gh \in T$。将任意元素$g \in T \setminus P$写成 $g = a_0(v) + u^2 g_2$，其中 $a_0(v) \in k[[v]] \setminus \{0\}$且 $g_2 \in \mathcal{O}$。同样地，将$h = b_0(v) + b_1(v)u + u^2 h_2$写成，其中 $b_0(v)$ $b_1(v) \in k[[v]]$ 且 $h_2 \in \mathcal{O}$。由于 $gh \in T = k[[v]] + u^2\mathcal{O}$，其 u 的系数必须为零。另一方面，该系数为 $a_0(v)b_1(v)$。因此$a_0(v)b_1(v) = 0$. 。由于 $k[[v]]$ 是一个整环且 $a_0(v) \neq 0$，我们得到 $b_1(v) = 0$，从而 $h \in T$。现在，如果 $h \in \mathcal{O} \cap T_P$，那么 $h = a/g$对某个 $a \in T$成立，且 $g \in T \setminus P$。特别地， $gh = a \in T$，因此前面的论证表明 $h \in T$。所以$\mathcal{O} \cap T_P = T$. 最后，由于 $u \in \mathcal{O}$但$u \notin T$，上述等式蕴含 $u \notin T_P$。□

引理 6.2。设 $R \subseteq T$ 是一个剩余域为 k 的诺特局部子环，其嵌入$\widehat{\ }$诱导出 $R = T$。若对于某个正则诺特局部环 S，有 $R^\infty \simeq S^\infty$，则存在 b_1、$b_2 \in R$和 $Q = p^e$，使得 $T[b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}]$ 是包含于 H^∞ 中的完备正则局部环。

证明。通过同构将 S传输到 R^∞ 中。于是有 $S \subseteq R^\infty = S^\infty \subseteq T^\infty = \mathcal{O}^\infty$，最后一个等式由$\mathcal{O}^p \subseteq T \subseteq \mathcal{O}$推出。此显示中的所有包含关系都是局部的。完美化诱导出素谱之间的同胚。因此， S的维数为二，且其剩余域为 k，因为它是 $k = \mathbb{F}_p$的子域。选取 S 的正则参数 s_1， s_2，以及 p 的一个幂 q，使得 $b_i := s_i^q \in R$。通过相同的同胚， R 中同时包含 b_i 的唯一素理想就是极大理想。因此， b_1， b_2既是 R中的参数，也是 T中的参数。求值将 $B = k[[b_1, b_2]]$识别为 T的一个幂级数子环，且 T在 B上是有限的。更多

明确地， $R \to T/(b_1, b_2)T$通过完备化是满射的。选取 r_1，……， $r_h \in R$，它们提升了该商的一个 k-基。对 $(b_1, b_2)T$ 的幂逐次取模展开，可将 T 中的每个元素表示为 $k[[Y_1, Y_2]]$的像上的 r_j 的线性组合。完备性保证了这些展开的合理性。求值映射的核由有限性和 $\dim T = 2$可知为零。在 T^∞中，环 $B^{1/q}$是一个带有参数 s_1, s_2 和系数域 k的完备正则局部环。我们声称 $S \subseteq B^{1/q}$ 位于同一个$\widehat{}$环境环中。对于 $s \in S$，将 s 在 $S = k[[s_1, s_2]]$ 中展开，并令 f_N 为其总次数至 $< N$的多项式截断。将整个级数在 $B^{1/q}$中求值，得到 s'。 $s - f_N$和 $s' - f_N$都属于 $(s_1, s_2)^N\mathsf{O}^\infty$。O 的阶赋值通过 $\operatorname{ord}(z^{1/p^a}) = p^{-a}\operatorname{ord}(z)$扩展到 O^∞。它在非零非单位上为正。$(s_1, s_2)^N\mathsf{O}^\infty$ 中的每个非零元素的阶至少为 $N \min_i \operatorname{ord}(s_i) > 0$。取所有 N 可得 $s = s'$。于是得到 $R \subseteq S^\infty \subseteq B^\infty$。选取 p 的一个公共同幂 Q，使其对于每个 j都满足 $r_j^Q \in B$。由于 r_j 在 B上生成 T，这给出 $T^Q \subseteq B$。特别地，$B \subseteq T \subseteq B^{1/Q}$。按照形式级数的两个指数模 Q 对单项式进行分组，可得 $B^{1/Q} = B[b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}] = T[b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}]$. 左侧是一个完备正则局部环。□

设 $D_1 := \partial/\partial u$ 和 $D_2 := \partial/\partial v$ 是 $\mathcal{O}$ 上的形式偏导数，并将它们延拓至 H。它们是通常的 k-导子，因此作用于关于 k 的绝对微分。

引理 6.3。 设 $A \subset H$ 是一个族，其中指标族$(a, D_1a, D_2a)_{a\in\mathcal{A}}$ 中的所有元素在 k 上代数独立，并设 $K := k(A)$。那么，对于由 K^∞ 中至多两个元素生成的每个有限纯不可分扩张 L/K，乘法映射 $H \otimes_K L \to HL$ 是域同构。

证明。选取 $a_1, \ldots, a_n \in \mathsf{A}$，使得两个生成元各自的某个充分高次的 p-次幂都属于 $E = k(a_1, \ldots, a_n)$。令 M/E为由相同元素生成的有限纯不可分扩张。将 $N = HM$写作 H^∞中的元素。我们先证明 $H \otimes_E M = N$。考虑 M-线性映射 $M^n \to \Omega^{M/k}$，其定义为 $e_i \mapsto da_i$，并记其核为 W。由于 k 是完美域，且 M/k 是超越次数为 n 的有限生成域，我们有 $\dim_M \Omega^{M/k} = n$。余核为 $\Omega^{M/E}$，其维数至多为二，因为 M 在 E上由至多两个元素生成。因此 $\dim_M W \le 2$。令 $J = (D_j a_i)_{1\le j\le 2,\ 1\le i\le n}$。由（$a, D_1a, D_2a$）$_{a\in\mathcal{A}}$可知，其元素在 E 上代数独立，因而也在 M上代数独立，因为 M是 E 的代数扩张。因此 J 在 $W \otimes_M N$ 上是单射。事实上，若 $s = \dim W > 0$，则 W 的基矩阵有 s 个线性无关的行。投影到这些行的坐标投影在 W上的秩为 s。不定元矩阵的相应秩条件由一个在 M上的非零子式多项式给出，将 J代入后该多项式仍非零。令 $D := H \otimes_k M$，并令 $\mathfrak{p}$为乘法 $f\colon D \to N$ 的核。我们将 $D_\mathfrak{p}$ 视为光滑 n 维簇在一个闭点处的局部环，因此它是维数为 n 的正则局部环。这正是 $\dim \mathfrak{m}_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p}^2 = n$ 的依据。 $H = k(u, v)$是 O 的分式域，是一个在 k 上超越次数为 2 的有限生成域。 M 是 $E = k(a_1, \ldots, a_n)$的有限纯不可分扩张，因而是一个在k上超越次数为 n 的有限生成域。 f 的像是一个整环，因为它由域 H 上的域 M生成，所以 HM是一个域，进而也是整环。因此 $\mathfrak{p}$ 是素理想，且 $D/\mathfrak{p} \cong N$ 是 $D_\mathfrak{p}$的剩余域。由于 M/k 是超越次数为 n的有限生成域，它是一个维数为 n 的整k簇的函数域。缩小到一个仿射开模型（利用 k 是完美域），可写作 $M = \operatorname{Frac}(A)$，其中 A 是维数为 n 的光滑整 k-代数。光滑性保证 $\Omega^{A/k}$ 局部自由，秩为 n，因此 $\dim_M \Omega^{M/k} = n$。现在 $D = H \otimes_k M = H \otimes_k \operatorname{Frac}(A)$。素理想 $\mathfrak{p}$ 对应于基变换簇 $X_H = \operatorname{Spec}(H \otimes_k A)$的泛点：映射 $D \to N = HM$ 是到 X_H的函数域的映射，因此在将 A局部化之后， $\mathfrak{p}$ 是 $H \otimes_k A$的零理想。局部化 $D_\mathfrak{p}$ 是 X_H 在该点处的局部环。由于 $N = HM$是 H 的有限域扩张（因为 M/E 是有限的，且 $E \subseteq H$），商环 $D/\mathfrak{p} = N$ 是一个有限 H-模，因此 $\mathfrak{p}$ 是 $\operatorname{Spec} D$的闭点。于是 $D_\mathfrak{p}$ 是 H-簇 X_H在一个闭点处的局部环。最后， X_H是沿着 $\operatorname{Spec} H \to \operatorname{Spec} k$，对光滑的 k-簇 $\operatorname{Spec} A$作基变换所得。由于 k是完美域， H/k是可分生成的，因此基变换保持光滑性：$H \otimes_k A$ 是相对维数为 n的光滑 H-簇。光滑 H-代数在闭点处的局部化是维数为 n的正则局部环。因此 $D_\mathfrak{p}$ 是维数为n的正则环。元素 $\delta_i := a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i$ 属于 $\mathfrak{p}$。它们的微分在 N 上线性无关，且属于

$\Omega_{D/k}\otimes_D N \simeq (\Omega_{H/k}\otimes_H N)\ \oplus (\Omega_{M/k}\otimes_M N)$。在它们之间的一个关系中，第二个分量使系数向量属于 $W\otimes_M N$。对第一个分量应用 D_1, D_2后，该向量属于 $\ker J$，故为零。因此， δ_i 在 $D_{\mathfrak{p}}$ 的余切空间中的类也线性无关，因为两个 $\mathfrak{p}$ 元素乘积的微分在模 N约化后为零。这样的类共有n 个。 $D_{\mathfrak{p}}$ 的余切空间是 $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2D_{\mathfrak{p}} \cong \Omega_{D_{\mathfrak{p}}/k}\otimes_{D_{\mathfrak{p}}} N$. 在此空间中， δ_i 的像就是 $d\delta_i$的类，而证明表明这些类线性无关，系数取自 N。由于 $D_{\mathfrak{p}}$ 是维数为 n的正则环，其余切空间的维数恰为 n。因此， δ_i 的 n 个线性无关类构成余切空间的一组基。令 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ 为局部环 $D_{\mathfrak{p}}$的极大理想。余切空间为 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}^2$，而我们刚才已证明 $\delta_1,\dots,\delta_n$ 在其中生成该空间。由于 $\delta_i\in\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$，这意味着 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}} = (\delta_1,\dots,\delta_n) + \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}^2$. 等价地，$\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}^2 + (\delta_1,\dots,\delta_n)$。将中山引理应用于局部环 $D_{\mathfrak{p}}$上的有限生成模 $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}$，得到 $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}} = (\delta_1,\dots,\delta_n)D_{\mathfrak{p}}$。现在 $D/(\delta_1,\dots,\delta_n) = H\otimes_E M$，因为这些 a_i作为一个域生成了 E。这个有限 H-代数由于 M/E的纯不可分性，只有一个素理想。在该素理想处局部化，所得即为刚才算出的剩余域。因此它就是 N。最后， $K\otimes_E M$嵌入 $H\otimes_E M$。它是 K上的有限整环，故为域 $L = KM$。在 K 上与 H张量化即可证明该断言。□

命题 6.4. 存在一个可数族 $A\subseteq T$，使得 $(a, D_1a, D_2a)_{a\in\mathcal{A}}$ 在 k 上代数独立。记 $K := k(A)$ 和 $R := T\cap K$，则有

$$K\subseteq T_P, \qquad \mathrm{Frac}(R) = K, \qquad \widehat{R}\cong T.$$

此外， R 是一个可数的正规诺特局部整环，而 $P\cap R = 0$. 特别地，维数 $R = 2$ 且 嵌入维数 $R = 3$.

证明。 我们将构造分成几个步骤。

步骤 1. 扩域构造。对于 $z\in T$，记作 $z = z(0, v)\in k[[v]]$.。我们构造一个可数族 $\mathcal{A}\subseteq T$，使其满足以下两个条件：

(1) 指标族 $(a, D_1a, D_2a)_{a\in\mathcal{A}}$ 在 k 上代数独立。

(2) 剩余类族 $(a)_{a\in\mathcal{A}}$ 在 k 上代数独立。

第二个条件将确保由 $\mathcal{A}$ 生成的域包含于 T_P 中。关键观察如下。设 $\mathcal{A}_0\subseteq T$ 是一个满足这两个条件的可数族。令 $F\subseteq H$ 为包含 k、 u、 v、 b、 c，$\mathcal{A}_0$, 中的元素、它们的两个导数及其剩余类的可数子域，其中 $c\in T$且 $b\in T\setminus P$. 我们可以选择 t_0、t_1、$t_2\in k[[v]]$使其在 F 上代数独立。事实上， F 是可数的，而 $k[[v]]$ 是不可数的，并且可数域的代数闭包是可数的。定义 h：$= t_0^p + u^{p+1}t_1^p + vt_2^p$和 $a = c + bh$。由于 $h\in T$，我们有 $a\in c + bT$. 在特征为 p时， $D_1h = u^pt_1^p$ 且 $D_2h = t_2^p$. 因此，

$$\begin{aligned} a &= c + bh,\\ D_1a &= D_1c + (D_1b)h + bu^pt_1^p,\\ D_2a &= D_2c + (D_2b)h + bt_2^p. \end{aligned}$$

因此，从

$$(t_0^p, t_1^p, t_2^p) \quad\text{to}\quad (a, D_1a, D_2a)$$

到 F的变换在 F上是仿射线性的，其行列式为 $b^3u^p\neq 0$. 由此可知，新三元组在由先前三元组生成的域上代数独立。因此，添加 a 保持了第一个独立性条件。此外， $a = c + b(t_0^p + vt_2^p)$。由于 $b\notin P$，我们有 $b\neq 0$。因此， a在由之前的剩余类生成的域上是超越的。这保持了第二个独立性条件。于是，我们证明了以下有用的断言：给定一个

满足两个独立性条件的可数族，可以添加一个元素 $a\in c + bT$ 同时保持这两个独立性条件。 这就是下文所使用的域扩张机制。在每次应用中，通过添加新元素 a，由该族生成的域得以扩张。

步骤 2. 初始元素与域 K。令 $\mathfrak{n} = (u^2, u^3, v)T$为 T 的极大理想。从空族开始，依次应用前面的构造，并取

$$(c, b) = (u^2, v^2), \quad (u^3, v^2), \quad (v, v^2).$$

注意到 $v^2 \notin P$。我们得到三个元素 $b_1, b_2, b_3 \in T$，使得

$$b_1 \equiv u^2 \pmod{\mathfrak{n}^2}, \qquad b_2 \equiv u^3 \pmod{\mathfrak{n}^2}, \qquad b_3 \equiv v \pmod{\mathfrak{n}^2}.$$

我们将这些元素纳入我们的族。对于任意满足两个独立性条件的可数族$\mathcal{A}_0$ ，令 $K_0 ::= k(\mathcal{A}_0)$ 和 $R_0 := T \cap K_0$. 。剩余类的代数独立性意味着，$\mathcal{A}_0$ 中任意有限个元素构成的多项式，只要非零，其模 P 的剩余类也非零。因此， K_0中的每个非零元素都是 T_P中的单位。特别地，

$$(*): \quad K_0 \subseteq T_P, \qquad P \cap R_0 = 0$$

现在我们进一步扩充这个族，以便使理想收缩性质成立 ty.

步骤 3：确保理想收缩性质。我们声称，可以构造这个族，使得对于 $K := k(\mathcal{A})$ 和 $R := T \cap K$， ，有

$$(+) \quad IT \cap R = I \text{ 对于每个有限生成理想 } I \subseteq R.$$

我们来说明递归构造。假设 $\mathcal{A}_0$ 是满足两个独立性条件的可数族，并令 $K_0 := k(\mathcal{A}_0)$ 和 $R_0 := T \cap K_0$. 。考虑元素c， y_1，.. . ， $y_m \in R_0$，使得 $c \in (y_1$，.. . ， $y_m)T$. 。我们希望扩张这个域，使得这一包含关系在相应的交环中已经成立。取 z_1，.. . ， $z_m \in T$，满足$c = \sum_{i=1}^{m} y_i z_i$. 。若所有 y_i 均为零，则 $c = 0$，无需证明。否则，重新排序后，可假设 $y_m \neq 0$。根据 (∗)， R_0 中的每个非零元素都是 T_P中的单位。因此$y_m \notin P$. 。对于每个 $i < m$，应用步骤 1 中的构造，其中 $c = z_i$ 和 $b = y_m$. 。这给出一个元素 $z_i' \in z_i + y_m T$，将其添入该族，同时保持两个独立性条件。现在定义 $z_m' = \frac{c - \sum_{i=1}^{m-1} y_i z_i'}{y_m}$. 。由于 $z_i' - z_i \in y_m T$， ，我们有

$$c - \sum_{i=1}^{m-1} y_i z_i' = y_m \left(z_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{y_i (z_i' - z_i)}{y_m} \right).$$

因此 $z_m' \in T$。此外，其定义中出现的所有元素都属于扩大的域。因此， z_m' 也属于该域。由此可知，在扩大的交环中，$c = \sum_{i=1}^{m} y_i z_i'$. 因此，给定的理想收缩问题已经得到解决。注意，对于主理想而言，不需要引入新元素：如果 $c \in y_1 T$ 且 c， $y_1 \in K_0$，那么 $c/y_1 \in T \cap K_0$。由于 R_0 是可数的，因此需要考虑的有限元组也只有可数多个。于是，我们可以枚举满足上述从属条件的所有元组（c； y_1，.....， y_m），并依次解决这些问题，取所得可数族的并。所得的族仍然是可数的，并且满足两个独立性条件。我们将此过程重复可数次。更确切地说，我们得到一个递增序列

$$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots$$

可数族，其中每个族都满足两个独立性条件，并且在阶段 $n+1$，涉及 $R_n = T \cap k$（$\mathcal{A}_n$）中元素的每个理想收缩问题都已得到解决。令

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n, \qquad K := k(\mathcal{A}), \qquad R := T \cap K.$$

族$\mathcal{A}$ 是可数的，而且两项独立性条件都得以保留，因为每个多项式关系只涉及有限多个元素。 R中的每个元素有限元组都属于某个 R_n，因为 K 中的每个元素都是只涉及$\mathcal{A}$中有限多个元素的有理表达式。因此，每个理想收缩问题最终都会得到解决。这证明了 (+)。

步骤 4。 R的基本性质。根据构造和剩余类的独立性， $K \subseteq T_P, P \cap R = 0$. 由于 $\mathbf{A} \subseteq R$，我们还有 $\mathbf{Frac}(R) = K$. 接下来证明 R是局部的。设$\mathfrak{m} = R \cap \mathfrak{n}$. 若 $r \in R \setminus \mathfrak{m}$， 则 r是 T中的单位。由于 $r^{-1} \in K$也成立，我们有 $r^{-1} \in T \cap K = R$.因此 R 是局部的，其极大理想为 $\mathfrak{m}$。此外，嵌入 $R \subseteq T$ 诱导出一个嵌入$R/\mathfrak{m} \hookrightarrow T/\mathfrak{n} = k$. 由于 $k \subseteq R$，我们得到 $R/\mathfrak{m} \cong k$. 现在证明 R 是诺特的。设 J是 R的任意理想。由于 T 是诺特的，理想 JT 由 J中的有限多个元素生成。因此存在 $j_1, \ldots, j_r \in J$，使得 $JT = (j_1, \ldots, j_r)T$. 令 $I = (j_1, \ldots, j_r)R$。

对于每个 $x \in J$，我们有 $x \in JT = IT$.由于 $x \in R$，由 (+) 可得 $x \in IT \cap R = I$.因此 $J = I$，且 R 的每个理想都是有限生成的。因此 R 是诺特的。最后，我们证明 R 是正规的。由于 $K \subseteq T_P$，事实 6.1 给出 $R = T \cap K = \mathcal{O} \cap K$. 假设 $x \in K$ 在 R上整。由于 $R \subseteq \mathcal{O}$，同一个首一方程表明 x 在$\mathcal{O}$上整。但$\mathcal{O} = k[[u, v]]$ 在 H中是整闭的。因此 $x \in \mathcal{O}$。于是， $x \in \mathcal{O} \cap K = R$.因此 R 在其分式域 K中整闭。所以 R 是正规的诺特局部整环。由于$\mathcal{A}$ 是可数的且 $k = \mathbb{F}_p$ 是有限的，域 $K = k(\mathcal{A})$ 是可数的。因此 R 是可数的。

S骤 5. 完备化的识别。根据我们最初对 $b_1, b_2, b_3 \in R$ 的选择，我们有

$$b_1 \equiv u^2, \qquad b_2 \equiv u^3, \qquad b_3 \equiv v \pmod{\mathfrak{n}^2}.$$

中山引理给出 $\mathfrak{n} = (b_1, b_2, b_3)T.$。特别地， $\mathfrak{m}T = \mathfrak{n}.$。将 (+) 应用于 $\mathfrak{m}^j$，得到$\mathfrak{n}^j \cap R = (\mathfrak{m}^j T) \cap R = \mathfrak{m}^j$，对每个 $j \geq 1$ 都成立。我们声称自然映射 $R \longrightarrow T/\mathfrak{n}^j$ 对每个 $j \geq 1$ 都是满射。事实上， R 的剩余域是 k，且 $\mathfrak{n} = (b_1, b_2, b_3)T$。因此， b_1, b_2, b_3 中次数为 i 的单项式在 k 上张成 $\mathfrak{n}^i/\mathfrak{n}^{i+1}$。这些单项式全都属于 R。从剩余域开始，依次模 $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^2, \ldots, \mathfrak{n}^j$ 提升，我们看到 $T/\mathfrak{n}^j$ 的每个元素都能在 R 中找到一个代表元。因此，自然映射 $R/\mathfrak{m}^j \longrightarrow T/\mathfrak{n}^j$ 是同构：由上述论证可知它是满射，而它是单射，因为 $\mathfrak{n}^j \cap R = \mathfrak{m}^j.$。取逆极限得到 $\widehat{R} = \varprojlim_j R/\mathfrak{m}^j \cong \varprojlim_j T/\mathfrak{n}^j = T.$。最后，由于完备化保留诺特局部环的维数和嵌入维数，且 $T \cong k[[X, Y, V]]/(Y^2 - X^3)$，我们得到 $\dim\ R = \dim\ T = 2$，以及 $\operatorname{edim} R = \operatorname{edim} T = 3.$。证明完毕。□

定理 6.5。 对于每个素数 p，存在一个可数的正规诺特局部整环 R，满足 $\widehat{R} \simeq \mathbb{F}_p[[u^2, u^3, v]]$，使得 R^∞ 具有相干性，并且 $R^\infty \not\simeq S^\infty$ 对于每个正则诺特局部环 S均成立。

证明。 取 R 自命题 6.4。其维数和嵌入维数分别与其完备化 T的相同。包含关系 $\mathcal{O}^p \subseteq T \subseteq \mathcal{O}$给出 $T^\infty = \mathcal{O}^\infty$。后者具有相干性，因为它是诺特环 $\mathcal{O}^{1/p^e}$ 的并，且过渡映射是平坦的；按照 $\widehat{\ }$中的单项式 u， v 根据指数模 p分组即可看出这一点。由于 $R \to T = R$ 是忠实平坦的，F-相干性下降到 R [14, §3]。具体而言，根据有限关系判据，在一个共同的弗罗贝尼乌斯阶段应用该判据，可知完美化保持平坦性。所诱导的映射是局部的，因而是忠实平坦的。有限矩阵的核在 R^∞ 上经过这一基变换后变为有限生成的，因此原先就已经是有限生成的。现在假设存在一个正则模型。应用引理 6.2并定义

$$U := T[b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}], \qquad L := K(b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}), \qquad C := (R \setminus 0)^{-1}T.$$

另一方面，引理 6.3 给出 $H \otimes_K L = HL$。由引理 6.2，环 $U = T[b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}] \subseteq H^\infty$ 是一个完备正则局部环，并且 $U \supseteq T$。特别地， $u \in T \subseteq U.$此外$U \subseteq C[b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}]$，因为 $T \subseteq C$，且两边都添入了根。在 $R \setminus\setminus 0$ 处局部化，即与 $K =$ 分式域 R 在 R 上进行张量化，得到 $(R \setminus\setminus 0)^{-1}U = C \otimes_K L$，因为 $C = T \otimes_R K$ 且 $L = K[b_1^{1/Q}, b_2^{1/Q}]$。为证明 $(C \otimes_K L) \cap H = C$，取一个以 1 开头的 K-基 L。它在 $H \otimes_K L = HL$ 中仍然是H-线性无关的。 H 中属于 $C \otimes_K L$ 的元素是一个 K-线性组合$\sum_j c_j \otimes \ell_j$，其中 $c_j \in C \subseteq H$；比较 H-基中的系数可知， ℓ_j 对于 $j \neq 1$ 的系数为零，而 $\ell_1 = 1$ 的系数属于 C。因此 $(C \otimes_K L) \cap H = C.$。现在 $u \in U$，所以$u \in (R \setminus\setminus 0)^{-1}U = C \otimes_K L.$。由于同样有 $u \in H$，我们得到 $u \in (C \otimes_K L) \cap H = C$。但是 $P \cap R = 0$ 给出 $C \subseteq T_P$，这与事实 6.1 矛盾。□

评注 6.6。 上述例子是非优良的。

参考文献

[1] M. Asgharzadeh，诺特整环的完美闭包与绝对整闭包的同调性质，《数学年刊》**348** （2010），237–263。[2] M. Asgharzadeh 和 K. Shimomoto，通过几乎平坦扩张构造几乎科恩–麦考利代数与几乎正则代数，《交换代数杂志》，**4** （2012），第4期，445–478。

[3] M. Asgharzadeh，完美代数的同调方面，arXiv:1005.1462。[4] M. Asgharzadeh，R. Ishizuka，通过完美化代数进行同调检测，arXiv:2607.17801。[5] M. Asgharzadeh，完美闭包检测内射维数，arXiv:2606.30416。[6] M. Asgharzadeh，S. Patankar，关于无限整扩张相关若干同调问题的评注，arXiv:2608.09473。[7] M. Asgharzadeh，E. Mahdavi，非诺特 *Bass* 数与 *Betti* 数，arXiv:2606.20391。[8] D. A. Cox，J. B. Little 和 H. K. Schenck，环面簇，《数学研究生教材》**124**，美国数学学会，2011年。[9] D. Eisenbud 和 B. Sturmfels，二项式理想，《杜克数学杂志》**84**（1996年），第1期，1–45。[10] R. Fedder，F-纯性与有理奇点，《美国数学学会会刊》**278**（1983年），第2期，461–480。[11] R. C. Heitmann，唯一分解整环完备化的刻画，《美国数学学会会刊》**337**（1993年），第1期，379–387。[12] M. Hochster 和 C. Huneke，F-正则性、检验元与光滑基变换，《美国数学学会会刊》**346**（1994年），第1期，1–62。[13] S. Patankar，绝对整闭包的相干性，《美国数学会会刊》B辑 **9**（2022年），75–89。[14] K. Shimomoto，F-相干环及其在紧闭包理论中的应用，《代数杂志》**338**（2011年），24–34。[15] A. Simpson，完美化可以是非相干最大公因子整环，《交换代数杂志》**16** 3，363 2024 367（），第–期。

M. Asgharzadeh电子邮箱地址：
mohsenasgharzadeh@gmail.com