arXiv:2611.30717v2 [cs.GR] 24 Nov 2026

光顺性优化

偶数次周期 B 样条插值的交错节点

Shutao Tang[a], * 和 Zixuan Zhao[b]

[a]机械工程系，西北工业大学，西安，中国[b]芝加哥大学，5801 S Ellis Ave，芝加哥，IL 60637，美国

摘要

在计算机辅助几何设计中，用 B 样条曲线插值一组有序点是一项基础操作。现有文献大多研究开曲线，其中Schoenberg–Whitney条件刻画了非奇异配点矩阵，而平均化是选择节点向量的标准方法。周期B样条插值受到的关注要少得多，开曲线算法也无法直接迁移。对于如何选择节点，目前尚无理论判据；少数已有的构造方法，如平移方法和能量方法，仍然依赖经验，既没有理论保证，也缺乏支撑性分析。本文针对偶次数解决了这一问题。我们证明，对于任意偶次数 $p \geq 2$ ，只要定义域节点与插值参数以两种可容许排序中的任一种交错排列，周期配点矩阵对于任意非均匀参数都是非奇异的。该充分条件并非只指定一个节点向量，而是界定了一个由 n参数构成的可容许节点向量族，为周期插值长期缺失的节点选择提供了理论基础。它还解释了经验性的平移方法为何可解；此前对此的解释仅基于错误的对角占优论证。随后，我们利用剩余的自由度，通过光顺性优化来布置节点；该方法在每次迭代中都保持可容许性，并形成 Opt-R 和 Opt-L 方法。在四个由分布不规则的点构成的闭合形状上，这些方法实现了与平移方法和能量方法相当的光顺性，在若干情况下优于它们，并提供了任何经验性构造都无法给出的保证。

关键词。周期 B 样条；偶次数；插值；交错定义域节点；公平性能量；优化；条件数。

1 引言

用 B 样条曲线插值一组有序点，是计算机辅助
g几何设计（CAGD）中最常见的操作之一，需要预先做出两个决定：必须为每个数据点指定一个参数值或节点，
e并为样条函数选定一个节点向量。这两项选择决定了配点矩阵
th将控制点与数据关联起来的方式，因此也决定了所得曲线的形状及其数值行为
o插值系统。对于开曲线插值，大量经典文献都致力于参数的选择
th参数，而一旦获得这些参数，节点向量通常通过经典平均技术得到
[1， 2], 该技术产生一个全正带状配置矩阵，可以通过高斯消元求解，而无需
p选主元。对于闭合或周期性的B样条曲线，情况更为复杂，因为其循环结构的
c曲线引入了额外的线性约束，且平均技术无法直接应用。大量
li文献都集中于开曲线，而这些开曲线技术无法直接转用于
p周期情形受到的关注相对较少。

对于开曲线插值，广泛使用的 Schoenberg–Whitney条件 [1] 刻画了使配点矩阵
k 非奇异的参数和节点。然而，对于周期B样条曲线，尚无可比的条件；相关研究主要通过针对特定次数 [3–5],量身定制的经验构造来开展，而关于周期B样条插值的研究相对较少 [6]。目前尚无关于哪些节点向量能使周期插值系统可解的简单刻画，也缺乏能够保证周期B样条曲线插值系统具有良好条件数的构造规则。本文提出的方法旨在填补这一空白。

本文讨论偶次数情形，并建立在一个简单观察的基础上。对于偶数次 p，只要定义域节点与插值参数交错排列，周期配点矩阵就是非奇异的；这里的交错排列是指初始节点与第一个参数重合，且每个内部节点都严格位于两个连续参数之间（图 2 或 3）。参数可以任意非均匀分布，每个内部节点也可以独立地放置在其所在区间内，因此，交错条件描述的不是单个节点向量，而是一整族可接受的节点向量。它是开曲线 Schoenberg–Whitney条件在周期、偶次数情形下的对应形式。

特别是，由于移位方法的移位节点满足左交错排序，因此该方法必定可解；此前对此的论证仅依赖一个错误的对角占优论证 [4]。因此，对于相当大一类节点向量，唯一可解性是有保证的，而剩余的自由度可用于提升插值曲线的质量。

我们利用这一自由度 通过光顺性优化来布置节点。每个内部节点都放置在其允许的区间内，并由一个系数来确定
t $\theta_i \in (0, 1)$，系数通过局部最小化由所得曲线的一阶和二阶导数能量组成的两项公平性能量来计算 rgy

。通过逻辑函数重新参数化移除系数上的盒约束，并使用多起点拟牛顿方法对所得无约束问题进行数值求解。由于系数在每次迭代中始终保持在开单位区间内，交错条件以及由此得到的唯一可解性在整个优化过程中均成立。将所得的 Opt-R 和 Opt-L 方法与两种确定性偶次数构造 —— 移位方法和能量方法 [4]，进行比较。比较对象为四种具有复杂、非均匀点分布的闭合形状，并采用三种参数化：弦长、向心[7], 以及 Fang 和 Hung 改进的参数化 [8]。

本研究的主要贡献概括如下：

- **唯一可解性的交错条件**。 我们证明，对于每个偶次数 $p \geq 2$只要定义域节点与参数按右侧或左侧排序交错排列，周期配点矩阵就非奇异。参数可以任意非均匀，而内部节点可以在各自区间内独立选取（定理 1 和推论 1）。

- **对现有构造的推论**。 交错条件解释了为何经验性的移位方法是可解的，尽管 Park 的对角占优论证 [4]并不成立。

- **公平性优化节点布置**。 我们将交错条件留下的 n参数可容许节点向量族转化为一个光顺性问题，并采用逻辑函数重新参数化和多起点拟牛顿局部搜索进行处理；该方法在每次迭代中都保持可容许性，从而得到两个经过局部优化的构造 Opt-R 和 Opt-L（第 5节）。

- **与确定性偶次数构造的比较**。我们比较 Opt-R 和 Opt-L 与移位和能量方法在三种参数化方式（弦长、向心 [7], 以及 Fang 和 Hung 提出的改进参数化方式 [8]）下的表现，并分析公平性、条件性和计算成本之间的权衡（第6节）。

表1将所提出的方法与标准节点选择策略进行对比，并突显现有构造所缺乏的理论保证。

表 1：B样条曲线插值的节点选择策略比较。

方法	类别	策略	优点	缺点
平均化 [1, 2]	Open	p 个连续参数的平均值参数。	开曲线的标准；带状全正系统。	不适用于周期曲线；条件数不良或对于偶次数而言是奇异的。
移位 [4]	闭合	相邻参数的半跨度参数；移动参数。	简单；直接构造。	经验性；没有理论证明或条件数保证。
能量 [4, 5]	闭合	额外控制点；约束能量最小化。	低能量；光滑曲线。	经验性的；没有理论上的保证配点矩阵为满秩。
Opt-R，Opt-L（本文）	闭合	交错结点；公平性能量最小化。	对于任意次数，均保证可解；偶次数；结点自由度；证明移位可解。	仅为充分条件；偶次数；多起点代价。

本文其余部分的组织如下。第2 节回顾与B样条曲线插值相关的研究工作。第3 节介绍技术背景，并阐述本文所研究的问题。第4 节证明唯一可解性的交错条件。第5 节 formulates 公平性优化节点布置问题及其局部数值解。第6 节展示实验结果，第7节总结全文并展望未来工作。

2 相关工作

本节回顾与B样条曲线插值相关的主要研究方向：数据参数化、节点向量的确定、将参数和节点作为未知量处理的优化策略，以及保证适定插值的数值条件。

2.1 数据参数化

参数化将每个数据点映射到参数域中的一个值，而插值曲线的质量在很大程度上取决于这种映射。几种经典策略得到了广泛应用。均匀参数化方法均匀分配参数，弦长法 [2] 按照相邻

点之间的距离按比例 [7] 分配参数，而 Lee 的向心参数化方法 [9] 使用该距离的平方根。Foley 和 Nielson [10] 将相邻线段之间的夹角纳入考量，从而获得在仿射变换下保持不变的参数化；而 Lim [11] 以及 Jung 和 Kim [8], 则将节点置于相应 B 样条基函数达到最大值的位置 [12]。这些启发式方法都不能始终令人满意：当点分布不均匀时，均匀参数可能产生环路或振荡；弦长参数对方向的突然变化较为敏感，而向心参数在此类情况下更加稳健。后续研究改进了向心思想，以抑制不必要的摆动 [13, 14], ，或在混合方案中结合几何视角与基函数导向的视角 [15], 。动态弦长变体和修正弦长变体 [13, 14], 以及由局部三次多项式推导出的节点规则 [15], 遵循相同的启发式理念。

近年来，人们开始探索数据驱动方法。Laube等人 [16] 训练深度网络，以预测逼近曲线的参数和节点；Scholz和Jüttler [17] 使用残差网络为多项式曲线进行参数化；Song等人 [18] 通过监督学习学习混合参数化，而Lin和Feng [19]则对B样条曲线插值的参数进行回归。Tang和Yang [20] 提出了一种可直接生成B样条逼近参数化的网络，并将其扩展到节点和参数的联合预测 [21]；近期的一篇综述对这一类方法进行了总结 [22]。这类方法能够很好地适应训练数据的统计特性，但其行为取决于训练集，无法保证泛化能力，并且无法针对单个数据集给出最优性结论。

2.2 预设参数下的节点确定

参数确定后，仍需确定节点向量，而不同的节点会导致不同的曲线以及插值系统不同的条件性。对于开曲线，标准工具是平均技术 [1, 2]„ 其中每个内部节点都是 p 个连续参数的平均值（此处 p 为样条函数的次数）；所得系统矩阵是全正且带状的，其半带宽小于 p，因此无需主元选取即可通过高斯消元求解 [1, 2]。这样得到的节点反映了参数的分布。

对于周期 B 样条曲线插值，不能直接应用平均技术，因为曲线的循环结构引入了额外的线性约束。具体情况取决于次数的奇偶性。当次数为奇数时，平均化 [3] 和自然 [1] 策略效果良好。然而，当次数为偶数时，平均化往往会导致系统矩阵病态，甚至可能使其变为奇异 [4]。为克服这一困难，Park [4] 提出了平移方法和能量方法。平移方法用两个相邻参数区间各一半构造每个节点区间，并将参数平移最后一个区间的一半；能量方法将控制点数量增加一个，以参数中点作为节点，并在满足线性约束的条件下通过应变能最小化求得控制点 [5]。这两种方法都能生成视觉效果良好的曲线，但平移方法会使参数发生位移，因此参数域的起点并非第一个数据点。图1 总结了上述方法。

然而，移位方法是经验性的；特别是，Park [4]认为，简单选主元会使其配点矩阵严格对角占优。该论断是错误的；附录 C 给出了一个反例。这并不妨碍移位方法具有可解性：每个移位定义域节点都是两个连续移位参数的中点，因此移位节点满足左交错条件（10），且推论 1 保证移位系统是非奇异的。能量方法同样具有经验性：其约束最小值由 KKT系统（23）刻画，而该系统的可解性要求矩形配点矩阵具有满行秩 [23, 24], 这一性质尚未在 Park 的工作中得到证明。

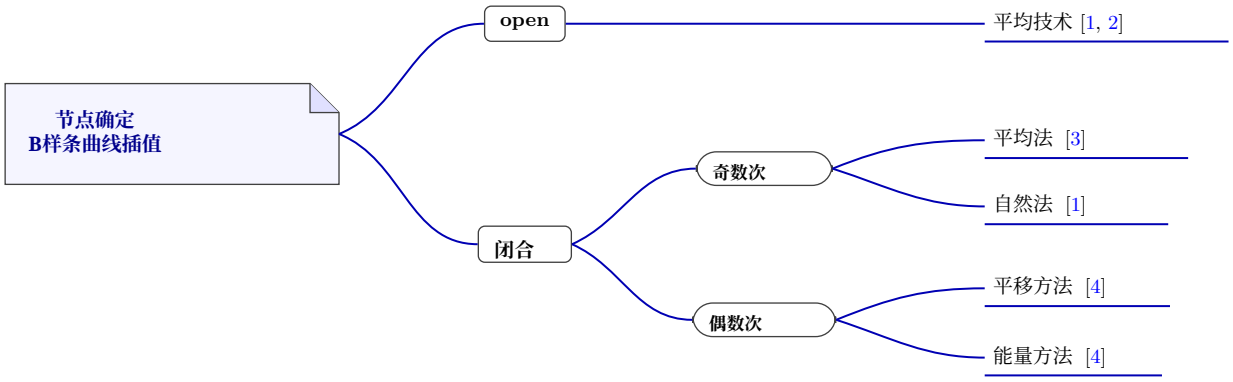

图1：B样条曲线插值节点确定方法概览。对于周期 B 样条曲线，可用的方法取决于次数的奇偶性：平均化方法和自然法适用于奇数次，而平移方法和能量方法则是为偶次数引入的。

2.3 基于优化的方法

另一条平行的研究路线同样关注 B样条曲线插值，将参数、节点向量和控制点视为优化问题中的未知量；本文不讨论为曲线逼近而提出的公式。参数也曾被优化，例如 Kouibia 等人 [25], 对三次样条插值的参数进行了优化。由于节点向量同时控制插值曲线的形状和插值系统的可解性，其他研究则直接对节点进行优化。Thakur 将具有自由节点的最优插值二次样条表述为凸规划 [26] ，随后又针对近似最优的自由节点样条求解了线性规划松弛问题 [27]; Suchomski [28] 最小化可变节点上的离散 L_2 误差；Idais 等人 [29] 则利用多目标遗传算法分配三次和双三次插值函数的节点。

较新的方法会联合优化各个自由度。Zhang 等人 [30] 直接对控制点、参数和节点向量同时进行优化，以最小化曲线质量泛函；他们将插值约束重构为无约束问题，并证明所得曲线与数据点之间的距离有界。Hu 和 Zhang [31] 使用 NSGA-II 多目标进化算法搜索节点，并对控制点和切线方向施加约束。由于这些问题仍具有高维、非凸的特点，基于优化的方法计算成本高昂，也容易陷入局部极小值。然而，所有这些研究都关注开曲线；基于优化的方法在周期 B 样条曲线插值中的应用则在很大程度上被忽视了。

2.4 数值稳定性条件

对于开 B 样条曲线插值，经典的 Schoenberg–Whitney 定理 [1] 给出了插值矩阵非奇异的充要条件：每个数据参数都必须严格位于相应 B 样条基函数的支撑集内。该条件是开曲线 B 样条插值数值稳定性的基础。

周期情形在结构上有所不同。由于节点向量是循环的，且控制点首尾相接，配点矩阵不再是区间上的有限带状矩阵，而是圆上的循环带状类循环矩阵，因此无法以经典形式直接应用 Schoenberg–Whitney 定理。自然的周期对应形式是用以每个参数为中心的连续节点窗口替代基函数的支撑集：每个参数都必须严格位于一个窗口内，窗口大小取决于次数，并且参数两侧的节点数随奇偶性而变化。这种周期窗口条件由 Tang 提出 [6] ，作为 Schoenberg–Whitney条件的周期对应形式，并声称该条件可保证方形周期配点矩阵非奇异。然而，所提出的条件并不成立：附录B给出了一个满足该条件但周期配点矩阵却是奇异的均匀节点配置。这推翻了 Tang 的条件，而周期配点矩阵非奇异时节点与参数的精确刻画仍是一个开放问题。本文研究的交错条件是一种不同类型的充分条件，具有构造性：它指定一族节点，使得在所有偶次数下均能保证非奇异性。

3 问题陈述与预备知识

为方便读者　　起见，表2 汇总了本文比较的主要符号和方法　　r.

表2：记号、定义以及本文比较的方法。

符号	含义
$p,\, n$	偶次数；最后一个数据点索引（$n+1$ 个点）
$\mathbf{Q}_i$	数据点，　$0 \le i \le n$
t_i	插值参数，　$0 = t_0 < \cdots < t_n < 1$
u_i	定义域节点，　$0 = u_0 < \cdots < u_{n+1} = 1$
$\mathcal{N}_{j,p}$	周期B样条基函数，　$0 \le j \le n$
$\widetilde{\mathbf{C}}(u)$	周期 B 样条曲线，(4)
$\mathbf{N}_{\text{per}}$	周期配点矩阵，　(6)
$\mathbf{K}$	公平性能量的刚度矩阵，　(15)
α, β	F 的拉伸权重和弯曲权重
θ_i, $\mathbf{\Theta}$,$\mathbf{x}$	$\theta_i = \sigma(x_i)$ 的节点系数、其向量和无约束变量
$F(\mathbf{\Theta})$	节点向量的公平性能量，　(14)
Opt-R、Opt-L	优化的右/左交错（算法 1）
平移方法	Park的移位构造 [4]
能量方法	Park的约束能量最小化器 [5]

设 p为满足 $2 \le p \le n$的偶整数，并设 $\mathbf{Q}_0, \ldots, \mathbf{Q}_n$ 为欧几里得空间中的数据点，其预设参数为 $\mathbf{T}(t_i) = \{t_0, \ldots, t_n\}$，满足

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < 1. \tag{1}$$

我们要寻找一条周期 B 样条曲线，使其在给定参数处插值这些数据。周期固定为 1。我们令 $t_{n+1}=1$ 用于描述最终的参数区间；它不是额外的插值参数。

设简单定义域节点满足

$$0=u_0<u_1<\cdots<u_n<u_{n+1}=1, \qquad u_{i+n+1}=u_i+1 \quad (i\in\mathbb{Z}). \tag{2}$$

令 $N_{i,p}$ 表示与扩展节点序列 [32, 定义 4.19] 相关联的次数为 p 的归一化 B 样条。我们对这些函数进行编号，使得 $N_{i,p}$ 的支撑集为 $[u_{i-p},u_{i+1}]$。定义周期基函数如下：

$$\mathcal{N}_{j,p}(u)=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} N_{j+\ell(n+1),p}(u), \qquad 0\le j\le n. \tag{3}$$

该和局部有限。周期 B 样条曲线为

$$\widetilde{\mathbf{C}}(u)=\sum_{j=0}^{n}\mathcal{N}_{j,p}(u)\mathbf{P}_j, \qquad 0\le u\le 1, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{P}_0,\dots,\mathbf{P}_n$ 是待定控制点。节点扩展使这些函数具有 1-周期性。对于简单节点，普通 B 样条是 C^{p-1}，且其多项式片段的次数至多为 p [32, 定理 4.14]；式（3）中的局部有限和继承了这些性质。特别是，曲线及其截至 $p-1$ 阶的导数在周期的端点处相等。

插值条件为

$$\widetilde{\mathbf{C}}(t_i)=\mathbf{Q}_i, \qquad 0\le i\le n. \tag{5}$$

记 $\mathbf{P}=(\mathbf{P}_0,\dots,\mathbf{P}_n)^{\mathsf{T}}$ 和 $\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}_0,\dots,\mathbf{Q}_n)^{\mathsf{T}}$，这些条件给出方形线性系统

$$\mathbf{N}_{\mathrm{per}}\mathbf{P}=\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{N}_{\mathrm{per}}=\big(\mathcal{N}_{j,p}(t_i)\big)_{0\le i,j\le n}. \tag{6}$$

当且仅当$\mathbf{N}_{\mathrm{per}}$ 为非奇异矩阵时，任意数据都存在唯一的控制点。

我们还将利用周期函数的线性无关性。如果 $\sum_{j=0}^{n}a_j\mathcal{N}_{j,p}=0$，将系数扩展为$a_{i+n+1}=a_i$，即可得到局部有限恒等式

$$\sum_{j=0}^{n}a_j\mathcal{N}_{j,p}(u)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_iN_{i,p}(u)=0. \tag{7}$$

在 (u_k,u_{k+1}) 上，处于作用范围内的普通 B 样条为 $N_{k,p}$、……、$N_{k+p,p}$。它们的局部线性无关性 [32, 定理 4.18]迫使 $a_k=\cdots=a_{k+p}=0$。改变 k 即可证明所有系数均为零。

4 交错定义域节点与唯一可解性

我们给出定义域节点的一个构造性充分条件，使得对于每个偶次数，周期配点矩阵都是非奇异的。该条件要求节点与参数交错：沿周期方向，两族元素交替出现。我们首先讨论右侧排序，即每个内部节点都紧随其对应的参数之后；然后通过反射得到左侧排序。

定理 1（右交错）。设参数和定义域节点满足（1）以及（2），并设 p 为偶数，且$2\le p\le n$。若

$$u_0=t_0=0, \qquad t_i<u_i<t_{i+1} \quad (1\le i\le n), \qquad u_{n+1}=1, \tag{8}$$

则 $\mathbf{N}_{\mathrm{per}}$ 是非奇异的。因此，对于任意数据 $\mathbf{Q}_0$，…，$\mathbf{Q}_n$，恰有一条形如（4）的曲线满足（5）。

图 2 展示了（ 8).

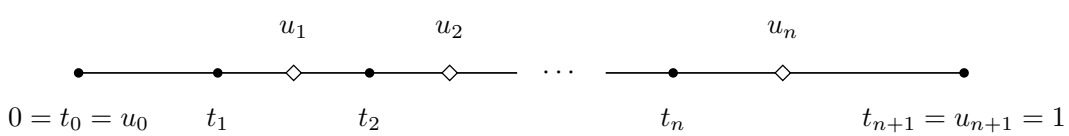

图2：具有共同初始节点和参数的交错。实心圆表示插值参数，空心菱形表示内部定义域节点。根据周期性，端点视为重合。

证明使用了两个辅助引理，详见附录 A。

通过选择任意 $0 < \theta_i < 1$ 并设定以下内容，即可直接满足节点条件

$$u_i = t_i + \theta_i(t_{i+1} - t_i), \qquad 1 \le i \le n, \tag{9}$$

取 $u_0 = 0$ 和 $u_{n+1} = 1$。每一种这样的选择都满足定理 1。

对于相反排序，即每个内部节点都位于其对应参数之前时，同样的结论也成立。

Coro推论 1（左交错）。 定理 *1* 的结论在将 （8）替换为

$$u_0 = t_0 = 0, \qquad t_{i-1} < u_i < t_i \quad (1 \le i \le n), \qquad u_{n+1} = 1. \tag{10}$$

相同的左交错条件（10）此前曾由 Tang 提出，作为猜想 1，用于放样B样条曲面插值到串行闭合轮廓的情形；该条件得到了数值实验的支持，但尚未得到证明。推论 1 对每个偶次数 $p \ge 2$都严格证明了这一点。左侧排序（10）如图 3所示。

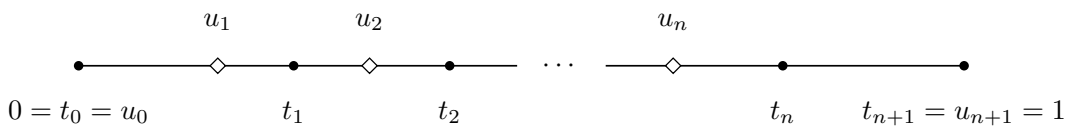

图3：左交错：每个内部定义域节点 u_i 严格位于 t_{i-1} 和 t_i之间。实心圆表示插值参数，空心菱形表示内部定义域节点。端点通过周期性加以识别。

证明。 将参数关于 $u \mapsto 1 - u$进行反射。设 $\widehat{t}_0 = \widehat{u}_0 = 0$、 $\widehat{t}_{n+1} = \widehat{u}_{n+1} = 1$，以及

$$\widehat{t}_i = 1 - t_{n+1-i}, \qquad \widehat{u}_i = 1 - u_{n+1-i}, \qquad 1 \le i \le n.$$

则（10）意味着 $\widehat{t}_i < \widehat{u}_i < \widehat{t}_{i+1}$ 对于 $1 \le i \le n$。

取一个满足 $\mathrm{N}^{\mathrm{per}}\mathsf{a} = 0$ 的 a，并令 $s = \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{N}_{j,p}$。函数 $\widehat{s}(v) = s(1-v)$ 是周期性的，并且 C^{p-1}，在反射节点区间上具有次数至多为 p 的多项式片段，并在每个 t_i 处均为零。因此，定理 1 证明中的齐次样条论证给出 $\widehat{s} \equiv 0$，从而得到 $s \equiv 0$。原周期基的线性无关性给出一个 $= 0$。于是 $\mathrm{N}^{\mathrm{per}}$ 是非奇异的，插值结论随即成立。 □

在此排序下，直接选取的节点为

$$u_i = t_{i-1} + \theta_i(t_i - t_{i-1}), \qquad 0 < \theta_i < 1, \qquad 1 \le i \le n, \tag{11}$$

端点相同。两项结果均证明，对于每个可容许的 cho，都具有唯一可解性 ice.

5 公平性优化节点布置

交错条件保证了整族节点向量的唯一可解性，但所得曲线的质量各不相同。衡量这种质量的一种标准方法，是计算曲线 [34, 35]，的公平性（应变）能量——这是一种常用的二次泛函，用于惩罚拉伸和弯曲，并使曲线更加平滑、分布更加均匀。我们通过局部优化该能量来选取可容许的交错节点，从而得到两种公平性优化构造：右侧排序对应 Opt-R，左侧排序对应 Opt-L。每个内部节点均由单个凸组合权重 θ_i, $0 < \theta_i < 1$ $(1 \le i \le n)$ 确定：

$$\text{Opt-R:} \qquad u_i = t_i + \theta_i\,(t_{i+1} - t_i), \qquad 1 \le i \le n, \tag{12}$$

$$\text{Opt-L:} \qquad u_i = t_{i-1} + \theta_i\,(t_i - t_{i-1}), \qquad 1 \le i \le n, \tag{13}$$

其中有 $u_0 = t_0 = 0$ 和 $u_{n+1} = t_{n+1} = 1$。对于给定的节点向量，曲线由（6）唯一确定，并且公平性能量可以用控制点和刚度矩阵表示。令 $\mathbf{b}(u) = (\mathcal{N}_{0,p}(u) \dots, \mathcal{N}_{n,p}(u))^{\mathsf{T}}$ 为周期基向量，其一阶和二阶导数分别为 $\mathbf{b}^{(1)}$ 和 $\mathbf{b}^{(2)}$。则

$$F(\boldsymbol{\Theta}) = \alpha \int_0^1 \|\widetilde{\mathbf{C}}'(u)\|^2\, du + \beta \int_0^1 \|\widetilde{\mathbf{C}}''(u)\|^2\, du = \operatorname{tr}\big(\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{K}\mathbf{P}\big), \tag{14}$$

其中

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \big(\alpha\, \mathbf{b}^{(1)}(u)\mathbf{b}^{(1)}(u)^{\mathsf{T}} + \beta\, \mathbf{b}^{(2)}(u)\mathbf{b}^{(2)}(u)^{\mathsf{T}}\big)\, du \tag{15}$$

是刚度矩阵，可通过高斯求积或解析方式计算 [36]；$\mathbf{P} = \mathbf{N}_{\mathrm{per}}^{-1}\mathbf{Q}$ 由（6）给出，且 $\alpha \ge 0$ 以及 $\beta \ge 0$分别为拉伸和弯曲系数 [4, 5]；我们使用 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0.2$。

K 和 $\mathbf{N}^{\text{per}}$ 均取决于节点向量，因而取决于 $\boldsymbol{\Theta}$，所以 $F(\boldsymbol{\Theta})$ 仅是 $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ 的函数。对于固定节点，公平性能量关于控制点是二次的，但矩阵 $\mathbf{N}^{\text{per}}(\boldsymbol{\Theta})$ 和 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta})$ 关于节点系数呈非线性依赖。因此，所得有限维问题通常是非凸的，所以下文的数值过程采用局部优化策略。我们寻找满足 $0 < \theta_i < 1$ $(1 \le i \le n)$ 的可容许节点向量。通过逻辑斯蒂替换 $\theta_i = 1/(1 + e^{-x_i})$（其中 $x_i \in \mathbb{R}$）消除盒约束，并使用拟牛顿（BFGS）方法 [37], 处理变换后的目标函数，该方法以两个经验值 $\theta_i = 0.5$ 和 $\theta_i = 0.3$为初始值。在这些运行返回的候选解中，保留计算所得能量最小的解。由于在每次迭代中均保持 $\theta_i \in (0, 1)$，交错条件（12）–（13）始终成立，因此插值矩阵总是非奇异的。该过程总结于算法1中，其中 δ 选择排序方式。

算法1 公平性优化交错节点（δ =右：Opt-R； δ =左：Opt-L）

需要： 数据点 $\mathbf{Q}_0, \ldots, \mathbf{Q}_n$；偶次数 p, $2 \le p \le n$；权重 α， β；方向 $\delta \in \{$右，左$\}$
确保： 可容许节点 $u_0 < \cdots < u_{n+1}$，控制点 $\mathbf{P}$，插值曲线 $\widetilde{\mathbf{C}}$，计算所得的最佳能量 $F(\boldsymbol{\Theta}^\star)$

计算参数 $0 = t_0 < \cdots < t_n < 1$；设置 $t_{n+1} = 1$
设置 $\sigma(s) = 1/(1 + e^{-s})$， $u_0 \leftarrow 0$, $u_{n+1} \leftarrow 1$
对于 $1 \le i \le n$，设置 $u_i(\boldsymbol{\Theta}) \leftarrow \begin{cases} t_i + \theta_i(t_{i+1} - t_i), & \delta = \text{右}, \\ t_{i-1} + \theta_i(t_i - t_{i-1}), & \delta = \text{左} \end{cases}$
函数 $F(\mathbf{x})$ ▷ 插值曲线的公平性能量
  $\boldsymbol{\Theta} \leftarrow \sigma(\mathbf{x})$
  构建 $\mathbf{u}(\boldsymbol{\Theta})$， $\mathbf{N}^{\text{per}}(\boldsymbol{\Theta})$， $\mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta})$ ▷ $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_{n+1})$：定义域节点
  求解 $\mathbf{N}^{\text{per}}\mathbf{P} = \mathbf{Q}$
  返回 $\operatorname{tr}(\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{K}\mathbf{P})$
结束函数
我 $\leftarrow$ {0.5， 0.3} ▷ 经验初始值（ θ_i）
对于 $\theta^{(0)} \in \mathcal{I}$ **则**
  $\boldsymbol{\Theta}^{(0)} \leftarrow (\theta^{(0)}, \ldots\ldots, \theta^{(0)})$
  $\mathbf{x}^\star \leftarrow \text{BFGS}\big(F, \text{逻辑变换}(\boldsymbol{\Theta}^{(0)})\big)$ ▷ 逻辑变换 $= \sigma^{-1}$
  $\boldsymbol{\Theta}^\star \leftarrow \sigma(\mathbf{x}^\star)$
结束循环
在计算出的候选项中保留计算值最小的 $\boldsymbol{\Theta}^\star$ F
构建$\mathbf{u}^\star \leftarrow \mathbf{u}(\boldsymbol{\Theta}^\star)$; 求解$\mathbf{N}^{\text{per}}(\mathbf{u}^\star)\mathbf{P}^\star = \mathbf{Q}$
返回 $\mathbf{u}^\star$， $\mathbf{P}^\star$， $\widetilde{\mathbf{C}}(u) = \mathbf{b}(u)^{\mathsf{T}}\mathbf{P}^\star$, $F(\boldsymbol{\Theta}^\star)$

6 实验结果

这些方法使用 C 和 Wolfram 语言实现。本节评估了优化交错方法在四个闭合多边形数据集上的表现。这些数据集的点分布复杂且不均匀，所采用的次数为 $p = 2$ 和 $p = 4$。这些数据集分别称为兔子、章鱼、长颈鹿和手指，如图 4所示。每个数据集都以原点为中心，并缩放至包围盒对角线为单位长度，使基于曲率的量在不同形状之间具有可比性。前两个数据集兔子和章鱼分别有 19 和 20 个顶点，分别以次数 $p = 2$ 和 $p = 4$进行处理。第三个数据集长颈鹿有 27 个顶点，以 $p = 2$进行处理；它有几个尖锐的拐角，是四个数据集中最不规则的一个。第四个数据集手指有 20 个顶点，以 $p = 4$进行处理。

每个数据集都采用三种参数化方法进行插值，即经典的弦长方法和向心参数化方法 [7] 以及 Fang 和 Hung 改进的参数化方法 [8] （记为 fang2013），并采用四种构造：第5节的优化交错方法 Opt-R 和 Opt-L，以及 Park 的移位方法和能量方法 [4]。附录D 回顾了两种确定性构造，第6.1 节定义了质量度量，本节其余部分报告结果。

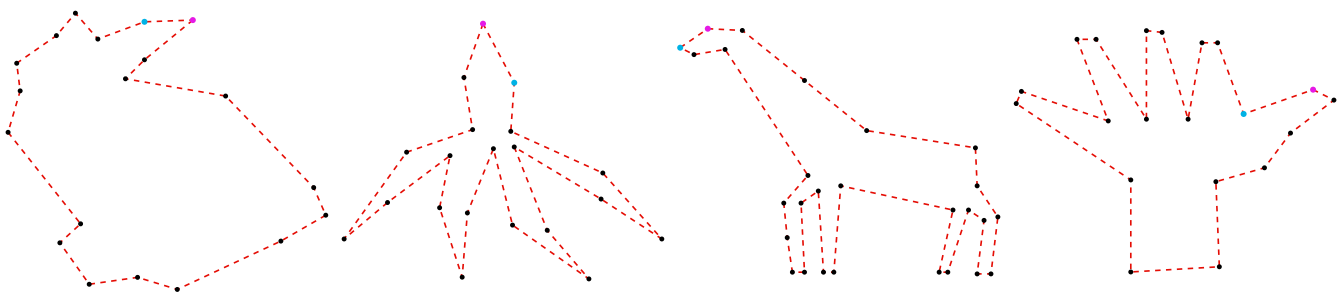

图 4：实验中使用的四个数据集：兔子（19 个顶点，次数 $p = 2$）、章鱼（20 个顶点， $p = 4$）、长颈鹿（27 个顶点， $p = 2$）和手指（20 个顶点， $p = 4$）。每个数据集均已归一化，使包围盒对角线为单位长度；第一个和最后一个顶点分别以品红色和青色标记。

6.1 质量度量

为了评估插值曲线的质量，我们采用 Fang 和 Hung 的质量度量 [8]，

$$W_C = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(1+K_i)\,D_i, \tag{16}$$

其中， K_i 是曲线在第 i个参数区间上的最大绝对曲率， D_i 是曲线相对于对应数据线段的最大偏差，

$$D_i = \max_{t_i<t<t_{i+1}} \operatorname{dist}\big(\widetilde{\mathbf{C}}(t), L_i\big), \qquad L_i = \overline{\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_{i+1}}, \tag{17}$$

~ ~其中 $\operatorname{dist}(\mathbf{C}(t)\ L_i)$ 表示曲线点 $\mathbf{C}(t)$ 到线段 L_i的距离。对于周期曲线，数据是闭合的，共有 $n+1$个线段：最后一个区间 (t_n, t_{n+1})（其中 $t_{n+1}=1$）对应于闭合线段 $L_n = \mathbf{Q}_n\mathbf{Q}_0$，而式（17）中的索引按模 $n+1$计算。较小的 W_C 表示曲线能够在弯曲较小的同时紧密跟随数据折线。

6.2 重建曲线与节点布置

在图 5–8 中，顶部面板叠加显示了针对每个数据集和参数化得到的四条插值曲线。所有构造都精确插值数据，并且在多边形的平滑部分，其曲线在视觉上难以区分；它们仅在高曲率顶点附近有所不同，此时内部节点的布置决定了曲线需要多早开始转向。这证实，交错条件所留下的自由度是一种有效的自由度，四种构造以不同方式对其加以处理。中间面板显示了完整的重建结果，包括控制多边形和数据点，并在每个构造上方标出了其公平性能量 F；底部面板则显示了所得的节点和参数布置：移位 和 能量 方法将节点放置在连续参数的中点处，而 Opt-R 和 Opt-L 则依据 θ（图 9）。

其中两个数据集值得特别关注。在图6 （章鱼）中，优化交错明显更优：Opt-R 和 Opt-L 生成的曲线在视觉上令人愉悦，而居中移位和能量构造在弦长参数化下会出现小幅自交。由于这四种构造使用相同的参数，区别仅在于内部节点的布置，因此该比较隔离了节点布置的影响，并表明优化交错避免了居中节点引入的伪影。由于度量（16）不会对自交进行惩罚，因此这一视觉上的改进并未反映在表5中，在该表中，居中节点可能显示出更小的W_C。在图8（手指）中，情况则相反：四种构造在弦长参数化下都会生成自交曲线。此时，内部节点不再是决定因素：伪影源于参数化，任何可行的节点布置都无法消除它。这与开曲线插值中出现的现象相同，即参数化决定曲线的形状，尤其决定自交的出现。因此，这两个案例相互补充，展示了参数化与节点布置之间的相互作用：当节点是限制因素时，节点优化是有效的；而糟糕的参数化则无法通过任何节点布置来补偿。

图9 展示了 Opt-R 和 Opt-L 的优化节点系数 θ_i 。这些数值在各个顶点之间变化显著，并反映了局部几何：对于不规则数据集长颈鹿，系数几乎遍及整个可容许区间 $[0,1]$, ，而对于较平滑的数据集，系数则更接近中点 $1/2$。右序与左序产生了明显不同的模式，这反映出它们分别使每个节点相对于两个不同的边界参数移动。对于向心参数化和 fang2013 参数化，图9 中的两条曲线非常接近，但并不完全相同。这是几何效应，而非数值上的巧合：两种参数化本身仅有细微差别，并且在最优点附近，节点的微小变化对曲线只有二阶效应，因此两种参数化会使系数趋于几乎相同的数值。所得曲线之间的差异约为形状尺寸的0。1%，尽管底层参数向量相差最多达 7.2×10^{-3}，公平性能量仍相差约1。5%。

表3 列出了周期配点矩阵的条件数 $\kappa_2(\mathbf{N}^{\mathrm{per}})$ 。参数化的影响最为显著：弦长参数化产生最大的条件数，而向心参数化和 fang2013 将其降低了约一半，例如，长颈鹿的条件数从 5.71 降至 2.57 ，手指的条件数则从11.98 降至 6.41 。四种构造的条件数处于同一数量级；优化交错方法 Opt-R 和 Opt-L 与确定性移位构造和能量构造的结果接近。所有数值均保持在适中范围内，其中最大值是在弦长参数化下手指对应的约 14.6，这与定理1 所保证的非奇异性一致，也表明允许的节点位置在数值上是安全的。

公平性能量 F 列于表4中。四种构造给出的数值彼此相差仅几个百分点，最小值则在能量方法与优化方法之间交替出现。不同参数化之间的差异更为明显：相较于弦长参数化，向心参数化使长颈鹿的 F 降低了约三分之一（5437 相比8050），使兔子的降低了约五分之一，使手指的降低了约七分之一；而对于章鱼，三种参数化给出的数值相近。

表3：四个数据集的插值系统的条件数 $\kappa_2(\mathbf{N}^{\mathrm{per}})$

Data	参数	Opt-R	Opt-L	移位	能量
兔子 ($p=2$)	弦	4.047	3.032	3.085	3.083
	向心	3.363	2.670	2.178	2.166
	fang2013	3.359	2.683	2.177	2.164
章鱼 ($p=4$)	弦	5.494	5.501	5.353	5.029
	向心	5.104	5.121	4.913	4.756
	fang2013	5.100	5.119	4.911	4.756
长颈鹿 ($p=2$)	弦	5.711	6.141	5.620	5.554
	向心	2.566	2.921	2.575	2.554
	fang2013	2.581	2.928	2.587	2.567
手指（$p=4$）	弦	11.976	11.980	14.621	14.536
	向心	6.410	6.425	6.292	6.260
	fang2013	6.445	6.460	6.381	6.352

表5 展示了（ W_C 16）的 Fang–Hung度量；数值越小，表示曲线越贴近数据多边形且弯曲越小。大多数情况下，移位和能量方法取得最小值，这反映出对于分布均匀的参数，居中节点能够使曲线偏离弦的程度保持较小；优化方法接近这一基准：对于章鱼，差异在约百分之十五以内；对于长颈鹿，在几个百分点以内；对于兔子，在约四分之一以内。一个显著例外是采用弦长参数化的手指，此时居中构造（移位或能量）给出 $W_C \approx 10.7$，超过 $W_C \approx 5.24$ Opt-R 和 Opt-L 数值的两倍。这里，弦长参数的强烈不均匀性使居中节点明显偏离数据多边形，而优化交错则根据几何形状调整节点，使偏差保持较小。对于手指，向心参数化和 fang2013 消除了这一差异的大部分（$W_C \approx 2.5$ 降至 3.7）。因此，没有任何一种方法始终最优：参数化与节点布置相互影响，而优化交错提供了一种稳健的折中方案。

Table 4：四个数据集的插值系统的公平性能量 F （越小越好）

Data	参数	Opt-R	Opt-L	移位	能量
兔子 ($p=2$)	弦	1596.75	1629.96	1528.57	**1527.37**
	向心	1267.69	1307.49	1223.13	**1222.10**
	fang2013	1275.51	1316.00	1231.26	**1230.23**
章鱼（$p=4$）	弦	**3200.07**	3200.19	3217.09	3216.40
	向心	**3162.78**	3163.22	3173.47	3172.51
	fang2013	**3167.21**	3167.65	3177.92	3176.95
长颈鹿（$p=2$）	弦	**8050.14**	8533.88	8086.63	8052.81
	向心	**5436.89**	5569.42	5451.19	5444.96
	fang2013	**5527.27**	5660.93	5540.95	5534.66
手指（$p=4$）	弦	**4168.82**	4168.93	4274.76	4262.40
	向心	3548.07	3550.83	3548.27	**3546.75**
	fang2013	3579.00	3581.66	3578.81	**3577.24**

Tab表 6：每个数据集、参数化和构造的计算时间（以毫秒计）。

Data	参数	Opt-R	Opt-L	移位	能量
兔子（$p=2$）	弦	75.18	78.69	0.32	0.73
	向心	69.09	81.86	0.15	0.34
	fang2013	76.89	75.36	0.20	0.40
章鱼 ($p=4$)	弦	68.73	69.40	0.22	0.50
	向心	74.73	64.07	0.61	0.72
	fang2013	68.04	71.08	0.20	0.83
长颈鹿 ($p=2$)	弦	74.06	83.87	0.20	0.66
	向心	86.74	68.62	0.24	0.54
	fang2013	67.21	72.08	0.25	0.55
手指 ($p=4$)	弦	84.94	72.80	0.20	0.50
	向心	76.06	73.84	0.40	0.92
	fang2013	97.70	93.34	0.27	0.53



图5：兔子（$p = 2$，19 个顶点）：四种构造在三种参数化下的插值曲线（上），包含控制多边形和数据点的重建结果（中），以及结点/参数布置（下）。

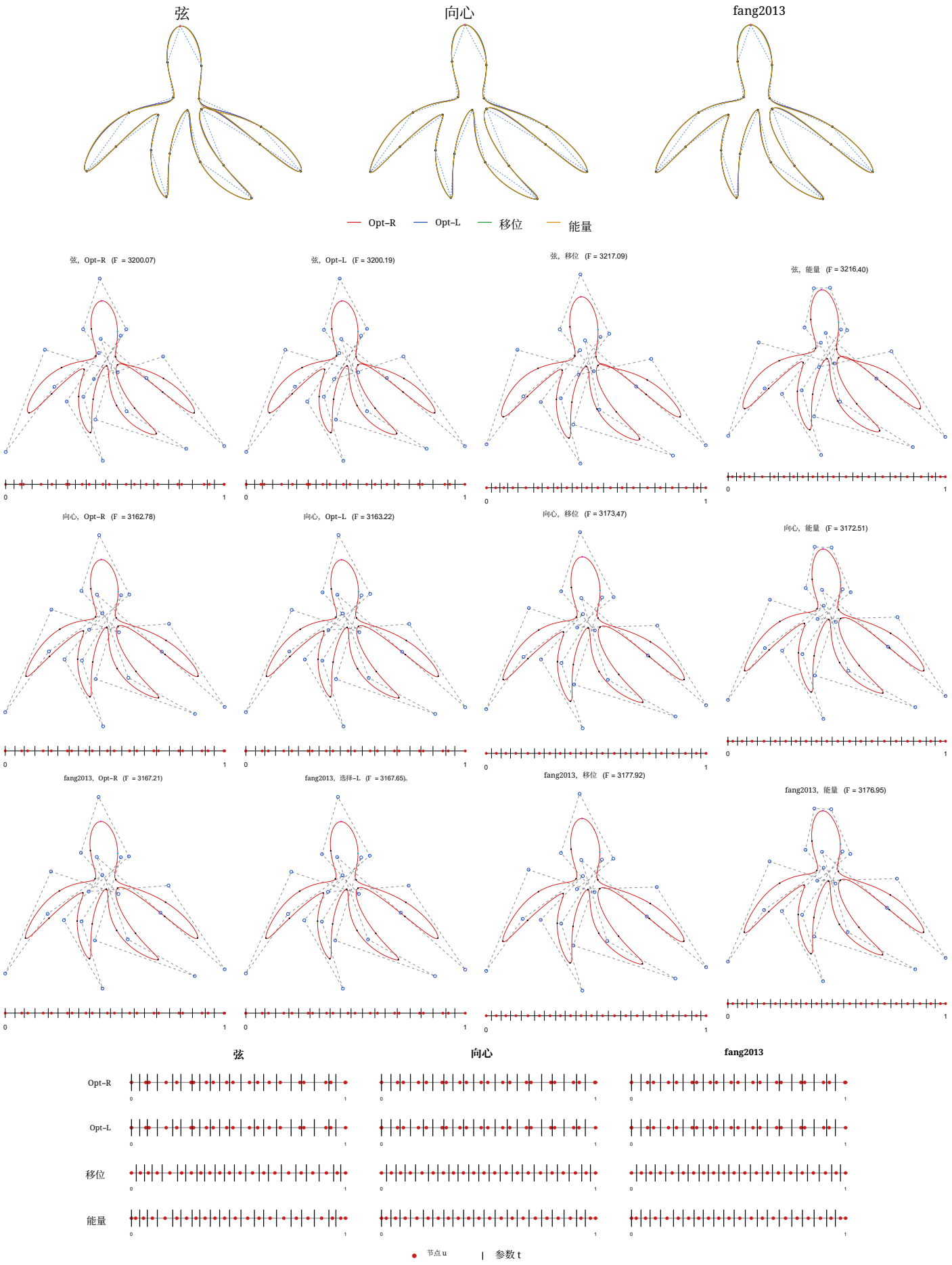

图6：章鱼（$p = 4$，20个顶点）：三种参数化下四种构造的插值曲线（上）、带有控制多边形和数据点的重建结果（中），以及结点/参数布置（下）。

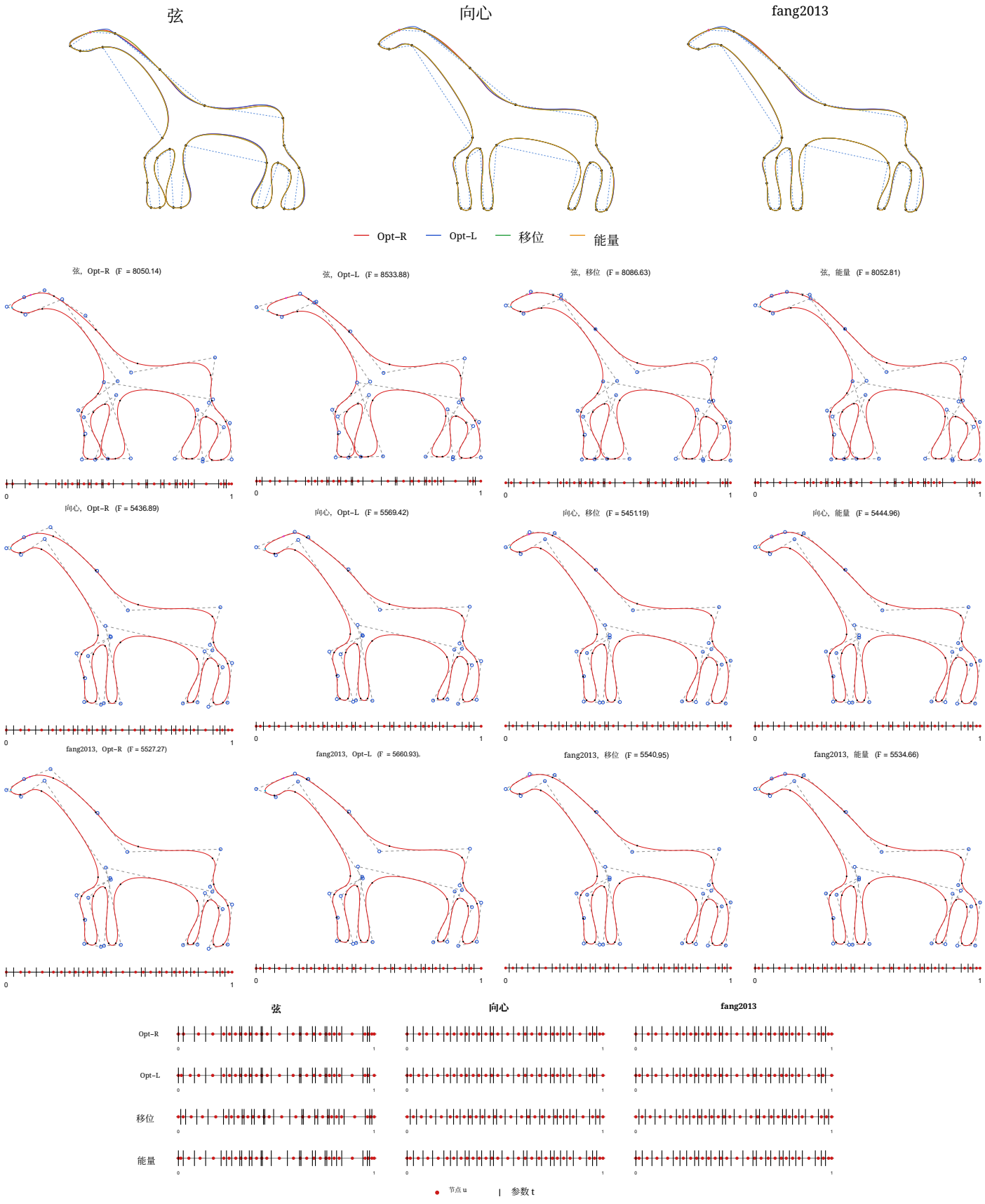

图7：长颈鹿（$p = 2$，27个顶点）：四种构造在三种参数化下的插值曲线（顶部）、带有控制多边形和数据点的重建结果（中部），以及结点/参数布置（底部）。

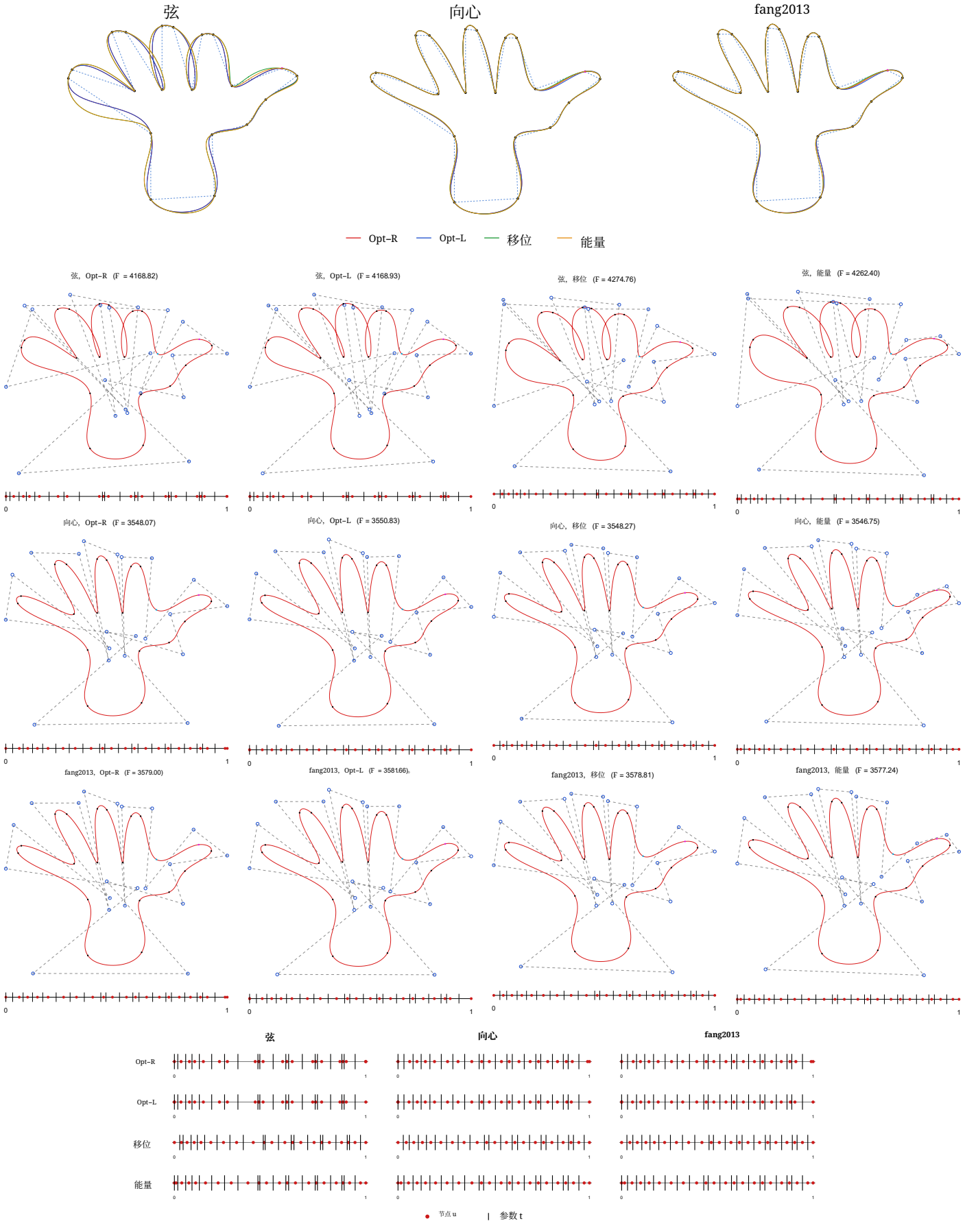

图8：手指（$p = 4$，20 个顶点）：四种构造在三种参数化下的插值曲线（上）、带有控制多边形和数据点的重建结果（中），以及结点/参数布置（下）。

表 5：四个数据集的 Fang–Hung 质量度量 W_C（越小越好）。

Data	参数	Opt-R	Opt-L	移位	能量
兔子（$p=2$）	弦	0.5560	0.5241	**0.4371**	0.4807
	向心	0.5004	0.4710	**0.4062**	0.4612
	fang2013	0.5072	0.4706	**0.4049**	0.4630
章鱼（$p=4$）	弦	2.0718	2.0739	**1.8873**†	1.9331†
	向心	2.1914	2.1944	**1.9398**	1.9842
	fang2013	2.1706	2.1736	**1.9344**	1.9782
长颈鹿（$p=2$）	弦	0.5485	0.5880	**0.5350**	0.5367
	向心	0.4995	0.5237	**0.4811**	0.4820
	fang2013	0.4947	0.5206	**0.4777**	0.4788
手指（$p=4$）	弦	**5.2360**†	5.2367†	10.7566†	10.6820†
	向心	3.6007	3.6640	**2.5748**	2.6031
	fang2013	3.4824	3.5433	**2.5384**	2.5664

† 表示一条存在自交的插值曲线。

最后，表 6比较了各构造的计算时间。两种确定性构造最快：它们都只需组装并求解一个稠密线性系统，耗时远低于一毫秒；能量方法略慢，因为它需要求解一个规模约为两倍的KKT系统。优化方法 Opt-R 和 Opt-L 慢约两个数量级，耗时主要来自对节点系数进行多起点优化；但即使是最耗时的情况，每次参数化也只需约 0.1 秒。这对于实际应用已经足够实用，通过进一步优化代码还可以缩短运行时间。

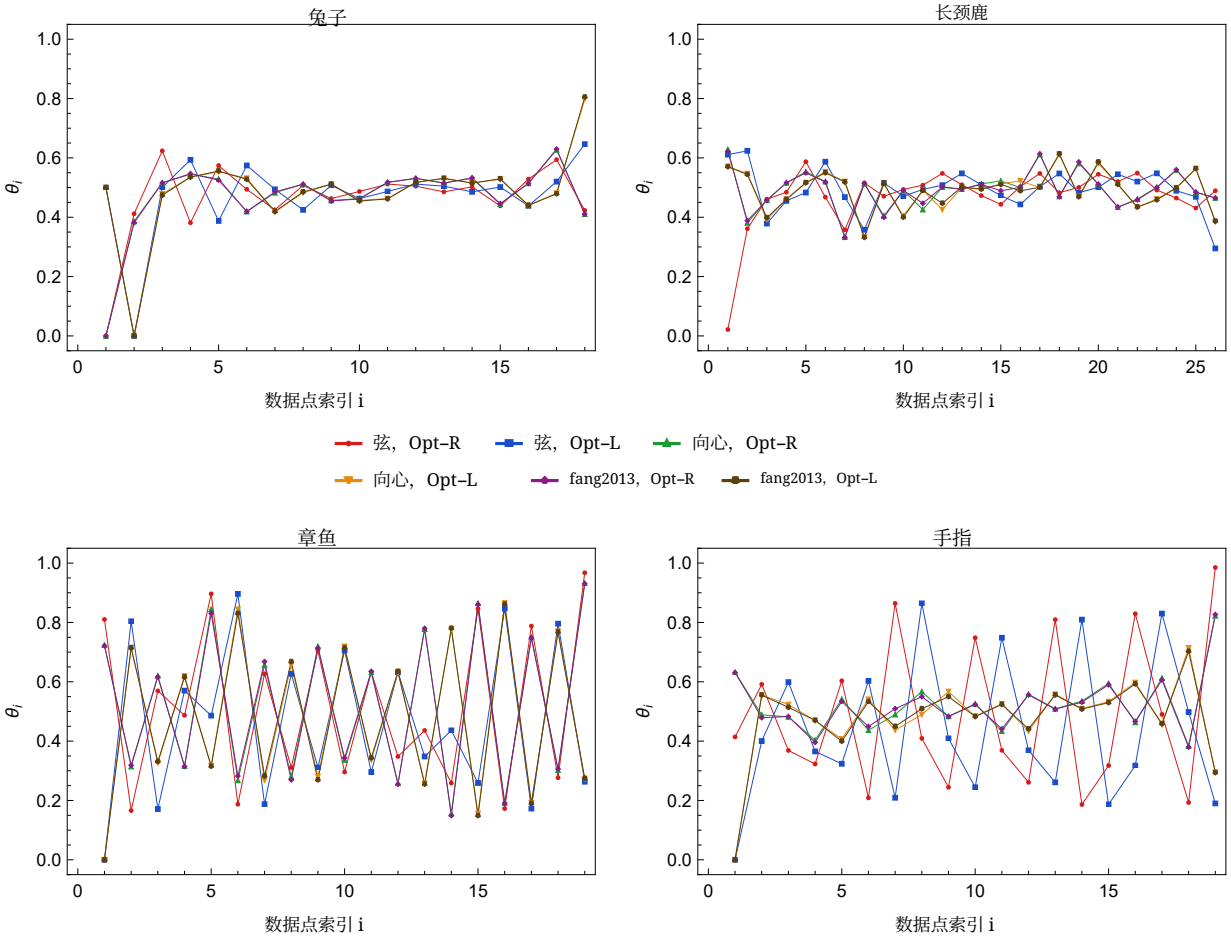

图9：两种交错方法的优化节点系数 θ_i 随数据点索引的变化。上方，次数 $p=2$：兔子（左）和长颈鹿（右）；下方，次数 $p=4$：章鱼（左）和手指（右）。

综上所述，实验表明，对于全部四个数据集和两种次数，交错构造 Opt-R 和 Opt-L 均具有唯一解且条件良好；其条件数与确定性移位和能量方法的条件数相当，而在向心参数化和 fang2013参数化下显著小于

弦长参数化下的条件数。其曲线质量以 W_C衡量，在光滑数据上接近最佳确定性构造，在弦长参数化下手指这一困难组合上的表现则明显更好。因此，优化后的节点布置恢复了居中构造（移位或能量）的几何精度，同时保留了适应不规则数据的灵活性。附录 E 中给出了更多示例，涵盖采用向心参数化、次数为$p = 2$ 的另外十二种测试形状。

7 结论与未来工作

我们已经证明，定义域节点与插值参数的交错，是偶数次周期 B 样条插值问题具有唯一可解性的关键。该条件具有构造性且要求温和：端点位置固定，每个内部节点只需位于两个连续参数之间的区间内。因此，对于一整族节点向量，无论参数分布多么不均匀，它都能保证配点矩阵非奇异，并且同时涵盖节点的右侧排序和左侧排序。交错条件所保留的自由度可以直接加以利用。对每个内部节点的一个系数进行局部优化，即可得到公平性优化节点布置程序；该程序采用逻辑函数重新参数化和多起点拟牛顿搜索实现。逻辑斯蒂替换使每个系数始终严格处于开单位区间内，因此交错条件以及由此保证的唯一可解性在优化的每次迭代中都成立。与平移方法和能量方法的比较表明，局部优化的交错方法和确定性的能量方法都能实现较低的公平性能量；平移方法是一种廉价且条件性良好的替代方案；在插值系统的条件性方面，向心参数化优于弦长参数化。平移构造在没有可解性证明的情况下被广泛使用，而交错理论同样涵盖了该构造：其配点矩阵是非奇异的，尽管 Park 的原始对角占优论证并不成立（附录 C）。

从实用角度来看，优化方法的运行时间较短。确定性移位和能量构造可归结为一次线性求解，速度大约快两个数量级；即使在最耗时的情况下，Opt-R 和 Opt-L 每次参数化也只需约 0.1 秒。该时间主要消耗在多起点搜索上，因此通过代码层面的优化还可进一步缩短；对于交互式设计和其他典型的计算机辅助几何设计（CAGD）任务而言，十分之一秒已经可以忽略不计。因此，优化以仍处于实际预算范围内的代价，为不规则数据增加了有保证的可解性判据和自适应性。

未来工作主要有三个方向。第一是将交错分析扩展到奇数次情形。当前理论涵盖偶次数；对于偶次数，交错条件给出了保证非奇异性的构造性充分条件；而对于奇数次，情况尚未解决，因为第 2.4 节的周期窗口条件 B通常不成立。要完善所有次数下的可解性图景，就需要确定围绕每个域节点参数的可接受位置窗口，使其能够保证奇数次时的非奇异性。第二个方向是系数的前向构造。与其通过公平性能量上的多起点局部搜索来选择 θ_i，不如直接根据数据计算 θ_i；一个自然的猜想是，至少对于足够规则的数据，几何中点 $\theta_i = 1/2$ 能够给出合理或近似最优的选择。若能建立这样的结果，就可以将构造简化为显式公式。第三个方向是插值系统的条件性：尽管实验表明，可接受的节点位置具有良好的条件性，但周期配点矩阵的条件数及其对参数化的依赖关系，仍有待建立严格的界。同样的交错观点还应能够扩展到周期张量积 B 样条曲面和闭合轮廓放样；在这些问题中，逐点方法将与跨轮廓的光顺项相结合。

利益冲突声明

作者声明，他们并无任何已知的竞争性经济利益或个人关系，可能会对本文所报告的工作产生影响。

A 第 节的证明4

A.1 辅助引理

连续1-周期函数 f 的不同零点 $x_1 < \cdots < x_k < x_1 + 1$ 被称为分离的，如果在任意 (x_j, x_{j+1}) 上， f 都不是恒零函数，其中 $x_{k+1} = x_1 + 1$。该定义包括 $k = 1$；恒零函数没有非空的分离零点集合。

引理 1（分离零点）。 设 $q \geq 1$ 为整数。一个1-周期函数 C^{q-1} 在每个节点区间 $[u_i, u_{i+1}]$ 上的限制都是次数至多为 q 的多项式，则它在一个周期内至多有 $n+1$ 个分离零点。

引理 *1*的证明。 设周期性 C^1 函数 f 具有 k 分离零点 x_j。在相邻零点之间选取一个使其达到最大值的内部点 y_j使 $|f|$。则 $f'(y_j) = 0$以及 $f(y_j) \neq 0$。

由 $y_{k+1} = y_1 + 1$可知，点 x_{j+1} 位于 y_j 和 y_{j+1}之间。由于 $f(x_{j+1}) = 0$ 且 $f(y_j) \neq 0$，因此 f' 在相邻 y_j之间不恒为零，所以这些是 f'的 k 个分离零点。

如果命题中的样条函数具有 k 个分离零点，那么将此论证应用 $q-1$ 次，可得到其连续分段线性（$q-1$）阶导数的 k 个分离零点。在任意两个连续的此类零点之间，开区间内必定存在一个节点：否则该函数在此处将是仿射函数，并且在两个端点处均为零，这与分离性矛盾。这些 k 个开区间在圆上互不相交，而圆上只有 $n+1$ 个节点。因此 $k \le n+1$。 □

引理 2（偶数次周期样条函数的一个恒等式）。 设 $p = 2r$，其中 $r \ge 1$为整数，并设 s 为一个1-周期C^{p-1} 函数，其在节点区间上的多项式片段次数至多为 p。记 κ_i 为$s^{(p)}$ 在（u_i, u_{i+1}）上的常值，并定义

$$c_i = \kappa_i - \kappa_{i-1} \quad (0 \le i \le n), \qquad \kappa_{-1} = \kappa_n.$$

Then

$$\sum_{i=0}^{n} c_i s(u_i) = 0.$$

引理 *2* 的证明。 对节点区间积分并进行周期重编号，可得

$$\sum_{i=0}^{n} c_i s(u_i) = -\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \big(s(u_{i+1}) - s(u_i)\big) = -\int_0^1 s'(u) s^{(2r)}(u)\, du.$$

直至 $p-1$ 阶的导数均绝对连续且具有周期性。经过 $r-1$ 次分部积分后，最后一个表达式为

$$(-1)^r \int_0^1 s^{(r)}(u) s^{(r+1)}(u)\, du = \frac{(-1)^r}{2} \Big[\big(s^{(r)}(u)\big)^2\Big]_0^1 = 0.$$

根据周期性，所有边界项均消失。当 $r = 1$ 时，无需分部积分。最高阶导数在节点处的取值不影响这些积分。

□

A.2 定理 1 的证明

证明。 我们首先考虑任意一个 1-周期 C^{p-1} 函数 s，其在 $[u_i, u_{i+1}]$ 上的多项式片段次数至多为 p，且满足

$$s(t_i) = 0 \quad (0 \le i \le n). \tag{18}$$

Pe周期性还给出 $s(1) = 0$。我们证明这些条件必然导致 $s \equiv 0$。否则，假设 e.

该样条函数不可能在一个开区间上恒为零。若确实如此，则其中一个多项式片段将恒等于零。下一个节点 u_i 处达到 $p-1$ 阶的连续性会迫使后续片段具有 $a(u-u_i)^p$ 的形式。每个区间 $(u_i, u_{i+1}]$ 都包含一个不同于 u_i 的插值零点：当 $0 \le i < n$ 时，其内部包含 t_{i+1}，而其右端点是零点 1，即 $i = n$。代入可得 $a = 0$。在整个周期内重复这一论证将得到 $s \equiv 0$，矛盾。

因此， s 在一个周期内只有有限个零点，且其中任意一组都是分离的。引理 1 表明，其零点恰好是模 1 意义下的 t_0、……、t_n。此外，这些零点都是单零点。事实上，在每两个相邻参数之间的每个区间内，选取 $|s|$ 取得正最大值的一点。这些点按照引理证明中的方式，给出 s' 的 $n+1$ 个分离零点。若 $s'(t_j) = 0$，在相邻的已选点之间插入 t_j，就会为 s' 多得到一个分离零点：在新产生的两个区间上， s 都会在零值与非零值之间变化。这与将引理 1 应用于次数为 $p-1$ 的样条函数 s' 相矛盾。因此，对于每个 i，都有 $s'(t_i) \ne 0$。

s 的符号在每个 t_i 处改变，除此之外不再改变。周期函数的这种符号变化次数不可能是奇数，因此 $n+1$ 必为偶数。在每个（t_i, t_{i+1}）中选取一个点；对应的 s 值沿周期方向符号交替。

接下来，我们将这种交替性传递到最高阶导数。对于一个周期、绝对连续的分段多项式函数 f，若它在循环有序点 x_0，……，x_n处取非零且符号交替的值，令 $x_{n+1} = x_0 + 1$。则

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(u)\, du = f(x_{i+1}) - f(x_i) \tag{19}$$

具有 f（x_{i+1}）的符号。因此，每个区间（x_i， x_{i+1}）都包含一个不在节点处的点，使得 $f_{\prime}$具有该符号。这些导数值沿周期方向也再次交替。将此论证应用于 s， s'，……， $s^{(p-1)}$，它们全都是绝对连续的周期函数。由此可知， $s^{(p)}$ 在节点之外有 $n+1$ 个沿周期方向符号交替的非零值。

令 κ_i 为 $s^{(p)}$ 在 (u_i, u_{i+1}) 上的常值。每个节点区间至多包含一个所选点：同一区间内的所有所选点在循环顺序上彼此相邻，而常函数不可能在该区间内交替变号。共有 $n+1$ 个点和 $n+1$ 个区间，因此每个区间恰好包含一个点。因此， κ_i 均非零且符号交替。式 (2) 中定义的跳跃量 c_i 与 κ_i 符号相同，因而也交替变号。根据式 (8)，非零值 $s(u_1) \dots, s(u_n)$ 的符号也交替。于是，对所有 $1 \le i \le n$，乘积 $c_i s(u_i)$ 都具有相同的非零符号，而 $c_0 s(u_0) = 0$。因此

$$\sum_{i=0}^{n} c_i s(u_i) \ne 0.$$

这与 引理 2。因此，每个满足齐次条件（18）的样条函数都恒等于零。

现在取一个 $=$ （a_0，…， a_n）$^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$，其中$\mathbf{N}_{\text{per}}$为 $= 0$。样条函数 $s = \sum_{j=0}^{n} a_j \mathcal{N}_{j\text{满足}}$ (18)，因此 $s \equiv 0$。由利用（7）建立的线性无关性，所有 a_j 均为零。因此，方阵$\mathbf{N}_{\text{per}}$ 是非奇异的。在每个坐标上求解其方程组，即可证明插值曲线的存在性和唯一性。

□

B：周期窗口条件的一个反例 n

我们首先回顾 Tang 所陈述的条件 [6]（其中的定理2和定理3），然后给出一个均匀反例。设 p 为次数，设 $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_{n+1} = 1$ 为按 $u_{j+n+1} = u_j + 1$ 周期延拓的简单域结点，并设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ 为插值参数。令 $k = \lceil p/2 \rceil$，在中心索引下，周期窗口条件写为

$$u_{j-k} < t_j < u_{j+k} \quad (p \text{ odd}), \qquad u_{j-k} < t_j < u_{j+k+1} \quad (p \text{ even}), \qquad j = 0, \ldots, n, \tag{20}$$

并且等价于方形周期配点矩阵的每个对角元均为正。

以下均匀配置表明，在偶数基数下，(20) 并不意味着非奇异性。取次数 $p = 1$、均匀定义域节点 $u_j = j/(n+1)$ 和配点参数 $t_j = (j + \frac{1}{2})/(n+1)$。此时，周期配点矩阵的每一行都是 $(\ldots, 0, 1\,2\,, 1\,2\,, 0, \ldots)$，且每个对角元都等于 $\frac{1}{2} > 0$，因此窗口条件 (20) 成立。交替向量 $v = (1, -1, \ldots, 1, -1)^{\mathsf{T}}$ 因为 $n+1$ 是偶数而绕圆闭合，且每一行都将其消去，因此该矩阵是奇异的。

同样的机制也会出现在更高次数下。对于 $n + 1 = 12$ 和相同的均匀节点，在次数 $p = 3$ 时，参数 $t_j = (j + \frac{1}{2})/(n+1)$ 满足窗口条件；在次数 $p = 2$ 时，参数 $t_j = j/(n+1)$ 也满足窗口条件，但相应的周期配点矩阵都是奇异的；第二种情况表明，这种失效在偶次数下就已出现。

C 平移方法对角占优主张的一个反例

Park [4] 指出，对于平移方法，简单选主元会使周期配点矩阵严格对角占优。由于该矩阵的每一行均非负且行和为 1，严格对角占优等价于存在一个置换，使每一行中大于 $1/2$ 的元素都位于对角线上。下面这个移位二次函数有一行不含这样的元素。

设 $p = 2$ 和 $n + 1 = 12$（因此 $n = 11$），并在 $[0, 1)$ 上进行讨论。取参数

$$t_0, \ldots, t_{11} = \frac{1}{31}\,(0, 2, 4, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29),$$

使得 $d_n = 1 - t_{11} = \frac{2}{31}$，附录 D 中的平移方法将它们替换为移位参数 $\bar{t}_i = t_i + d_n/2$，

$$\bar{t}_0, \ldots, \bar{t}_{11} = \frac{1}{31}\,(1, 3, 5, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30),$$

并将每个内部域结点设为两个连续移位参数的中点，

$$u_0, \ldots, u_{11} = \Big(0,\ \frac{2}{31},\ \frac{4}{31},\ \frac{19}{62},\ \frac{15}{31},\ \frac{17}{31},\ \frac{19}{31},\ \frac{21}{31},\ \frac{23}{31},\ \frac{25}{31},\ \frac{27}{31},\ \frac{29}{31}\Big),$$

其中 $u_{12} = 1$，因此 $u_i = (\bar{t}_{i-1} + \bar{t}_i)/2$ 对于 $1 \le i \le 11$ 以及 $u_0 = 0$。在移位参数 $\bar{t}_2 = \frac{5}{31}$ 处，插值矩阵（6）的相应行有三个非零元素，

$$\Big(\frac{27}{55},\ \frac{298}{605},\ \frac{2}{121}\Big) = \frac{1}{605}\,(297, 298, 10),$$

全部严格小于 $1/2$。由于行和为 1，该行不存在可以移到对角线上、从而使对角元超过其余元素之和的元素；因此，无论进行何种行或列置换，都无法使矩阵严格对角占优。然而，该矩阵仍然是非奇异的，且有 $\kappa_2 \approx 3.09$；因此，失败之处在于占优性论证，而不在于可解性。

D 比较方法

两种确定性偶次数构造作为基线方法 [4]：平移方法和能量方法。平移 方法是偶次数的标准确定性构造。通过 $d_n = 1 - t_n$，它将参数移位到 $\bar{t}_i = t_i + d_n/2$，并将每个内部节点置于两个连续移位参数的中点，

$$u_0 = 0, \qquad u_i = \frac{\bar{t}_{i-1} + \bar{t}_i}{2} \quad (1 \le i \le n), \qquad u_{n+1} = 1, \tag{21}$$

从而每个移位参数都恰好位于其节点区间的中心。

能量方法设置 $\hat{n} = n + 1$，因此使用一个额外的控制点，并将居中节点

$$u_0 = 0, \qquad u_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \quad (1 \le i \le \hat{n}), \qquad u_{\hat{n}+1} = 1, \tag{22}$$

与 $t_{n+1}=1$，并在 $n+1$ 插值约束下直接最小化相同的能量（14）。约束最小值由 KKT系统刻画

$$\begin{pmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{N}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P} \\ \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{Q}\end{pmatrix}, \tag{23}$$

其中 $\mathbf{N}$ 是 $(n+1)\times(\hat{}n+1)$ 周期配点矩阵，$\mathbf{K}$ 是刚度矩阵（15），由周期B样条基构成，而 $\boldsymbol{\lambda}$ 汇集了拉格朗日乘子。通过求解这一线性系统即可得到插值曲线。

E 更多示例

图 10 展示了更多闭合多边形数据集，这些数据集在次数 $p=2$ 下采用向心参数化进行重构。红色曲线是插值曲线，蓝色圆点和灰色虚线线段分别表示控制点和控制多边形，黑色点表示数据点。交错方式在 Opt-R 和 Opt-L 之间交替。优化交错在所有数据集上都表现良好，每条重构曲线在视觉上都很令人满意。

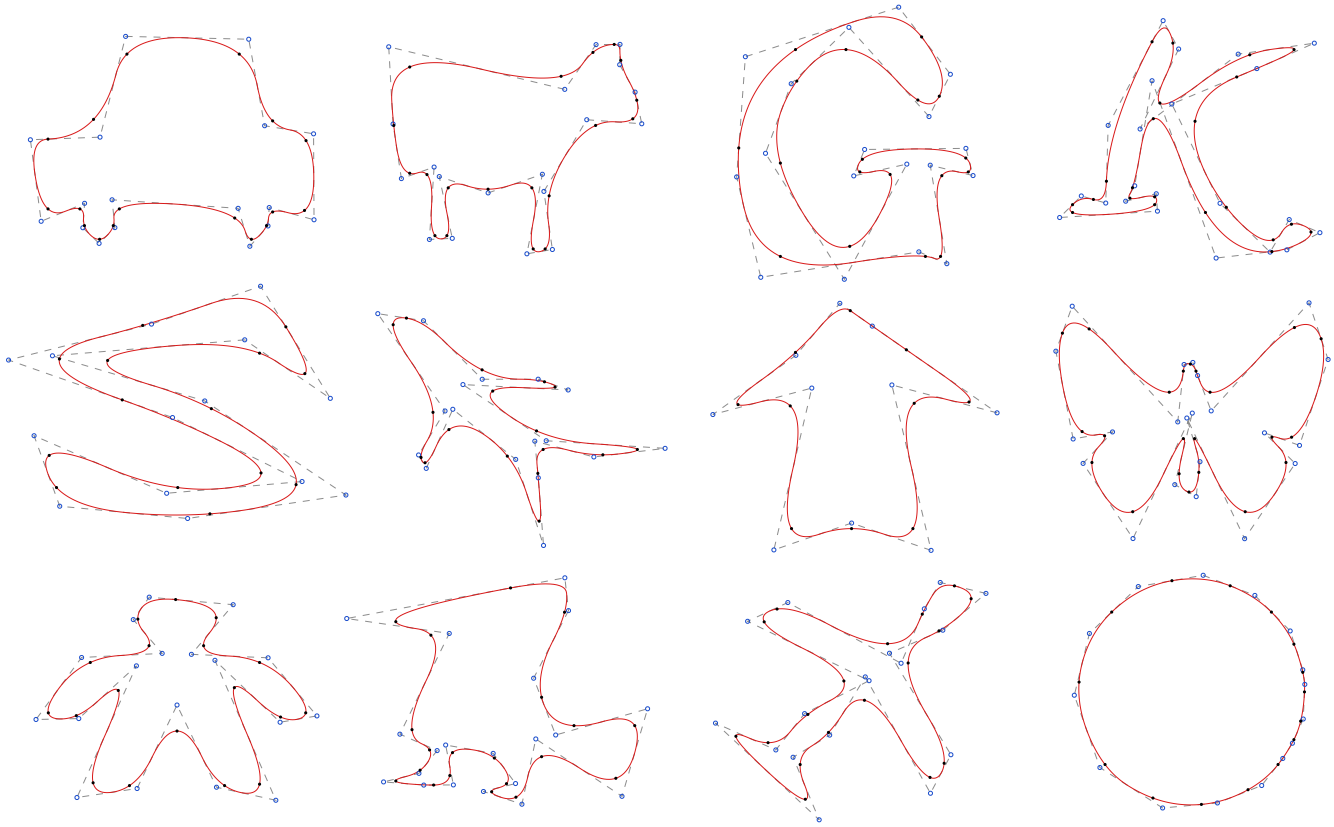

图10：采用向心参数化、以次数 $p=2$ 重构的其他测试形状；交错方式在 Opt-R 和 Opt-L 之间交替。

参考文献

[1] Carl de Boor。《样条实用指南》，第27卷。Springer，柏林，1978年。[2] Les Piegl 和 Wayne Tiller。《NURBS书》。Springer，纽约，1996年。[3] Hyungjun Park 和 Kwangsoo Kim。串行截面的光滑曲面逼近。*Computer-AidedDesign*，28(12)：995–1005，1996年。[4] Hyungjun Park。闭合B样条曲线插值到点数据中的节点和节点向量选择。*Computer-AidedDesign*，33(13)：967–974，2001年。[5] Hyungjun Park。通过线性约束能量最小化进行放样B样条曲面插值。*Computer-AidedDesign*，35(14)：1261–1268，2003年。[6] Shutao Tang。基于串行闭合轮廓的放样B样条曲面插值中的控制点约简。《计算数学与应用数学》，42(2)：86，2023年。[7] Eugene TY Lee。参数曲线插值中的节点选择。*Computer-Aided Design*，21(6)：363–370，1989年。

[8] Jing-Jing Fang 和 Chia-Lien Hung。 一种改进的 B样条曲线与曲面参数化方法
插 p值。 $Comp$助计算机设计 gn, 45(6)1005–1028 ，2013年。

[9] Thomas A Foley 和 Gregory M Nielson。参数样条插值的节点选择。载于《计算机辅助几何设计中的数学方法》，第261–CP4页。Elsevier，1989年。[10] Choong-Gyoo Lim。B样条曲线和曲面插值中的通用参数化。Computer Aided Geometric Design，16(5)：407–422，1999年。[11] Hyung-Bae Jung 和 Kwangsoo Kim。NURBS曲面插值的新参数化方法。The International Journal of Advanced Manufacturing Technology，16(11)：784–790，2000年。[12] Habibollah Haron、Abdus Rehman、Dayang IS Adi、Soh P Lim 和 Tanzila Saba。B样条曲线的参数化方法。Mathematical Problems in Engineering，2012：640472，2012年。[13] Cemal Balta、Sinan Ozturk、Melih Kuncan 和 Ibrahim Kandilli。B样条曲线插值的动态向心参数化方法。IEEE Access，8：589–598，2020年。[14] Hui Xu、Gang Zhao、Yang Liu 和 Nan Ye。基于修正弦长的改进参数化插值方法。Journal of Computing and Information Science in Engineering，22：1–21，2022年。[15] Hui Wang 和 Fan Zhang。通过构造带约束的三次多项式为平面数据点计算节点。Computer Aided Geometric Design，111：102308，2024年。[16] Pascal Laube、Matthias O Franz 和 Georg Umlauf。B样条曲线逼近的深度学习参数化。载于2018年国际三维视觉会议（3DV），第691–699页。IEEE，2018年。[17] Felix Scholz 和 Bert Jüttler。通过残差深度神经网络进行多项式曲线逼近的参数化。Computer Aided Geometric Design，85：101977，2021年。[18] Tao Song、Tao Shen、Lin Ge 和 Jieqing Feng。通过监督学习实现B样条曲线插值的混合参数化方法。Computer Graphics Forum，43(7)：e15240，2024年。[19] Shangyi Lin 和 Jieqing Feng。通过监督回归实现B样条曲线插值的参数化方法。Computers & Graphics，132：104360，2025年。[20] Wenqiang Tang 和 Zhouwang Yang。用于B样条曲线逼近的基于DNN的参数化。Computer- Aided Design，186-187：103897，2025年。[21] Wenqiang Tang、Zhenqian E 和 Zhouwang Yang。B样条曲线逼近中节点与参数化的神经协同优化。Computer-Aided Design，195：104059，2026年。[22] Zhaoxuan Zhu、Lihua You 和 Jianmin Zhang。曲线拟合中的点集参数化方法综述。载于2023年第27届国际信息可视化会议（IV），第374–377页。IEEE，2023年。[23] Wen-Ke Wang、Hui Zhang、Hyungjun Park、Jun-Hai Yong、Jean-Claude Paul 和 Jia-Guang Sun。利用公共节点向量确定方法减少放样B样条曲面插值中的控制点。Computer-Aided Design，40(10-11)：999–1008，2008年。[24] Michele Benzi、Gene H Golub 和 Jörg Liesen。鞍点问题的数值解。Acta Numerica，14：1–137，2005年。[25] A Kouibia、Miguel Pasadas 和 Miguel Luis Rodriguez。三次样条曲线插值的参数优化。Journal of Computational and Applied Mathematics，235(14)：4187–4198，2011年。[26] Lakshman S. Thakur。带自由节点的最优插值二次样条的可计算凸规划刻画。Journal of Mathematical Analysis and Applications，114(1)：278–288，1986年。[27] Lakshman S. Thakur 和 Mikhail A. Bragin。使用线性规划通过带自由节点的近最优样条进行数据插值。Mathematics，9(10)：1099，2021年。[28] Piotr Suchomski。 L_2 离散范数下的变节点样条插值最优方法。International Journal of Systems Science，22(11)：2263–2274，1991年。[29] H. Idais、M. Yasin、M. Pasadas 和 P. González。三次与双三次样条插值问题中的最优节点分配。Mathematics and Computers in Simulation，164：131–145，2019年。[30] Jingyu Zhang、Qiuyang Song、Pengbo Bo、Jianrui Ding 和 Caiming Zhang。通过形状质量优化对有序点进行B样条曲线插值。Computer-Aided Design，189：103942，2025年。[31] Liangchen Hu 和 Wensheng Zhang。用于在B样条曲线插值中恰当选择节点和节点向量的NSGA-II方法。Computer-Aided Design，127：102885，2020年。

[32] Larry L. Schumaker。样条函数：基础理论。剑桥大学出版社，第3版，2007年。[33] Shutao Tang。基于串行闭合轮廓的最优放样B样条曲面插值，2022年。arXiv预印本 arXiv:2202.06330，https://arxiv.org/abs/2202.06330。[34] Guido Brunnett 和 Johannes Kiefer。采用最小能量样条进行插值。计算机辅助设计，26(2)：137–144，1994年。[35] Tzvetomir Ivanov Vassilev。通过能量最小化和点插入实现B样条的公平插值与逼近。计算机辅助设计，28(9)：753–760，1996年。[36] Patricia Moore 和 Derek Molloy。用于活动B样条/NURBS曲面的高效能量计算。计算机辅助设计，47：12–31，2014年。[37] Jorge Nocedal 和 Stephen J. Wright。数值优化。Springer，纽约，第2版，2006年。