arXiv:2611.30721v1 [math.CO] 23 Nov 2026

有限域上的分割秩与解析秩

陈启元 和 叶克

Abstract. 我们证明，任意有限域上张量的分割秩与解析秩至多相差一个仅取决于张量阶数的常数。证明结合了 Mili´cevi´c 关于稠密多重线性簇的定理，以及 Moshkovitz 和 Zhu 的微分舒尔补。其新颖之处在于提出了一种近似消除多重线性方程的方法。

1. Introduction

1.1. 背景与主要结果。 关于有限域上的多项式，一个基本问题是：多项式的偏差如何约束其代数结构。对于多重线性形式而言，这个问题可以用两个秩的概念精确表述。设 $d \geq 2$，设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$，设 V_1，……，V_d 为有限维 $\mathbb{F}$-向量空间，并设 $T\colon V_1 \times \cdots \times V_d \to \mathbb{F}$ 为一个多重线性形式。其分割秩 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T)$是以下表达式中加项的最少数量

$$T(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(x_{I_\nu}) g_\nu(x_{[d]\setminus I_\nu}), \qquad \varnothing \neq I_\nu \subsetneq [d],$$

其中 $[d] = \{1, \ldots, d\}$，$x_I = (x_i)_{i \in I}$，且两个因子分别关于所指示的变量是多重线性的。Naslund [19] 在多项式方法的背景下引入了这一概念。由 Gowers 和 Wolf 引入的解析秩，[8],是

$$\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T) = -\log_q \mathrm{bias}_{\mathbb{F}}(T), \qquad \mathrm{bias}_{\mathbb{F}}(T) = \mathbb{E}_{x_1,\ldots,x_d} \chi(T(x_1, \ldots, x_d)),$$

其中 χ 是 $\mathbb{F}$的任意非平凡加性特征。对于多重线性形式，该期望为正且与 χ无关。因此，分割秩度量的是最短分解的长度，而解析秩度量的是张量的拟随机性。当$d = 2$时，两种秩都与矩阵秩一致。

不等式 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T) \leq \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T)$ 直接由 [14]中证明的解析秩的次可加性推出。反向比较一直是众多研究成果的主题。Green 和 Tao [9], 以及 Kaufman 和 Lovett [11]、Bhowmick 和 Lovett [2], 所作的细化，给出了用解析秩表示分割秩的定性界。Mili´cevi´c[15] 和 Janzer 分别得到了多项式界。对于三线性形式，Adiprasito、Kazhdan 和 Ziegler [1] 以及独立地，Cohen 和 Moshkovitz [5] 证明了线性界。两项证明都使用了 Derksen 稳定性定理关于切片秩的结果 [7]。Lampert [13] 随后给出了这一界的初等证明，而未使用几何不变理论。对于任意阶的型，当域的大小相对于其足够大时，Cohen 和 Moshkovitz [6] 证明了线性界

解析秩。Moshkovitz 和 Zhu [17, 定理 2]改进了对域的大小的依赖，并得到了如下界

$$\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T) \ll_d \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T)\big(1 + \log_q(\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T) + 1)\big) \tag{1}$$

对每个 个有限域均成立。这里及下文中，$\ll_d$ 中的隐常数仅取决于 d。

分割秩与解析秩猜想 [14, 12, 1]断言，1式中的对数因子可以去除。在本文中，我们证明了这一猜想。

定理 1.1。 对于每个整数 $d \geq 2$，存在一个常数 C_d，使得对于每个有限域 $\mathbb{F}$以及其上的每个 d-线性型 T，满足 $\mathbb{F}$，

$$\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T) \leq \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T) \leq C_d \, \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T).$$

特别是，域的大小无需随解析秩增大。我们不试图优化 C_d 关于 d 的依赖关系。用偏差表述，定理 1.1 可写为

$$q^{-\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T)} \leq \mathrm{bias}_{\mathbb{F}}(T) \leq q^{-\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T)/C_d}.$$

这给出了一个以分割秩表示的等分布指数估计。例如，设T_1、……、T_a是定义在相同空间上的 d-线性形式，并假设对每个 $_{\mathbb{F}}(\lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_a T_a)$， $\geq R$ 都有 PR $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}^a$。傅里叶反演和定理 1.1 给出，对每个 $c \in \mathbb{F}^a$，

$$\left|\Pr_x\left[(T_1(x), \ldots, T_a(x)) = c\right] - q^{-a}\right| \leq q^{-R/C_d}.$$

事实上，每个非平凡傅里叶系数都是此类线性组合的偏差。这是对计数多重线性方程组的有理数解的直接应用。

这一比较也通过极化进入高阶傅里叶分析。将 [6, §7.3]和 [17, §§8.2、8.5], 中的标准约化应用于定理1.1，可得到多项式界，适用于 d 次数-$(d-1)$ 次数情形下、定义在 $\mathbb{F}_p$上的多项式相位的高尔斯逆定理，其中 $p > d$。具体而言，一个次数为 d 的多项式相位，若其 U^d-范数至少为 δ，则它与某个次数至多为 $d-1$的多项式相位的相关性至少为 $\delta^{O_d(1)}$。偏差和秩估计也在高秩多项式映射 [12] 的几何性质与普适性以及 Reed–Muller 码 [2]的研究中发挥作用。这些联系说明了与变量个数无关的界为何十分重要。

我们对定理 1.1 的证明采用了 Moshkovitz 和 Zhu 提出的部分分解策略 [18, §7]。我们移除一个分割秩关于原解析秩呈线性有界的型，并将余项的解析秩降低一个固定因子。余项是定义在原空间上的型，因此该过程可以迭代。更确切地说，我们证明如下定理。

定理 1.2（部分分解）。 对于每个 $d \geq 3$，存在仅依赖于 d 的常数 Q_d、L_d、B_d，使得以下性质成立。设 $|\mathbb{F}| = q \geq Q_d$，且设 T 是一个 d-线性型，并满足 $r = \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T)$。存在定义在相同空间上的 d-线性型 T'，使得对于 $D = 2^{d-3}$，

$$\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - T') \leq L_d r, \qquad \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T') \leq \min\{r/2,\ B_d(r+1)q^{-1/D}\}. \tag{2}$$

1.2. **证明概述**。 我们首先解释定理 1.2 如何推出定理 1.1。当 $d = 2$ 时，两个秩都等于矩阵秩。对于 $d \geq 3$，设 $q \geq Q_d$，必要时增大 Q_d，使得每个非零 d-线性型的解析秩至少为 $1/2$（引理 2.1）。从 $T_0 = T$开始，连续应用定理 1.2，得到余项 T_i，满足

$$\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T_i) \leq 2^{-i} \, \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T), \qquad \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T_i - T_{i+1}) \leq L_d \, \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T_i).$$

余项最终会消失。将这些界相加，得到 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T) \leq 2L_d \, \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T)$。对于较小的有限域，通过标准的标量扩张论证，可得到相同的结论，但常数仅依赖于 d，参见 [17, 引理 8.1 和 8.2]。因此，只需证明定理1.2。

记 $k = d-2$。固定 x 时， T的最后两个块定义了一个矩阵为 $M_T(x)$ 的双线性形式，因此

$$T(x, z, w) = \langle M_T(x) z, w \rangle, \qquad x \in X = X_1 \times \cdots \times X_k.$$

证明结合了三个要素。

稠密多重线性簇。 第一个要点，命题3.2，源自 Mili´cevi´c 关于稠密多重线性簇的定理 [16]。按此处采用的形式，该定理给出了由 $O_d(r+1)$ 个多重线性方程定义的子簇，该子簇位于任意密度为 q^{-r} 的多重线性簇内。将其应用于

方程 $M_T(x)z = 0$，可得到 X 的一个子簇，该子簇由 $O_d(r+1)$ 个多重线性方程定义，并且在该子簇上， M_T 的秩为 $O_d(r+1)$。

一个相对微分舒尔补。 第二个要素，即命题3.7，改编了 [18, 定理 11]的证明。设 $V \subseteq X$ 由以下多重线性方程定义： s ，且 e =最大$_{x\in V}$秩$_{\mathbb{F}}$ $M_T(x)$。通过将该方程组细化为 $O_d(s)$ 个方程，并从 T 中减去一个分割秩为 $O_d(e)$ 的型，我们得到一个余项，该余项在细化后的簇上的最大矩阵秩为$O_d(e/(q-k))$，其中 $q > k$。

多重线性方程的近似消去。 第三个要素，即命题4.4，利用关于 V 上的矩阵秩界，获得整个空间上的解析秩界。令 s 和 e 如上所述，我们找到一个型 S，其 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T-S) \ll_d s$。当 $k = 1$时，我们有 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(S) \le e$。当 $k \ge 2$时，对于命题 4.4(b) 范围内的每个 m，我们有 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(S) \ll_d s/m + m^{2^{k-1}-1}e$。

1.3. **组织结构**。 第 2 节汇集了记号和预备事实。第 3 节介绍密度结果和相对微分舒尔补。第 4节阐述近似消元论证。第5节结合这些要素证明定理1.2。

2. Notation and preliminaries

本文中， $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 是一个有限域，除非另有说明，所有向量空间均为$\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间。记作 $[h] = \{1, \dots, h\}$。给定空间 $X_1, \dots\dots, X_h$和 $I \subseteq [h]$，令$X_I = \prod_{i\in I} X_i$，并记作 $x_I = (x_i)_{i\in I}$。在部分求值中，各项保留其原有位置。若 $A \le c_h B$，则记 $A \ll_h B$，其中常数 c_h 仅依赖于 h。所有期望和概率均相对于相关空间上的均匀分布取值。

2.1. **分割秩与解析秩**。 我们将一个阶数为d 的张量视为多重线性形式T：$V_{[d]} \to \mathbb{F}$。对于 $d \ge 2$，其分割秩 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T)$是满足以下条件的最小整数 s：

$$T(x) = \sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(x_{I_\nu})\, g_\nu(x_{[d]\setminus I_\nu}), \qquad \varnothing \ne I_\nu \subsetneq [d],$$

其中两个因子分别关于所示的块呈多重线性。将分解拼接起来即可得到 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}$的次可加性。对于 $\mathbb{F}$ 上的非平凡加性特征 χ，T 的偏差和解析秩定义为

$$\mathrm{bias}_{\mathbb{F}}(T) = \mathbb{E}_{x\in V_{[d]}}\chi(T(x)), \qquad \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T) = -\log_q \mathrm{bias}_{\mathbb{F}}(T).$$

引理 2.1. 对于 $d \ge 2$，的偏差为正。对于任意 $i \in [d]$，它等于在其他所有块均独立且均匀选取时，诱导的线性泛函在 V_i 上为零的概率[14, (1)]。解析秩具有次可加性 [14, 定理 1。5]，且对各个块分别进行线性拉回时不会增大 [3,引理 1.4。7]。此外，由 [14,定理 1.7(i)]，

$$\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T) \le \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T). \tag{3}$$

对于双线性型，由秩分解可知，分割秩等于矩阵秩，而解析秩也具有相同的值 [14, 例 1。4]。若 $T \ne 0$ 且 $q \ge (d-1)^2$,，则 解析秩$_{\mathbb{F}}(T) \ge 1/2$。

对于最后一个断言，取 $v_i \in V_i$使得 $T(v_1, \dots\dots, v_d) \ne 0$。在线 $\mathbb{F}v_i$上，限制张量只有一个非零项。由单调性以及应用于该单元素集合的 [14, 定理 1.7(ii)]，$\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T) \ge 1 - \log_q(d-1) \ge 1/2$。

2.2. **多重线性方程与多重线性近似**。在 $X = X_{[h]}$ 上，支撑集为 I 的多重线性方程（其中 $\varnothing \neq I \subseteq [h]$）是关于标量多重线性形式 γ 的方程 $\gamma(x_I) = 0$，定义在 X_I 上。对于由这类方程组成的有限方程组 Γ，我们将其公共 $\mathbb{F}$-有理零点集记为 $V(\Gamma)$，并称其为一个多重线性簇。我们将方程的数量记为 $|\Gamma|$。固定除一个块以外的所有块后得到的每个非空纤维都是一个线性子空间。事实上，涉及自由块的方程会成为关于该块的齐次线性方程，而其余方程已经得到满足。

对于 $a, x \in X$ 和 $t = (t_1, \dots, t_h)$，记 $a + t \odot x = (a_i + t_i x_i)_{i=1}^h$。沿用 [18, §2.1],，我们将 $f[a_S]$ 记为在 S 中固定各块为 a_S 后得到的函数。我们研究函数域 $\mathbb{F}(X)$ 中的有理函数。若一个函数可写成分母在 a 处非零的商，则称其在 a 处正则。Moshkovitz 和 Zhu [18, 定义 3.1] 将在 a 处正则且多重次数为 $(1, \dots, 1)$ 的有理函数 f 的多重线性近似定义为

$$[f]_a(x) = \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_h} f(a + t \odot x)\Big|_{t=0}.$$

对于在 a 处正则的任意有理函数，我们使用相同的公式，并将其逐项应用于矩阵。导数是形式上的。由于每个 t_i 只求导一次，因此在任意特征下，其值都是 $t = 0$ 处展开式中 $t_1 \cdots t_h$ 的系数。

固定 a 和 $J \subseteq [h]$，记 $J^c = [h] \setminus J$，并令

$$f_J(x_J) = \left[f[a_{J^c}]\right]_{a_J}(x_J).$$

因此，f_J 是通过固定 J^c 中的块，并对 J中的块取多重线性近似得到的。特别地，$f_{[h]} = [f]_a$ 和 $f_\varnothing = f(a)$。如果 f已经是多重线性的，那么 $f_J(x_J) = f[a_{J^c}](x_J)$。对于在原点处正则的标量变量有理矩阵 $R(u_1, \dots, u_h)$，我们用 $[R]_0(1)$ 表示其在原点处的该近似在全一向量处的取值。其值为 $u_1 \cdots u_h$的系数。将不定元代入分块仿射映射时，我们使用其关于每个块次数至多为一的总次数不超过一的多项式表达式。我们用 $\operatorname{rank}^{\mathbb{F}(t)}$ 表示在有理函数域 $\mathbb{F}(t)$ 上的秩。

引理 2.2. 设 A和 B为在 $a \in X$处正则的有理矩阵。对于每个 $J \subseteq [h]$，$A_J(x_J)$关于 x_J都是多重线性的。这尤其适用于分块仿射矩阵、相容矩阵的和与积，以及当 $A(a)$ 可逆时的 A^{-1}。对于乘积，我们有

$$(AB)_J(x_J) = \sum_{I \subseteq J} A_I(x_I)\, B_{J \setminus I}(x_{J \setminus I}).$$

证明。将 $A(a + v)$ 的每个元素展开为关于 v 的块坐标的形式幂级数。代入 $v_i = t_i x_i$ 后，在 $t = 0$ 处对变量 t_i（其中 $i \in J$）求混合导数，恰好选出这些块中每个块的次数为一、其余块的次数为零的项。这些项关于 x_J 是多重线性的。正则矩阵的和与积仍为正则矩阵；当 $\det A(a) \neq 0$ 时，$A^{-1} = \operatorname{adj}(A)/\det A$ 也如此。在莱布尼茨法则中，指标为 I 的项出现在以下情形：指标属于 I 的每个导数都作用于 A，其余导数则都作用于 B。□

我们采用证明 [4, 定理 1.2 第 3 节2] 中的部分求值，并将其写成以下有限域形式。

引理 2.3。设 Γ 是定义在 $X_{[h]}$ 上的多重线性方程组，且 $a \in V(\Gamma)$。存在一个至多包含 $(2^h - 1)|\Gamma|$ 个多重线性方程的方程组 Γ_a，满足 $V(\Gamma_a) \subseteq V(\Gamma)$，使得

$$\prod_{i=1}^{h} \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{a_i, x_i\} \subseteq V(\Gamma) \qquad (x \in V(\Gamma_a)).$$

证明。对于每个支撑集为 I 的 $\gamma \in \Gamma$ 以及每个非空的 $J \subseteq I$，在 Γ_a 中加入方程 $\gamma[a_{I \setminus J}](x_J) = 0$。这样每个 γ 至多得到 $2^{|I|} - 1$ 个方程，并且当 $J = I$ 时包含 $\gamma(x_I) = 0$。如果 $x \in V(\Gamma_a)$,

所有这些混合求值都为零。 $J = \varnothing$ 的求值也为零，因为 $a \in V(\Gamma)$。由多重线性可知，对于标量 $s_i, t_i \in \mathbb{F}$ 的任意选择， $\gamma((s_i a_i + t_i x_i)_{i\in I})$ 都是这些求值的线性组合。这证明了包含映射。□

对于 $k = d - 2 \geq 1$，我们用 Z 和 W 表示一个型的最后两个块，并令 $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$。该型确定了一个多重线性映射

$$M_T \colon X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Z, W^*), \qquad \langle M_T(x)z, w\rangle = T(x, z, w),$$

其中 $\langle \lambda, w\rangle = \lambda(w)$。当 T 固定时，我们记作 $M = M_T$。特别地，$\mathrm{rank}_{\mathbb{F}} M(x)$ 是固定 x后得到的双线性形式的通常秩。

3. Dense subvarieties and the relative differential Schur complement

3.1. **稠密多重线性簇与矩阵纤维**。 Milićevi´c针对素域陈述了以下定理。然而，他在 [16, §§2–3] 中的证明的每一步都适用于任意有限域$\mathbb{F}_q$。方向卷积只用到加法，而余维数为 r 的子空间在 $\mathbb{F}_q$ 中的密度为 q^{-r}。

定理 3.1 ([16, 定理 2])。 对于每个 $h \geq 1$，都存在一个常数 K_h，使得以下性质成立。设 $G_1, \ldots, G_h$ 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，其中 $|\mathbb{F}| = q$，并设 $V \subseteq G_1 \times \cdots \times G_h$ 是密度为 $q^{-\rho}$ 的多重线性簇。存在一个集合 Γ，其中至多包含 $K_h(\rho+1)$ 个多重线性方程，使得 $V(\Gamma) \subseteq V$。

以下命题是定理 3.1的推论。

命题 3.2。 设 $X = X_1 \times \cdots \times X_k$，其中 $k \geq 1$，且 $T\colon \ X \times Z \times W \to \mathbb{F}$ 为多重线性。记 $T(x, z, w) = \langle M(x)z, w\rangle$，且 $r =$解析秩$_{\mathbb{F}}(T)$。存在一个集合 Γ，其中包含 s 个定义在 X 上的多重线性方程，使得

$$s + \max_{x\in V(\Gamma)} \mathrm{rank}_{\mathbb{F}} M(x) \leq K_{k+1}(r+1).$$

证明。令 $P = \{(x, z) \in X \times Z\colon \ M(x)z = 0\}$。根据解析秩的定义， P 在 $X \times Z$ 中的密度为 q^{-r}。因此，定理 3.1 给出了一个由$N \leq K_{k+1}(r+1)$个方程定义的多重线性子簇 $U \subseteq P$。令 Γ 由定义 U 的方程中支撑集不包含 Z的那些方程组成，并记为 $s = |\Gamma|$。其余的 $N - s$ 个方程具有如下型： $N(x)z = 0$，其中 $N(x)$是一个 $(N - s) \times \dim Z$ 矩阵，其各行分别在 X中对应的支撑集上是多重线性的。对于每个$x_0 \in V(\Gamma)$，我们有

$$\ker N(x_0) \subseteq \ker M(x_0),$$

因为 $U \subseteq P$。由此可得

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{F}} M(x_0) \leq \mathrm{rank}_{\mathbb{F}} N(x_0) \leq N - s,$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $N(x_0)$有 $N-s$ 行。对 $x_0 \in V(\Gamma)$取最大值，得到

$$s + \max_{x_0\in V(\Gamma)} \mathrm{rank}_{\mathbb{F}} M(x_0) \leq N \leq K_{k+1}(r+1).$$

□

3.2. **相对微分舒尔补**。 Moshkovitz 和 Zhu 引入的微分舒尔补 [18, 定义 4。3] 是有理矩阵的多重线性近似。他们利用它证明了以下结果。

定理 3.3 ([18, 定理 1。1])。 设 $M\colon \ X_1 \times \cdots \times X_k \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Y, Z)$ 是一个多重线性矩阵。那么

$$\mathrm{PR}(M) \ll_k \max_{x\in X_1\times\cdots\times X_k} \mathrm{rank}_{\mathbb{F}} M(x),$$

其中，$\mathrm{PR}(M)$ 表示 [18] 中定义的矩阵分块秩。

我们在命题 3.7 中通过修改 [18] 中的证明，证明了定理3.3 的相对版本。以下引理基于 [18, 引理 52]的证明。

引理 3.4。设 $I \subseteq \mathbb{F}$ 的大小为 n，且 $C(t)$ 是一个多项式矩阵，其元素的次数至多为 $h < n$。若对所有 $c \in I$，均有 秩$_{\mathbb{F}} C(c) \leq e$，则

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}(t)} C(t) - e \leq \frac{he}{n-h}.$$

证明。令 $g =$ 秩$_{\mathbb{F}(t)} C(t)$。不妨设 $g > e$。选取一个 $g \times g$ 子矩阵 M，使其行列式 $f(t)$ 非零。于是 $\deg f \leq hg$。对每个 $c \in I$，令 $r_c =$ 秩$_{\mathbb{F}} M(c) \leq e$。通过常数初等行变换，可使 $g - r_c$ 的行在 c 处为零。这些行中的每个元素都能被 $t-c$ 整除，因此 $(t-c)^{g-r_c}$ 整除 $f(t)$。按重数计根可得 $n(g-e) \leq \sum_{c \in I}(g - r_c) \leq \deg f \leq hg$。由此得到该界。□

下面的引理改编自 [18, 命题 3.7]的论证。为完整起见，我们给出证明。

引理 3.5. 设 $f(u)$ 是一个含 $h \geq 1$ 个变量、在原点正则的有理矩阵。对于 $S \subseteq [h]$，令 $\mathbf{1}_S$ 为其示性向量。则

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}}\big([f]_0(\mathbf{1})\big) \leq \sum_{S \subseteq [h]} \operatorname{rank}_{\mathbb{F}(t)} f(t\mathbf{1}_S).$$

若 $f(0) = 0$，则 $S = \varnothing$ 对应的项为零。

证明。考虑沿直线取交错和，由 [18, 引理 3.5],

$$F(t) = \sum_{S \subseteq [h]} (-1)^{h-|S|} f(t\mathbf{1}_S).$$

我们断言 $F(t) = [f]_0(\mathbf{1})t^h + O(t^{h+1})$。设 u^α 是 f的某个条目泰勒展开中的一个单项式。若 u^α 不含 u_i，则 $u^\alpha(t\mathbf{1}_S) = u^\alpha(t\mathbf{1}_{S\cup\{i\}})$，因此

$$\sum_{S \subseteq [h]} (-1)^{h-|S|} u^\alpha(t\mathbf{1}_S) = \sum_{S \subseteq [h]\setminus\{i\}} (-1)^{h-|S|}\big(u^\alpha(t\mathbf{1}_S) - u^\alpha(t\mathbf{1}_{S\cup\{i\}})\big) = 0.$$

因此，只有当 $\operatorname{supp}(\alpha) = [h]$ 时，u^α 才能对 $F(t)$ 有贡献。次数至多为h 的此类单项式只有 $u_1 \cdots u_h$，其系数矩阵为 $[f]_0(\mathbf{1})$。这就证明了该断言。

由此可知，$t^{-h}F(t)$ 在 0 处正则，且在此处的值为 $[f]_0(\mathbf{1})$。因此

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}}([f]_0(\mathbf{1})) \leq \operatorname{rank}_{\mathbb{F}(t)} F(t) \leq \sum_{S \subseteq [h]} \operatorname{rank}_{\mathbb{F}(t)} f(t\mathbf{1}_S).$$

□

引理 3.5 给出了 [18,命题 45]的一个类似结果。

引理 3.6。设 $0 \in I \subseteq \mathbb{F}$ 满足 $m = |I| > k \geq 1$。设 $L(u)$ 为一个多项式矩阵，其关于 u_1、……、u_k 中每个变量的次数至多为一，并记

$$L(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad b = \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} L(0).$$

假设 $b \times b$ 块 $A(0)$ 可逆，并且 秩$_{\mathbb{F}} L(c\mathbf{1}_J) \leq b$ 对于 $c \in I$ 和 $\varnothing \neq J \subseteq [k]$成立。对于每个非空 J，令$g_J =$ 秩$_{\mathbb{F}(t)} L(t\mathbf{1}_J)$。然后，舒尔补 $E(u) = D - CA^{-1}B$满足

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}}\big([E]_0(\mathbf{1})\big) \leq \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [k]} (g_J - b) \leq \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [k]} \frac{|J|b}{m - |J|} \leq \frac{k2^{k-1}b}{m-k}. \tag{4}$$

证明。 可逆的 $A(\mathbf{0})$ 的可逆性确保 E 在零点处是正则的。在零点处进行块消元得到

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} E(0) = \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} L(0) - b = 0.$$

由于 $A(t\mathbf{1}_J)$ 在 $\mathbb{F}(t$ 上可逆，对 $L(t\mathbf{1}_J)$ 进行分块消元可得秩$_{\mathbb{F}(t)} E(t\mathbf{1}_J) = g_J - b$。将引理 3.5 应用于 E 可得

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}}\big([E]_0(\mathbf{1})\big) \le \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [k]} \operatorname{rank}_{\mathbb{F}(t)} E(t\mathbf{1}_J) = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [k]} (g_J - b).$$

空子集对应的项为零，因为 $E(0) = 0$。对于非空的 J， $L(t\mathbf{1}_J)$ 的各项次数至多为 $|J|$。根据假设，对于所有 $_{\mathbb{F}} L(c\mathbf{1}_J) \le b$值，秩 m $c \in I$。由引理 3.4，

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}(t)} L(t\mathbf{1}_J) - b \le \frac{|J|b}{m - |J|}.$$

将这些界求和，得到不等式 (4) 中的第二个不等式。最后一个不等式由 $m - |J| \ge m - k$ 和 $\sum_{J \subseteq [k]} |J| = k2^{k-1}$ 得出，因为每个指标都出现在 2^{k-1} 个子集中。 □

下面的命题给出了微分舒尔补估计的一个相对版本。通过添加多重线性方程，并减去一个分割秩有界的张量，我们降低所得簇上的最大矩阵秩。

命题 3.7. 设 $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$，其中 $1 \le k < q$，并设 $T(x, z, w) = \langle M(x)z, w\rangle$ 是 $X \times Z \times W$ 上的一个多重线性形式。对于 X 上的一组 s 多重线性方程 Γ，令

$$b = \max_{x \in V(\Gamma)} \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} M(x).$$

存在一组 X 上的多重线性方程 Γ'，以及 $X \times Z \times W$ 上的一个多重线性形式 $S(x, z, w) = \langle M_S(x)z, w\rangle$，使得

$$V(\Gamma') \subseteq V(\Gamma), \qquad |\Gamma'| \le (2^k - 1)s, \qquad \operatorname{PR}_{\mathbb{F}}(T - S) \le 2^k b.$$

此外，对于每个 $x \in V(\Gamma')$，

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} M_S(x) \le \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [k]} \frac{|J|b}{q - |J|} \le \frac{k2^{k-1}b}{q - k}. \tag{5}$$

证明。 若 $b = 0$，取 $S = T$和 $\Gamma' = \Gamma$。否则，选取 $a \in V(\Gamma)$，其秩为$_{\mathbb{F}} M(a) = b$。由引理 2.3，在 a 处的细化 Γ'满足 $|\Gamma'| \le (2^k - 1)s$ 以及 $V(\Gamma') \subseteq V(\Gamma)$。此外，

$$a + u \odot x \in V(\Gamma) \qquad (x \in V(\Gamma'),\ u \in \mathbb{F}^k). \tag{6}$$

在 Z 和 W中选取适当的基后，我们可以假设

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M(a) = \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Here A 是 $b \times b$ 块。记 $E = D - CA^{-1}B$。根据 [18, 定义 4。3], 集合

$$M/A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad M_S = [M/A]_a, \qquad S(x, z, w) = \langle M_S(x)z, w\rangle.$$

M/A的各项的多重次数为 $(1, \dots, 1)$，因为 A^{-1}的各项的多重次数为 $(-1, \dots, -1)$。因此， M_S 是微分舒尔补，并且关于 X的各块都是多重线性的。

根据 [18, 命题 4.4], $\operatorname{PR}_{\mathbb{F}}(T - S) \le 2^k b$。只需证明（5）。任取 $x \in V(\Gamma')$。令 $L(u) = M(a + u \odot x)$。关于 $A(a + u \odot x)$， $L(u)$ 的舒尔补为$E_x(u) = E(a + u \odot x)$，因此 $[E_x]_0(\mathbf{1}) = [E]_a(x)$。由（6）可知，对于每个 $u \in \mathbb{F}^k$，$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} L(u) = \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} M(a + u \odot x) \le b$。将引理 3.6 应用于 L with $I = \mathbb{F}$，由（4）得到

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} M_S(x) = \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} [E_x]_0(\mathbf{1}) \le \frac{k2^{k-1}b}{q - k}.$$

□

4. Elimination of multilinear equations

4.1.消去由多项式矩阵定义的线性方程组。设$A(u)$: $Y \to E$是一个多项式矩阵，在每个 $u_1, \dots, u_\ell$ 中的次数至多为 1，其中 $\ell \geq 1$。置 $e = \operatorname{rank} A(0)$。选取 Y 和 E 的适当的基，我们可以写成

$$A(u) = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}, \qquad A(0) = \begin{pmatrix} I_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $y = (v,\ k)$，方程 $A(u)y = 0$ 给出 $Qv + Rk = 0$。由于 $Q(0) = I_e$，我们可以在保持 k 不变的同时，求出该方程在零附近关于 v 的解。所得投影为

$$P(u)(v,k) = (-Q^{-1}Rk, k), \qquad P(u) = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{-1}R \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{7}$$

将 $v = -Q^{-1}Rk$ 代入 $Sv + Tk = 0$ 得到 $(T - SQ^{-1}R)k = 0$。因此

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T - SQ^{-1}R \end{pmatrix}$$

是舒尔补 A/Q。对于 $J \subseteq [\ell]$，我们用 $P_J(1)$ 表示变量在索引集 J 中、且 $P_\varnothing(1) = P(0)$ 时在零点处的混合导数。

在本节中，我们记作 $u^J = \prod_{j \in J} u_j$，其中 $u^\varnothing = 1$。

引理 4.1（核上的插值）。设 A 和 P 分别为上文定义的多项式矩阵和有理矩阵。设 $0 \in I \subseteq \mathbb{F}$ 满足 $m = |I| > \ell$，并令 $\Omega = \{c\mathbf{1}_D :\ c \in I,\ D \subseteq [\ell]\}$。假设对每个 $\xi \in \Omega$，都有 秩 $A(\xi) \leq e =$ 秩 $A(0)$。令 G 由满足以下条件的向量 $y \in Y$ 构成：存在一个元组 $(v_\xi)_{\xi \in \Omega}$，其中 $v_\xi \in$ 核 $A(\xi)$，使得

$$P_{J^c}(\mathbf{1})y = \sum_{\xi \in \Omega} \xi^J v_\xi \qquad \textit{for every } J \subseteq [\ell]. \tag{8}$$

则 G 是 Y 的线性子空间，并且

$$\operatorname{codim}_Y G \leq \sum_{\varnothing \neq D \subseteq [\ell]} \frac{|D|e}{m - |D|} \leq \frac{\ell 2^{\ell-1} e}{m - \ell}. \tag{9}$$

证明。首先我们要证明 G 是 Y 的线性子空间。记 $U = \bigoplus_{J \subseteq [\ell]} Y$，并定义线性映射

$$\begin{aligned} L\colon \bigoplus_{\xi \in \Omega} \ker A(\xi) &\longrightarrow U, & (v_\xi)_\xi &\longmapsto \left(\sum_{\xi \in \Omega} \xi^J v_\xi \right)_J, \\ C\colon Y &\longrightarrow U, & y &\longmapsto \big(P_{J^c}(\mathbf{1})y\big)_J. \end{aligned}$$

根据定义，$G = C^{-1}(\operatorname{im} L)$，因此 G 是 Y 的线性子空间。

令 $\mathbb{F}[u_1, \dots, u_\ell]_{\mathrm{aff}}$ 表示每个变量次数至多为一的多项式构成的空间。通过映射 $\phi\colon (\lambda_J)_J \mapsto \sum_{J \subseteq [\ell]} \lambda_J \otimes u^J$，我们将 U^* 与 $Y^* \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[u_1, \dots, u_\ell]_{\mathrm{aff}}$ 视为同一空间。在此对应下，U^* 中的每个元素都是多项式行向量。

对于每个 $\lambda = (\lambda_J)_J \in U^*$，我们有

$$\lambda\big(L((v_\xi)_\xi)\big) = \sum_{\xi \in \Omega} \sum_{J \subseteq [\ell]} \xi^J \lambda_J(v_\xi) = \sum_{\xi \in \Omega} \phi(\lambda)(\xi) v_\xi.$$

因此，对于每个 $\xi \in \Omega$ 以及每个 $v \in \ker A(\xi)$，$\lambda \in (\operatorname{im} L)^\perp$ 当且仅当 $\phi(\lambda)(\xi)v = 0$。等价地，对于每个 $\xi \in \Omega$，$\phi(\lambda)(\xi)$ 都属于 $A(\xi)$ 的行空间。

现在，对于每个 $\lambda \in (\operatorname{im} L)^{\perp}$，$Cy \in \operatorname{im} L$ 当且仅当 $\lambda(Cy) = 0$。我们有

$$\lambda(Cy) = \sum_{J\subseteq[\ell]} \lambda_J\big(P_{J^c}(\mathbf{1})y\big) = \sum_{J\subseteq[\ell]} \phi(\lambda)_J(\mathbf{1})P_{J^c}(\mathbf{1})y = [\phi(\lambda)P]_0(\mathbf{1})y,$$

其中最后一个等式由引理2.2得出。

选取$(\operatorname{im} L)^{\perp}$的一个基，并令 $\Lambda(u)$为以相应多项式行向量为行的$\operatorname{codim}_U(\operatorname{im} L) \times \dim Y$矩阵。因此，

$$G = \ker\big([\Lambda P]_0(\mathbf{1})\big), \qquad \operatorname{codim}_Y G = \operatorname{rank}_{\mathbb{F}}\big([\Lambda P]_0(\mathbf{1})\big).$$

记 $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$，并令

$$M = \begin{pmatrix} Q & R \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

对每个 $\xi \in \Omega$，$M(\xi)$的每一行都位于 $A(\xi)$的行空间中。因此

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} M(\xi) \le \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} A(\xi) \le e.$$

由于 $Q(\mathbf{0}) = I_e$，我们还有秩$_{\mathbb{F}} M(\mathbf{0}) = e$。此外，

$$M/Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 - \Lambda_1 Q^{-1} R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda P \end{pmatrix}.$$

应用引理 3.6于 M 可得

$$\operatorname{codim}_Y G = \operatorname{rank}_{\mathbb{F}}\big([\Lambda P]_0(\mathbf{1})\big) \le \sum_{\varnothing\neq D\subseteq[\ell]} \frac{|D|e}{m-|D|} \le \frac{\ell 2^{\ell-1}e}{m-\ell}.$$

□

引理 4.2。设 $T\colon X_1 \times \cdots \times X_k \times Y \to \mathbb{F}$ 是一个多重线性形式，且 Y' 是Y的一个余维数为 s的子空间。设 T' 是由包含映射$Y' \hookrightarrow Y$诱导的、 T在 $X_1 \times \cdots \times X_k \times Y'$ 上的限制。则 $\operatorname{AR}(T') \ge \operatorname{AR}(T) - s$。

证明。我们有 $T = T' + \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes y_i$ 其中某个 $x_i \in X_1^* \otimes \cdots \otimes X_k^*$和 $y_i \in Y^*$。结论由引理 2.1 得出。□

以下命题使我们能够逐层消去多重线性方程，且代价与分割秩呈线性关系。

命题 4.3。设 $X = X_1 \times \cdots \times X_\ell$和 $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_p$，其中 $\ell \ge 1$和 $p \ge 2$。设 Γ是 X上的一个多重线性方程组，且 $B\colon X \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(Y, E)$ 在X的每个块上都是仿射的。设 $H\colon X \times Y \times Z \to \mathbb{F}$ 是多重线性的。假设

$$e = \max_{x\in V(\Gamma)} \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} B(x), \qquad \operatorname{AR}_{\mathbb{F}}\big(H(x,y,\cdot)\big) \le b \quad (x \in V(\Gamma),\ y \in \ker B(x)).$$

存在一个关于 X 的多重线性方程组 Γ'，以及一个关于 $X \times Y \times Z$ 的多重线性形式 H，使得

$$V(\Gamma') \subseteq V(\Gamma), \qquad |\Gamma'| \le (2^\ell - 1)|\Gamma|, \qquad \operatorname{PR}_{\mathbb{F}}(H - \widehat{H}) \le 2^\ell e.$$

对于每个 $x \in V(\Gamma')$ 以及每个满足 $\ell < m \le q$ 的整数 m，我们都有

$$\operatorname{AR}_{\mathbb{F}}\big(\widehat{H}(x,\cdot,\cdot)\big) \le \frac{\ell 2^{\ell-1}e}{m-\ell} + \big(1 + (2^\ell - 1)(m-1)\big)b. \tag{10}$$

证明。取秩$_{\mathbb{F}} B(a) = e$的 $a \in V(\Gamma)$。在适当的基下，我们有

$$B = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}, \qquad B(a) = \begin{pmatrix} I_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

如上定义 $P = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{-1}R \\ 0 & I \end{pmatrix}$。令 $\mathcal{H} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_p, \mathbb{F})$。我们将 H 与一个多项式矩阵 $h\colon X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Y, \mathcal{H})$ 对应。置 $h = [hP]_a$，并令 $\widehat{H}$ 为与 $\widehat{h}$ 关联的张量。由于 P 在 a 处是正则的，这一定义是良定义的。写作 $h = (h_1, h_2)$。由于 h 关于 X 的各个块是多重线性的，我们有 $[h]_a = h$。因此

$$h - \widehat{h} = [h(I_Y - P)]_a.$$

若 $e = 0$，则 $P = I_Y$ 和 $h = h$。对于 $e > 0$，令

$$D = \begin{pmatrix} I_e & Q^{-1}R \end{pmatrix}.$$

P 的定义给出

$$h(I_Y - P) = h_1 D.$$

对于 $1 \le i \le e$，令 c_i 为 i 的第 h_1 列，并令 d_i 为 i 的第 D 行。因此 c_i 取值于 $\mathcal{H}$，d_i 取值于 Y^*，且两者在 a 处均为正则函数。由引理 2.2，

$$(h - \widehat{h})(x) = \sum_{i=1}^{e} \sum_{J \subseteq [\ell]} (c_i)_J(x_J)\,(d_i)_{J^c}(x_{J^c}).$$

在 $y \in Y$ 和 $z \in Z$ 处求值后，由 (i, J) 索引的被加项为

$$\big((c_i)_J(x_J)\big)(z)\,\big((d_i)_{J^c}(x_{J^c})\big)(y).$$

第一个因子关于 x_J，z_1、……、z_p 是多重线性的，第二个因子关于 x_{J^c}，y 是多重线性的。这两组块对任意 $J \subseteq [\ell]$ 都构成一个非平凡划分，包括 $J = \varnothing$ 和 $J = [\ell]$。因此

$$\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(H - \widehat{H}) \le 2^{\ell} e.$$

接下来，按引理 2.3 取 Γ'。只需证明 (10)。固定 $x \in V(\Gamma')$，并记 $x_\xi = a + \xi \odot x$。令 $G \subseteq Y$ 为引理 4.1 中满足 (8) 和 (9) 的子空间。对于每个 $y \in G$，存在向量 $v_\xi \in \ker B(x_\xi)$，使得对于每个 $J \subseteq [\ell]$，都有 $P_{J^c}(x_{J^c})y = \sum_{\xi \in \Omega} \xi^J v_\xi$。因此，由引理 2.2，

$$\begin{aligned} \widehat{h}(x)y &= \sum_{J \subseteq [\ell]} h_J(x_J) P_{J^c}(x_{J^c}) y \\ &= \sum_{\xi \in \Omega} \Big(\sum_{J \subseteq [\ell]} \xi^J h_J(x_J) \Big) v_\xi = \sum_{\xi \in \Omega} h(a + \xi \odot x) v_\xi, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 h 的多重线性性质得出。将引理 2.1 和 4.2 应用于关于 $y \in G$ 的这个恒等式，并利用假设可得 (10)。□

4.2. **寻找解析秩较小的张量**。在命题 3.7 的假设下，我们说明如何通过减去一个分割秩有界于定义方程数量线性倍的型，得到一个解析秩较小的型。

命题 4.4. 设 Y 和 Z 是向量空间，T 是定义在 $X_1 \times \cdots \times X_k \times Y \times Z$ 上的多重线性形式，其中 $k \ge 1$。假设 Γ_k 由关于前 k 个块的 s 个多重线性方程组成，且在 $V(\Gamma_k)$ 上，秩$_{\mathbb{F}}\, M_T(x) \le t$。存在定义在相同空间上的多重线性形式 S，具有以下性质。

(a) 若 $k = 1$，则 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - S) \le s$ 且 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(S) \le t$.(

b) 若 $k \ge 2$，则 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - S) \ll_k s$ 且

$$\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(S) \ll_k \frac{s}{m} + m^{2^{k-1}-1} t \tag{11}$$

对于满足 $2(k-1) \le m$ 且 $m^{2^{k-2}} \le q$ 的每个整数。

证明。固定 k 并令 $C = k2^{k-1}$。设 $H_k = T$，并按照假设取 Γ_k。我们声称，对于每个 $j = k,\ k-1,\ \ldots\ldots,$ 1，我们都可以在 $X_{[j]}$ 上选取一个多重线性方程组 Γ_j，并在原来的 $k+2$ 个块上选取一个多重线性形式 H_j，使其具有以下性质。记

$$s_j = |\Gamma_j|, \qquad b_j = \max_{x \in V(\Gamma_j)} \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}\big(H_j(x,\cdot)\big).$$

这些量满足以下界。

(i) $s_j + \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - H_j) \le C^{k-j} s$。(ii) 若 $k \ge 2$，则对 (b) 中范围内的每个 m，都有 $m^{2^{j-1}} b_j \le C^{k-j}\big(s + m^{2^{k-1}} t\big)$。

假设该结论成立，并取 $j = 1$。Γ_1 中的方程是线性的，因此 $L := V(\Gamma_1)$ 是 X_1 的一个余维数为 $c \le s_1$ 的线性子空间。取一个投影 $p\colon X_1 \to L$，并令 $S(x_1,\ \cdot) = H_1(px_1,\ \cdot)$。若 $(v_1,\ \ldots\ldots,\ v_c)$ 是 $\ker p$ 的一组基，则写作 $x_1 - px_1 = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i(x_1) v_i$，其中 $\lambda_i \in X_1^*$。于是

$$(H_1 - S)(x_1, \cdot) = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i(x_1) H_1(v_i, \cdot).$$

每个被加项都是一个分区项，因此由 (i) $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - S) \le \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - H_1) + s_1 \le C^{k-1} s$。对于均匀分布的 $x_1 \in X_1$，向量 px_1 在 L 上均匀分布。因此

$$q^{-\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(S)} = \mathbb{E}_{u \in L}\, q^{-\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(H_1(u,\cdot))} \ge q^{-b_1}.$$

于是 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(S) \le b_1$，这就给出了每种情况下所需的界。

我们证明该结论通过对 j 作下降归纳来完成。情形 $j = k$ 由假设可得。

假设 (Γ_j, H_j) 对某个 $2 \le j \le k$ 满足 (i) 和 (ii)。令 $\ell = j-1$，写作 $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ 并令 $y = x_j$，且令 $\Delta \subseteq \Gamma_j$ 由支撑集不包含 y 的方程组成。将剩余的 $s_j - |\Delta|$ 个方程排列为映射 $B(x)$ 的各行：$X_j \to \mathbb{F}^{s_j - |\Delta|}$。每个方程关于 y 是线性的，并且在其支撑集上是多重线性的。因此，B 关于每个参数分块都是仿射的，并且

$$V(\Gamma_j) = \{(x,y) : x \in V(\Delta),\ y \in \ker B(x)\}, \qquad e := \max_{x \in V(\Delta)} \mathrm{rank}_{\mathbb{F}}\, B(x) \le s_j - |\Delta|.$$

应用命题 4.3 于 H_j、Δ 和 B，得到 H_{j-1} 和 Γ_{j-1}。该命题给出

$$s_{j-1} + \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(H_j - H_{j-1}) \le (2^\ell - 1)|\Delta| + 2^\ell e \le 2^\ell s_j. \tag{12}$$

由次可加性，(12) 将 $s_{j-1} + \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - H_{j-1})$ 上界为 $2^\ell s_j + \mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T - H_j)$。由于 $2^\ell \le C$，j 处的性质 (i) 给出 $j-1$ 处的 (i)。

令 $M = m^{2^{j-2}}$。则 $2\ell \le M \le q$ 且 $M^2 = m^{2^{j-1}}$。由 (10)，

$$\begin{aligned} m^{2^{j-2}} b_{j-1} &\le \frac{\ell 2^{\ell-1} M}{M - \ell} e + M\big(1 + (2^\ell - 1)(M-1)\big) b_j \\ &\le \ell 2^\ell e + 2^\ell m^{2^{j-1}} b_j \\ &\le 2^\ell C^{k-j}\big((\ell+1)s + m^{2^{k-1}} t\big) \\ &\le C^{k-j+1}\big(s + m^{2^{k-1}} t\big), \end{aligned}$$

这里用到了 $e \le s_j \le C^{k-j} s$ 和 $(\ell+1)2^\ell \le C$。这证明了 $j-1$ 处的 (ii)，并完成归纳。□

5. Putting everything together

现在结合命题 3.2、3.7和 4.4 来证明定理 1.2。

定理的证明 *1.2*。若 $T = 0$，取 $T' = 0$。设 $T \ne 0$。记 $k = d - 2$ 和 $D = 2^{k-1}$，暂且假设 $q \ge (2k)^D$。我们将前 k 个块视为 $X = X_1 \times \cdots \times X_k$，并将最后两个记为 Z，W。

命题3.2给出了一个 Γ 关于 X 的多重线性方程组，使得

$$s_0 = |\Gamma|, \qquad b = \max_{x\in V(\Gamma)} \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} M_T(x), \qquad s_0 + b \le K_{k+1}(r+1).$$

由于 $q \ge 2k > k$，命题 3.7 给出一个型 S 以及一个关于 s 的多重线性方程精细化系统 X，使得

$$\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T-S) \le 2^k b, \qquad s \le (2^k-1)s_0, \qquad \max_{x\in V(\Gamma')} \operatorname{rank}_{\mathbb{F}} M_S(x) \le t := \frac{k2^{k-1}b}{q-k}.$$

不等式 $q-k \ge q/2$ 给出 $t \le k2^k b/q$。

对于 $k=1$，命题 4.4(a) 应用于 S和 Γ'，给出一个型 T'，使得 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(S-T') \le s$且 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T') \le t \le 2b/q$。由于 $D=1$，这给出了所需的 q 次幂。

对于 $k \ge 2$，命题 4.4(b) 给出一个型 T'，其 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T') \ll_k s/m + m^{D-1}t$。为了将两项都界定为 $(s+b)q^{-1/D}$的倍数，取 $m = \lfloor q^{1/D} \rfloor$。事实上，$q^{1/D} \ge 2k$，因此 $m \ge 2(k-1)$。此外 $m^{2^{k-2}} = m^{D/2} \le q^{1/2} \le q$。这验证了关于 m的两个限制。由于 $q^{1/D} \ge 2$，我们有$m \ge q^{1/D}/2$，而 $m^{D-1} \le q^{(D-1)/D}$。因此

$$\frac{s}{m} \le 2sq^{-1/D}, \qquad m^{D-1}t \le q^{(D-1)/D}\frac{k2^k b}{q} = k2^k b q^{-1/D}.$$

由此可得 $\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(S-T') \ll_k s$ 且 $\mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T') \ll_k (s+b)q^{-1/D}$，并且这些界对$k=1$同样成立。

由次可加性，$T-T'$ 的分割秩至多为 $T-S$ 和$S-T'$的界之和，即为 $O_k(b+s)$。此外，$b+s \le (2^k-1)(b+s_0) \le (2^k-1)K_{k+1}(r+1)$。由于 $k=d-2$，我们可以选取仅依赖于 d 的常数 $L_d^0, B_d \ge 1$，使得

$$\mathrm{PR}_{\mathbb{F}}(T-T') \le L_d^0(r+1), \qquad \mathrm{AR}_{\mathbb{F}}(T') \le B_d(r+1)q^{-1/D}.$$

令 $L_d = 3L_d^0$，并选取一个整数 Q_d，使其至少为 $\max\{(2k)^D, (d-1)^2, (6B_d)^D\}$。对于 $q \ge Q_d$，第一个阈值确保前述构造适用。根据引理 2.1，第二个阈值给出 $r \ge 1/2$，因为 $T \ne 0$。因此，$r+1 \le 3r$，并且我们的分割秩界至多为 $L_d r$。最后，第三个阈值给出 $3B_d q^{-1/D} \le 1/2$，所以同一个 T' 的解析秩至多为$B_d(r+1)q^{-1/D} \le r/2$。这就证明了 (2)。□

人工智能使用声明。 作者使用了多个版本的 ChatGPT（主要是 5.6 Sol 和 6 Astra）来发展证明思路。该人工智能工具首先找到了关于四阶张量猜想的证明（尤其是命题 4.4的四阶张量版本）。随后，作者将该证明推广到了任意阶张量。所有人工智能辅助生成的输出均由作者独立检查、验证和简化；作者对本工作的内容承担全部责任。

References

[1] K. Adiprasito、D. Kazhdan 和 T. Ziegler。《三线性形式的施密特秩与解析秩》。 *arXiv preprint arXiv:2102.03659* 2021 ，。[2] A. Bhowmick 和 S. Lovett。《大域上多项式的偏差与结构，以及其在信息论中的应用》。 *IEEE Trans. Inform. Theory*, 69(2):963–977，2023年。doi:10.1109/TIT.2022.3214372。[3] A. Blatter、J. Draisma 和 F. Rupniewski。《有限域上的张量限制定理》。 *Compos. Math.*，161 1021 1053，2025年 10 1112 0010437 25007067：–。doi: 。/S X。[4] Q. Chen 和 K. YE。《无限域上多线性簇的几何及其应用》。arXiv:2605 04859，2026年。。[5] A. Cohen 和 G. Moshkovitz。《双线性映射的结构与随机性》。 *Discrete Anal.* 2022 12, ， 。论文编号：21 页码。[6] A. Cohen 和 G. Moshkovitz。《大域上分割秩与解析秩等价》。 *Duke Math. J.*，172 2433 2470，2023年 2102 10509：–。arXiv:。。[7] H. Derksen。《张量的 g 2022 题》。 ，（）：–。 *Algebra & Number Theory* 16 5 1071 1097, -稳定秩与帽集问

[8] W. T. Gowers 和 J. Wolf。《 $\mathbb{F}_p^n$上函数的线性形式与高阶均匀性》。 *Geom. Funct. Anal.*，21 1 36 69，2011年 10 1007 00039 010 0106 3 ( )： –。doi: 。/s - - -。[9] B. Green 和 T. Tao。《有限域上多项式的分布及其在高尔斯范数中的应用》。*Contrib. Discrete Math.*，4(2):1–36，2009年。doi:10.55016/ojs/cdm.v4i2.62086。[10] O. Janzer。《张量的分割秩与解析秩之间的多项式界》。 *Discrete Analysis*，2019年。[11] T. Kaufman 和 S. Lovett。《多项式的最坏情况到平均情况归约》。载于 *Proceedings of the 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* 166 175, 2008 10 1109 2008 17 ，页码–。doi: 。/FOCS。。[12] D. Kazhdan 和 T. Ziegler。《代数组合学在代数几何中的应用》。 *Indag. Math. (N.S.)*，32 6 1412 1428，2021年 10 1016 2021 09 002 ( )： –。doi: 。/j.indag。。[13] A. Lampert。《三线性形式的切片秩与解析秩》。 *Discrete Anal.*，2025年。论文编号25，共6页。[14] S. Lovett。《张量的解析秩及其应用》。 *Discrete Analysis*，2018年。[15] L. Mili´cevi´c。《关于解析秩的分割秩多项式界》。 *Geometric and Functional Analysis*，29 5 1503 1530，2019 ( )： –。[16] L. Mili´cevic。《稠密多重线性簇中的低余维子簇》。载于 ，，页码–。arXiv:2512.14529。[17] G. Moshkovitz 和 D. G. Zhu。《分割秩与解析秩之间的拟线性关系》。arXiv:2211.05780，2022年。版本2，2024年；按所示位置引用版本1。[18] G. Moshkovitz 和 D. G. Zhu。《张量的舒尔补与多重线性交换秩》。arXiv:2603.11038，2026年。[19] E. Naslund。《张量的分割秩与 k $\mathbb{F}_q^n$ 174 105190, -右角》。 *Proceedings of the 13th European Conference on Combinatorics Graph Theory and Applications (EuroComb '25)* 904 909, 2025 2020 10 1016 2019 105190, 25 *J. Combin. Theory Ser. A*，： 。doi: 。/j.jcta。。页码

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, P.O. Box 94248, 1090 GEAmsterdam, The Netherlands*Email address*: q.chen3@uva.nlState Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*Email address*: keyk@amss.ac.cn