arXiv:2611.30731v1 [cs.DM] 23 Nov 2026

通过一种新的线性规划松弛：WSEPT的更强性能保证，以及对Kawaguchi & Kyan的基于线性规划的证明

Maximilian von Aspern、Andreas S. Schulz和Eugenio Vairo

慕尼黑工业大学

摘要

我们提出一种新的线性规划松弛，用于在相同并行机器上最小化总加权完工时间。其右端项是超模的，因此该松弛可由贪心算法求解。我们证明，WSPT规则与最优线性规划值之比不超过因子$\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$。这界定了该松弛的整数性间隙，并为Kawaguchi 和 Kyan关于WSPT性能的紧界给出了一个简短的基于线性规划的证明。随后，我们转向该问题的随机版本，其中处理时间是独立随机变量，其变异系数平方至多为 Δ。这一新线性规划松弛的方差校正版本对所有非预见性策略均有效，并且我们证明，WSEPT与其之比不超过因子 $1+(1+\Delta)/(3+\sqrt{7+2\Delta})$（当$\Delta \geq 1$时），且对任意数量的机器均成立。该界为 $O(\sqrt{\Delta})$，而此前针对该问题的所有性能保证均随 Δ线性增长。在常数因子意义下，我们的界与已知的WSEPT的$\Omega(\sqrt{\Delta})$下界相匹配。对于 $\Delta \leq 1$，我们恢复了已知的最佳界。

1 引言

调度文献中最基础且研究最充分的问题之一，是最小化一组作业在若干台相同机器上并行处理时的总加权完工时间。在调度问题的经典三字段表示法中，该问题记作 $P||\sum w_j C_j$ [11]。给定作业$N=\{1,\ldots,n\}$，每个作业的处理时间为 $p_j>0$、权重为 $w_j>0$，并有 m 台相同的机器用于处理这些作业。调度是将作业分配给机器的一种方案，使得每个作业都由且仅由一台机器非抢占地处理，并且每台机器在任一时刻至多处理一个作业。调度中作业 j 的完工时间记为 C_j，我们的目标是找到使总加权完工时间 $\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$最小化的调度。由于该问题是 NP难的 [2], ，我们关注如何找到能够给出可证明的优质解的高效算法。若某算法能在多项式时间内运行，并且对任意实例都能生成一个调度，使其成本与最优值的差距至多为 α 倍，则称该算法为 α-近似算法。在分析中，我们实际上将算法解的值与线性规划下界的最优值进行比较，从而也界定了该线性规划的整数性间隙。由于我们的线性规划使用完工时间-

时间变量中，整数性并非定义调度的相关属性。因此，今后当我们界定最优调度的值与线性规划松弛值之比时，对于以完工时间变量表示的线性规划，我们将使用“松弛间隙”一词，而非“整数性间隙”。

WSPT 与 Kawaguchi & Kyan 界： 文献中存在多种用于解决该问题 $P||\sum w_j C_j$的近似算法，包括一种多项式时间近似方案（PTAS） [28]。然而，一种简单的组合式列表调度算法通常称为 WSPT（即“加权最短处理时间”），可以说受到了最多关注。WSPT 按权重与处理时间之比（也称为 Smith 比率 [29]）的非递增顺序，将作业分配给最先空闲的机器。在 1986年 的一篇里程碑式论文中，Kawaguchi 和 Kyan[19] 证明了 WSPT 是一种 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$- 近似算法，而且这一界是紧的。大约 25 年

之后，Schwiegelshohn [26], 呼应学界认为原始证明相当冗长且复杂的观点，通过将问题化简为一组简单的最坏情况实例，给出了一个更为简洁的证明。随后，Jäger与Skutella [16] 改进了他的分析，并确定了 WSPT 在每个固定机器数下的确切性能保证。他们还指出，与大多数近似结果不同，Kawaguchi 和 Kyan（以及 Schwiegelshohn，因而也包括他们自己的）分析并不依赖于下界。明确给出这样的下界，正是本文的出发点。

调度的多面体方法：人们投入了大量精力，致力于寻找机器调度问题的多面体松弛，以用于建立近似保证（例如，见 [23]）。自然，这类方法更多地依赖问题本身的结构，而非其最坏情况实例的结构。最早以组合形式给出的 $P||\sum w_jC_j$ 下界由 Eastman、Even 和 Isaacs [6], 提出，并由此得到 WSPT 的性能保证 $3/2 - 1/(2m)$。该结果可以改写为

$$\min \sum_{j\in N} w_jC_j \text{ s.t. } \sum_{j\in S} p_jC_j \geq \frac{1}{2}\sum_{j\in S} p_j^2 + \frac{1}{2m}\Big(\sum_{j\in S} p_j\Big)^2 \text{ for all } S \subseteq N, \tag{1}$$

见 [13, 23, 25]。据我们所知，尚无研究针对能够达到 Kawaguchi & Kyan 界的线性规划松弛，对 WSPT 进行分析。即使对所有作业 j都加入不等式 $C_j \geq p_j$，松弛 (1) 对此目的而言仍然过弱。Chan、Muriel 和 Simchi-Levi [3] 研究了两种线性规划松弛——一种使用时间索引变量，另一种使用配置变量——并证明其整数间隙的上界为 $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$。然而，他们借助 Kawaguchi 和 Kyan 的结果证明了这些界。最近，Kashaev[18] 以及 Feng、Hu 和 Li [9] 分别提出了使用分配变量的半定规划松弛和凸规划松弛，并利用这些松弛推导出 Kawaguchi & Kyan 界。两者都采用了 Schwiegelshohn [26] 的"实例缩减"前几步，并通过各自的松弛分析缩减后的实例。此外，Kalaitzis、Svensson 和 Tarnawski [17]证明，当所有作业具有相同的 Smith 比率时，对 Sviridenko 和 Wiese [30]的配置线性规划进行舍入，可用于无关机器，并给出一个 $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\epsilon\right)$-近似算法。

随机调度与 WSEPT：该问题的随机版本也得到了广泛研究：处理时间由独立随机变量 $P_1, \ldots, P_n$ 决定，且只有在作业完成后，其实现值才会揭晓。通常假设这些随机变量的变异系数平方有上界 Δ，即对所有 $j \in N$，$\mathrm{Var}[P_j]/\mathbb{E}[P_j]^2 \leq \Delta$。此问题的解不再是静态调度，而是一种自适应的非预见性调度策略。该策略仅依据哪些作业已完成、哪些作业正在处理的信息，将作业非抢占地分配给机器。请注意，这些策略无法获知尚未完成作业尚未揭晓的处理时间，但可以获取有关其分布的信息。WSEPT 策略（即"加权最短期望处理时间"）是 WSPT 在随机问题中的自然推广。它按照 $w_j/\mathbb{E}[P_j]$非递增的顺序安排作业。请注意，WSEPT 只需要处理时间变量的一阶矩信息，而不需要完整的分布信息。与其确定性对应策略一样，WSEPT 在单机上是最优的，但在 $m \geq 2$ 台机器 [24]上可能产生次优解。Möhring、Schulz 和 Uetz [20] 通过分析线性规划 (1) 的随机扩展，证明 WSEPT 的性能保证为 $1 + \frac{1}{2}(1+\Delta)$。Jäger 与 Skutella [16] 通过证明 [19, 26] 中关于 WSPT 的确定性结果可转化为 WSEPT 的近似保证，将这一界改进为 $1 + \frac{1}{2}{}^{1+\Delta}_{1+\text{最小值}\{2,\sqrt{2+2\Delta}\}}$。这一界仍为 $O(\Delta)$；在本文发表之前，尚无性能保证对 Δ呈次线性的策略。Im、Moseley 和 Pruhs [14], 证明，WSEPT 的近似比下界为 $\Omega(\Delta^{1/3})$；Cheung、Fischer、Matuschke 和 Megow [4]证明其下界为 $\Omega(\sqrt{\Delta})$。此外，Eberle、Fischer、Matuschke 和 Megow [7]给出了所有索引策略的（依赖于分布的）近似比下界 $\Omega(\Delta^{1/4})$；Skutella、Sviridenko 和 Uetz [27] 则证明，对于任何在时间 0 固定所有作业到机器的分配的策略，其下界为 $\Omega(\Delta)$。即使在无权问题中，且处理时间服从两种不同的伯努利分布之一，这些下界仍然成立。目前，仅针对无权问题 [1, 7, 12, 14]，人们已知具有与分布无关的近似保证的策略。此类策略是否存在于加权问题中，仍是一个重要的未解问题。

新结果：我们的贡献有三方面。

首先，我们提出一种新的以完工时间变量表示的线性规划松弛，其中包含一族比（1）更强的超模约束，以及该松弛的随机推广。

其次，我们证明这种线性规划松弛可以给出 Kawaguchi & Kyan 界的基于线性规划的证明。我们的方法不同于以往方法之处在于，我们的证明完全自洽，不依赖 Kawaguchi 和 Kyan [19]或 Schwiegelshohn [26], 所采用的技术，从而首次为这一结果提供了基于线性规划的证明。

第三，通过使用新的线性规划松弛，我们将 WSEPT 的性能保证上界改进为 $O(\sqrt{\Delta})$，从而使其与下界仅相差常数。

本文其余部分的组织如下。第 2 节介绍新的线性规划松弛及一个重要的辅助引理。在第 3 节中，我们分析该线性规划松弛的松弛间隙，并由此给出 Kawaguchi & Kyan 界的基于线性规划的证明。第 4 节陈述并分析随机线性规划，并给出 WSEPT 性能保证的改进界。第 5 节包含关于新线性规划松弛结构的若干进一步结果。

2 针对 $P||\sum w_jC_j$ 的一种新线性规划松弛

本节将介绍 $P||\sum w_jC_j$ 的一种新线性规划松弛。对于任意实例，它至少与松弛 (1) 一样强。下文假设 $n > m \geq 2$；否则，WSPT 算法即可求得问题的最优解。考虑通过以下方式定义的函数 $g : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $f : 2^N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$g(x) = \min\Big\{\sum_{i=1}^{m} L_i^2 : \sum_{i=1}^{m} L_i = \sum_{j=1}^{n} x_j, L_i \geq x_i^{\downarrow} \text{ for all } i \in \{1,\dots,m\}\Big\},$$
$$f(S) = \frac{1}{2}p^2(S) + \frac{1}{2}g(p_S).$$

这里，$x_i^{\downarrow}$ 表示向量 $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 中第 i 大的元素，而 $p_S \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 是 $S \subseteq N$ 中处理时间的向量表示，其中第 j 个元素在 $j \in S$ 时等于 p_j，否则为 0，即 $p_S = (p_j \mathbb{1}_{j\in S})$。这与记号 $p(S) = \sum_{j\in S} p_j$ 和 $p^2(S) = \sum_{j\in S} p_j^2$ 不同，本文中我们始终使用后者。线性规划松弛现在可表述如下：

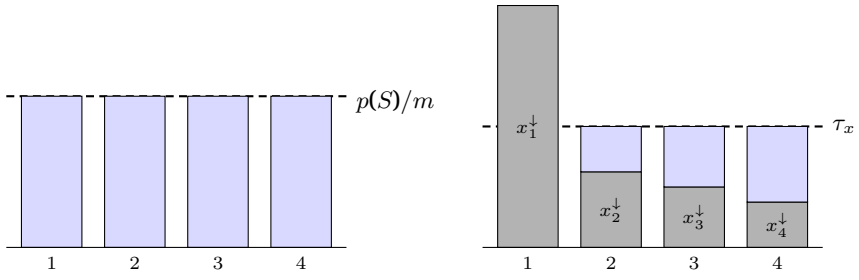
$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} w_jC_j \tag{2a}$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{j\in S} p_jC_j \geq f(S) \quad \text{for all } S \subseteq N. \tag{2b}$$

约束族 (2b) 的构造，特别是函数 g 的构造，采用了此前在分析 $P||\sum w_jC_j$ 和 WSPT 时探讨过的注水思想，参见 [16, 18, 26],，尽管此前并未用于构造线性规划松弛。众所周知且易于验证，对于 S 中作业的任何非空闲调度，

$$\sum_{j\in S} p_jC_j = \frac{1}{2}p^2(S) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} L_i^2(S), \tag{3}$$

其中，$L_i(S)$ 表示机器 i 的负载，即分配给它的 S 作业的总处理时间。由于第一项是常数，我们暂时忽略它。如果作业可以在机器之间任意拆分，那么当所有负载相等时，第二项最小，即

$$\sum_{i=1}^{m} L_i^2(S) \;\geq\; \min\Big\{\sum_{i=1}^{m} L_i^2 : \sum_{i=1}^{m} L_i = p(S)\Big\} \;=\; \frac{1}{m}\,p(S)^2.$$



(a) 拆分所有作业　　(b) 在 $g(p_S)$中注水

图1：对于 $m = 4$ 台机器和一个包含处理时间为16、5、4、3的作业以及六个长度为2的作业集， $\sum_{i=1}^{m} L_i^2(S)$的两个下界，其中 $x = p_S$。(a) 如果允许拆分所有作业，则每台机器的负载都等于 $p(S)/m = 10$，从而得到作为式(1)基础的界 $p(S)^2/m = 400$ 。(b) 在 $g(p_S)$中，最长的 m 个作业（深色）保持完整，其余作业（浅色）则被拆分，以将负载最少的机器提升到水位 $\tau_x = 8$ （其正式定义见第5节中的式(10)）；机器1不分配任何作业。由此得到 $g(p_S) = 16^2 + 3 \cdot 8^2 = 448$。（不同于常见的甘特图，此处机器画成列，时间从下向上延伸，以强调注水类比。）

这是 Eastman、Even 和 Isaacs [6]提出的下界，也是线性规划 (1) 的基础。它忽略了作业无法拆分这一事实，因此当某些作业较长时会过于乐观。例如，对于 $S = \{j\}$，(1) 只能得到$C_j \geq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{m})\ p_j$，而任何调度都有 $C_j \geq p_j$。新的松弛保持 m 个最长作业的完整性：处理某个作业的机器，其负载至少等于该作业的长度；而在使$\sum_i L_i^2(S)$最小的分配中，第 i 大的负载至少等于 S 中第 i 大的处理时间。（定理1对此进行了严格说明。）将这些 m 下界加入上述最小化问题，恰好得到 $g(p_S)$。只有剩余的作业会被拆分，而且不是均匀拆分。在最优解中，它们会将负载最小的机器提升到同一水平，而那些长作业的负载已经超过该水平的机器则不会再接收任何作业。这就是 g 的注水结构（见图1）。现在，我们正式证明这一新松弛的有效性。

定理1。 对于每个可行调度和每个 $S \subseteq N$,

$$\sum_{j \in S} p_j C_j \geq f(S).$$

证明。 删除 $N \setminus S$ 中的作业，并将每台机器上的剩余作业向左移动，使其从时间0开始无空闲时间地运行；将新的完工时间记为 C_j^S。这不会增加任何完工时间，因此根据(3)

$$\sum_{j \in S} p_j C_j \geq \sum_{j \in S} p_j C_j^S = \frac{1}{2} p^2(S) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} L_i^2(S).$$

这里， $L_i(S)$表示分配给机器 i的 S 中作业的总处理时间。

因此，只需证明对于 $x = p_S$ 以及将 S 中的作业分配给机器的每一种方式，都有 $\sum_{i=1}^{m} L_i^2(S) \geq g(x)$。在有限种分配方式中，选择使 $\sum_{i=1}^{m} L_i^2(S)$最小的一种。不失一般性，可以假设 $L_1(S) \geq \ldots \geq L_m(S)$。如果对于所有 i都有 $L_i(S) \geq x_i^{\downarrow}$，那么根据 g的定义， $\sum_{i=1}^{m} L_i^2(S) \geq g(x)$。

反之，假设对于某个 $k \leq m$，有 $L_k(S) < x_k^{\downarrow}$。由于调度不得抢占长度为$x_1^{\downarrow}$、.....、$x_k^{\downarrow}$的作业，因此还存在一台机器 $h < k$，其上调度了两个长度至少为 $x_k^{\downarrow}$ 的作业。任意选择其中一个作业，并将其长度记为 $y \geq x_k^{\downarrow}$ 。将该作业与调度在

机器上的所有作业交换，会使 $\sum_{i=1}^{m} L_i^2(S)$ 减少

$$L_h^2(S) + L_k^2(S) - \big(L_h(S) + L_k(S) - y\big)^2 - y^2 = 2\big(L_h(S) - y\big)\big(y - L_k(S)\big).$$

注意到 $y - L_k(S) \geq x_k^{\downarrow} - L_k(S) > 0$，且 $L_h(S) - y > 0$，因为机器 h 还承载着第二个作业，其长度至少为 $x_k^{\downarrow} > 0$。因此，减少量严格为正，这与分配的选择相矛盾。

□

如前所述，很容易看出，约束 (2b) 至少与线性规划 (1) 中的约束同样强。此外，新约束还包括 $C_j \geq p_j$；注意到$f(\{j\}) = g(p_{\{j\}}) = p_j^2$即可观察到这一点。

以下辅助结果对于我们在后续各节中的分析至关重要。在全文中，我们记 $(y)_+ = \max\{y, 0\}$ 并记 $(y)_+^2 = ((y)_+)^2$。

引理 1. 考虑一个作业集 S 的调度。令 ℓ_i 为机器 i上任一作业的处理时间（对于空机器则令 $\ell_i = 0$ ）。令 L_i 为分配给机器 i的所有作业的总处理时间。则，对于每个 $\nu \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^{m} \Big(2\nu L_i - \nu^2 + (\ell_i - \nu)_+^2\Big) \leq g(p_S).$$

证明。设 L^* 在 $x = p_S$的 g 定义中取得最小值。由于 $L_i^* \geq x_i^{\downarrow}$，成立 $(L_i^* - \nu)^2 \geq (x_i^{\downarrow} - \nu)_+^2$，再结合 $\sum_{i=1}^{m} L_i = \sum_{i=1}^{m} L_i^* = p(S)$，我们得到

$$g(p_S) = \sum_{i=1}^{m} (L_i^* - \nu)^2 + 2\nu \sum_{i=1}^{m} L_i - m\nu^2 \geq \sum_{i=1}^{m} (x_i^{\downarrow} - \nu)_+^2 + 2\nu \sum_{i=1}^{m} L_i - m\nu^2. \tag{4}$$

非零的 ℓ_i 是 S 中不同作业的处理时间；因此 $\sum_{i=1}^{m} (x_i^{\downarrow} - \nu)_+^2 \geq \sum_{i=1}^{m} (\ell_i - \nu)_+^2$。 □

3 界定松弛间隙以及对 Kawaguchi & Kyan 界的基于线性规划的证明

为了给出 (2) 的松弛间隙的上界，我们希望找到一个算法 $\mathcal{A}$ 和一个 $\alpha \geq 1$，使得对所有实例均有 $\sum_{j=1}^{n} w_j C_j^{\mathcal{A}} \leq \alpha \sum_{j=1}^{n} w_j C_j^{\mathrm{LP}}$，其中 C^{LP} 表示线性规划松弛 (2) 的一个最优解。这将意味着 $\mathcal{A}$ 是一个 α-近似，并且线性规划 (2) 的松弛间隙以 α 为上界。

为此，我们将采用加权最短处理时间优先。我们不失一般性地假设作业按其 Smith 比率排序，即 $w_1/p_1 \geq w_2/p_2 \geq \ldots \geq w_n/p_n$。众所周知，加权最短处理时间优先具有紧确的近似保证 $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$ [19]。因此，选择 $\mathcal{A}$ =加权最短处理时间优先后，松弛间隙所能得到的最佳界恰好就是这一因子；事实上，我们将证明可以达到此界。该结果为加权最短处理时间优先的近似保证提供了一种替代证明，其篇幅或许比以往的证明更精简，也是对此结果的首个基于线性规划的证明。

定理 2. 对于 $P||\sum w_j C_j$ 的任意实例，加权最短处理时间优先调度满足

$$\sum_{j=1}^{n} w_j C_j^{\mathrm{WSPT}} \quad \leq \quad \frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt{2}\Big) \cdot \sum_{j=1}^{n} w_j C_j^{\mathrm{LP}}.$$

Proof. 令 $\rho = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$。结合 $\frac{w_{n+1}}{p_{n+1}} = 0$，WSPT 调度的成本可改写为

$$\sum_{j=1}^{n} w_j C_j^{\mathrm{WSPT}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{w_k}{p_k} - \frac{w_{k+1}}{p_{k+1}}\right) \sum_{j=1}^{k} p_j C_j^{\mathrm{WSPT}}.$$

由于对所有 $k \in N$ 都有 $w_k/p_k \geq w_{k+1}/p_{k+1}$，只需证明对每个 $k \in N$，集合 $S = \{1, \ldots, k\}$ 满足 $\sum_{j \in S} p_j C_j^{\mathrm{WSPT}} \leq \rho \cdot f(S)$。后一个不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{m} L_i^2 \leq \rho \cdot g(p_S) + (\rho - 1) \cdot p^2(S), \tag{5}$$

其中 L_i 是机器 i上对应的负载。因此，令 S 为这样一个集合，并令 $\eta = \min_i L_i$。注意，WSPT 不可能在 η 之后开始处理任何作业，因为从时间 η 起，一台机器就会空闲，所以 WSPT 会在时间 η安排该作业。

如果 $\eta = 0$，那么每个作业都在时间 0 开始。因此，每台机器至多处理一个作业，从而$\sum_{i=1}^{m} L_i^2 = p^2(S)$ $= g(p_S)$，该不等式成立。

否则，我们对处理时间进行缩放，使得 $\eta = 1$。对于每台机器 i，令 ℓ_i 为其最后一个作业的长度；其开始时间 $L_i - \ell_i$ 至多为 η。于是，每台机器都满足 $1 \leq L_i \leq 1 + \ell_i$。结合引理 1 和 $\sum_{i=1}^{m} \ell_i^2 \leq p^2(S)$，只需证明对于每台机器 i，

$$L_i^2 \leq \rho\Big(2\nu L_i - \nu^2 + (\ell_i - \nu)_+^2\Big) + (\rho - 1)\ell_i^2.$$

给定 $\rho = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 和 $\nu = \sqrt{2}$，这等价于证明

$$(L_i - 1)(1 + \sqrt{2} - L_i) + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ell_i^2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2}(\ell_i - \sqrt{2})_+^2 \geq 0.$$

对于 $L_i \leq 1 + \sqrt{2}$，三个项均非负，因此该结论显然成立。

因此，假设 $L_i > 1+\sqrt{2}$。根据我们之前得到的下界，有 $\ell_i \geq L_i - 1 > \sqrt{2}$。函数 $x \mapsto x(\sqrt{2}-x)$ 在 $x > \sqrt{2}$时单调递减。综合以上可知，$(L_i - 1)(1 + \sqrt{2} - L_i) \geq \ell_i(\sqrt{2} - \ell_i)$，从而有

$$\begin{aligned}(L_i - 1)(1 + \sqrt{2} - L_i) + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ell_i^2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2}(\ell_i - \sqrt{2})_+^2 \geq \\ \ell_i(\sqrt{2} - \ell_i) + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ell_i^2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2}(\ell_i - \sqrt{2})^2 = \\ (\sqrt{2} - 1)(\ell_i - \sqrt{2} - 1)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

□

尽管 Kawaguchi & Kyan 界作为 WSPT 的近似保证是紧的，但对于线性规划 (2) 的松弛间隙，情况未必如此。事实上，松弛间隙的精确值仍是一个未解决的问题。我们给出了一个下界 $9/8$。考虑一个包含 $m = 2$ 台机器和三个作业的实例，其处理时间为 1、1、3，且权重均为单位权重。根据 SPT 对于 $P||\sum C_j$ [5] 的最优性，最优解为 $C_1^* = C_2^* = 1$ 和 $C_3^* = 4$。与此同时，一个最优线性规划解为 $C_1^{\mathrm{LP}} = C_2^{\mathrm{LP}} = 1$ 和 $C_3^{\mathrm{LP}} = 10/3$。综合以上可得

$$\frac{C_1^* + C_2^* + C_3^*}{C_1^{\mathrm{LP}} + C_2^{\mathrm{LP}} + C_3^{\mathrm{LP}}} = \frac{6}{16/3} = \frac{9}{8}.$$

4 针对WSEPT的一个 $O(\sqrt{\Delta})$ 近似保证

本节的主要结果是改进 WSEPT 的性能保证。我们的分析恢复了 Jäger与Skutella 对于 [16] $\Delta \leq 1$ 的界限，但严格改进了他们对于 $1 + \frac{1+\Delta}{6}$ $\Delta > 1$ 的界限。

定理 3. *WSEPT* 的性能保证至多为

$$1+\begin{cases}\frac{1+\Delta}{2+\sqrt{8(1+\Delta)}} & \text{if } \Delta \le 1,\\ \frac{1+\Delta}{3+\sqrt{7+2\Delta}} & \text{if } \Delta \ge 1.\end{cases}$$

特别地，它随 $\sqrt{\Delta}/2$ 增长，$\overline{\text{如}}\ \Delta \to \infty$。

为了证明这一结果，我们结合了对第 3 节分析的改进版本，以及线性规划 (2) 的随机扩展。

4.1 对线性规划松弛的改进分析

定理 2 的关键步骤是证明不等式 (5)。在证明中，我们选择了 ρ和 ν，得到了紧的 Kawaguchi & Kyan 界。不过，我们也可以对任意的 $\sqrt{2} \le \nu \le 3/2$ 继续证明，并针对任意列表调度得到以下引理。

引理 2. 设 $\sqrt{2} \le \bar{\nu} \le 3/2$。那么，对于任意作业集合 S 的任意列表调度，均有

$$\sum_{i=1}^{m} L_i^2 \le \frac{1}{\nu(2-\nu)} \cdot g(p_S) + \frac{3-2\nu}{\nu(2-\nu)} \cdot p^2(S). \tag{6}$$

证明。 该结论的证明与定理 2 的证明类似。和之前一样，令 $\eta = \min_i L_i$。若 $\eta = 0$，则待证结论可化为 $2 \ge \nu$，这显然成立。

否则，我们对处理时间进行缩放，使得 $\eta = 1$。于是，每台机器都满足 $1 \le L_i \le 1 + \ell_i$。结合引理 1 给出的界以及 $\sum_{i=1}^{m} \ell_i^2 \le p^2(S)$，只需证明对于每台机器 i，有

$$L_i^2 \le \frac{1}{\nu(2-\nu)}\Big(2\nu L_i - \nu^2 + (\ell_i - \nu)_+^2\Big) + \frac{3-2\nu}{\nu(2-\nu)}\ell_i^2.$$

这等价于证明

$$(L_i - 1)(\frac{\nu}{2-\nu} - L_i) + \frac{3-2\nu}{\nu(2-\nu)}\ell_i^2 + \frac{1}{\nu(2-\nu)}(\ell_i - \nu)_+^2 \ge 0.$$

对于 $L_i \le \frac{\nu}{2-\nu}$，三个项均为非负数，因此该结论显然成立。

因此，假设 $L_i > \frac{\nu}{2-\nu}$。于是，由于 $\nu \ge \sqrt{2}$，我们有 $\ell_i \ge L_i = 1 > \frac{2}{(\nu-1)2-\nu} \ge \bar{\nu}$。函数 $x \mapsto x(\frac{2}{(\nu-1)2-\nu} - x)$ 在 $x > \frac{2}{(\nu-1)2-\nu}$ 时递减。综上，这意味着 $(L_i-1)(\frac{\nu}{2-\nu} - L_i) \ge \ell_i(\frac{2}{(\nu-1)2-\nu} - \ell_i)$，从而有

$$\begin{aligned}(L_i - 1)(\frac{\nu}{2-\nu} - L_i) + \frac{3-2\nu}{\nu(2-\nu)}\ell_i^2 + \frac{1}{\nu(2-\nu)}(\ell_i - \nu)_+^2 \ge\\ \ell_i(\frac{2(\nu-1)}{2-\nu} - \ell_i) + \frac{3-2\nu}{\nu(2-\nu)}\ell_i^2 + \frac{1}{\nu(2-\nu)}(\ell_i - \nu)^2 =\\ \frac{2-\nu}{\nu}(\ell_i - \frac{\nu}{2-\nu})^2 \ge 0.\end{aligned}$$

□

我们利用这个关于机器负载平方和的更一般界，证明 $\Delta \le 1$ 的定理 3 中的界。为了得到关于 $\Delta > 1$ 的结果，从而为 WSEPT 证明更好的性能保证，我们还需要结合以下引理。

引理 3. 设 $1 < \nu \le \frac{3}{2}$。那么，对于每个集合 S 中的作业，其任意列表调度都满足

$$\sum_{i=1}^{m} L_i^2 \le \frac{1}{\nu(\nu-1)} \cdot g(p_S) - \frac{3-2\nu}{\nu-1} \cdot p^2(S). \tag{7}$$

证明。与定理 2 的证明一样，令 $\eta = \min_i L_i$。若 $\eta = 0$，则要证明的结论可化为 $(\nu-1)/\nu \ge 0$，这显然成立。

因此，考虑 $\eta > 0$ 的情形，并再次对处理时间进行缩放，使得 $\eta = 1$。我们用 $s_i = L_i - \ell_i$ 表示机器 i 上最后一个作业的开始时间。因此，$0 \le s_i \le 1 \le L_i$。

结合 $p^2(S) \le \sum_{i=1}^m (\ell_i^2 + s_i^2) = \sum_{i=1}^m (L_i^2 - 2s_i\ell_i)$ 以及引理 1 给出的下界，只需证明对每台机器 i，

$$\nu(L_i - 1)(\nu - (2-\nu)L_i) + 2\nu(3-2\nu)s_i\ell_i + (\ell_i - \nu)_+^2 \ge 0.$$

利用 $L_i = s_i + \ell_i$，这等价于

$$\big((\nu-1)\ell_i - \nu s_i\big)^2 + 2\nu s_i(1-s_i) - (\nu - \ell_i)_+^2 \ge 0.$$

若 $\ell_i \ge \nu$，最后一项为零，因此该不等式成立。

若 $\ell_i \le \nu$，则固定 s_i 后，左侧关于 ℓ_i 是凹函数。因此，只需检查 $\ell_i \in [1-s_i, \nu]$ 的端点。当 $\ell_i = \nu$ 时，根据第一种情形，我们知道它大于或等于零。代入 $\ell_i = 1 - s_i$ 后，左侧可化简为 $2\nu(3-2\nu)s_i(1-s_i)$，其中所有因子均非负。 □

4.2 线性规划松弛的随机推广

我们给出线性规划 (2) 的一个适用于随机调度的版本。下文中，我们用 μ_j 表示期望处理时间，用 σ_j^2 表示其方差。我们假设 $\sigma_j^2 \le \Delta\,\mu_j^2$ 对所有作业 j 均成立。请注意，WSEPT 只需要期望处理时间，而不需要额外的分布信息。具体而言，运行 WSEPT 时，我们无需知道方差或 Δ；我们仅在分析中使用它们。我们用 $\mu^2(S) = \sum_{j\in S} \mu_j^2$ 和 $\sigma^2(S) = \sum_{j\in S} \sigma_j^2$。设 P_S 为一个随机向量，其分量在 $j \in S$ 时为 P_j，否则为 0。于是，$g(P_S)$ 是将 g 应用于实现的处理时间后得到的随机变量，而 $\mathbb{E}[g(P_S)]$ 表示其期望。[1] 我们的方法在思想上类似于 Möhring、Schulz 和 Uetz[20], 的方法；他们将线性规划 (1) 推广到随机问题，从而得到了 WSEPT 的首个 $O(\Delta)$ 界。

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbb{E}[C_j] \tag{8a}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j\in S} \mu_j \mathbb{E}[C_j] \ge \frac{1}{2}\Big(\mu^2(S) - \sigma^2(S) + \mathbb{E}[g(P_S)]\Big) \quad \text{for all } S \subseteq N. \tag{8b}$$

下文将约束 (8b) 的右侧称为 $F(S)$。我们首先证明这是一个有效的松弛。

定理4。对于每个非预见策略和每个 $S \subseteq N$，

$$\sum_{j\in S} \mu_j \mathbb{E}[C_j] \ge F(S).$$

[1]请注意，这一期望定义良好且有限。一般而言，它取决于所有处理时间的边缘分布，但无论是运行 WSEPT 还是进行我们的分析，都无需计算该期望。

证明。考虑一个任意的非预见策略。对于处理时间的任意一种实现以及任意 $S \subseteq N$，该策略都会诱导出一个可行调度。根据定理1，该调度满足 $\sum_{j\in S} p_j S_j \geq -\frac{1}{2}p^2(S) + \frac{1}{2}g(p_S)$，其中$S_j := C_j - p_j$ 表示在给定策略和处理时间实现下作业 j 的开始时间。

由于策略是非预见性的，且各作业的处理时间彼此独立，因此某个作业的开始时间不取决于其处理时间。于是，对等式两边取期望可得

$$\sum_{j\in S} \mu_j \mathbb{E}[S_j] \geq -\frac{1}{2}\mathbb{E}[\sum_{j\in S} P_j^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[g(P_S)] = -\frac{1}{2}\big(\sigma^2(S) + \mu^2(S)\big) + \frac{1}{2}\mathbb{E}[g(P_S)],$$

并将 $\mu^2(S)$加到 两边即可完成证明。这里我们用到了 $\mathbb{E}[\sum_{j\in S} P_j^2] = \mu^2(S)+\sigma^2(S)$。 □

与确定性情形一样，不等式 (8b) 支配它们所包含的自然不等式 $\mathbb{E}[C_j] \geq \mu_j$（对于 $S = \{j\}$），以及以下不等式

$$\sum_{j\in S} \mu_j \mathbb{E}[C_j] \;\geq\; \frac{1}{2}\big(\mu^2(S) - \sigma^2(S)\big) + \frac{1}{2m}\big(\mu(S)^2 + \sigma^2(S)\big) \qquad \text{for all } S \subseteq N$$

Möhring、Schulz 和 Uetz 的 [20]。事实上，根据柯西–施瓦茨不等式，对于所有 x， $g(x) \geq \frac{1}{m}\big(\sum_j x_j\big)^2$，这与和 (1) 的比较相同；又根据独立性， $\mathbb{E}\big[\big(\sum_{j\in S} \overline{P_j}\big)^2\big] = \mu(S)^2 + \sigma^2(S)$。

4.3 定理3的证明

引理4. 设 $a \geq 1$ *and* $b \geq 0$。假设对于任意作业子集 S 以及任意处理时间实现，按 *WSEPT* 顺序对 S 进行的列表调度满足

$$\sum_{i=1}^{m} L_i^2 \leq a \cdot g(p_S) + (1 + 2b - a) \cdot p^2(S).$$

那么，*WSEPT* 的性能保证为 $\max\{a, 1 + (1 + \Delta)b\}$。

证明。 WSEPT 顺序不依赖于处理时间的实现，而只取决于其均值。因此，我们可以假设 $w_1/\mu_1 \geq \ldots \geq w_n/\mu_n$，即 WSEPT 按顺序 $1, \ldots, n$ 调度作业。
与确定性情形一样，只需证明对于任意 $S = \{1, \ldots, k\}$，均有 $\sum_{j\in S} \mu_j \mathbb{E}[C_j^{\mathrm{WSEPT}}] \leq \rho \cdot F(S)$，其中 $\rho = \max\{a, 1 + (1 + \Delta)b\}$。我们有

$$F(S) - \mu^2(S) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[g(P_S) - \sum_{j\in S} P_j^2\Big] \geq 0. \tag{9}$$

这里，不等式成立是因为对于所有 $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$， $g(x) \geq \sum_{j=1}^n x_j^2$。对于每一种实现情况，该假设意味着

$$\sum_{j\in S} p_j S_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m} L_i^2 - p^2(S)\Big) \leq \frac{a}{2}\Big(g(p_S) - p^2(S)\Big) + b\, p^2(S).$$

取期望并使用（9），右侧变为 $a(F(S) - \mu^2(S)) + b(\mu^2(S) + \sigma^2(S))$。因此，我们得到

$$\sum_{j\in S} \mu_j \mathbb{E}[C_j^{\mathrm{WSEPT}}] \leq a\Big(F(S) - \mu^2(S)\Big) + \Big(1 + (1 + \Delta)b\Big)\mu^2(S) \leq \rho \cdot F(S).$$

□

为证明定理 3，我们分别对 $\Delta \leq 1$ 和 $\Delta \geq 1$应用引理4来处理不等式 (6) 和 (7)。在这两种情况下，我们选择 ν，使得 $a = 1 + (1 + \Delta)b$。

*Pro*定理 *3* 的对于 $\Delta \leq 1$，我们注意到可以将 (6) 的右侧改写为

$$a \cdot g(p_S) + (1 + 2b - a) \cdot p^2(S)$$

其中 $a = \nu \frac{1}{(2-\nu)}$ 以及 $b = \frac{2-\nu}{2\nu}$，因为 $\nu\ (2-\nu)\ +\ (2-\nu)^{\ 2} - 1 = 3 - 2\nu$。

对于 $\Delta = 1$，选择 $\nu = \frac{3}{2}$ 满足 $a = 1 +\ (1 + \Delta)\ b$，从而通过引理4获得 $a = \nu^{\ \frac{1}{(2-\nu)}} = \frac{4}{3}$ 的性能保证。

对于 $\Delta < 1$，选择 $\nu = \frac{\sqrt{2(1+\Delta)-2\Delta}}{1-\Delta} \in [\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$ 满足 $a = 1 +\ (1+\Delta)\ b$，从而获得

$$a = \frac{1}{\nu(2-\nu)} = 1 + \frac{1+\Delta}{2+\sqrt{8(1+\Delta)}}.$$

类似地，对于 $\Delta \geq 1$，我们将（7）整理为引理4所要求的形式，其中 $a = \nu^{\ \frac{1}{(\nu-1)}}$ 以及 $b = \frac{\nu-1}{2\nu}$，因为 $\nu\ (\nu-1)\ +\ (\nu-1)^{\ 2} - 1 = \nu\ (2\nu - 3)$。

选择 $\nu = \frac{2+\Delta+\sqrt{7+2\Delta}}{3+\Delta} \in (1, \frac{3}{2}]$ 满足 $a = 1 + (1 + \Delta)b$，并且我们得到性能保证

$$a = \frac{1}{\nu(\nu-1)} = 1 + \frac{1+\Delta}{3+\sqrt{7+2\Delta}}.$$

注意，ν 的选择显然满足 $a \geq 1$ 和 $b \geq 0$，这分别由 $a = 1+(1+\Delta)b = 1+\frac{1+\Delta}{2+\sqrt{8(1+\Delta)}}$ 和 $a = 1 +$ ~~$(1 + \Delta)$~~ $b = 1 + \frac{1+\Delta}{3+\sqrt{7+2\Delta}}$ 得出。 □

5 进一步结果

约束族 (2b) 包含指数级数量的约束，这引出了一个问题：能否在多项式时间内求解松弛 (2)。请注意，目前为止所展示的任何结果都不需要这一点。尽管如此，我们通过证明 f 是超模函数，说明答案是肯定的。事实上，这使我们能够在强多项式时间内求解线性规划。此外，f 的超模性使我们能够得出更多结构性观察。我们的主要工具是对注水函数 g 的另一种刻画，它也明确揭示了新不等式的注水解释。

如果集合函数 $\varphi\colon\ 2^N \to \mathbb{R}$ 对所有$S,\ T \subseteq N$都满足 $\varphi(S)\ +\varphi(T)\ \leq \varphi(S \cup T)\ +\varphi(S \cap T)$，则称其为超模的。众所周知，这一刻画等价于以下 [21, 31],，本节余下部分将使用该定义：

$$\varphi(S \cup \{j\}) - \varphi(S) \leq \varphi(T \cup \{j\}) - \varphi(T) \quad \text{for all } S \subseteq T \subseteq N \setminus \{j\}.$$

如果 φ 是超模的，$\varphi(\emptyset) = 0$，且 $v \geq 0$，则超模线性规划可表示为

$$\text{minimize} \sum_{j \in N} v_j x_j \qquad \text{subject to} \sum_{j \in S} x_j \geq \varphi(S) \quad \text{for all } S \subseteq N.$$

相应的多面体也称为 φ的反多拟阵。如果 $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_n$，Edmonds[8] 证明了，$x_j^* = \varphi([j])\ -\varphi([j-1])$ $j \in N$ 是最优解，其中 $[a] = \{1, \ldots, a\}$ 对于 $a \in \mathbb{N}_{>0}$ 以及 $[0] = \emptyset$。如果 φ 可以在强多项式时间内求值，则该贪心算法可在强多项式时间内运行。

对于 $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，“水位” τ_x 是满足以下条件的唯一 $\tau \geq x^{\downarrow}_m$

$$\sum_{i=1}^{m} \max\{x_i^{\downarrow}, \tau\} = \sum_{j=1}^{n} x_j. \tag{10}$$

它存在且唯一，因为左侧在 τ 上连续，在 $\tau = x_m^{\downarrow}$ 处等于 $\sum_{j=1}^m x_j^{\downarrow} \le \sum_{j=1}^n x_j$，并且当 $\tau \ge x_m^{\downarrow}$ 时严格递增。由于 $\tau_x \ge x_m^{\downarrow}$，$x$ 中所有大于 τ_x 的项都属于 $x_1^{\downarrow}$，……，$x_{m-1}^{\downarrow}$。

引理 5。对于每个 $x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$，向量 $L_i^* = \max\{x_i^{\downarrow}, \tau_x\}$, $i = 1, \ldots, m$ 在 g的定义中达到最小值。因此

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \max\{x_i^{\downarrow}, \tau_x\}^2. \tag{11}$$

证明。根据（10），L^* 是可行的。对于每个可行的 L,

$$\sum_{i=1}^m L_i^2 - \sum_{i=1}^m (L_i^*)^2 \ge 2\sum_{i=1}^m L_i^*(L_i - L_i^*) \ge 2\tau_x \sum_{i=1}^m (L_i - L_i^*) = 0,$$

其中，第一个不等式由对所有 a，$b \in \mathbb{R}$均有 $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2b(a-b)$ 得出。第二个不等式成立是因为要么 $L_i^* = \tau_x$，要么 $L_i^* = x_i^{\downarrow} > \tau_x$，此时根据可行性有 $L_i \ge x_i^{\downarrow} = L_i^*$。最后一个等式成立是因为 $\sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m L_i^* = \sum_{j=1}^n x_j$。因此 L^* 是最优的。 □

注意，如果 $x_{k-1}^{\downarrow} > \tau_x \ge x_k^{\downarrow}$（其中 $x_0^{\downarrow} = \infty$），则（10）等于 $\sum_{i=1}^{k-1} x_i^{\downarrow} + (m-k+1)\tau_x = \sum_{j=1}^n x_j$，即 $\tau_x = \frac{1}{m-k+1}\sum_{j=k}^n x_j^{\downarrow}$。对于任何使该值处于 $[x_k^{\downarrow}, x_{k-1}^{\downarrow})$ 中的 $k \in \{1, \ldots, m\}$，都可得到（10）的一个至少为 $x_m^{\downarrow}$的解，因此可以通过尝试 $k = 1$，……，m 来计算 τ_x。因此，g，从而 f，都可以在强多项式时间内求值。

引理 6。函数 g 和水位 τ_x 对所有 $x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ 以及所有 $j \in N$ 均具有以下性质：

1. τ_x 关于 x_j 是连续且非递减的，并且
2. $\frac{\partial}{\partial x_j} g(x) = 2\max\{x_j, \tau_x\}$ *for* $x_j > 0$.

证明。对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$、$j \in N$、$t \ge 0$，令 $x(t)$ 表示满足 $x_j(t) = t$ 且对于 $l \ne j$ 满足 $x_l(t) = x_l$ 的向量。此外，对于所有 $r \in \{0, \ldots, m-1\}$，令

$$T_r(t) := \frac{1}{m-r}\sum_{i=r+1}^n x_i^{\downarrow}(t).$$

我们首先证明，对于任意 $t \ge 0$，$\tau_{x(t)} = \min_{0 \le r < m} T_r(t)$。事实上，令 $h(t) := |\{i : x_i(t) > \tau_{x(t)}\}| \le m-1$。根据 τ 的定义，

$$\tau_{x(t)} = \frac{1}{m-h(t)}\sum_{i=h(t)+1}^n x_i^{\downarrow}(t) = T_{h(t)}(t).$$

对于 $r < h(t)$，尾和的前 $h(t) - r$ 项均至少为 $\tau_{x(t)}$，因此 $T_r(t) \ge \tau_{x(t)}$。对于 $r > h(t)$，同样移除 $r - h(t)$ 个大小至多为 $\tau_{x(t)}$ 的项，可得 $T_r(t) \ge \tau_{x(t)}$。这就证明了该恒等式。

现在，$\sum_{i=r+1}^n x_i^{\downarrow}(t)$ 是 $x(t)$ 中最小的 $n-r$ 个坐标之和。将一个坐标增加 $\delta \ge 0$，会使这个和增加 0 到 δ 之间的某个量。因此，

$$0 \le T_r(t+\delta) - T_r(t) \le \frac{\delta}{m-r} \le \delta.$$

我们得到 $0 \le \tau_{x(t+\delta)} - \tau_{x(t)} \le \delta$，因为 $\tau_{x(t+\delta)} - \tau_{x(t)} = T_{h(t+\delta)}(t+\delta) - T_{h(t)}(t) \le T_{h(t)}(t+\delta) - T_{h(t)}(t) \le \delta$，类似地，$\tau_{x(t+\delta)} - \tau_{x(t)} \ge T_{h(t+\delta)}(t+\delta) - T_{h(t+\delta)}(t) \ge 0$。特别地，$\tau_{x(t)}$ 关于 t是非递减且连续的。

接下来需要证明导数公式。在 $H := \{i\colon x_i(t) > \tau_{x(t)}\}$ 为常数的任意开区间上，注水恒等式结合 $h = |H|$给出，

$$\tau_{x(t)} = \frac{1}{m-h}\sum_{i\notin H} x_i(t), \qquad g(x(t)) = \sum_{i\in H}\big(x_i(t)\big)^2 + (m-h)\Big(\frac{1}{m-h}\sum_{i\notin H} x_i(t)\Big)^2.$$

因此求导可得

$$\frac{d}{dt}g(x(t)) = \begin{cases} 2t, & j \in H, \\ 2\tau_{x(t)}, & j \notin H. \end{cases}$$

由于对所有 $\delta \geq 0$都有 $0 \leq \tau_{x(t+\delta)} - \tau_{x(t)} \leq \delta$，差值 $t - \tau_{x(t)}$ 是非递减的，而 $x_l(t) - \tau_{x(t)}$ 由于 $x_l(t) = x_l$ 为常数，对于 $l \neq j$ 是非递减的。因此，每个索引至多改变一次其在 H 中的归属，而 H 至多改变 n 次。

在 H为常数的每个区间上，上文计算的导数等于 $2\max\{t, \tau_{x(t)}\}$。由于 $g(x(t))$和该表达式关于 t 都是连续的（由$\tau_{x(t)}$的连续性可知），因此在有限个边界处，单侧导数相等。于是， $g(x(t))$在 $(0, \infty)$ 上连续可微，其导数为$\frac{d}{dt}g(x(t)) = 2\max\{t, \tau_{x(t)}\}$。 □

引理 7。 f 是超模的。

证明。 设 $S \subseteq T \subset N$和 $j \in N \setminus T$。由于函数$U \mapsto \sum_{k\in U} p_k^2$ 是模函数，只需证明

$$g(p_{S\cup\{j\}}) - g(p_S) \leq g(p_{T\cup\{j\}}) - g(p_T).$$

将 j 阶单位向量记作 e_j，我们可以改写为 $U \in \{S, T\}$，

$$g(p_{U\cup\{j\}}) - g(p_U) = g(p_U + p_{\{j\}}) - g(p_U) = \int_0^{p_j} \frac{d}{dt}g(p_U + te_j)dt,$$

这是因为，根据引理 6，$\frac{d}{dt}g(p_U + te_j) = 2\max\{t, \tau_{p_U+te_j}\}$ 在 t 上是连续的。我们还知道 $p_S \leq p_T$，因此对所有 $t \in [0, p_j]$，都有 $\frac{d}{dt}g(p_S + te_j) \leq \frac{d}{dt}g(p_T + te_j)$。 □

由于 f 是超模的，且 $f(\emptyset) = 0$，我们可以通过变量变换 $X_j = p_j C_j$ 将线性规划松弛 (2) 改写为超模线性规划。这一思路此前已见于文献 [10, 22]。根据 Edmonds 贪心算法对超模线性规划的最优性，按 Smith 比率非递增的顺序对作业排序后，即 $\frac{w_1}{p_1} \geq \frac{w_2}{p_2} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{p_n}$，即可通过贪心解在强多项式时间内计算出一个最优线性规划解

$$X_j^{\mathrm{LP}} = p_j C_j^{\mathrm{LP}} = f([j]) - f([j-1]) = \frac{1}{2}p_j^2 + \frac{1}{2}\left[g(p_{[j]}) - g(p_{[j-1]})\right]. \tag{12}$$

同样，可以证明约束 (8b) 的右端也具有超模性。然而，由于$\mathbb{E}[g(P_S)]$ 取决于所有处理时间变量的边缘分布，在这种情况下计算线性规划最优值可能较为困难，而且所需的分布信息比运行 WSEPT 更多。

推论 1。 F 是超模的。

证明。 和前面一样，只需证明对任意 $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{j\}$，都有

$$\mathbb{E}[g(P_{S\cup\{j\}})] - \mathbb{E}[g(P_S)] \leq \mathbb{E}[g(P_{T\cup\{j\}})] - \mathbb{E}[g(P_T)]$$

因为函数 $U \mapsto \mu^2(U) - \sigma^2(U)$ 是模函数。根据引理 7，该结论对所有 $p_1, \ldots, p_n \geq 0$ 均成立，因此对 $P_1, \ldots, P_n$ 的所有实现值也成立，即 $g(p_{S\cup\{j\}}) - g(p_S) \leq g(p_{T\cup\{j\}}) - g(p_T)$。取期望即可完成证明。 □

6 讨论

Kawaguchi 和 Kyan [19], Schwiegelshohn [26], 以及 Jäger与Skutella [16] 的分析利用了最坏情况实例的结构；正如 Jäger与Skutella 所指出的，这些分析并未使用最优值的下界。我们的证明则遵循基于线性规划的分析思路：将加权最短处理时间优先与线性松弛的最优值进行比较，并将这一比较归结为单机上的一个不等式。该松弛通过用注水函数 g 替换 $p(S)^2/m$，加强了不等式 (1)。

随机结果表明，该松弛所给出的不止是一个新证明。处理时间的方差仅通过项 $p^2(S)$进入分析，因为 $\mathbb{E}[P_j^2] \le (1+\Delta)\mathbb{E}[P_j]^2$；其余部分则逐个实现地延续（见引理4）。结合第二个负载不等式(7)，这为WSEPT给出了阶为 $\sqrt{\Delta}$ 的保证，该保证在常数因子意义下与已知下界相匹配。

仍有一些问题尚未解决。新线性规划松弛(2)的松弛间隙介于 $9/8$与$1\ 2(1+\sqrt{2})$之间。对于指数分布加工时间，WSEPT的性能保证介于 1.243 [15] 与 $4/3$之间。WSEPT是否具有与 Δ 无关的保证（针对固定数量的机器 [16]）仍是一个开放问题。最后，注水线性规划松弛是否会推动最小和调度及相关问题的研究取得进一步改进，也值得探讨。

致谢

本研究部分由德国研究基金会（DFG）资助，项目编号为277991500。

人工智能使用声明

本稿件的内容完全由其人类作者完成。未使用生成式人工智能来构思所提出的想法或数学论证，也未用其撰写任何书面陈述或阐述部分。作者使用了Grammarly（已禁用生成式人工智能功能）作为拼写和语法检查工具。Anthropic的Claude Opus 5.5和OpenAI的ChatGPT 5.6被用于本稿件的审阅过程。更具体地说，它们帮助识别了少量拼写错误以及参考文献中一些过时或不完整的归属说明。Claude Opus 5.5还被用于制作图1。

参考文献

[1] Antoniadis, A., Hoeksma, R., Schewior, K., Uetz, M.：通过策略分层处理伯努利型作业的随机调度。在：2025年IEEE第66届计算机科学基础研讨会（FOCS）。第2446–2469页。IEEE（2025年12月）。https://doi.org/10.1109/focs63196.2025.00128[2] Bruno, J., Coffman Jr., E.G., Sethi, R.：调度独立任务以减少平均完成时间。《ACM通讯》**17**（7），382–387（1974年7月）。https://doi.org/10.1145/361011.361064[3] Chan, L.M.A., Muriel, A., Simchi-Levi, D.：并行机器调度、线性规划与参数列表调度启发式算法。《运筹学》**46**（5），729–741（1998年10月）。https://doi.org/10.1287/opre.46.5.729[4] Cheung, W.C., Fischer, F., Matuschke, J., Megow, N.：在（W）SEPT策略下的一个$\Omega(\Delta^{1/2})$间隔示例（2014年8月），https://webspace.maths.qmul.ac.uk/felix.fischer/publications/cfmm_wsept. pdf，未发表[5] Conway, R.W., Maxwell, W.L., Miller, L.W.：《调度理论》。Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁（1967）[6] Eastman, W.L., Even, S., Isaacs, I.M.：在 m 台机器上对 n 个作业进行最优调度的界。《管理科学》**11**（2），268–279（1964年11月）。https://doi.org/10.1287/mnsc.11.2.268

[7] Eberle, F., Fischer, F., Matuschke, J., Megow, N.：关于随机最小和调度的指标策略。《运筹学快报》**47**（3），213–218（2019年5月）。https://doi.org/10.1016/j.orl.2019.03. 007[8] Edmonds, J.：次模函数、拟阵与某些多面体。在：《组合结构及其应用》（卡尔加里国际会议论文集，加拿大艾伯塔省卡尔加里，1969年）。第69–87页。Gordon and Breach，纽约（1970）[9] Feng, Y., Hu, W., Li, S.：用于纳什社会福利与调度的新型凸规划技术。在：第53届自动机、语言与编程国际学术研讨会（ICALP 2026）。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs），第374卷，第90:1–90:22页。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心（2026年）。https://doi.org/10.4230/LIPICS.ICALP.2026.90[10] Goemans, M.X.：一种用于带释放日期调度的超模松弛。在：《整数规划与组合优化》。《计算机科学讲义》，第1084卷，第288–300页。Springer Berlin Heidelberg（1996）。https://doi.org/10.1007/3-540-61310-2_22[11] Graham, R.L., Lawler, E.L., Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G.：确定性排序与调度中的优化和近似：综述。在：《离散优化 II》，《离散数学年鉴》，第5卷，第287–326页。Elsevier（1979）。https://doi.org/10.1016/s0167-5060(08) 70356-x[12] Gupta, A., Moseley, B., Zhou, R.：通过批量空闲时间最小化随机作业的完工时间。在：2023年ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集（SODA）。第1905–1930页。工业与应用数学学会（2023年1月）。https://doi.org/10. 1137/1.9781611977554.ch73[13] Hall, L.A., Schulz, A.S., Shmoys, D.B., Wein, J.：调度以最小化平均完工时间：离线与在线近似算法。《运筹学数学》**22**（3），513–544（1997年8月）。https://doi.org/10.1287/moor.22.3.513[14] Im, S., Moseley, B., Pruhs, K.：重尾作业的随机调度。在：第32届理论计算机科学国际研讨会（STACS 2015）。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs），第30卷，第474–486页。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心（2015年）。https://doi.org/10.4230/LIPICS.STACS.2015.474[15]Jagtenberg, C., Schwiegelshohn, U., Uetz, M.：随机机器调度中Smith规则的下界。在：《近似与在线算法》（WAOA 2010）。《计算机科学讲义》，第6534卷，第142–153页。Springer Berlin Heidelberg（2011）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-18318-8_13[16] Jäger, S., Skutella, M.：将Kawaguchi–Kyan界推广至随机并行机器调度。在：第35届理论计算机科学研讨会（STACS 2018）。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs），第96卷，第43:1–43:14页。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心（2018年）。https://doi.org/10.4230/LIPICS.STACS.2018.43[17] Kalaitzis, C., Svensson, O., Tarnawski, J.：具有统一Smith比率的无关机器作业调度。在：第二十八届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集。第2654–2669页。SODA '17，工业与应用数学学会（2017年）。https://doi.org/ 10.1137/1.9781611974782.175[18] Kashaev, D.：通过向量拟合进行自利、局部与在线调度。在：2026年ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集（SODA）。第3841–3871页。工业与应用数学学会（2026年1月）。https://doi.org/10.1137/1.9781611978971.141

[19] Kawaguchi, T., Kyan, S.：平均加权流时间问题的最大比率优先调度的最坏情况界。SIAM计算杂志 **15**(4)，1119–1129（1986年11月）。https://doi.org/10.1137/0215081[20] Möhring, R.H., Schulz, A.S., Uetz, M.：随机调度中的近似：基于线性规划的优先级策略的力量。ACM会刊 **46**(6)，924–942（1999年11月）。https://doi.org/10.1145/331524. 331530[21] Nemhauser, G.L., Wolsey, L.A., Fisher, M.L.：最大化次模集合函数的近似算法分析——I。数学规划 **14**(1)，265–294（1978年12月）。https://doi.org/10.1007/ bf01588971[22] Queyranne, M.：一种简单调度多面体的结构。数学规划 **58**(1-3)，263–285（1993年1月）。https://doi.org/10.1007/bf01581271[23] Queyranne, M., Schulz, A.S.：机器调度的多面体方法。技术报告408/1994，柏林工业大学数学系（1994），https://web.mit.edu/schulz/ www/epapers/queyranne-schulz.pdf[24] Rothkopf, M.H.：随机服务时间下的调度。管理科学 **12**(9)，707–713（1966年5月）。https://doi.org/10.1287/mnsc.12.9.707[25] Schulz, A.S.：以最小化总加权完工时间为目标的调度：基于线性规划的启发式算法的性能保证与下界。载于：整数规划与组合优化。《计算机科学讲义》，第1084卷，第301–315页。Springer Berlin Heidelberg（1996）。https://doi. org/10.1007/3-540-61310-2_23[26] Schwiegelshohn, U.：最大比率优先规则的 Kawaguchi–Kyan界的另一种证明。《运筹学快报》 **39**(4)，255–259（2011年7月）。https://doi.org/10.1016/j.orl.2011.06. 007[27] Skutella, M., Sviridenko, M., Uetz, M.：具有随机处理时间的无关机器调度。《运筹学数学》 **41**(3)，851–864（2016年8月）。https://doi.org/10.1287/moor. 2015.0757[28] Skutella, M., Woeginger, G.J.：相同并行机器上最小化总加权完工时间的多项式时间近似方案。《运筹学数学》 **25**(1)，63–75（2000年2月）。https://doi.org/ 10.1287/moor.25.1.63.15212[29] Smith, W.E.：单阶段生产中的各种优化器。海军研究后勤季刊 **3**(1-2)，59–66（1956年3月）。https://doi.org/10.1002/nav.3800030106[30]Sviridenko, M., Wiese, A.：近似无关机器上最小化完工时间加权和的配置线性规划。载于：整数规划与组合优化。《计算机科学讲义》，第7801卷，第387–398页。Springer Berlin Heidelberg（2013）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-36694-9_33[31] Topkis, D.M.：在格上最小化次模函数。《运筹学》 **26**(2)，305–321（1978年4月）。https://doi.org/10.1287/opre.26.2.305

（1）的加权最短处理时间优先间隙下界

在引言中，我们声称，即使加入额外约束 $C_j \geq p_j$，线性规划松弛 (1) 也过于宽松，无法达到 Kawaguchi 和 Kyan 针对 WSPT 给出的界。这个结论是众所周知的，不过据我们所知，此前从未发表过。为完整起见，我们给出一个例子来证明这一点。

考虑一个包含 $m=2$ 台机器和 $n=3$ 个作业的实例，其处理时间为 (1，1，4)，权重为 (1，1，4)。由于这些作业已按 WSPT 顺序编号，WSPT 得到的完工时间为 C^{WSPT} =(1，1，5)，总加权完工时间为 $\sum w_j C_j^{\mathrm{WSPT}}=22$。容易验证，完工时间向量 C =(1，1，4) 满足 (1) 的约束以及额外约束，并且 $\sum w_j C_j=18$。因此，

$$\frac{\sum w_j C_j^{\mathrm{WSPT}}}{\sum w_j C_j^{\mathrm{LP}}} \geq \frac{22}{18} > \frac{1}{2}\Big(1+\sqrt{2}\Big).$$

请注意，作业的任何顺序都可以是有效的 WSPT顺序，而我们选择了其中最差的顺序。不过，这并不会削弱我们的论证，因为分别将前两个作业的权重增加 2ϵ 和 ϵ 后，WSPT顺序的选择将变得唯一，并且可达到大于 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ 的界。