arXiv:2611.30749v1 [math.NT] 23 Nov 2026

关于韦伊 II 的一个初等证明

张定新

1. 引言

在 [3], Deligne 建立了一套基础性的权重理论，此后该理论在数论和算术几何中得到了广泛应用。最近，L. Alp¨oge 在他与 Claude 合作研究黎曼猜想的评论脚注 3 中，提出了德利涅定理的一种证明。这一有限域论证的扩展说明见于 F. Alderliefste 上传至 $Hexagon$ 的内容。鉴于该说明由 AI 生成，且润色不够完善，我们撰写此文，希望使这一论证更清晰。我们不声称本文具有原创性。

为避免任何误解，我们应当澄清，此处的“初等”仅指论证的分析核心。仍然需要 ℓ-进上同调的形式体系，包括迹公式、Artin消失定理和德利涅的反常弱 Lefschetz 定理。

主要结果如下定理所述。

定理 1.1。 设 $\ell \nmid q$。令 E 为 $\mathbf{Q}_\ell$-层在 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ 上的光滑层，其关于嵌入 ι: $\mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$ 的逐点权为 $\leqslant w$。则 $\mathrm{H}^1_c(\mathbf{A}^1{}_{\overline{\mathbf{F}}_q}; E)$ 上的每个 *Frobenius* 特征值 α 都满足

$$|\iota(\alpha)| \leqslant q^{\frac{w+1}{2}}.$$

这里，称 $\mathcal{E}$ 具有逐点权 $\leqslant w$，是指对于任意 $x \in \mathbf{F}_{q^m}$ 以及几何弗罗贝尼乌斯 F_x 在 x 处的任意特征值 γ，都有

$$|\iota(\gamma)| \leqslant q^{\frac{mw}{2}}.$$

注 1.2。 定理 1.1 立即推出了相应的结论：将 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ 替换为任意非空开子概形 $U = \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}\{h = 0\}$，其中 $h \in \mathbf{F}_q[t]$ 为非常值。事实上，“阿布扬-卡映射”（参见 [5, 讲义 1，“第一次约化.....”] 和 [1, 定理 1]） π: $U \to \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ 由 $t \mapsto t + h(t)^{-q}$ 给出，是有限 ´etale 的，我们可以将定理 1.1 应用于 $\pi_*\mathcal{E}$。

或者，本札记中的证明稍作修改后即可直接适用于任意非空开集 $U \subseteq \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$（将 $\mathbf{A}^n$ 替换为 U^n，并将迹函数在 U 之外延拓为 0）。为简洁起见，我们仅讨论 $\mathbf{A}^1$。

注 1.3。 根据前一条注记和劳蒙 [7, (4.3.2.1)], ，定理 1.1 蕴含了维数为 1 [3,Th´eor`eme 2]的交复形的纯性。由此，再结合一个或多或少标准的 d´evissage 论证，Deligne 推导出了他的关于非常直接像的权的一般定理，见 [3, Th´eor`eme 3.3.1]。

事实上，《六边形札记》直接证明了德利涅一般定理，而没有先将问题归约到曲线的情形。不过，我们选择只处理 $\mathbf{A}^1$ 情形：它已经包含了论证的核心，更清楚地展示了关键技术思想，并使记号更加简洁。读者应当很容易将证明推广到一般情形。或者，对于从 $\mathbf{A}^1$ 情形进行的分层归约，我们请读者参阅 Deligne 的文章 [3], 、教科书 [6], ，或丹尼洛夫的综述 [2, 第 116] 页。

注 1.4. 定理 1.1 迄今已有三种不同的证明：Deligne 基于其对阿达马和 de la Vall´ée Poussin 方法的阐释所提出的原始方法，劳蒙通过傅里叶变换给出的方法 [7], ，以及卡茨利用拉森替代对劳蒙证明所作的变体 [5]。这些方法本质上都依赖所谓的张量幂技巧。本文采用的方法也不例外：我们将从以下一个先验上较弱的结果推出该定理。

命题 1.5. 对于每个 $n \geqslant 2$，群 $\mathrm{H}^n_c(\mathbf{A}^n; E^{\boxtimes n})$ 具有权 $\leqslant n(w+1) + 3$。

在下文中，上同调均取在 $\mathbf{F}_q$ 上，并且称一个上同调群具有权 $\leqslant w$，是指几何弗罗贝尼乌斯 F 在其上的每个特征值 β 都满足 $|\iota(\beta)| \leqslant q^{\frac{w}{2}}$。

日期：2026年11月22日。

命题 *1* 的证明。$5 \Rightarrow$ 定理 *1.1*。 由 K¨unneth 公式，存在一个与 Frobenius 等变的单射

$$\mathrm{H}_c^1(\mathbf{A}^1;\mathcal{E})^{\otimes n} \to \mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n;\mathcal{E}^{\boxtimes n}).$$

若 α 是 $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{A}^1;\mathcal{E})$ 的 Frobenius特征值，则 α^n 是 $\mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n;\mathcal{E}^{\boxtimes n})$ 的 Frobenius特征值。因此，该命题给出

$$|\iota(\alpha)|^n \leqslant q^{\frac{n(w+1)+3}{2}}, \quad \text{so} \quad |\iota(\alpha)| \leqslant q^{\frac{w+1}{2}+\frac{3}{2n}}.$$

令 n 趋于无穷大，即可证明该定理。 □

在本文余下部分，我们将证明该命题。注意，若我们将$\mathbf{F}_q$ 扩张为次数为 d 的有限扩张，则底域的大小和 Frobenius特征值的绝对值都会提升至 d 次幂，因此取 d 次方根即可恢复$\mathbf{F}_q$上的界。下文中，我们将自由地将$\mathbf{F}_q$扩张为有限扩张。

2. 命题 1.5 的证明

我们将通过 Deligne 的变态弱 *Lefschetz* 定理 以及具有幂次节省的指数和估计（引理 2.6）来证明该命题。

我们先作一些一般性说明。设$\mathcal{G}$ 是光滑的 $\mathbf{Q}_\ell$-层，在$\mathbf{A}^n$上。那么，对于任意光滑超曲面的闭嵌入

$$i\colon Y \to \mathbf{A}^n$$

其补集为 $j\colon \mathbf{A}^n - Y \to \mathbf{A}^n$， [SGA 4，讲义´e XVI，3.7、3.8 和 3.10(a)]中的相对纯性定理 指出，存在一个自然同构

$$i^!\mathcal{G} \simeq i^*\mathcal{G}[-2](-1).$$

因此，将 $R\Gamma_c(\mathbf{A}^n, -)$作用于同伦纤维列

$$i_*i^!\mathcal{G} \to \mathcal{G} \to Rj_*j^*\mathcal{G}$$

并取上同调，可得一个长正合序列

$$(\dagger) \qquad 0 \to \mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n;\mathcal{G}) \to \mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n;Rj_*j^*\mathcal{G}) \to \mathrm{H}_c^{n-1}(Y;i^*\mathcal{G}(-1)) \xrightarrow{\text{Gysin}} \mathrm{H}_c^{n+1}(\mathbf{A}^n;\mathcal{G}) \to \cdots.$$

这里，由于 Artin消失定理和 Poincar´e 对偶性（[SGA4，讲义´e XIV，3.1] 或 [BBDG，定理´eor` ème 4.1.1]），该正合序列从 H_c^n 开始。

在命题 1.5 的情形下，考察 $\mathcal{G} = \mathcal{E}^{\boxtimes n}$时的正合序列 (†)，可见只要证明 $\mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*\mathcal{E}^{\boxtimes n})$ 的权为 $\leqslant n(w+1)+3$，对于一个 光滑超曲面 Y，命题便立即成立。由上述讨论可得以下判据。

L引理 2.1. 若存在光滑超曲面 $i\colon Y \to \mathbf{A}^n$ 和常数 $C>0$，使得 t

$$\left|\iota \operatorname{Tr}\left(F^m, \mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*\mathcal{E}^{\boxtimes n})\right)\right| \leqslant C(q^m)^{\frac{n(w+1)+3}{2}}$$

对所有 $m \geqslant 1$ 都成立，则命题 *1.5* 成立。

证明。 从迹过渡到特征值是标准做法。为方便读者，我们重述这一论证。设 β_j 是 $\mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*\mathcal{E}^{\boxtimes n})$ 上的 Frobenius 特征值，按重数计。根据假设，

$$\left|\sum_j \iota(\beta_j)^m\right| \leqslant Cq^{\frac{m(n(w+1)+3)}{2}}$$

对所有 $m \geqslant 1$ 都成立。因此，幂级数

$$\sum_{m\geqslant 1}\left(\sum_j \iota(\beta_j)^m\right)T^{m-1} = \sum_j \frac{\iota(\beta_j)}{1-\iota(\beta_j)T}$$

在 $|T| < q^{-\frac{n(w+1)+3}{2}}$ 时~~收敛。~~由于每个 $\iota(\beta_j)^{-1}$（当 $\beta_j \neq 0$ 时）都是右侧的一个极点，我们得到$|\iota(\beta_j)| \leqslant q^{\frac{n(w+1)+3}{2}}$ ~~对所有~~ j 都成立。由 (†) 中的单射，同一界也适用于 $\mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n; \mathcal{E}^{\boxtimes n})$，从而证明了该命题。□

事实证明，上同调空间 $\mathrm{H}_c^*(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*\mathcal{E}^{\boxtimes n})$ 与指数和密切相关。为解释这一点，固定一个整数 $m \geqslant 1$，并引入一些记号。

- 对于 $x \in \mathbf{F}_{q^m}$，令 $t(x) = \iota\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{E}_x)$，其中 F_x 是 $\mathbf{F}_{q^m}$-点 x 处的几何弗罗贝尼乌斯。
- 取一个非平凡的加性特征 $\psi\colon \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}^\times$。令 $\psi_m = \psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{F}_{q^m}/\mathbf{F}_q}$。

采用上述记号，我们有以下引理。

引理 2.2。设 Y 是 $\mathbf{A}^n$ 中的一个光滑超曲面，由 $P = 0$ 定义。对于 $\mathbf{F}_q$ 上的几何弗罗贝尼乌斯 F，我们有

$$\sum_e (-1)^e \iota \,\mathrm{Tr}\big(F^m, \mathrm{H}_c^e(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*(\mathcal{E}^{\boxtimes n}))\big) = -\sum_{h \in \mathbf{F}_{q^m}^\times} \sum_{x \in \mathbf{F}_{q^m}^n} t(x_1)\cdots t(x_n)\psi_m(hP(x)).$$

证明。根据 $\mathbf{A}^n$ 的格罗滕迪克迹公式以及 SGA 4 $_{1\,2}$、Rapport、Th´eor`eme 3.2], 和正合列 (†)，我们有

$$\sum_e (-1)^e \iota \,\mathrm{Tr}\big(F^m, \mathrm{H}_c^e(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*(\mathcal{E}^{\boxtimes n}))\big) = \sum_{x \in \mathbf{F}_{q^m}^n} t(x_1)\cdots t(x_n) - q^m \sum_{x \in Y(\mathbf{F}_{q^m})} t(x_1)\cdots t(x_n). \tag{2.2.1}$$

因子 q^m 来自泰特扭曲 (-1)。根据特征的正交性，

$$\sum_{h \in \mathbf{F}_{q^m}} \psi_m(hP(x)) = \begin{cases} q^m, & P(x) = 0, \\ 0, & P(x) \neq 0. \end{cases}$$

因此

$$q^m \sum_{x \in Y(\mathbf{F}_{q^m})} t(x_1)\cdots t(x_n) = \sum_{h \in \mathbf{F}_{q^m}} \sum_{x \in \mathbf{F}_{q^m}^n} t(x_1)\cdots t(x_n)\psi_m(hP(x)).$$

右侧的项 $h = 0$ 等于上述迹公式中对 $\mathbf{A}^n$ 求和。将其代入 (2.2.1) 即完成证明。□

正如我们马上将从引理 2.6 看到的，当适当选取 P 时，引理 2.2 中恒等式的右侧可得到一个初等的幂节省估计。问题在于左侧。为了应用引理 2.1，我们需要控制 $\mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*\mathcal{E}^{\boxtimes n})$ 上的弗罗贝尼乌斯迹；然而，左侧是一个交错和，潜在的抵消可能会阻碍我们从中分离出次数为 n 的项。为此，我们希望使所有满足 $e \neq n$ 的项都消失。这正是德利涅的反常弱 Lefschetz 定理发挥作用之处。

定义 2.3。设 $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ 是一个超曲面。若对所有 $e \neq n$，$\mathrm{H}_c^e(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*\mathcal{G}) = 0$，则称 弱 *Lefschetz* 定理对偶 $(Y, \mathcal{G})$ 成立。

当 Y 光滑时，对于 $(Y, \mathcal{G})$，弱 Lefschetz 定理成立，当且仅当吉森映射

$$\mathrm{H}_c^{n-1+e}(Y; i^*\mathcal{G}(-1)) \to \mathrm{H}_c^{n+1+e}(\mathbf{A}^n; \mathcal{G})$$

对 $e = 0$ 是满射的，对 $e > 0$ 是双射的。

Deligne 在 [4, 推论 A.5] 中证明了变态弱 Lefschetz 定理。下面给出我们所需的特殊情形。

定理 2.4。设 G 是 $\mathbf{Q}_\ell$-层在 $\mathbf{A}^n{}_{\overline{\mathbf{F}_q}}$ 上的光滑层，并假设 $u\colon \mathbf{A}^n{}_{\mathbf{F}_q} \to \mathbf{A}^N{}_{\mathbf{F}_q}$ 是拟有限的。那么，对偶仿射空间 $\check{}\mathbf{A}^N$ 中存在一个非空稠密 *Zariski* 开子集 $\mathscr{U}$，使得对于任意超平面 $A \in \mathscr{U}$（$\mathbf{F}_q$），$(u^{-1}A, G)$ 满足弱 *Lefschetz* 定理。

构造 2.5。考虑闭嵌入

$$\mathbf{A}^n \longrightarrow \mathbf{A}^{n+1}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n),$$

并令 $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ 为超平面 $a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + a_{n+1}z_{n+1} + c = 0$ 在 $\mathbf{A}^{n+1}$ 中的原像。对于一般超平面，我们有 $a_{n+1} \neq 0$，因此不妨将 $a_{n+1} = 1$ 规范化；于是 $Y = \{P = 0\}$，其中

$$P(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + c.$$

根据弱 Lefschetz 定理（定理 2.4），在将 $\mathbf{F}_q$ 扩张为有限扩张后，我们可以选取 $a_1, \ldots, a_n, c \in \mathbf{F}_q$，使得 Y 是光滑的，并且弱 Lefschetz 定理对（$Y, \mathcal{E}^{\boxtimes n}$）成立。

这一构造的关键特征是二次项

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

在 P 中。正是这一特定的二次项，带来了所需的幂节省估计，并实现了渐近意义下的完全平方根抵消，具体如下面这个初等引理所述。

引理 2.6（《六边形札记》，引理 3）。设 $n \geqslant 2$，且设 $\psi\colon\ \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}^\times$ 是一个非平凡加性特征。对于任意函数 t_1、……、$t_n\colon\ \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}$，令

$$S(t_1, \dots, t_n) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q^n} t_1(x_1) \cdots t_n(x_n) \cdot \psi\big(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n\big).$$

Then

$$|S(t_1, \dots, t_n)| \leqslant q^{\frac{n+1}{2}} \prod_{i=1}^{n} \|t_i\|_\infty,$$

其中 $\|t\|_\infty$ =最大值$_{x \in \mathbf{F}_q}|t(x)|$。

注记 2.7。当 $n = 2$ 时，引理 2.6 化为维诺格拉多夫双线性界的以下有限域版本

$$|S(t_1, t_2)| \leqslant q^{\frac{3}{2}} \cdot \|t_1\|_\infty \cdot \|t_2\|_\infty,$$

对于任意有界函数 t_1，t_2，它比平凡界 $q^2 \cdot \|t_1\|_\infty \cdot \|t_2\|_\infty$ 节省了 $q^{\frac{1}{2}}$。参见 [8, VI，问题 14(a)]。

对于一般的 n，我们有如下的平凡界

$$|S(t_1, \dots, t_n)| \leqslant q^n \prod_{i=1}^{n} \|t_i\|_\infty$$

对于 $S(t_1$、……、$t_n)$。因此，当 n 足够大时，引理 2.6 达到了渐近的平方根抵消。特定的二次型 $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ 正是使这一点成立的关键。若 $n = 2k$，而我们改为使用 k 个不相交的对 $x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{2k-1}x_{2k}$ 作为二次项，那么我们只能节省$q^{\frac{k}{2}} = q^{\frac{n}{4}}$，这对于张量幂技巧是不够的（因为我们需要节省 $q^{\frac{n}{2}-o(n)}$）。

假设引理 *2.6*，证明命题 *1.5*。根据构造，$Y = \{P = 0\}$ 是光滑的，并满足弱 Lefschetz 定理。因此，由引理 2.2，我们有

$$\iota \operatorname{Tr}\big(F^m, \mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*(\mathcal{E}^{\boxtimes n}))\big) = (-1)^{n+1} \sum_{h \in \mathbf{F}_{q^m}^\times} \sum_{x \in \mathbf{F}_{q^m}^n} t(x_1) \cdots t(x_n) \psi_m(hP(x)).$$

记 $r = \operatorname{rk} \mathcal{E}$。对于固定的 $h \in \mathbf{F}_{q^m}^\times$，令 $t_i(x) = t(x)\psi_m(ha_ix)$。于是 $\|t_i\|_\infty \leqslant rq^{\frac{mw}{2}}$，而所显示等式右端的内层和为

$$\psi_m(hc) \sum_{x \in \mathbf{F}_{q^m}^n} t_1(x_1) \cdots t_n(x_n) \psi_m\big(h(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n)\big).$$

应用引理 2.6 于 $\mathbf{F}_{q^m}$，取非平凡加性特征 $u \mapsto \psi_m(hu)$，并利用 $|\psi_m(hc)| = 1$，可知内层和的绝对值至多为 $(q^m)^{\frac{n+1}{2}}(rq^{\frac{mw}{2}})^n = r^n q^{m(nw+n+1)/2}$。对$h \in \mathbf{F}_{q^m}^\times$ 求和得到

$$\big|\iota \operatorname{Tr}\big(F^m, \mathrm{H}_c^n(\mathbf{A}^n; Rj_*j^*(\mathcal{E}^{\boxtimes n}))\big)\big| \leqslant r^n q^{\frac{m(n(w+1)+3)}{2}}$$

对所有 $m \geqslant 1$ 均成立。因此，该命题由引理 2.1 得证。 □

引理 *2.6* 的证明。我们考虑复值函数空间 $\mathbf{F}_q$ 上的两个算子，该空间配备计数内积 $\langle f, g\rangle = \sum_{x \in \mathbf{F}_q} f(x)\overline{g(x)}$ 及其相应的 L^2-范数 $\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$。第一个算子是（未归一化的）傅里叶变换

$$\mathrm{FT}_\psi\colon f \mapsto \mathrm{FT}_\psi(f), \qquad \mathrm{FT}_\psi(f)(y) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q} f(x)\psi(xy).$$

根据 Plancherel 恒等式，

$$\|\mathrm{FT}_\psi(f)\|_2 = q^{\frac{1}{2}}\|f\|_2.$$

第二个算子是乘以函数 $g\colon\ \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}$：

$$T_g\colon f \mapsto gf,$$

该函数满足

$$\|T_g(f)\|_2 = \|gf\|_2 \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_2.$$

利用这两个算子，我们可以将指数和 $S(t_1, \ldots\ldots, t_n)$ 表示为迭代内积：

$$\begin{aligned} S(t_1, t_2) &= \langle \mathrm{FT}_\psi(t_1), \bar{t}_2 \rangle, \\ S(t_1, t_2, t_3) &= \langle (\mathrm{FT}_\psi \circ T_{t_2} \circ \mathrm{FT}_\psi)(t_1), \bar{t}_3 \rangle, \\ S(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \langle (\mathrm{FT}_\psi \circ T_{t_3} \circ \mathrm{FT}_\psi \circ T_{t_2} \circ \mathrm{FT}_\psi)(t_1), \bar{t}_4 \rangle, \end{aligned}$$

依此类推。一般而言，递归定义 $f_1, \ldots\ldots, f_{n-1}$ 为

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathrm{FT}_\psi(t_1), \\ f_{i+1} &= (\mathrm{FT}_\psi \circ T_{t_{i+1}})(f_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-2), \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{cases} S(t_1, \ldots, t_n) = \langle f_{n-1}, \bar{t}_n \rangle, \\ \|f_i\|_2 \leqslant q^{\frac{i}{2}} \|t_1\|_2 \prod_{j=2}^{i} \|t_j\|_\infty \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \end{cases}$$

其中，第二个界由 Plancherel 恒等式以及 $T_{t_{i+1}}$ 的算子范数界递归推出。因此，应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} |S(t_1, \ldots, t_n)| &\leqslant \|f_{n-1}\|_2 \cdot \|t_n\|_2 \\ &\leqslant q^{\frac{n-1}{2}} \cdot \|t_1\|_2 \cdot \|t_n\|_2 \cdot \prod_{i=2}^{n-1} \|t_i\|_\infty \\ &\leqslant q^{\frac{n+1}{2}} \prod_{i=1}^{n} \|t_i\|_\infty, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式用到了 $\|t_i\|_2 \leqslant q^{\frac{1}{2}} \|t_i\|_\infty$。证毕。 □

参考文献

[BBDG] Alexander A. Beilinson 等：《Faisceaux pervers》。载于《奇异空间上的分析与拓扑》第一卷（Luminy，1981）。第 100 卷，Ast´erisque。法国数学学会，巴黎，1982 年，第 5–171 页（引自第 2 页）。[SGA 4] 《拓扑斯理论与概形的 ´étale 上同调》。第 269、270、305 卷。《数学讲义》。Bois-Marie 代数几何研讨班 1963–1964（SGA 4），由 M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 主编，N. Bourbaki、P. Deligne 和 B. Saint-Donat 协作。Springer-Verlag，柏林—纽约，1972–73 年，第 xix+525、iv+418、vi+640 页（引自第 2 页）。[SGA $4\frac{1}{2}$] Pierre Deligne：《étale 上同调》。第 569 卷。《数学讲义》。Bois-Marie 代数几何研讨班 SGA $4\frac{1}{2}$。Springer-Verlag，柏林，1977 年，第 iv+312 页（引自第 3 页）。[1] Shreeram Abhyankar：《代数曲线的覆盖》。载于《美国数学杂志》79（1957 年），第 825–856 页（引自第 1 页）。[2] V. I. Danilov：《代数簇的上同调》。载于《代数几何》第二卷。第 35 卷。《数学科学百科全书》。Springer，柏林，1996 年，第 1–125、255–262 页（引自第 1 页）。[3] Pierre Deligne：《魏尔猜想 II》。载于《法国高等科学研究所数学出版物》52（1980 年），第 137–252 页（引自第 1 页）。[4] Nicholas M. Katz：《仿射上同调变换、周 perversity 与单值化》。载于《美国数学会杂志》6.1（1993 年），第 149–222 页（引自第 3 页）。[5] Nicholas M. Katz：《L-函数与单值化：关于韦伊 II 的四讲》。载于《数学进展》160.1（2001 年），第 81–132 页（引自第 1 页）。[6] Reinhardt Kiehl 和 Rainer Weissauer：《韦伊猜想、perverse层与 l-进傅里叶变换》。第 42 卷。《数学及其交界领域成果丛书》第三辑。《现代数学综述丛书》。Springer-Verlag，柏林，2001 年，第 xii+375 页（引自第 1 页）。[7] G´erard Laumon：《傅里叶变换、函数方程的常数与魏尔猜想》。载于《法国高等科学研究所数学出版物》65（1987 年），第 131–210 页（引自第 1 页）。[8] I. M. Vinogradov：《数论基础》。S. Kravetz 译。Dover Publications, Inc.，纽约，1954 年，第 viii+227页（引自第 4 页）。