核子上两个介子电磁产生的一般形式体系

Reddy Malik Priandika, [1], * Samson Clymton , [2], † Terry Mart [1], ‡ [1] Departemen Fisika, FMIPA, Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia
[2] Asia Pacific Center for Theoretical Physics (APCTP), Pohang, Gyeongbuk 37673, Republic of Korea
（日期：2026年11月24日）

我们建立了一个关于核子上两个介子电磁产生的一般形式体系，$\gamma_v N \to \Phi_1\Phi_2 B$，可用于宽能区内的单通道以及耦合通道分析。按照 Berends *et al.* 针对单介子电产生所引入的分解思路，将强子流展开为由 16 个规范不变且洛伦兹不变的矩阵组成的一组基，其中四个矩阵在实光子情况下为零。相应的洛伦兹不变量（狄拉克）振幅可以从任意反应模型中获得，并映射为 16 个类 CGLN 泡利振幅，由此可直接得到五重微分截面及其横向、纵向和干涉响应函数。尽管这些矩阵并非全部线性无关，但它们直接源自强子流的协变分解，因此可以从费曼图中直接读出振幅，并且可观测量具有更简单、更对称的形式。作为首次应用，我们利用树级核子玻恩项计算了阈值附近的 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ 和 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ 反应。该例明确展示了如何从费曼图中读出狄拉克振幅，以及各个图均会破坏、但在总振幅中得以恢复，并在引入强子形状因子后仍保持的规范不变性。与 MAMI数据相比，玻恩项高估了 $\pi^0\pi^0 p$ 总截面；采用软形状因子后，该截面可一直重现至 $E_\gamma \approx 370$ 兆电子伏，而在 $E_\gamma = 400$ 兆电子伏处，它们仅能解释 $\pi^+\pi^0 n$ 截面的约 40%。此外，计算得到的 $\pi^0\pi^0$ 不变质量谱无论采用何种形状因子，其峰值都过于接近阈值。这些不足表明，有必要考虑 $\Delta(1232)$、 ρ-介子以及等标量 $\pi\pi$ 末态机制；未来可将所有这些机制纳入当前框架。因此，该形式体系为今后对双介子光产生和电产生开展理论及唯象研究提供了一个灵活的基础。

关键词：电磁产生、核子、双介子、单介子

arXiv:2611.30755v1 [hep-ph] 23 Nov 2026

I. 引言

在核子上电磁产生两个介子，是研究重子谱和介子产生动力学的主要工具之一。与单介子产生相比，末态由三个粒子组成；在总质心能量W 和光子虚度 Q^2固定时，其运动学完全由五个独立变量决定。因此，除了总截面和微分截面外，还可以测量介子-重子和介子-介子子系统的不变质量分布、末态粒子之间的角关联以及达利茨图密度。这些可观测量使得重构中间共振态、识别级联衰变链以及区分相互竞争的反应机制成为可能，因此，与两体末态的可观测量 [1–4]相比，它们对理论模型的约束要强得多。其代价是极化可观测量的数量大幅增加：对于两个赝标介子的光产生，一个完整实验不仅需要单极化和双极化可观测量，还需要三重极化可观测量 [1, 4]。

额外的运动学自由度还提高了对共振贡献与非共振贡献之间相互作用的敏感性，从而有助于阐明在单介子产生中难以分离的背景机制所发挥的作用 [3, 5]。重子共振表现为介子-重子不变质量中的结构，而介子共振和介子-介子末态相互作用则出现在介子-介子子系统中。非共振机制，例如玻恩项、介子交换和接触型（Kroll-Ruderman 型）过程，以及末态再散射，会以各具特征的方式填充多维相空间 [3, 6]。因此，同时分析不变质量谱、角分布和极化可观测量，会对任何反应的理论描述施加严格约束 [1, 7, 8]。

这些特征使双介子产生成为重子谱学不可或缺的工具。许多较高质量的核子和 Δ 共振预计主要通过 $\pi\Delta$、 ρN和 σN等准二体道，或通过较低质量共振的级联衰变 $N^* \to \pi N^{*\prime} \to \pi\pi N$ [9, 10]，衰变为三体末态。由于

*电子邮件: reddympriandika@gmail.com
†电子邮件: samson.clymton@apctp.org
‡电子邮件: terry.mart@sci.ui.ac.id

这些反应道最终形成双介子末态，双介子光产生和电产生能够直接揭示此类态的主导衰变模式及其电磁跃迁振幅。特别是， $\pi^+\pi^- p$来自 CLAS 的光产生和电产生数据已成为获取核子共振光耦合常数以及其 Q^2 电耦合常数演化 [11–14] 的重要信息来源。因而，双介子产生已成为现代动力学耦合道分析和多道分波分析的重要组成部分，使得更可靠地提取共振参数并搜寻缺失的核子共振成为可能 [3, 15]。

从理论角度来看，双介子产生比单介子产生复杂得多。除了三体末态的多维运动学之外，振幅还会受到一组更加丰富、拓扑上彼此不同的机制的贡献，包括与两个出射介子相关的两个相互独立的 t道交换，以及光子与不同重子线耦合的 s道和 u道过程。即使在树级，单个图也不具备规范不变性，而强子形状因子的引入在唯象描述中不可避免，因此必须特别谨慎地维持流守恒 [16–18]。Haberzettl、Nakayama 和 Oh 已经建立了一个场论框架，使规范不变性能够按缀饰圈图的阶数逐阶保持 [19]。此外，与单介子产生相比，振幅的非共振部分重要得多，也更加依赖模型；例如， $\pi^0\pi^0$ 道的阈值附近的预测很大程度上取决于采用的是赝标量耦合还是赝矢量 πNN 耦合 [6, 20]。因此，一个通用框架应平等地处理所有这些机制，保持规范不变性，并且适用于光产生和电产生 [1, 19]。

关于核子上双介子电磁产生的实验和理论研究可追溯至20世纪60年代。20世纪60年代和20世纪70年代初，人们报道了双π介子光产生的先驱性测量 [21–24]，Pittner和Urban [25], 采用有效拉格朗日量模型，给出了 $\gamma p \to \pi^+\pi^- p$ 反应最早的理论描述之一。此后，实验 [11–14, 26–42] 和理论 [6, 43–51]研究均取得了长足进展。阈值区尤其具有启发性。手征微扰理论（ChPT）预言， $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ 截面在阈值附近会因π介子圈图而显著增强，因为该反应道的树级贡献受到抑制 [48, 52], ；MAMI的精确测量证实了这一预言 [29, 33]。在有效拉格朗日量模型中，低能下的 $\pi^+\pi^- p$ 反应道由 ΔKroll–Ruderman机制和π介子极点机制主导，这些模型能够较好地描述带电π介子道的总截面，但它们对阈值附近 $\pi^0\pi^0 p$ 的预言存在显著差异：一些模型低估了数据，除非加入 $\pi\pi$ 再散射或π介子圈图 [6, 53], ；另一些模型则能够重现实验结果，具体取决于所采用的 πNN耦合 [20, 49]。最近，一项显式包含 Δ(1232)、 N(1440)和 ρ(770)自由度的协变ChPT计算描述了 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ 数据，而要满意地描述 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ ，则需要加入等标量 S-波 $\pi\pi$ 末态相互作用 [51]。

尽管取得了这些进展，据我们所知，与 Berends 等人 [54] 为单介子产生所提出的形式相当的双介子产生振幅的一般分解尚未建立。在他们具有开创性的工作中，单介子振幅被分解为一组完备的洛伦兹不变且规范不变的结构，并且截面和极化可观测量以相应不变振幅，或等价地以 CGLN 振幅 [54, 55]的紧凑而系统的形式表示。此框架随后成为研究 π介子、η介子和 K介子的光产生和电产生的理论与实验研究中的标准工具 [56–59]。对于双介子产生，可观测量的一般结构已经在螺旋度基 [1, 4], 中建立，且流的规范不变场论结构也已得到澄清[19]。目前仍缺少的是将流协变分解为规范不变结构的方法，以及一种将相关不变振幅转换为截面的处方。这样的分解将使任何反应模型的振幅都能够直接代入，而无论它们源自树图、幺正化模型还是耦合道计算；同时，还可以像在单介子产生中通常所做的那样，便捷地纳入或排除单个重子和介子共振。此外，它还将为多极分析以及类似于单介子产生中所开展的唯象学应用提供一个自然的起点 [59–66]。

受这些考虑的启发，我们建立了一个关于核子上两个介子电磁产生的通用形式体系。沿用单介子产生中确立的方法，将强子流分解为一组由 16 个规范不变矩阵组成的集合；这些矩阵的标量系数，即狄拉克振幅，可在任意给定的反应模型中确定。随后将这些矩阵约化为泡利算符，从而得到一组类 CGLN 振幅，并以此表示五重微分截面及其横向、纵向和干涉响应函数。为展示该形式体系的应用，我们仅采用核子玻恩项，将其应用于阈值附近的反应 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$和 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ 。这个刻意简化的示例展示了如何从费曼图中读出狄拉克振幅，如何在总振幅中恢复规范不变性并在存在强子形状因子时保持该性质，以及与 MAMI 测得的总截面和不变质量分布进行比较时，如何揭示缺失了哪些机制 [33] 。

本文的组织结构如下： 如下。第II节介绍双介子光产生和电产生的形式体系 ，

包括运动学、强子流、16个洛伦兹不变且规范不变的矩阵及其洛伦兹不变标量振幅、狄拉克振幅到泡利振幅的约化，以及截面的表述。第III 节展示了该形式体系在双π介子光产生过程中的应用 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ （第IIIA节）以及 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ （第III B节），并在第IIID节给出并讨论数值结果。第IV 节总结了我们的研究结果。附录中给出了泡利振幅与狄拉克振幅之间的关系，以及强子张量的各个分量。

II. 理论形式体系

A. 运动学

两个介子的电磁产生是一个非弹性散射过程。在此过程中，电子 e 与核子 N 之间的相互作用产生一个由散射电子 e'、一对介子 Φ_1和 Φ_2以及一个重子 B组成的末态，可表示为

$$e(k_1) + N(p_1) \to e'(k_2) + \Phi_1(q_1) + \Phi_2(q_2) + B(p_2) \tag{1}$$

其中， k_1、 k_2、 p_1、 p_2、 q_1和 q_2 分别表示入射电子、散射电子、核子、重子、第一个介子和第二个介子的四动量。该过程也可以用虚光子产生表示为，

$$\gamma_{\rm v}(k) + N(p_1) \to \Phi_1(q_1) + \Phi_2(q_2) + B(p_2) \tag{2}$$

其中 $k = k_1 - k_2$ 是虚光子动量。相应的过程如图 1所示。

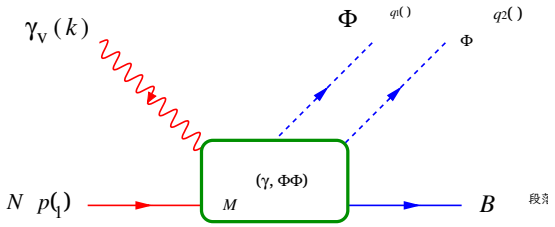

图1：核子上双介子虚光生产的示意图。初态和末态中的粒子分别以红色和蓝色表示。

对于方程（2）中给出的双介子虚光生产过程中涉及的五个四动量，可以构造出10个曼德尔施塔姆不变量，即

$$\begin{aligned} &s = (p_1 + k)^2, \quad t = (p_1 - p_2)^2, \quad u = (p_2 - k)^2, \quad s_{12} = (q_1 + q_2)^2, \quad s_{13} = (q_1 + p_2)^2, \\ &s_{23} = (q_2 + p_2)^2, \quad t_1 = (q_1 - k)^2, \quad t_2 = (q_2 - k)^2, \quad u_1 = (p_1 - q_1)^2, \quad u_2 = (p_1 - q_2)^2, \end{aligned} \tag{3}$$

其中， m_1 和 m_2 分别表示初态和末态重子的质量，而 μ_1 和 μ_2 表示两个产生的介子的质量。四动量守恒关系为，

$$p_1 + k = p_2 + q_1 + q_2, \tag{4}$$

在这 10 个不变量之间提供了五个独立约束。这些约束通过依次从守恒方程中分离出五个四动量中的每一个，并将所得表达式平方而得到，结果为

$$\begin{aligned} s + u + t_1 + t_2 &= 2k^2 + m_1^2 + m_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2, \\ s + t + u_1 + u_2 &= k^2 + 2m_1^2 + m_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2, \\ s_{13} + s_{23} + t + u &= k^2 + m_1^2 + 2m_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2, \\ s_{12} + s_{13} + t_1 + u_1 &= k^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2\mu_1^2 + \mu_2^2, \\ s_{12} + s_{23} + t_2 + u_2 &= k^2 + m_1^2 + m_2^2 + \mu_1^2 + 2\mu_2^2. \end{aligned} \tag{5}$$

将这五个方程相加，其中每个曼德尔施塔姆不变量恰好出现两次，可得到紧凑的恒等式

$$s + s_{12} + s_{13} + s_{23} + t + t_1 + t_2 + u + u_1 + u_2 = 3\big(k^2 + m_1^2 + m_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\big)\,. \tag{6}$$

五个独立约束将独立运动学变量的数量从 10 个减少到 5 个。我们选择三个具有明确物理意义的洛伦兹不变量：总质心能量的平方 s、双介子不变质量的平方 s_{12}以及介子-重子不变质量的平方 s_{13}。剩余的两个自由度描述末态在质心系中的方向。极角 θ 是介子对的方向与入射光子的方向之间的夹角（见图 3）。随后，反冲重子沿相反方向运动。方位角 φ 描述包含两个介子的平面绕介子对方向旋转的方式，该角度从重子平面开始测量。对于实光子产生，振幅与电子散射平面的方位取向 ϕ无关。该角度仅在电产生中才具有相关性，此时虚光子携带非零的四动量转移（$k^2 \neq 0$）。

B. 强子流与狄拉克振幅

按照参考文献 [54], ，我们将核子上电磁产生两个介子的跃迁矩阵元表述为

$$\mathcal{M}_e = \epsilon_\mu\, J^\mu, \tag{7}$$

其中，ϵ_μ 表示轻子电磁流，

$$\epsilon_\mu = \frac{\bar{u}(\boldsymbol{k}_2)\,\gamma_\mu\,u(\boldsymbol{k}_1)}{k^2}, \tag{8}$$

and

$$J^\mu = \langle p_2\, q_1\, q_2|\,\hat{J}^\mu\,|p_1\rangle \tag{9}$$

是强子电磁流。定义ϵ_μ 在方程（8）中尤其方便，因为它使得能够在统一的形式体系下处理电产生和光产生过程。在下文中，ϵ_μ 将被视为有效虚光子极化矢量。所得形式体系针对电产生建立，而相应的光产生表达式则可通过取实光子极限直接得到。

不同于单介子情形，用于 J^μ 双介子产生的电磁流不含显式的 γ_5，即使在强子顶点处采用赝矢量耦合时也是如此（见图2）。这是因为每个树图级产生图都包含两个介子-重子顶点，因此两个 γ_5 矩阵结合后形成了不含显式 γ_5的狄拉克结构。

强子流算符写成由狄拉克矩阵和可用四动量构造的完整20个洛伦兹协变矢量集合的线性组合，

$$\hat{J}^\mu = \sum_{i=1}^{20} I_i^\mu\; B_i\;, \tag{10}$$

其中，B_i 是取决于独立运动学不变量的洛伦兹不变标量振幅，基矢 I_j^μ 为

$$\begin{aligned}
I_1^\mu &= \gamma^\mu\;\not{k}\;, & I_6^\mu &= \gamma^\mu\;, & I_{11}^\mu &= \gamma^\mu\;\not{k}\not{q}\;, & I_{16}^\mu &= \gamma^\mu\not{q}\;,\\
I_2^\mu &= p_1^\mu\;, & I_7^\mu &= p_1^\mu\;\not{k}\;, & I_{12}^\mu &= p_1^\mu\;\not{q}\;, & I_{17}^\mu &= p_1^\mu\;\not{k}\not{q}\;,\\
I_3^\mu &= p_2^\mu\;, & I_8^\mu &= p_2^\mu\;\not{k}\;, & I_{13}^\mu &= p_2^\mu\;\not{q}\;, & I_{18}^\mu &= p_2^\mu\;\not{k}\not{q}\;,\\
I_4^\mu &= q_1^\mu\;, & I_9^\mu &= q_1^\mu\;\not{k}\;, & I_{14}^\mu &= q_1^\mu\;\not{q}\;, & I_{19}^\mu &= q_1^\mu\;\not{k}\not{q}\;,\\
I_5^\mu &= q_2^\mu\;, & I_{10}^\mu &= q_2^\mu\;\not{k}\;, & I_{15}^\mu &= q_2^\mu\;\not{q}\;, & I_{20}^\mu &= q_2^\mu\;\not{k}\not{q}\;,
\end{aligned} \tag{11}$$

其中我们定义了

$$q = \tfrac{1}{2}(q_1 - q_2). \tag{12}$$

轻子侧的流守恒条件 $k^\mu j_\mu = 0$，直接由式（8）中极化矢量的定义得出。在强子侧，流守恒为

$$k_\mu \hat{J}^\mu = 0, \tag{13}$$

得到标量振幅 B_i 之间的四个关系式，

$$k^2 B_1 + (p_1\cdot k)B_2 + (p_2\cdot k)B_3 + (q_1\cdot k)B_4 + (q_2\cdot k)B_5 = 0\,, \tag{14}$$
$$B_6 + (p_1\cdot k)B_7 + (p_2\cdot k)B_8 + (q_1\cdot k)B_9 + (q_2\cdot k)B_{10} = 0\,, \tag{15}$$
$$k^2 B_{11} + (p_1\cdot k)B_{12} + (p_2\cdot k)B_{13} + (q_1\cdot k)B_{14} + (q_2\cdot k)B_{15} = 0\,, \tag{16}$$
$$B_{16} + (p_1\cdot k)B_{17} + (p_2\cdot k)B_{18} + (q_1\cdot k)B_{19} + (q_2\cdot k)B_{20} = 0\,. \tag{17}$$

使振幅的数量减少四个。在本文中，我们消去振幅 B_5、 B_6、 B_{15} 和 B_{16}。因此，式（10）变为

$$\begin{aligned}
\hat{J}^\mu = &\left(I_1^\mu - \frac{k^2}{q_2\cdot k}\, I_5^\mu\right) B_1 + \left(I_2^\mu - \frac{p_1\cdot k}{q_2\cdot k}\, I_5^\mu\right) B_2 + \left(I_3^\mu - \frac{p_2\cdot k}{q_2\cdot k}\, I_5^\mu\right) B_3 + \left(I_4^\mu - \frac{q_1\cdot k}{q_2\cdot k}\, I_5^\mu\right) B_4 \\
&+ (I_7^\mu - p_1\cdot k\; I_6^\mu)\, B_7 + (I_8^\mu - p_2\cdot k\; I_6^\mu)\, B_8 + (I_9^\mu - q_1\cdot k\; I_6^\mu)\, B_9 + (I_{10}^\mu - q_2\cdot k\; I_6^\mu)\, B_{10} \\
&+ \left(I_{11}^\mu - \frac{k^2}{q_2\cdot k}\, I_{15}^\mu\right) B_{11} + \left(I_{12}^\mu - \frac{p_1\cdot k}{q_2\cdot k}\, I_{15}^\mu\right) B_{12} + \left(I_{13}^\mu - \frac{p_2\cdot k}{q_2\cdot k}\, I_{15}^\mu\right) B_{13} + \left(I_{14}^\mu - \frac{q_1\cdot k}{q_2\cdot k}\, I_{15}^\mu\right) B_{14} \\
&+ (I_{17}^\mu - p_1\cdot k\; I_{16}^\mu)\, B_{17} + (I_{18}^\mu - p_2\cdot k\; I_{16}^\mu)\, B_{18} + (I_{19}^\mu - q_1\cdot k\; I_{16}^\mu)\, B_{19} + (I_{20}^\mu - q_2\cdot k\; I_{16}^\mu)\, B_{20}\,.
\end{aligned} \tag{18}$$

利用式（12）和（18），以及狄拉克矩阵的反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，我们可以推导出

$$\begin{aligned}
\epsilon_\mu \hat{J}^\mu \;=\; & \tfrac{1}{2}\,(\not\epsilon\not k - \not k\not\epsilon)\, B_1 + \left(P\cdot k\; k\cdot\epsilon - P\cdot\epsilon\; k^2\right)\left(\frac{2B_1 - B_2 + B_3}{2P\cdot k}\right) \\
&+ (P\cdot\epsilon\; Q\cdot k - P\cdot k\; Q\cdot\epsilon)\left[\frac{k^2\; B_1 + (p_1 - q_2)\cdot k\; B_2 + (p_2 + q_2)\cdot k\; B_3 + 2q\cdot k\; B_4}{P\cdot k\; q_2\cdot k}\right] \\
&+ (P\cdot\epsilon\; q\cdot k - P\cdot k\; q\cdot\epsilon)\left[\frac{-k^2\; B_1 - p_1\cdot k\; B_2 - p_2\cdot k\; B_3 - 2Q\cdot k\; B_4}{P\cdot k\; q_2\cdot k}\right] \\
&+ (P\cdot\epsilon\not k - P\cdot k\not\epsilon)\,(B_7 + B_8) + (Q\cdot\epsilon\not k - Q\cdot k\not\epsilon)\,(B_7 - B_8 + B_9 + B_{10}) \\
&+ (q\cdot\epsilon\not k - q\cdot k\not\epsilon)\,(B_9 - B_{10}) + \frac{1}{2}\left(k\cdot\epsilon\not k - k^2\not\epsilon\right)(B_8 - B_7) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\not\epsilon\not k\not q - \not k\not\epsilon\not q\right) B_{11} + \left(P\cdot k\; k\cdot\epsilon\not q - P\cdot\epsilon\; k^2\not q\right)\left(\frac{2B_{11} - B_{12} + B_{13}}{2P\cdot k}\right) \\
&+ \left(P\cdot\epsilon\; Q\cdot k\not q - P\cdot k\; Q\cdot\epsilon\not q\right)\left[\frac{k^2\; B_{11} + (p_1 - q_2)\cdot k\; B_{12} + (p_2 + q_2)\cdot k\; B_{13} + 2q\cdot k\; B_{14}}{P\cdot k\; q_2\cdot k}\right] \\
&+ \left(P\cdot\epsilon\; q\cdot k\not q - P\cdot k\; q\cdot\epsilon\not q\right)\left[\frac{-k^2\; B_{11} - p_1\cdot k\; B_{12} - p_2\cdot k\; B_{13} - 2Q\cdot k\; B_{14}}{P\cdot k\; q_2\cdot k}\right] \\
&+ \left(P\cdot\epsilon\not k\not q - P\cdot k\not\epsilon\not q\right)(B_{17} + B_{18}) + \left(Q\cdot\epsilon\not k\not q - Q\cdot k\not\epsilon\not q\right)(B_{17} - B_{18} + B_{19} + B_{20}) \\
&+ \left(q\cdot\epsilon\not k\not q - q\cdot k\not\epsilon\not q\right)(B_{19} - B_{20}) + \tfrac{1}{2}\left(k\cdot\epsilon\not k\not q - k^2\not\epsilon\not q\right)(B_{18} - B_{17})\;,
\end{aligned} \tag{19}$$

其中我们引入了四动量

$$P = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) \qquad \text{and} \qquad Q = \tfrac{1}{2}(q_1 + q_2). \tag{20}$$

通过引入 16 个规范不变矩阵 M_i，其定义为

$$\begin{aligned}
M_1 &= \tfrac{1}{2}(\not\epsilon\not k - \not k\not\epsilon)\,, & M_9 &= P\cdot k\; q\cdot\epsilon\not q - P\cdot\epsilon\; q\cdot k\not q\,, \\
M_2 &= P\cdot k\; Q\cdot\epsilon\; - P\cdot\epsilon\; Q\cdot k\,, & M_{10} &= P\cdot\epsilon\not k\not q - P\cdot k\not\epsilon\not q\,, \\
M_3 &= P\cdot k\; q\cdot\epsilon\; - P\cdot\epsilon\; q\cdot k\,, & M_{11} &= Q\cdot\epsilon\not k\not q - Q\cdot k\not\epsilon\not q\,, \\
M_4 &= P\cdot\epsilon\not k - P\cdot k\not\epsilon\,, & M_{12} &= q\cdot\epsilon\not k\not q - q\cdot k\not\epsilon\not q\,,
\end{aligned} \tag{21}$$

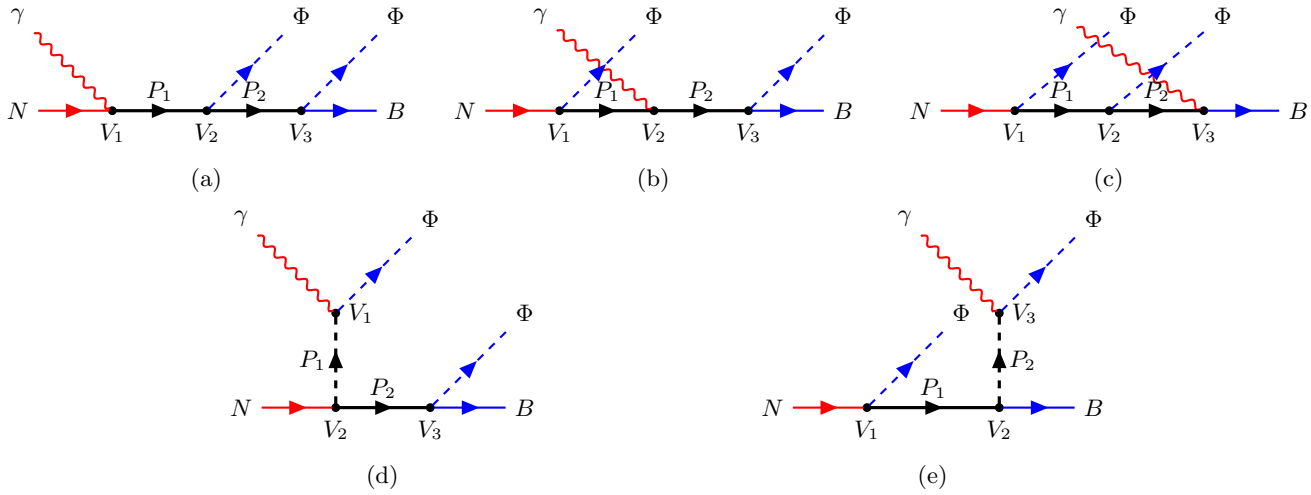

图2：双介子光产生和电产生的树级费曼图 $\gamma + N \to \Phi + \Phi + B$，其中 γ表示实光子或虚光子。相互作用顶点和传播子分别标记为 V_i 和 P_i，而粗（黑）线表示中间态。图中未显示交叉图。初态和末态粒子的颜色与图1中所使用的颜色相同。

$$
\begin{aligned}
M_5 &= Q\cdot\epsilon\, \not{k} - Q\cdot k\, \not{\epsilon}\ , & M_{13} &= \tfrac{1}{2}(k\cdot\epsilon\, \not{k} - k^2 \not{\epsilon})\ ,\\
M_6 &= q\cdot\epsilon\, \not{k} - q\cdot k\, \not{\epsilon}\ , & M_{14} &= P\cdot k\; k\cdot\epsilon\; - P\cdot\epsilon\; k^2\ ,\\
M_7 &= \tfrac{1}{2}(\not{\epsilon}\not{k}\not{q} - \not{k}\not{\epsilon}\not{q})\ , & M_{15} &= \tfrac{1}{2}(k\cdot\epsilon\, \not{k}\not{q} - k^2\not{\epsilon}\not{q})\ ,\\
M_8 &= P\cdot k\; Q\cdot\epsilon\, \not{q} - P\cdot\epsilon\; Q\cdot k\, \not{q}\ , & M_{16} &= P\cdot k\; k\cdot\epsilon\, \not{q} - P\cdot\epsilon\; k^2\not{q}\ ,
\end{aligned}
$$

式（19）中的跃迁振幅可表示为更一般的形式

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_2)\sum_{i=1}^{16} M_i\; A_i\; u(p_1)\,. \tag{22}$$

值得注意的是，这一分解是单介子电产生中通常使用的六个规范不变矩阵的自然扩展。在当前情形下，由于产生第二个介子所带来的额外自由度，规范不变矩阵的数量从六个增加到十六个。额外的十个矩阵包含动量 q，该动量刻画了两个介子动量的反对称组合。还需注意，最后四个矩阵 M_{13}–M_{16}在实光子情形下为零。对于虚光子，它们同时对纵向振幅和横向振幅作出贡献。我们指出，这些矩阵并非全部线性无关。如文献 [1, 4], 所示，两个赝标介子的光产生由八个相互独立的振幅描述；纵向光子偏振在电产生中额外增加四个振幅，总数达到十二个。因此，我们的分解在光产生和电产生中都包含四个冗余结构。尽管如此，我们仍保留式（21）中的十六个矩阵，因为它们直接源自流的协变分解，允许从费曼图中直接读出振幅 A_i，并且能够为可观测量导出更简单、更具对称性的表达式。冗余性不会影响可观测量，因为总振幅是唯一的；它只意味着各个振幅 A_i 并不能被唯一确定。与单介子情形一样，洛伦兹不变振幅 A_i 可由图2所示的费曼图得到。振幅 A_i与 B_i 之间的关系见附录A。

C. 狄拉克振幅分解为泡利振幅

为了计算物理可观测量，在泡利空间中进行处理更为方便。为此，我们将式（22）中的跃迁振幅分解为作用于二分量旋量的泡利矩阵。这种分解对于利用光产生和电产生过程的角动量性质至关重要，尤其是在

多极框架 [54]中。因此，我们引入泡利振幅 $\mathcal{F}_j$ ，定义为

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_2) \sum_{i=1}^{16} M_i A_i \, u(p_1) = \mathcal{N} \, \mathcal{X}_2^\dagger \sum_{j=1}^{16} L_j \, \mathcal{F}_j \, \mathcal{X}_1 \,, \tag{23}$$

其中，归一化因子由 $\mathcal{N} = \sqrt{(E_1 + m_1)(E_2 + m_2)}$ 给出。振幅 $\mathcal{F}_j$ 构成了单介子电磁产生 [55]中所使用的六个 CGLN 振幅的推广。由于末态中存在额外的介子，泡利振幅的数量从六个增加到十六个，与狄拉克振幅的数量相匹配。

泡利算符 L_j由泡利矩阵和相关的运动学矢量构成，其定义为

$$\begin{aligned}
L_1 &= b_0, & L_9 &= \hat{\boldsymbol{x}}'' \cdot \boldsymbol{b}, \\
L_2 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{x}}'') b_0 & L_{10} &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{x}}')(\hat{\boldsymbol{x}}'' \cdot \boldsymbol{b}), \\
L_3 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{Q}}) b_0 & L_{11} &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{Q}})(\hat{\boldsymbol{x}}'' \cdot \boldsymbol{b}), \\
L_4 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}}'' \times \hat{\boldsymbol{Q}}) b_0, & L_{12} &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}}'' \times \hat{\boldsymbol{Q}})(\hat{\boldsymbol{x}}'' \cdot \boldsymbol{b}), \\
L_5 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{b}), & L_{13} &= \hat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{b}, \\
L_6 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}}'' \times \boldsymbol{b}), & L_{14} &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{x}}'')(\hat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{b}), \\
L_7 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{Q}} \times \boldsymbol{b}), & L_{15} &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{Q}})(\hat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{b}), \\
L_8 &= -\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}}'' \times \hat{\boldsymbol{Q}}) \; \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{b}), & L_{16} &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}}'' \times \hat{\boldsymbol{Q}})(\hat{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{b}).
\end{aligned} \tag{24}$$

其中，按照文献 [54]，我们采用 $b_\mu = \epsilon_\mu - (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|) \, k_\mu$，而不是文献 [67]中引入的 $a_\mu = \epsilon_\mu - (\epsilon_0/k_0) \, k_\mu$。这一选择自然地将虚光子极化分为横向（$\boldsymbol{b}$）和标量（$b_0$）分量，这不同于$a_\mu$的定义；对于后者，标量分量恒等为零（$a_0 = 0$）。此外，我们引入了单位向量 $\hat{\boldsymbol{x}}''$ ，其定义为

$$\hat{\boldsymbol{q}} = \hat{\boldsymbol{x}}'' \, \sin\vartheta + \hat{\boldsymbol{Q}} \, \cos\vartheta \,. \tag{25}$$

根据构造，$\hat{\boldsymbol{x}}''$ 与 $\hat{\boldsymbol{Q}}$正交，而这两个向量均位于由 $\boldsymbol{q}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_2$ 张成的产生平面内（见图 3）。因此，与单介子电产生的情形一样，[54], 泡利振幅 $\mathcal{F}_j$ 与狄拉克振幅 A_i 之间的关系可以写成矩阵形式:

$$\tilde{\mathcal{F}}(s, s_{12}, s_{13}, \theta, \varphi) = \tilde{\mathcal{G}}(s, s_{12}, s_{13}, \theta, \varphi) \, \tilde{A}(s, s_{12}, s_{13}, \theta, \varphi), \tag{26}$$

其中

$$\tilde{\mathcal{F}}(s, s_{12}, s_{13}, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathcal{F}_{16} \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad \tilde{A}(s, s_{12}, s_{13}, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ A_{16} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

而 $\tilde{\mathcal{G}}$（s、s_{12}、s_{13}、θ、φ）是一个 16×16 矩阵。泡利振幅与狄拉克振幅之间的显式关系见附录B。

D. 截面

在图3所示的整体质心系中，入射核子和光子的四动量分别为 $p_1 = (E_1, 0, 0, -\mathrm{p})$ 和 $k = (k_0, 0, 0, \mathrm{p})$。出射重子和介子分别具有四动量$p_2 = (E_2, -\boldsymbol{p}')$、$q_1 = (E_{q_1}, \boldsymbol{q}_1)$ 和 $q_2 = (E_{q_2}, \boldsymbol{q}_2)$，其中动量守恒要求 $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2$。初态和末态质心动量的大小为

$$\mathrm{p} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, k^2)}{2\sqrt{s}}, \qquad \mathrm{p}' = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_2^2, s_{12})}{2\sqrt{s}}, \tag{28}$$

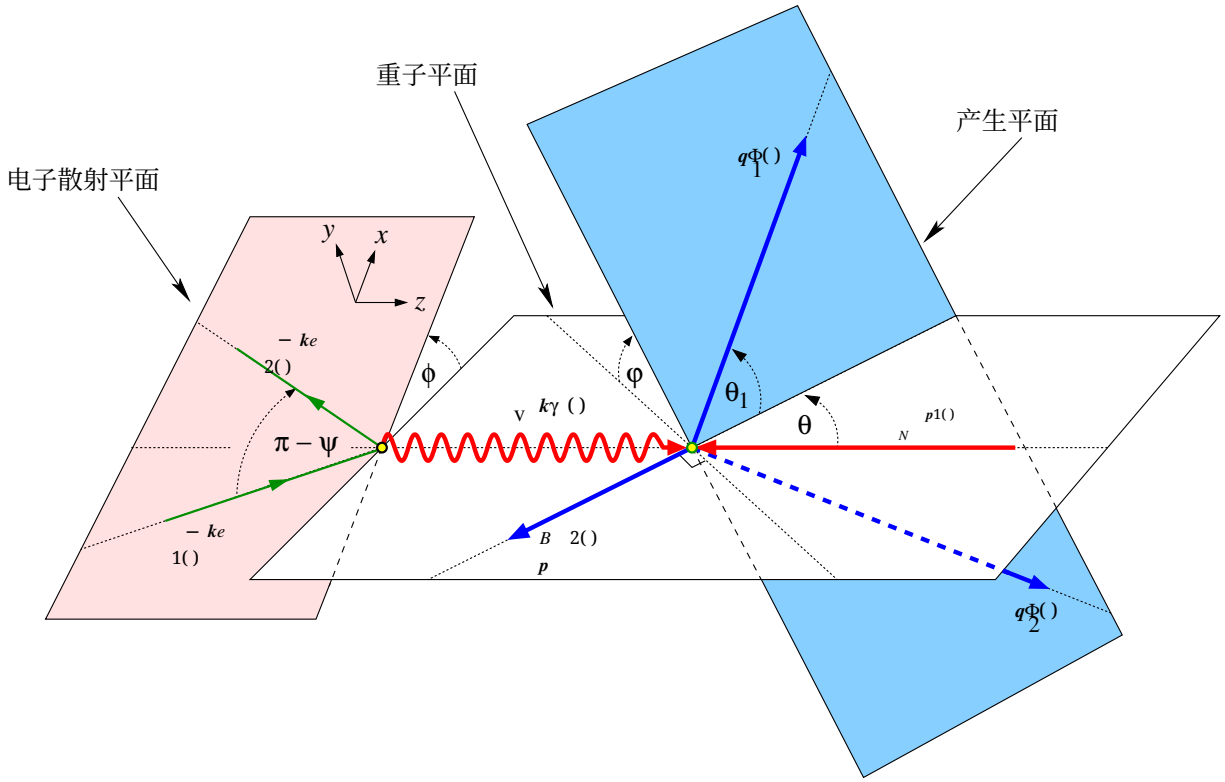

图3：在 γ_v-N （等价地， B-Φ-Φ）质心系中，核子上的双介子虚光生产运动学。在电产生中，该反应由三个平面表征：电子散射平面、产生平面和重子平面。对于光产生，电子散射平面不存在，仅剩产生平面和重子平面。直线虚线用于视觉引导，表示相应的动量矢量位于相关平面内。

其中 $\lambda(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ 是 K¨all´en 函数。两个介子的相对动量 s 定义为 $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)/2$，其中 w 第 j 个介子能量

$$E_{q_1} = \frac{s_{12} + s_{13} - m_2^2 - \mu_2^2}{2\sqrt{s}}, \qquad E_{q_2} = \frac{s + \mu_2^2 - s_{13}}{2\sqrt{s}}, \tag{29}$$

以及由下式给出的大小 $\mathrm{q} = |\boldsymbol{q}|$

$$\mathrm{q}^2 = \frac{(2s_{13} + s_{12} - s - m_2^2 - 2\mu_2^2)^2 + 4s(s_{12} - 2\mu_1^2 - 2\mu_2^2)}{16s}. \tag{30}$$

此外，角度 ϑ 的余弦为 $\boldsymbol{p}'$ 与 $\boldsymbol{q}$ 之间的

$$\cos\vartheta = \frac{2s(s_{13} - 2\mu_1^2 + \mu_2^2) + (s_{12} - m_2^2)^2 + 2(s_{13} - \mu_2^2)(s_{12} - m_2^2) - s^2}{8s\,\mathrm{p}'\,\mathrm{q}}. \tag{31}$$

所有运动学量均可表示为 s、 s_{12}、 s_{13} 以及粒子质量的函数，从而可直接将它们用作截面的积分变量。

物理上允许的积分区域由以下条件界定

$$s_{12}^{\min} = (\mu_1 + \mu_2)^2, \qquad s_{12}^{\max} = (\sqrt{s} - m_2)^2, \tag{32}$$

对于固定的 s_{12}， s_{13} 的范围由下式确定：

$$s_{13}^{\max\,/\,\min} = \mu_1^2 + m_2^2 + \frac{(s_{12} + \mu_1^2 - \mu_2^2)(s - s_{12} - m_2^2) \pm \lambda^{1/2}(s_{12}, \mu_1^2, \mu_2^2)\,\lambda^{1/2}(s, m_2^2, s_{12})}{2s_{12}}, \tag{33}$$

它们定义了达利茨图的边界。

核子上介子电产生在末态含任意数目粒子时的截面，已在文献 [68] 中推导。本小节将采用第 [68] II A 小节中引入的运动学约定，简要总结文献

利用洛伦兹不变相空间形式体系，双介子电产生的微分截面可写为 [69]

$$d\sigma_e = \frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+p_1-k_2-q_1-q_2-p_2)}{4\sqrt{(k_1\cdot p_1)^2-m_e^2m_1^2}}\,\overline{|\mathcal{M}_e|^2}\,\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3\,2E_{k_2}}\,\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3\,2E_{q_1}}\,\frac{d^3q_2}{(2\pi)^3\,2E_{q_2}}\,\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3\,2E_{p_2}}, \tag{34}$$

其中，$\overline{|\mathcal{M}_e|^2}$ 表示对初态自旋取平均并对末态自旋求和后的跃迁振幅平方。在单光子交换近似下，跃迁振幅由式（7）给出。为采用文献 [68], 的归一化约定，我们将元电荷 e 从轻子流和强子流中显式提出。因此，第 $C^{(x)}$ III节列出的系数必须相应修改。此外，虚光子传播子 $1/k^2$ 已从有效极化矢量的定义中移除，并显式包含在跃迁振幅中。于是，式（7）可写为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_e &= -\frac{4\pi\alpha}{\mathcal{Q}^2}\,j_\mu J^\mu \\ &= -4\pi\alpha\,\left[\bar{u}(\lambda_{e_2})\gamma^\mu u(\lambda_{e_1})\right]\frac{g_{\mu\nu}}{\mathcal{Q}^2}J^\nu,\end{aligned} \tag{35}$$

其中

$$j_\mu = \bar{u}(\lambda_{e_2})\gamma_\mu u(\lambda_{e_1}) \tag{36}$$

是轻子电磁流，其中 λ_{e_1} 和 λ_{e_2} 分别表示初态和末态电子的螺旋度。此外，

$$\mathcal{Q}^2 = -k^2 \geq 0, \qquad k = k_1 - k_2, \tag{37}$$

是交换虚光子所携带的四动量转移平方。

式（34）中的相空间元可以部分积分，并利用四维狄拉克δ函数，可将微分截面写为

$$d^7\sigma_e = \frac{1}{4(k_1\cdot p_1)}\,\frac{k_2^2\,dk_2\,d\Omega_2}{(2\pi)^3\,2E_{k_2}}\,\frac{(4\pi\alpha)^2}{\mathcal{Q}^4}\,L^{\mu\nu}\,H_{\mu\nu}\,d\Phi, \tag{38}$$

with

$$L^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda_{e_1}\lambda_{e_2}}\left[\bar{u}(\lambda_{e_2})\,\gamma^\mu\,u(\lambda_{e_1})\right]^*\,\left[\bar{u}(\lambda_{e_2})\,\gamma^\nu\,u(\lambda_{e_1})\right], \tag{39}$$

and

$$H_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda_N\lambda_B} J^*_\mu(\lambda_N,\lambda_B)\,J_\nu(\lambda_N,\lambda_B), \tag{40}$$

其中我们使用了 $J_\mu(\lambda_N,\ \lambda_B) \equiv \langle\lambda_B|\hat{}J_\mu|\lambda_N\rangle$，与式（9）一致。注意，在式（38）中，我们引入了相体积元 $d\Phi$ 其定义为

$$d\Phi = \frac{S}{32W^2(2\pi)^5}\,d\tau^5, \tag{41}$$

其中，对于末态中的两个相同介子（例如 $\pi^0\pi^0$），$S = 1/2$；其他情况下为 $S = 1$。这考虑了对整个达利茨区域进行积分，并且

$$d\tau^5 = ds_{12}\,ds_{13}\,d\cos\theta\,d\phi\,d\varphi, \tag{42}$$

它表示消去末态重子的动量后得到的五维强子相空间元，其中使用了四动量守恒条件。

横向性条件，

$$k_\mu L^{\mu\nu} = k_\nu L^{\mu\nu} = 0, \tag{43}$$

使得轻子张量能够在虚光子极化矢量 ϵ_μ（λ_v）的基底上分解，其中 $\lambda_v = 0,\ \pm 1$即

$$L_{\mu\nu} = \sum_{\lambda_v, \lambda_v'} \epsilon_\mu(\lambda_v)\epsilon_\nu^*(\lambda_v')\rho_{\lambda_v\lambda_v'}, \tag{44}$$

其中 $\rho_{\lambda_v\lambda_v'}$ 是在螺旋度基 [70]中的虚光子极化密度矩阵。因此，式（38）中的电产生截面可表示为

$$\frac{d^7\sigma_e}{dE_{k_2}\, d\Omega_{e_2}\, d\tau^5} = \Gamma_v \frac{d^5\sigma_v}{d\tau^5}, \tag{45}$$

其中虚光子通量为

$$\Gamma_v = \frac{\alpha}{2\pi^2}\frac{E_{k_2}}{E_{k_1}}\frac{K}{\mathcal{Q}^2}\frac{1}{1-\varepsilon}, \tag{46}$$

以及虚光子的横向极化度为

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{2\boldsymbol{k}_{\rm lab}^2}{\mathcal{Q}^2}\tan^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1}, \tag{47}$$

其中，$\boldsymbol{k}_{\rm lab}$ 是虚光子的三动量，ψ 是电子散射角，二者均取于实验室系。等效光子能量为

$$K = \frac{W^2 - m_1^2}{2m_1}, \tag{48}$$

这对应于产生具有相同质心能量 W 的强子系统所需实光子的实验室能量。于是，虚光子产生的五重微分截面为

$$\frac{d^5\sigma_v}{d\tau^5} = \frac{4\pi\alpha}{4Km_1}\sum_{\lambda_v,\lambda_v'}\epsilon_\mu(\lambda_v)\epsilon_\nu^*(\lambda_v')\rho_{\lambda_v\lambda_v'}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_N,\lambda_B} J^{\mu *}(\lambda_N,\lambda_B)J^\nu(\lambda_N,\lambda_B)\frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\mathcal{Q}^2}\right)\frac{S}{32W^2(2\pi)^5}. \tag{49}$$

请注意，该表达式给出了由式（2）中定义的虚光子诱导的双介子产生截面，其虚光子极化矢量为ϵ_μ，相应的过程如图1所示。对于核子上的电磁双介子产生的唯象分析，这种表述尤其方便，类似于在核子上的单介子电产生和光产生分析中通常使用的二重微分截面 $d\sigma/d\Omega_v$ 。 [57]。

轻子张量和强子张量都包含 16 个分量。轻子侧的流守恒条件 $k_\mu j^\mu = 0$ （见式（8））以及强子侧的流守恒条件 $k_\mu J^\mu = 0$ （见式（ 9 ））将轻子张量和强子张量的独立分量数从 16 个减少到 9 个。利用这些关系，轻子流与强子流的标量积可以写成

$$j_\mu J^\mu = -\left(j_x J^x + j_y J^y - \frac{\mathcal{Q}^2}{k_0^2} j_z J^z\right), \tag{50}$$

其中时间分量已用空间分量表示并消去。请注意，k_0 表示强子质心系中的虚光子能量，不同于 $\boldsymbol{k}_{\rm lab}$ 和 ψ 在式（47）中所表示的量，后者定义于实验室系。因此，在计算跃迁振幅时，每个流只需使用三个独立分量。按照文献 [68], ，利用流守恒条件消去了轻子流和强子流的时间分量。于是，轻子张量具有如下 3×3矩阵

$$L_{ij} = \frac{\mathcal{Q}^2}{1-\varepsilon}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 & -\sqrt{2\varepsilon_{\rm L}(1+\varepsilon)} \\ 0 & 1-\varepsilon & 0 \\ -\sqrt{2\varepsilon_{\rm L}(1+\varepsilon)} & 0 & 2\varepsilon_{\rm L} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

其中

$$\varepsilon_{\rm L}=\frac{\mathcal{Q}^2}{k_0^2}\,\varepsilon. \tag{52}$$

同样，强子张量可化为 3×3 矩阵

$$H_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda_N\lambda_B}\begin{pmatrix} J_x^*J_x & J_x^*J_y & J_x^*J_z\\ J_y^*J_x & J_y^*J_y & J_y^*J_z\\ J_z^*J_x & J_z^*J_y & J_z^*J_z\end{pmatrix}, \tag{53}$$

其中求和遍及初始核子和末态重子的自旋投影。

为计算分量 J_i 强子张量在式（53）中的分量，我们使用式（23）和（24）。对于 $i=x,\ y$ 我们得到 ain

$$\begin{aligned}\hat{J}_i =&(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\ \sigma_i-\hat{k}_i)\mathcal{F}_5+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}''\ \sigma_i-\hat{x}_i'')\mathcal{F}_6+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{Q}}\ \sigma_i-\hat{Q}_i)\mathcal{F}_7\\ &+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}''\times\hat{\boldsymbol{Q}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\ \sigma_i-\hat{k}_i)\mathcal{F}_8+\hat{x}_i''\ \mathcal{F}_9+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{x}}'')\ \hat{x}_i''\ \mathcal{F}_{10}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{Q}})\ \hat{x}_i''\ \mathcal{F}_{11}\\ &+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}''\times\hat{\boldsymbol{Q}})\ \hat{x}_i''\ \mathcal{F}_{12}+\hat{Q}_i\ \mathcal{F}_{13}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{x}}'')\ \hat{Q}_i\ \mathcal{F}_{14}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{Q}})\ \hat{Q}_i\ \mathcal{F}_{15}\\ &+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}''\times\hat{\boldsymbol{Q}})\ \hat{Q}_i\ \mathcal{F}_{16}\ .\end{aligned} \tag{54}$$

对于 $i=z$，结合流守恒条件，使用纵向分量 J_0 更为方便，

$$k_0\hat{J}_0-|\boldsymbol{k}|\hat{J}_z=0, \tag{55}$$

其中

$$\hat{J}_0=\mathcal{F}_1+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{x}}'')\ \mathcal{F}_2+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{Q}})\ \mathcal{F}_3+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}''\times\hat{\boldsymbol{Q}})\ \mathcal{F}_4\ . \tag{56}$$

所得的强子张量分量 $J_i^*J_k$ 列于附录C中。

最后，利用方程（51）和（53），方程（49）中的五重微分截面可以用虚光子响应函数重新整理表示，这些响应函数由强子张量各分量的相应组合定义：

$$\begin{aligned}\frac{d^5\sigma_v}{d\tau^5}\ &=\ \frac{4\pi\alpha}{4Km_1}\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{1}{2}\left\{\frac{|J_x|^2+|J_y|^2}{2}+\varepsilon_{\rm L}|J_z|^2+\varepsilon\frac{|J_x|^2-|J_y|^2}{2}-\sqrt{2\varepsilon_{\rm L}(1+\varepsilon)}\ {\rm Re}(J_x^*J_z)\right\}\frac{S}{32W^2(2\pi)^5}\\ &\equiv\ \sigma_{\rm T}+\varepsilon_{\rm L}\sigma_{\rm L}+\varepsilon\left(\sigma_{\rm TT}\cos2\phi+\sigma'_{\rm TT}\sin2\phi\right)+\sqrt{2\varepsilon_{\rm L}(1+\varepsilon)}\left(\sigma_{\rm TL}\cos\phi+\sigma'_{\rm TL}\sin\phi\right).\end{aligned} \tag{57}$$

请注意，ϕ依赖关系在第一行中是隐含的，因为流$J_{x,\ y,\ z}$是在电子平面坐标系中定义的，而强子坐标系则绕 ϕ 轴旋转了 z；完成这一旋转后，它在第二行中变得显式（见图3）。为方便起见，我们定义公共运动学因子

$$F=\frac{4\pi\alpha}{4Km_1}\frac{S}{32W^2(2\pi)^5}, \tag{58}$$

这样，方程（57）中的响应函数可写为

$$\sigma_{\rm T}=F\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{|J_x|^2+|J_y|^2}{4}, \tag{59a}$$

$$\sigma_{\rm L}=F\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{|J_z|^2}{2}, \tag{59b}$$

$$\sigma_{\rm TT}\cos2\phi+\sigma'_{\rm TT}\sin2\phi=F\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{|J_x|^2-|J_y|^2}{4}, \tag{59c}$$

$$\sigma_{\rm TL}\cos\phi+\sigma'_{\rm TL}\sin\phi=-F\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{{\rm Re}(J_x^*J_z)}{2}. \tag{59d}$$

如有需要，各个响应函数的显式表达式 $\sigma_{\rm TT}$、 $\sigma'_{\rm TT}$、 $\sigma_{\rm TL}$和 $\sigma'_{\rm TL}$ 可由附录C中的方程（C2）和（C4）推导得到。

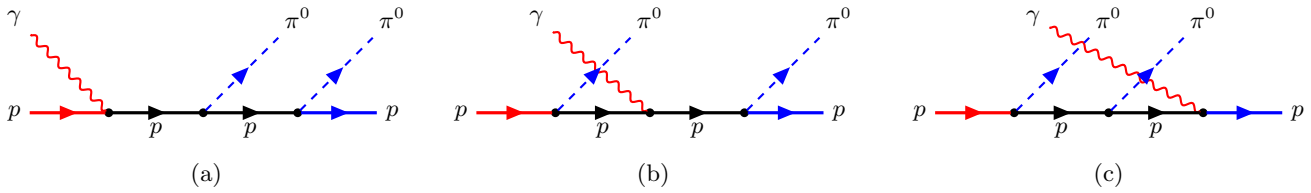

图4：与图2相同，但对应于 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$过程。图（a）表示 s道，而（b）和（c）是 u道玻恩项。相应的交叉图未予显示。

III. 示例：质子上的两个π介子光产生

对双介子光产生和电产生过程作出贡献的一般树级玻恩项的费曼图如图2所示。介子共振和重子共振的贡献可通过将相应的中间介子传播子和重子传播子替换为适当的共振传播子，并在每个顶点处施加相关的量子数守恒条件来得到。对于末态中的相同介子，还必须纳入相应的交叉图；这些图未在图2中显示，以确保末态得到正确的对称化。

为说明所建立的形式体系如何方便且容易地应用，按照 Berends等人 [54] 关于单介子产生的相同思路，我们考虑质子上的以下双π介子光产生过程：

$$\gamma(k) + p(p_1) \to \pi^0(q_1) + \pi^0(q_2) + p(p_2) \ , \tag{60}$$
$$\gamma(k) + p(p_1) \to \pi^+(q_1) + \pi^0(q_2) + n(p_2) \ , \tag{61}$$

对于这些过程，我们有可供比较的实验数据。此外，该示例还展示了双介子产生的一个重要特征，即各个图并不具备规范不变性。相反，总振幅保持规范不变性，这与单介子光产生和电产生中的情况相同 [16]。

标量狄拉克振幅 A_i 可以通过将散射振幅分解为方程（21）中定义的规范不变矩阵，并使用图2所示的图来获得。对于这两个过程，我们只考虑玻恩项贡献；也就是说，振幅 A_i 由非共振图计算得到。由于本计算的主要目的是说明本文所建立的形式体系的应用，因此我们认为玻恩项处理对于本研究已经足够。包含介子和重子共振贡献的更完整处理超出了本研究的范围，将在未来的研究中加以考虑。不变振幅采用赝标量耦合构造，因此不存在接触项贡献。为简单起见，所有中间核子传播子，无论是质子还是中子，均被赋予一个共同的质量，该质量等于同位旋双重态的同位旋平均质量，

$$m \equiv \frac{m_p + m_n}{2} = 938.92 \text{ MeV}. \tag{62}$$

外部核子质量保持其物理值。我们通过数值计算验证了，这一近似仅使结果变化约 1–2%；对于当前的探索性研究，我们认为这是可以接受的。由于振幅是通过规范不变矩阵 M_i 计算的，流守恒仍然严格成立。

A. $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$

相应的玻恩图如下所示： $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ 过程见图4。由图4（a）、（b）和（c）所示图分别得到的不变振幅为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(s_1)} = {} & \frac{-ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}}{[(p_2+q_2)^2 - m^2][(p_1+k)^2 - m^2]}\ \bar{u}(p_2)\ (\not{p}_2 + \not{q}_2 - m) \\ & \times (\not{p}_1 + \not{k} + m)\left[\not{\epsilon} - \frac{\kappa_p}{4m}(\not{\epsilon}\not{k} - \not{k}\not{\epsilon})\right] u(p_1) \ , \\ \mathcal{M}^{(u_{11})} = {} & \frac{-ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}}{[(p_2+q_2)^2 - m^2][(p_1-q_1)^2 - m^2]}\ \bar{u}(p_2)\ (\not{p}_2 + \not{q}_2 - m)\end{aligned} \tag{63}$$

$$\times \left[\not{\epsilon} + \frac{\kappa_p}{4m}(\not{\epsilon}\not{k} - \not{k}\not{\epsilon})\right](\not{p}_1 - \not{q}_1 - m)\ u(p_1)\ , \tag{64}$$

$$\mathcal{M}^{(u_{12})} = \frac{-ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\ \bar{u}(p_2)\left[\not{\epsilon} - \frac{\kappa_p}{4m}(\not{\epsilon}\not{k} - \not{k}\not{\epsilon})\right]$$
$$\times (\not{p}_2 - \not{k} + m)(\not{p}_1 - \not{q}_1 - m)\ u(p_1)\ , \tag{65}$$

其中， κ_p 表示质子的反常磁矩。显然，各个图本身并不具备规范不变性，因为每个图都包含一个由电磁核子顶角产生的非规范不变电项。将 $\not{\epsilon}$ 替换为 $\not{k}$ 代入每个振幅，即可直接验证这一点。然而，当三个图合并形成总振幅时，规范不变性得以恢复。具体而言，可以如下证明：

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{M}_{\rm el}^{(s_1)} + \mathcal{M}_{\rm el}^{(u_{11})} + \mathcal{M}_{\rm el}^{(u_{12})}\right]_{\epsilon^\mu \to k^\mu} \\
&= -\,ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}\ \bar{u}(p_2)\Bigg\{\frac{(\not{p}_2 + \not{q}_2 - m)(\not{p}_1 + \not{k} + m)\not{k}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]} \\
&\quad + \frac{(\not{p}_2 + \not{q}_2 - m)\not{k}(\not{p}_1 - \not{q}_1 - m)}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]} \\
&\quad + \frac{\not{k}(\not{p}_2 - \not{k} + m)(\not{p}_1 - \not{q}_1 - m)}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\Bigg\}u(p_1) \\
&= -\,ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}\ \bar{u}(p_2)\Bigg\{\frac{(\not{p}_2 + \not{q}_2 - m)}{(p_2+q_2)^2-m^2} \\
&\quad \times \left[\frac{(\not{p}_1 + \not{k} + m)(\not{p}_1 + \not{k} - m)}{(p_1+k)^2-m^2} - \frac{(\not{p}_1 + \not{k} + m)(\not{p}_1 - m)}{(p_1+k)^2-m^2}\right. \\
&\quad \left. - \frac{(\not{p}_2 + \not{q}_2 - \not{k} + m)(\not{p}_1 - \not{q}_1 - m)}{(p_1-q_1)^2-m^2} + \frac{(\not{p}_2 + \not{q}_2 + m)(\not{p}_1 - \not{q}_1 - m)}{(p_1-q_1)^2-m^2}\right] \\
&\quad + \frac{\not{k}(\not{p}_2 - \not{k} + m)(\not{p}_1 - \not{q}_1 - m)}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\Bigg\}u(p_1) \\
&= 0\ .
\end{aligned} \tag{66}$$

我们还可以根据图中未显示的交叉图构造不变振幅。4在这些图中，我们将介子 q_1 和 q_2 从不变振幅方程（63）、（64）和（65）中进行交换，于是得到

$$\mathcal{M}^{(s_2)} = \frac{-ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\ \bar{u}(p_2)\ (\not{p}_2 + \not{q}_1 - m)$$
$$\times (\not{p}_1 + \not{k} + m)\left[\not{\epsilon} - \frac{\kappa_p}{4m}(\not{\epsilon}\not{k} - \not{k}\not{\epsilon})\right]u(p_1)\ , \tag{67}$$

$$\mathcal{M}^{(u_{21})} = \frac{-ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\ \bar{u}(p_2)\ (\not{p}_2 + \not{q}_1 - m)$$
$$\times \left[\not{\epsilon} + \frac{\kappa_p}{4m}(\not{\epsilon}\not{k} - \not{k}\not{\epsilon})\right](\not{p}_1 - \not{q}_2 - m)\ u(p_1)\ , \tag{68}$$

$$\mathcal{M}^{(u_{22})} = \frac{-ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\ \bar{u}(p_2)\left[\not{\epsilon} - \frac{\kappa_p}{4m}(\not{\epsilon}\not{k} - \not{k}\not{\epsilon})\right]$$
$$\times (\not{p}_2 - \not{k} + m)(\not{p}_1 - \not{q}_2 - m)\ u(p_1)\ . \tag{69}$$

请注意，该情形下的各个单独图本身也不是规范不变的。与公式（66）相同，通过将所有交叉图组合起来形成总振幅，可以恢复规范不变性，如下所示：

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{M}_{\rm el}^{(s_2)} + \mathcal{M}_{\rm el}^{(u_{21})} + \mathcal{M}_{\rm el}^{(u_{22})}\right]_{\epsilon^\mu \to k^\mu} \\
&= -\,ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}\ \bar{u}(p_2)\Bigg\{\frac{(\not{p}_2 + \not{q}_1 - m)(\not{p}_1 + \not{k} + m)\not{k}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]} \\
&\quad + \frac{(\not{p}_2 + \not{q}_1 - m)\not{k}(\not{p}_1 - \not{q}_2 - m)}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\not{k}(\not{p}_2-\not{k}+m)(\not{p}_1-\not{q}_2-m)}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\Big\}u(p_1)\\
=&-ie\ g_{\pi^0pp}\ g_{\pi^0pp}\ \bar{u}(p_2)\Big\{\frac{(\not{p}_2+\not{q}_1-m)}{(p_2+q_1)^2-m^2}\\
&\times\Big[\frac{(\not{p}_1+\not{k}+m)(\not{p}_1+\not{k}-m)}{(p_1+k)^2-m^2}-\frac{(\not{p}_1+\not{k}+m)(\not{p}_1-m)}{(p_1+k)^2-m^2}\\
&-\frac{(\not{p}_2+\not{q}_1-\not{k}+m)(\not{p}_1-\not{q}_2-m)}{(p_1-q_2)^2-m^2}+\frac{(\not{p}_2+\not{q}_1+m)(\not{p}_1-\not{q}_2-m)}{(p_1-q_2)^2-m^2}\Big]\\
&+\frac{\not{k}(\not{p}_2-\not{k}+m)(\not{p}_1-\not{q}_2-m)}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\Big\}u(p_1)\\
=&\,0\,. \qquad (70)
\end{aligned}
$$

狄拉克总振幅　　由 A_i 从公式（63）、（64）、（65）、（67）、（68）和（69）的分解中得到的 a re

$$
\begin{aligned}
A_1^{(\mathbf{A})}=&-\frac{\kappa_p}{2m}\Bigg[\left(\frac{k^2+2p_1\cdot k}{2}\right)\left(C^{(s_1)}+C^{(s_2)}\right)-\left(q_2\cdot k+2q\cdot Q-q_1\cdot q_2-2p_1\cdot q\right)C^{(u_{11})}\\
&-\left(q_1\cdot k-2q\cdot Q-q_1\cdot q_2+2p_1\cdot q\right)C^{(u_{21})}-\left(\frac{2p_2\cdot k-k^2}{2}\right)\left(C^{(u_{12})}+C^{(u_{22})}\right)\Bigg]\,, \qquad (71)\\
A_2^{(\mathbf{A})}=&\frac{\kappa_p}{m}\left[\left(C^{(u_{11})}+C^{(u_{21})}\right)+\frac{q\cdot k}{P\cdot k}\left(2C^{(s_1)}-2C^{(s_2)}-C^{(u_{11})}+C^{(u_{21})}\right)\right]\,, \qquad (72)\\
A_3^{(\mathbf{A})}=&-\frac{\kappa_p}{m\,P\cdot k}\Big[2(P\cdot k+Q\cdot k)\left(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}\right)-(Q\cdot k-P\cdot k)\left(C^{(u_{11})}-C^{(u_{21})}\right)\Big]\,, \qquad (73)\\
A_5^{(\mathbf{A})}=&-(1+\kappa_p)\left(C^{(u_{11})}+C^{(u_{21})}\right), \qquad (74)\\
A_6^{(\mathbf{A})}=&2(1+\kappa_p)\left(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}\right)+(1+\kappa_p)\left(C^{(u_{11})}-C^{(u_{21})}\right), \qquad (75)\\
A_7^{(\mathbf{A})}=&(1+\kappa_p)\left(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}+C^{(u_{11})}+C^{(u_{12})}-C^{(u_{21})}-C^{(u_{22})}\right), \qquad (76)\\
A_8^{(\mathbf{A})}=&\frac{2(P\cdot k+q\cdot k)\left(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}-C^{(u_{21})}\right)+2(P\cdot k-q\cdot k)\left(C^{(u_{11})}+C^{(u_{12})}-C^{(u_{22})}\right)}{P\cdot k\ q_2\cdot k}\,, \qquad (77)\\
A_9^{(\mathbf{A})}=&\frac{-2(P\cdot k+Q\cdot k)\left(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}-C^{(u_{21})}\right)-2(P\cdot k-Q\cdot k)\left(C^{(u_{11})}+C^{(u_{12})}-C^{(u_{22})}\right)}{P\cdot k\ q_2\cdot k}\,, \qquad (78)\\
A_{10}^{(\mathbf{A})}=&-\frac{\kappa_p}{m}\left(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}+C^{(u_{11})}+C^{(u_{12})}-C^{(u_{21})}-C^{(u_{22})}\right), \qquad (79)\\
A_{11}^{(\mathbf{A})}=&\frac{\kappa_p}{m}\left(C^{(u_{12})}-C^{(u_{22})}-C^{(s_1)}+C^{(s_2)}\right), \qquad (80)\\
A_{12}^{(\mathbf{A})}=&\frac{\kappa_p}{m}\left(C^{(u_{11})}+C^{(u_{21})}\right), \qquad (81)\\
A_4^{(\mathbf{A})}=&A_{13}^{(\mathbf{A})}=A_{14}^{(\mathbf{A})}=A_{15}^{(\mathbf{A})}=A_{16}^{(\mathbf{A})}=0\,, \qquad (82)
\end{aligned}
$$

其中因子 $C^{(s_i)}$ 和 $C^{(u_{ij})}$，以及 $i,j\in\{1,2\}$，表示相应图中耦合常数与传播子的乘积，即:

$$
\begin{aligned}
C^{(s_1)}=&\frac{-ie\ g_{\pi^0pp}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\,, \qquad (83)\\
C^{(s_2)}=&\frac{-ie\ g_{\pi^0pp}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\,, \qquad (84)\\
C^{(u_{11})}=&\frac{-ie\ g_{\pi^0pp}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\,, \qquad (85)\\
C^{(u_{12})}=&\frac{-ie\ g_{\pi^0pp}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\,, \qquad (86)\\
C^{(u_{21})}=&\frac{-ie\ g_{\pi^0pp}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\,, \qquad (87)
\end{aligned}
$$

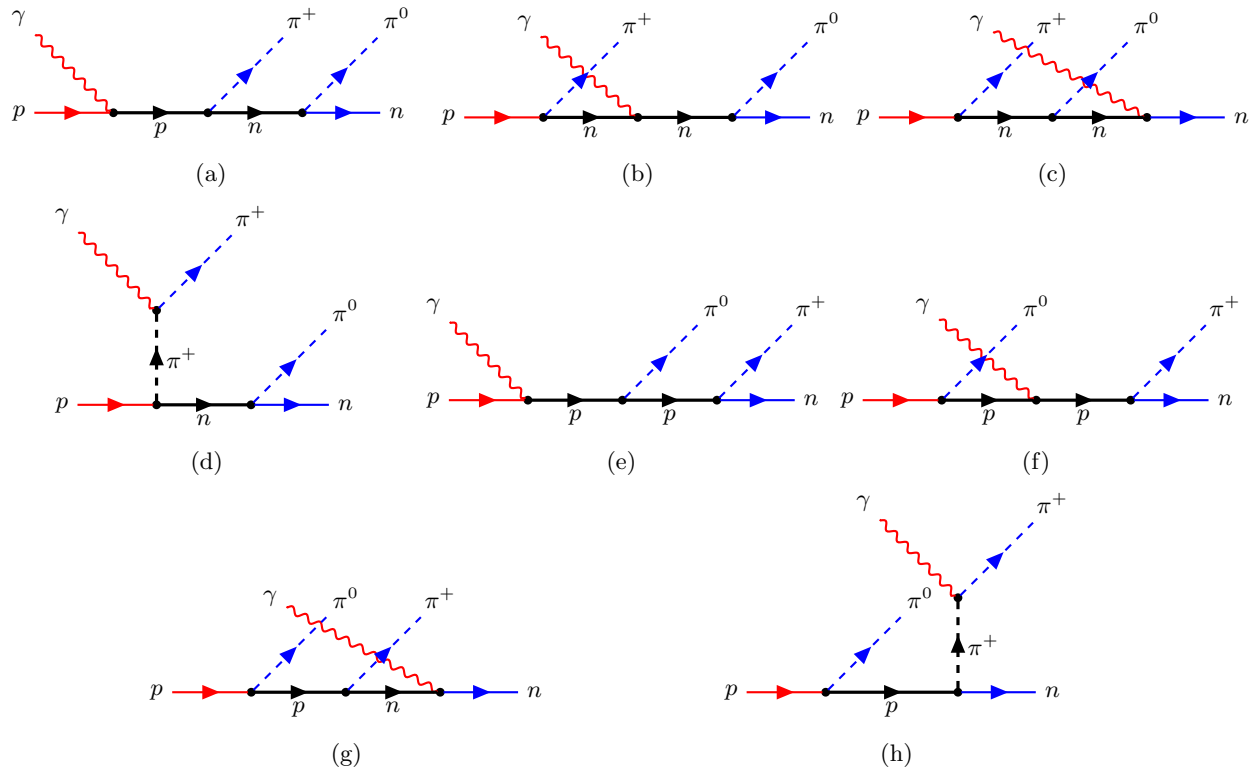

图5：过程的树级费曼图 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$。图（a）和（e）表示 s道玻恩项；图（b）、（c）、（f）和（g）表示 u 道玻恩项；图（d）和（h）表示 t道玻恩项。考虑了两种附着构型：在图（a）–（d）中，π^+ 和 π^0 介子分别附着于入射和出射重子线，而在图（e）–（h）中，附着顺序相反。

$$C^{(u_{22})} = \frac{-ie\ g_{\pi^0 pp}\ g_{\pi^0 pp}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\ . \tag{88}$$

B. $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$

该过程的不变振幅计算涉及两类图，其区别在于哪一个π介子与入射和出射重子线发生耦合，如图5所示。第一类图对应的振幅如图5(a)–(d)所示，表示为

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(s_1)} &= \frac{-ie\ g_{\pi^0 nn}\ g_{\pi^+ pn}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\ \bar{u}(p_2)\ (\not{p}_2+\not{q}_2-m) \\
&\quad \times (\not{p}_1+\not{k}+m)\left[\not{\epsilon}-\frac{\kappa_p}{4m}(\not{\epsilon}\not{k}-\not{k}\not{\epsilon})\right] u(p_1)\ , \qquad (89)\\
\mathcal{M}^{(u_{11})} &= \frac{-ie\ g_{\pi^0 nn}\ g_{\pi^+ pn}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\ \bar{u}(p_2)\ (\not{p}_2+\not{q}_2-m) \\
&\quad \times \frac{\kappa_n}{4m}(\not{\epsilon}\not{k}-\not{k}\not{\epsilon})(\not{p}_1-\not{q}_1-m)\ u(p_1)\ , \qquad (90)\\
\mathcal{M}^{(u_{12})} &= \frac{-ie\ g_{\pi^0 nn}\ g_{\pi^+ pn}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\ \bar{u}(p_2)\left[-\frac{\kappa_n}{4m}(\not{\epsilon}\not{k}-\not{k}\not{\epsilon})\right] \\
&\quad \times (\not{p}_2-\not{k}+m)(\not{p}_1-\not{q}_1-m)\ u(p_1)\ , \qquad (91)\\
\mathcal{M}^{(t_1)} &= \frac{-ie\ g_{\pi^0 nn}\ g_{\pi^+ pn}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(k-q_1)^2-m^2_{\pi^+}]}\ \bar{u}(p_2)\ (\not{p}_2+\not{q}_2-m)[(2q_1-k)\ \cdot\epsilon]u\ (p_1)\ , \qquad (92)
\end{aligned}$$

其中， κ_n 表示中子的反常磁矩。与前一种情况一样，振幅 $\mathcal{M}^{(s_1)}$和 $\mathcal{M}^{(t_1)}$ 分别并不具有规范不变性。然而，当它们的电项合并时，规范不变性得以恢复，正如

$$\begin{aligned}\Big[\mathcal{M}_{\rm el}^{(s_1)}+\mathcal{M}_{\rm el}^{(t_1)}\Big]_{\epsilon^\mu\to k^\mu} =& -ie\ g_{\pi^0nn}\ g_{\pi^+pn}\ \bar u(p_2)\Big\{\frac{(\not p_2+\not q_2-m)(\not p_1+\not k+m)\not k}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\\ &+\frac{(2q_1-k)\cdot k\,(\not p_2+\not q_2-m)}{[(k-q_1)^2-m_{\pi^+}^2][(p_2+q_2)^2-m^2]}\Big\}u(p_1)\\ =& -ie\ g_{\pi^0nn}\ g_{\pi^+pn}\ \bar u(p_2)\Big\{\frac{(\not p_2+\not q_2-m)}{(p_2+q_2)^2-m^2}\Big[\frac{(\not p_1+\not k+m)\not k}{(p_1+k)^2-m^2}\\ &+\frac{(2q_1-k)\cdot k}{[(k-q_1)^2-m_{\pi^+}^2]}\Big]\Big\}u(p_1)\\ =&\ 0\ .\end{aligned}\tag{93}$$

对于图5中e、f、g和h所示的第二类图，其振幅为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(s_2)} =& \frac{-ie\ g_{\pi^+pn}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\ \bar u(p_2)\ (\not p_2+\not q_1-m)\\ &\times(\not p_1+\not k+m)\Big[\not\epsilon-\frac{\kappa_p}{4m}(\not\epsilon\not k-\not k\not\epsilon)\Big]u(p_1)\ ,\end{aligned}\tag{94}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(u_{21})} =& \frac{-ie\ g_{\pi^+pn}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\ \bar u(p_2)\ (\not p_2+\not q_1-m)\\ &\times\Big[\not\epsilon+\frac{\kappa_p}{4m}(\not\epsilon\not k-\not k\not\epsilon)\Big](\not p_1-\not q_2-m)\ u(p_1)\ ,\end{aligned}\tag{95}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(u_{22})} =& \frac{-ie\ g_{\pi^+pn}\ g_{\pi^0pp}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\ \bar u(p_2)\Big[-\frac{\kappa_n}{4m}(\not\epsilon\not k-\not k\not\epsilon)\Big]\\ &\times(\not p_2-\not k+m)(\not p_1-\not q_2-m)\ u(p_1)\ ,\end{aligned}\tag{96}$$

$$\mathcal{M}^{(t_2)} = \frac{-ie\ g_{\pi^+pn}\ g_{\pi^0pp}}{[(k-q_1)^2-m_{\pi^+}^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\ \bar u(p_2)\ [(2q_1-k)\cdot\epsilon](\not p_1-\not q_2-m)u(p_1)\ 。\tag{97}$$

这里，振幅 $\mathcal{M}^{(s_2)}$、 $\mathcal{M}^{(u_{21})}$和 $\mathcal{M}^{(t_2)}$ 同样分别不具有规范不变性。当它们的电项合并时，规范不变性得以恢复，正如可以通过

$$\begin{aligned}&\Big[\mathcal{M}_{\rm el}^{(s_2)}+\mathcal{M}_{\rm el}^{(u_{21})}+\mathcal{M}_{\rm el}^{(t_2)}\Big]_{\epsilon^\mu\to k^\mu}\\ &=-ie\ g_{\pi^+pn}\ g_{\pi^0pp}\ \bar u(p_2)\Big\{\frac{(\not p_2+\not q_1-m)(\not p_1+\not k+m)\not k}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}+\frac{(\not p_2+\not q_1-m)\not k(\not p_1-\not q_2-m)}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\\ &\quad+\frac{(2q_1-k)\cdot k\,(\not p_1-\not q_2-m)}{[(k-q_1)^2-m_{\pi^+}^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\Big\}u(p_1)\\ &=-ie\ g_{\pi^+pn}\ g_{\pi^0pp}\ \bar u(p_2)\Big\{\frac{(\not p_2+\not q_1-m)}{(p_2+q_1)^2-m^2}\Big[\frac{(\not p_1+\not k+m)\not k}{(p_1+k)^2-m^2}+\frac{\not k(\not p_1-\not q_2-m)}{(p_1-q_2)^2-m^2}\Big]\\ &\quad+\frac{(2q_1-k)\cdot k(\not p_1-\not q_2-m)}{[(k-q_1)^2-m_{\pi^+}^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\Big\}u(p_1)\\ &=0\ .\end{aligned}\tag{98}$$

通过将 $\gamma p\to\pi^+\pi^0 n$ 产生振幅进行分解得到的狄拉克振幅 A_i 为

$$\begin{aligned}A_1^{(\mathbf{B})} =& -\frac{\kappa_p}{2m}\Big[\Big(\frac{k^2+2p_1\cdot k}{2}\Big)\big(C^{(s_1)}+C^{(s_2)}\big)-\big(q_1\cdot k-2q\cdot Q-q_1\cdot q_2+2p_1\cdot q\big)C^{(u_{21})}\Big]\\ &-\frac{\kappa_n}{2m}\Big[\Big(\frac{k^2-2p_2\cdot k}{2}\Big)\big(C^{(u_{12})}+C^{(u_{22})}\big)-\big(q_2\cdot k+2q\cdot Q-q_1\cdot q_2-2p_1\cdot q\big)C^{(u_{11})}\Big]\ ,\end{aligned}\tag{99}$$

$$A_2^{(\mathbf{B})} =\frac{1}{m}\Big\{\frac{q\cdot k}{P\cdot k}\Big[\kappa_p\big(2C^{(s_1)}-2C^{(s_2)}+C^{(u_{21})}\big)-\kappa_n\ C^{(u_{11})}\Big]+\kappa_n\,C^{(u_{11})}+\kappa_p\,C^{(u_{21})}\Big\}\ ,\tag{100}$$

$$A_3^{(\mathbf{B})} = \frac{1}{m\,P\cdot k}\Big[-2\kappa_p(Q\cdot k+P\cdot k)\big(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}\big)+(Q\cdot k-P\cdot k)\big(\kappa_n C^{(u_{11})}-\kappa_p C^{(u_{21})}\big)\Big]\,, \tag{101}$$

$$A_5^{(\mathbf{B})} = \big(C^{(t_1)}-C^{(t_2)}\big)-\kappa_n\,C^{(u_{11})}-(1+\kappa_p)\,C^{(u_{21})}\,, \tag{102}$$

$$A_6^{(\mathbf{B})} = (1+\kappa_p)\big(2C^{(s_1)}-2C^{(s_2)}-C^{(u_{21})}\big)+\big(C^{(t_1)}-C^{(t_2)}\big)+\kappa_n\,C^{(u_{11})}\,, \tag{103}$$

$$A_7^{(\mathbf{B})} = (1+\kappa_p)\big(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}-C^{(u_{21})}\big)+\kappa_n\big(C^{(u_{11})}+C^{(u_{12})}-C^{(u_{22})}\big)\,, \tag{104}$$

$$\begin{aligned}A_8^{(\mathbf{B})} =& \frac{1}{q_2\cdot k\;P\cdot k}\Big[\big(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}-C^{(u_{21})}\big)(k^2+2p_1\cdot k-2q_2\cdot k)\\ &-(C^{(t_1)}-C^{(t_2)})(k^2-4q\cdot k)\Big]\,,\end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}A_9^{(\mathbf{B})} =& \frac{1}{q_2\cdot k\;P\cdot k}\Big[-\big(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}-C^{(u_{21})}\big)(k^2+2p_1\cdot k)\\ &+(C^{(t_1)}-C^{(t_2)})(k^2-4Q\cdot k)\Big]\,,\end{aligned} \tag{106}$$

$$A_{10}^{(\mathbf{B})} = -\frac{1}{m}\Big[\kappa_p\big(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}-C^{(u_{21})}\big)+\kappa_n\big(C^{(u_{11})}+C^{(u_{12})}-C^{(u_{22})}\big)\Big]\,, \tag{107}$$

$$A_{11}^{(\mathbf{B})} = \frac{1}{m}\Big[\kappa_n\big(C^{(u_{12})}-C^{(u_{22})}\big)-\kappa_p\big(C^{(s_1)}-C^{(s_2)}\big)\Big]\,, \tag{108}$$

$$A_{12}^{(\mathbf{B})} = \frac{1}{m}\Big[\kappa_n\,C^{(u_{11})}+\kappa_p\,C^{(u_{21})}\Big]\,, \tag{109}$$

$$A_{13}^{(\mathbf{B})} = -\big(C^{(t_1)}-C^{(t_2)}\big)\,, \tag{110}$$

$$A_{16}^{(\mathbf{B})} = \frac{C^{(t_1)}-C^{(t_2)}}{P\cdot k}\,, \tag{111}$$

$$A_4^{(\mathbf{B})} = A_{14}^{(\mathbf{B})} = A_{15}^{(\mathbf{B})} = 0\,, \tag{112}$$

其中，$C^{(s_i)}$、$C^{(t_i)}$和$C^{(u_{ij})}$，以及$i,j\in\{1,2\}$表示与相应图相关联的耦合常数和传播子的乘积，定义为

$$C^{(s_1)} = \frac{-ie\;g_{\pi^0 nn}\;g_{\pi^+ pn}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\,, \tag{113}$$

$$C^{(s_2)} = \frac{-ie\;g_{\pi^+ pn}\;g_{\pi^0 pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1+k)^2-m^2]}\,, \tag{114}$$

$$C^{(t_1)} = \frac{-ie\;g_{\pi^0 nn}\;g_{\pi^+ pn}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(k-q_1)^2-m_{\pi^+}^2]}\,, \tag{115}$$

$$C^{(t_2)} = \frac{-ie\;g_{\pi^+ pn}\;g_{\pi^0 pp}}{[(k-q_1)^2-m_{\pi^+}^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\,, \tag{116}$$

$$C^{(u_{11})} = \frac{-ie\;g_{\pi^0 nn}\;g_{\pi^+ pn}}{[(p_2+q_2)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\,, \tag{117}$$

$$C^{(u_{12})} = \frac{-ie\;g_{\pi^0 nn}\;g_{\pi^+ pn}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_1)^2-m^2]}\,, \tag{118}$$

$$C^{(u_{21})} = \frac{-ie\;g_{\pi^+ pn}\;g_{\pi^0 pp}}{[(p_2+q_1)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\,, \tag{119}$$

$$C^{(u_{22})} = \frac{-ie\;g_{\pi^+ pn}\;g_{\pi^0 pp}}{[(p_2-k)^2-m^2][(p_1-q_2)^2-m^2]}\,. \tag{120}$$

C. 强子形状因子

由于强子是复合粒子，图 4 和 5 所示图中的所有强子顶点都应补充形状因子。在保持规范不变性的前提下，对双介子光产生和电产生中的形状因子进行更严格处理的方法可参见，例如文献 [19]。在此，我们以一种唯象的

方式，采用通常使用的偶极形式 [17]

$$F(q) = \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4 + (q^2 - m^2)^2} \ , \tag{121}$$

其中， q 和 m 分别是内部粒子的四动量和质量，而 Λ 是截断参数。当内部粒子处于其质量壳上，即 $q^2 = m^2$时，形状因子归一化为单位值， $F(q) = 1$。然而，与单介子光生过程不同，双介子光生的每个图都包含两条内部线。因此，第 i个图的形状因子是以下乘积

$$F_i = F(q_{i,1})\, F(q_{i,2}) \ . \tag{122}$$

需要强调的是，单个强子顶点可能会同时连接两条非壳线，例如图4（a）和5（a）所示的图。在这种情况下，该顶点的形状因子应同时依赖于两个动量 [17]、 $F(q_{i,1}$、 $q_{i,2})$，而总形状因子通常不能写成式（122）中给出的两个单线因子的乘积。然而，作为第一近似，在本研究中我们仍采用式（122）的乘积形式，并将对这一问题的详细分析留待今后的工作。

不过需要注意的是，以这种方式引入形状因子会破坏规范不变性，因为其总和具有规范不变性的图会被不同的因子相乘，从而破坏它们之间的抵消。为恢复规范不变性，我们将给定组中的每个图都乘以共同的形状因子 [18]

$$F_c = 1 - \prod_i (1 - F_i) \ , \tag{123}$$

其中，乘积遍历那些单独来看不具有规范不变性、但其总和具有规范不变性的图，并且 F_i 是 i个图的形状因子，其定义见式（122）。由于一个统一的整体因子乘在整个图组上，它可以从对这些图的求和中提出，因此规范不变性得以保持。式（123）还具有所需的极限，即 $F_c \to 1$ 只要其中任意一个 F_i 趋近于 1，振幅的在壳行为就保持不变；而当所有内部粒子都远离非壳状态时， $F_c \to 0$ 。[1] 为简单起见，在这项探索性研究中，我们对所有内部线采用单一截断参数 Λ，并考察其对可观测量的影响。

D. 数值结果

现在，我们根据第 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ 和 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ 节中推导出的狄拉克振幅，计算 III A 和 III B中的总截面和不变质量分布，并将其代入第 IID节的截面公式，然后将结果与在 MAMI 使用 Crystal Ball/TAPS 装置测得的实验数据进行比较 [33]。由于只计入了核子玻恩项，我们将比较限制在近阈值区域内，即 $E_\gamma^{\rm lab} \le 400$ 兆电子伏，也就是从以下阈值开始：$E_\gamma^{\rm lab} = 308.8$ 兆电子伏（$\pi^0\pi^0 p$）和 316.4 兆电子伏（$\pi^+\pi^0 n$），直至总质心能量达到 $W \approx 1.28$ 吉电子伏。需要注意的是，该能区已经涵盖了 $\Delta(1232)$ 在 γp 系统中的峰值，因此随着能量增加，涉及 $\Delta(1232)$ 的贡献预计将变得重要。两个过程的产生振幅只依赖于少数几个参数，即核子的 πNN 耦合常数和反常磁矩，

$$g_{\pi^0 pp} = 13.3, \quad \kappa_p = 1.792847, \quad \kappa_n = -1.913043, \tag{124}$$

以及耦合常数之间的同位旋关系，

$$g_{\pi^0 nn} = -g_{\pi^0 pp}, \quad g_{\pi^+ pn} = \sqrt{2}\, g_{\pi^0 pp}. \tag{125}$$

这些参数中没有任何一个是根据双π数据拟合得到的。唯一的自由参数是强子形状因子的截断参数 Λ （见公式（121））， 我们将其取值在700至1000兆电子伏之间变化，以评估结果对玻恩振幅非壳行为的敏感性。

总截面如图 6所示。由于仅纳入了非常有限的一组图，因此无法期望对数据进行定量描述；进行比较的目的主要是确定玻恩项在多大程度上解释了测量截面，并找出缺失的强度。作为比较，

---

[1] 请注意，文献 [18] 对单π光产生使用了类似的形状因子，ˆ$F(s,\ u,\ t) = F_1(s) + F_1(u) + F_3(t) - F_1(s)F_1(u)$ $F_1\ s\ F_3\ t\ - F_1\ u\ F_3\ t\ + F_1\ s\ F_1\ u\ F_3\ t$, 123 $s\quad u\quad t$ ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ), 它是公式（ ）的特例，其中乘积遍历–、–和–反应道的玻恩图，并且在 s和 u 反应道中使用相同的函数 F_1。这一选择旨在保持单π光产生中振幅的交叉对称性。

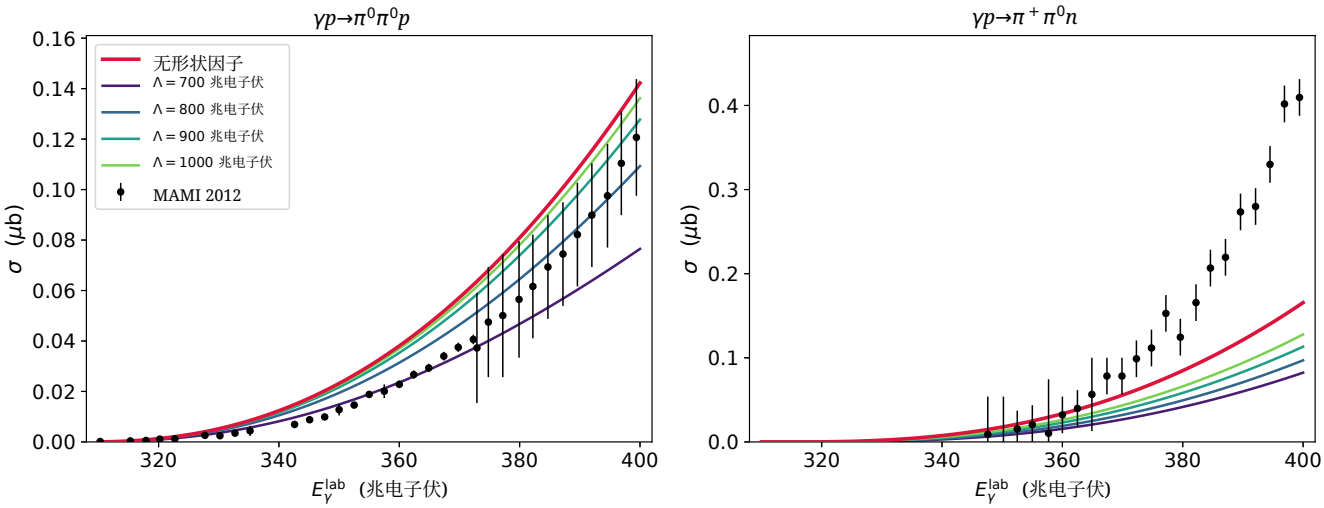

图6： $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ （左）和 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ （右）随光子实验室系能量 $E_\gamma^{\rm lab}$变化的总截面，计算基于图 4 和 5中的核子玻恩项。未使用强子形状因子时得到粗红曲线，而使用公式（123）中的规范不变的公共形状因子以及截断质量 $\Lambda = 700$、800、900 和 1000 兆电子伏时得到细曲线。数据取自参考文献 [33]。

参考文献 [6], 中的有效拉格朗日量模型纳入了约二十类共振图和非共振图，其中包括此处省略的 Δ(1232)、 ρ和 σ 贡献，能够描述截至 $E_\gamma^{\rm lab} \approx 1.5$ GeV 的数据，但在阈值附近仍低估了 $\pi^0\pi^0 p$ 截面。在我们的计算中，这两个反应道表现出相当不同的特征，下面将分别讨论。

对于 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ （图 6左图），在整个能量范围内，不含形状因子的玻恩项都高估了数据，在 $E_\gamma^{\rm lab} \approx 340$ 至 370 兆电子伏之间约高出 1.5–2 倍。形状因子会降低截面，并且其影响随能量升高而增大，因为内部核子线越来越远离非壳状态。当 $\Lambda = 700$ 兆电子伏时，计算结果与从阈值到 $E_\gamma^{\rm lab} \approx 370$ 兆电子伏的数据相符。然而，在高于该能量时，数据上升得比 $\Lambda = 700$ 兆电子伏曲线更陡，并且考虑到数据更大的不确定性，与使用 $\Lambda = 800$–900 兆电子伏的曲线吻合得更好。因此，没有单一的截断参数能够描述整个能量范围，这表明缺失贡献随能量增加而增大。最自然的候选是 Δ（1232）贡献：它既作为 s道和 u道图中的中间态出现，也出现在 $p\pi^0$ 子系统中；随着接近 Δ（1232）区域，其重要性不断增加。此外，还有等标量 S波 $\pi\pi$ 末态相互作用；在参考文献 [51] 的协变手征微扰论分析中，要描述高于 $E_\gamma^{\rm lab} \approx 340$ 兆电子伏的数据，必须考虑该相互作用。

与 $\Lambda = 700$ 兆电子伏所取得的一致性不应被解读为 $\pi^0\pi^0 p$ 道在阈值附近由核子玻恩项主导的证据。在 ChPT 中，πN 相互作用受到手征对称性的约束，该道的树级贡献在阈值附近受到强烈抑制，而阈值截面则由π介子圈图主导，即由发生再散射并转变为 $\pi^0\pi^0$ [48, 52]的带电π介子对主导。这一预测得到了 MAMI数据 [29, 33]的支持。相应地，文献 [51], 中的树级振幅包含截至手征二阶的非共振项，以及 Δ(1232)、 N(1440)和 ρ 贡献，但其数值明显低于数据。相比之下，本文所采用的赝标量 πNN 耦合不受手征对称性约束；对于两个π介子的产生，它不等价于赝矢量耦合，因为联系这两种耦合的变换会产生π介子场的二阶附加相互作用，而当两个π介子连接到同一条核子线上时，这些相互作用会产生贡献。因此， $\pi^0\pi^0 p$ 道的玻恩贡献大小强烈依赖于所选择的耦合 [6, 20]。图6左图中的比较因此表明，该形式体系给出了合理的结果，并呈现出预期的阈值行为；但是，只有在耦合方案、相应的接触项以及 $\pi^0\pi^0 p$ 再散射得到一致处理后，才能评估阈值附近 $\pi\pi$ 振幅的物理内涵。

对于 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ （图6右图），情况正好相反。玻恩项只有在$E_\gamma^{\rm lab} \approx 365$ 兆电子伏以内、实验不确定性较大的范围内，才与数据相符。超过这一范围后，玻恩项的增长速度远低于数据；在$E_\gamma^{\rm lab} = 400$ 兆电子伏时，其仅能解释测量截面的约40%。由于在我们的计算中，形状因子会使截面进一步降低，因此在 $\Lambda = 700$ 兆电子伏时仅约为数据的 20%，这一差异无法通过调节 Λ来消除；它表明存在重要产生机制的缺失。不同于

$\pi^0\pi^0$ 末态， $\pi^+\pi^0 n$ 末态可通过 Δ Kroll-Ruderman机制和 Δπ介子极点机制产生，例如 $\gamma p \to \pi^+\Delta^0 \to \pi^+\pi^0 n$，也可通过 ρ^+ 产生机制 [6, 49]产生。我们的发现与文献 [51],的结果一致：其中，非共振手征振幅单独计算时远低于 $\pi^+\pi^0 n$数据；人们发现， Δ(1232)贡献在低于 $E_\gamma^{\rm lab} \approx 440$ 兆电子伏时不可或缺，而 ρ 介子还会在阈值附近进一步增强截面。因此，与中性道相比，正是带电π介子道最清楚地暴露了纯核子玻恩描述的不完整性。

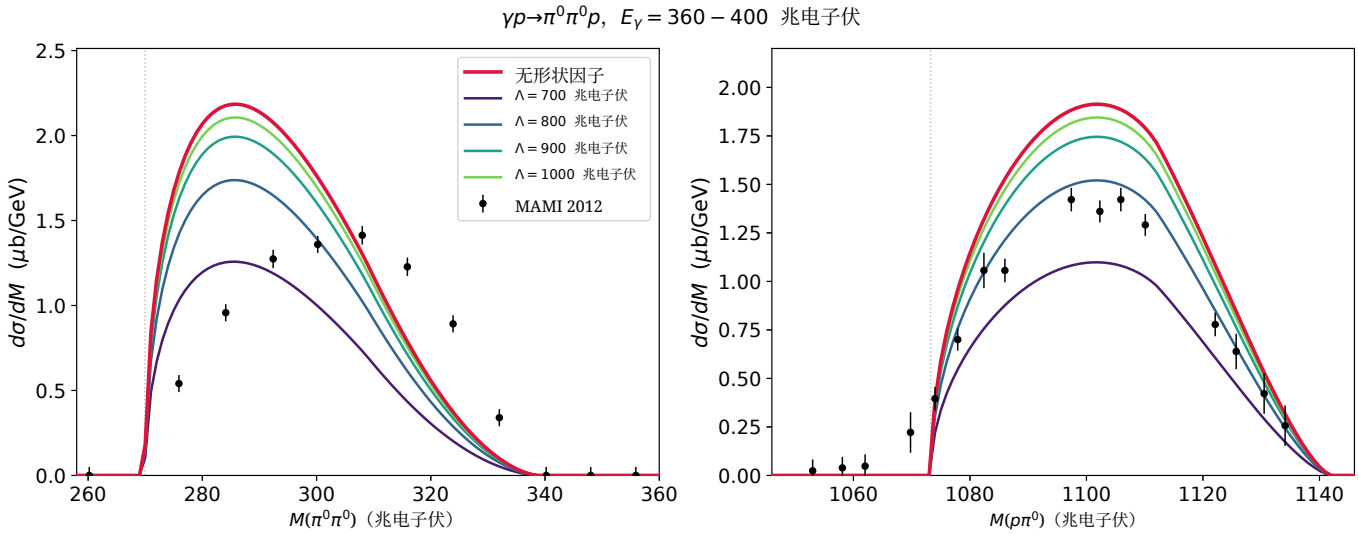

图 7：在光子能量区间 $E_\gamma^{\rm lab} = 360$–400 兆电子伏内取平均的 $\pi^0\pi^0$ （左）和 $p\pi^0$ （右）系统的不变质量分布。垂直点线表示 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$和 $\pi^0\pi^0$ 的 $p\pi^0$ 阈值。曲线与图 6中的相同，数据取自文献 [33]。

总截面对五维相空间进行积分，因此可以由截然不同的机制组合来描述。更严格的检验由不变质量分布提供，如图 7 所示，针对 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ 在能量区间 $E_\gamma^{\rm lab} = 360$–400 兆电子伏内的数据。在此区间内， $\pi^0\pi^0$ 不变质量的范围从 $2m_{\pi^0} = 270$ 兆电子伏延伸至最多 339 兆电子伏，而 $p\pi^0$ 不变质量的范围从 1073 兆电子伏延伸至最多 1142 兆电子伏。

$p\pi^0$ 分布（图7右图）的形状被所有曲线很好地再现，它们的差别基本上仅在于归一化； $\Lambda = 800$ 兆电子伏对应的曲线在数值大小上也最接近数据。对此一致性不应过分解读，因为在这一能区内， $p\pi^0$ 谱仍接近三体相空间的形状，后者在约1100兆电子伏处达到峰值，数据和计算结果也都是如此。 $\pi^0\pi^0$ 分布（图7左图）则具有明显更强的判别力。三体相空间本应在约297兆电子伏处达到峰值，而玻恩项将强度移向 $2\pi^0$ 阈值，并在约285兆电子伏处达到峰值；相比之下，数据在约305兆电子伏处达到峰值。因此，计算得到的谱在阈值以上上升得比数据陡峭得多，并且更早下降。在M（$\pi^0\pi^0$） ≈ 276 兆电子伏处，所有曲线都比数据高出约两倍或更多；而在316至324兆电子伏之间，即使是不含形状因子的曲线也只能达到数据的水平， $\Lambda = 700$ 兆电子伏对应的曲线虽能在较低能量下描述总截面，却远低于数据。由于形状因子本质上只是重新缩放分布，因此无法通过改变 Λ消除这种形状上的差异。这表明，缺失的动力学主要存在于 $\pi\pi$子系统中。自然的候选机制是与σ [f_0(500)] 介子相关的等标量 S-波 $\pi\pi$ 相互作用中的强吸引。由于相应的相移从阈值处开始上升，预计再散射增强会随 $\pi\pi$ 不变质量增大，从而将强度移向更高质量，这正是数据所要求的方向。这一解释与手征分析中发现的该道 $\pi\pi$ 再散射和π介子圈图的重要性相一致 [48, 51, 53]。

这些结果表明，尽管玻恩项提供了有用的基准，但要在阈值附近对双π介子光产生进行现实描述，至少需要 Δ(1232)贡献、 ρ带电道中的介子，以及 $\pi\pi$ 等标量 S 波中的末态相互作用。在当前形式体系中，所有这些机制都只是作为狄拉克振幅 A_i的附加贡献简单地纳入；对于 Δ(1232)，建议采用一致的自旋3/2耦合 [71–74]。与此同时，该示例阐明了第I节所强调的双介子产生的一个核心优势：即使某项计算能够给出正确量级的截面，仍可能无法描述两个介子如何分配可用能量，这一点可从 $\pi^0\pi^0 p$不变质量谱中看出。

IV. 总结与结论

我们建立了一个关于核子上两个介子电磁产生的一般形式体系， $\gamma_{\rm v}N \to \Phi_1\Phi_2 B$；该体系将20世纪60年代Berends等人提出的单介子产生方法推广到了三体末态。从强子流的一般洛伦兹协变展开出发，并施加流守恒条件，我们将产生振幅表示为16个规范不变矩阵 M_i 及其相应的洛伦兹不变狄拉克振幅 A_i。对于实光子，其中四个矩阵为零。将狄拉克结构约化为泡利算符后，我们得到了16个类 CGLN 泡利振幅 $\mathcal{F}_j$；它们通过一个 16×16运动学矩阵与 A_i 相关。我们还将虚光子产生的五重微分截面表示为横向、纵向、横向-横向以及横向-纵向干涉响应函数，这与单介子电产生完全类似。尽管这些矩阵中的一部分彼此线性相关，但它们可直接由流的协变分解得到。这使我们能够从费曼图中直接读出振幅 A_i ，并为可观测量导出更加紧凑且对称的表达式。由于狄拉克振幅是唯一依赖模型的输入，该形式体系可以与任何反应模型结合使用，从树级有效拉格朗日量到幺正化方法和耦合道方法均可适用。在此框架内其余极化可观测量的推导留待未来工作。

作为首次应用，我们仅使用带赝标量 πN 耦合的核子玻恩项，计算了 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ 和 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$ 随光子实验室系能量变化的总截面，以及 $\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$的 $\pi^0\pi^0$ 和 $p\pi^0$ 不变质量分布。该例展示了如何直接从费曼图中读出狄拉克振幅。它还明确表明，尽管规范不变性会被各个单独的图破坏，但在总振幅中会得到恢复；在引入强子形状因子后，也可以通过将每一组满足规范不变性的图乘以一个共同的形状因子来保持规范不变性。

与近阈值区域MAMI数据的比较得出以下结论。(i) 对于$\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$，玻恩项高估了总截面；当 $\Lambda = 700$ 兆电子伏时，软形状因子能够再现截至 $E_\gamma^{\rm lab} \approx 370$ 兆电子伏的数据，但没有一个单独的截断参数能够描述截至400兆电子伏的整个能量范围。由于在手征微扰理论中，该道的树级贡献受到抑制，且玻恩强度强烈依赖于 πNN 耦合方案，因此这种吻合应被视为一种有效描述，而不能作为玻恩项主导的证据。(ii) 对于 $\gamma p \to \pi^+\pi^0 n$，在$E_\gamma^{\rm lab} = 400$ 兆电子伏时，玻恩项只能解释约40%的测量截面，而形状因子会使其进一步降低；因此，缺失的强度必然来自额外机制，其中最重要的是 Δ(1232)的克罗尔-鲁德曼项和π介子极点项，以及 ρ介子产生。(iii) $p\pi^0$不变质量分布的形状得到了再现，而计算得到的 $\pi^0\pi^0$ 分布峰值无论截断参数取何值，都比阈值近约20兆电子伏。这表明，同位旋标量 S波 $\pi\pi$ 相互作用，即 σ [f_0(500)]道，是不可或缺的缺失成分；同时也说明，不变质量分布能够排除那些在相同能量范围内可以再现积分截面的描述。

这些发现为未来的研究工作确立了明确的计划。自然的下一步是纳入 Δ（1232）以及一致的自旋3/2耦合，[71, 72], 、 ρ 和 σ 介子、赝矢量 πNN 耦合及其相关的接触项，以及 $\pi\pi$ 和 πN 末态相互作用，随后将研究范围扩展至第二共振区，在该区域中 N（1440）、 N（1520）和 N（1535）共振变得十分重要。在当前形式体系中，这些机制中的每一个都只是为狄拉克振幅 A_i增加一个贡献，而可观测量的表达式保持不变。由于该形式体系从一开始就是针对虚光子构建的，因此可以直接使用相同的振幅来分析双π介子电产生；目前，CLAS 和 CLAS12 已经提供了大量数据 [13, 14, 40, 42]。因此，我们预计当前框架将为双介子光产生和电产生的理论与唯象研究提供一个便捷且灵活的基础，其中包括旨在提取核子共振性质的耦合通道分析。

致谢

R. M. P. 和 T. M. 获得了印度尼西亚大学 PUTI Q1资助（合同编号：PKS- 206/UN2.RST/HKP.05.00/2025）。S. C. 获得了亚太理论物理中心（APCTP）青年科学家培训（YST）计划的资助，该计划经由韩国政府的科学技术促进基金和彩票基金提供支持；同时还获得了韩国地方政府——庆尚北道和浦项市的资助。

附录 A：振幅 A_i 与 B_i之间的关系

洛伦兹不变振幅 A_i 和 B_i 之间的关系为

$$
\begin{aligned}
A_1 &= B_1 \ , \\
A_2 &= \frac{-k^2\ B_1 - (p_1-q_2)\cdot k\ B_2 - (p_2+q_2)\cdot k\ B_3 - 2q\cdot k\ B_4}{P\cdot k\ q_2\cdot k} \ , \\
A_3 &= \frac{k^2\ B_1 + p_1\cdot k\ B_2 + p_2\cdot k\ B_3 + 2Q\cdot k\ B_4}{P\cdot k\ q_2\cdot k} \ , \\
A_4 &= B_7 + B_8 \ , \\
A_5 &= B_7 - B_8 + B_9 + B_{10} \ , \\
A_6 &= B_9 - B_{10} \ , \\
A_7 &= B_{11} \ , \\
A_8 &= \frac{-k^2\ B_{11} - (p_1-q_2)\cdot k\ B_{12} - (p_2+q_2)\cdot k\ B_{13} - 2q\cdot k\ B_{14}}{P\cdot k\ q_2\cdot k} \ , \\
A_9 &= \frac{k^2\ B_{11} + p_1\cdot k\ B_{12} + p_2\cdot k\ B_{13} + 2Q\cdot k\ B_{14}}{P\cdot k\ q_2\cdot k} \ , \\
A_{10} &= B_{17} + B_{18} \ , \\
A_{11} &= B_{17} - B_{18} + B_{19} + B_{20} \ , \\
A_{12} &= B_{19} - B_{20} \ , \\
A_{13} &= B_8 - B_7 \ , \\
A_{14} &= \frac{2B_1 - B_2 + B_3}{2P\cdot k} \ , \\
A_{15} &= B_{18} - B_{17} \ , \\
A_{16} &= \frac{2B_{11} - B_{12} + B_{13}}{2P\cdot k} \ .
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

附录 B：泡利振幅 $\mathcal{F}_j$

泡利振幅 $\mathcal{F}_j$ 与狄拉克振幅 A_i 之间的关系为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 = {} & (\tilde{k}_0 - \check{k}_0)A_1 - \beta b_{QP}A_2 - \beta(b_qP_0 - b_Pq_0)A_3 + \Big(\tilde{P}_0\check{k}_0 + P_0\tilde{k}_0 - \tilde{P}_0k_0 - b_P\Big)A_4 + \Big(\tilde{Q}_0\check{k}_0 + Q_0\tilde{k}_0 - \tilde{Q}_0k_0 \\
& - b_Q\Big)A_5 + \Big(\tilde{q}_0\check{k}_0 + q_0\tilde{k}_0 - \tilde{q}_0k_0 - b_q\Big)A_6 - \Big\{2(q_0\tilde{k}_0 - \tilde{q}_0k_0 + \tilde{q}_0\check{k}_0) + \check{q}_0k_0 - \check{k}_0q_0 - \check{q}_0\tilde{k}_0 - b_q\Big\}A_7 \\
& + (\beta q_0 - \tilde{q}_0 - \check{q}_0)\, b_{QP}\, A_8 + (\beta q_0 - \tilde{q}_0 - \check{q}_0)\, b_{qP}\, A_9 + \Big\{2\beta b_{qP} - \tilde{P}_0(b_q - q_0\check{k}_0) + \check{q}_0(b_P - P_0\tilde{k}_0)\Big\}A_{10} \\
& + \Big\{2\beta b_{qQ} - \tilde{Q}_0(b_q - q_0\check{k}_0) + \check{q}_0(b_Q - Q_0\tilde{k}_0)\Big\}A_{11} + \Big\{q_0(\tilde{q}_0\check{k}_0 - \tilde{k}_0\check{q}_0) + (\check{q}_0 - \tilde{q}_0)b_q\Big\}A_{12} + \frac{1}{2}(\tilde{k}_0\check{k}_0 - k^2)A_{13} \\
& - \beta b_{kP}A_{14} + \frac{1}{2}\Big\{2\beta b_{qk} - \tilde{k}_0(b_q - q_0\check{k}_0) + \check{q}_0(k^2 - k_0\tilde{k}_0)\Big\}A_{15} + (\beta q_0 - \tilde{q}_0 - \check{q}_0)\, b_{kP}\, A_{16},
\end{aligned}
\tag{B1}
$$

$$
\mathcal{F}_2 = \mathrm{q\,k}\sin\vartheta\left(-A_7 + \frac{b_{QP}}{W_1}A_8 + \frac{b_{qP}}{W_1}A_9 - \tilde{P}_0A_{10} - \tilde{Q}_0A_{11} - \tilde{q}_0A_{12} - \frac{1}{2}\tilde{k}_0A_{15} + \frac{b_{kP}}{W_1}A_{16}\right),
\tag{B2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_3 = {} & \frac{2\mathrm{Q\,k}}{W_2}\Big(A_1 - \frac{b_{QP}}{W_1}A_2 - \frac{b_{qP}}{W_1}A_3 - \tilde{P}_0A_4 - \tilde{Q}_0A_5 - \tilde{q}_0A_6 + 2\tilde{q}_0A_7 - \frac{2b_{Pq}}{W_1}A_{10} - \frac{2b_{Qq}}{W_1}A_{11} \\
& - \frac{1}{2}\tilde{k}_0A_{13} - \frac{b_{kP}}{W_1}A_{14} - \frac{b_{kq}}{W_1}A_{15}\Big) + \mathrm{k}\left(\mathrm{q}\cos\vartheta + \frac{2\mathrm{Q}}{W_2}q_0\right)\Big(-A_7 + \frac{b_{QP}}{W_1}A_8 + \frac{b_{qP}}{W_1}A_9 \\
& - \tilde{P}_0A_{10} - \tilde{Q}_0A_{11} - \tilde{q}_0A_{12} - \frac{1}{2}\tilde{k}_0A_{15} + \frac{b_{kP}}{W_1}A_{16}\Big),
\end{aligned}
\tag{B3}
$$

$$\mathcal{F}_4 = \frac{2\mathrm{Q}\,\mathrm{q}}{W_2}\sin\vartheta\Big\{ -(\tilde{k}_0 - k_0)A_7 + b_{QP}A_8 + b_{qP}A_9 + (P_0\tilde{k}_0 - b_P)A_{10} + (Q_0\tilde{k}_0 - b_Q)A_{11} + (q_0\tilde{k}_0 - b_q)A_{12} + \frac{1}{2}(k_0\tilde{k}_0 - k^2)A_{15} + b_{kP}A_{16}\Big\}, \tag{B4}$$

$$\mathcal{F}_5 = \mathrm{k}\Big[\alpha A_1 + \frac{b_P}{W_1}A_4 + \frac{b_Q}{W_1}A_5 + \frac{b_q}{W_1}A_6 + \big\{2(\tilde{q}_0 - \alpha q_0) + \alpha\check{q}_0\big\}A_7 - \frac{\check{q}_0 b_P}{W_1}A_{10} - \frac{\check{q}_0 b_Q}{W_1}A_{11} - \frac{\check{q}_0 b_q}{W_1}A_{12} + \frac{k^2}{2W_1}A_{13} - \frac{\check{q}_0 k^2}{2W_1}A_{15}\Big], \tag{B5}$$

$$\mathcal{F}_6 = -\mathrm{q}\sin\vartheta\left(\tilde{k}_0 A_7 + b_P A_{10} + b_Q A_{11} + b_q A_{12} + \frac{1}{2}k^2 A_{15}\right), \tag{B6}$$

$$\mathcal{F}_7 = \frac{2\mathrm{Q}}{W_2}\left(\tilde{k}_0 A_1 - b_P A_4 - b_Q A_5 - b_q A_6 + 2b_q A_7 - \frac{1}{2}k^2 A_{13}\right) - \left(\mathrm{q}\cos\vartheta + \frac{2\mathrm{Q}}{W_2}q_0\right)\left(\tilde{k}_0 A_7 + b_P A_{10} + b_Q A_{11} + b_q A_{12} + \frac{1}{2}k^2 A_{15}\right), \tag{B7}$$

$$\mathcal{F}_8 = \frac{2\mathrm{Q}\,\mathrm{q}\,\mathrm{k}}{W_2}\sin\vartheta\left(-\alpha A_7 + \frac{b_P}{W_1}A_{10} + \frac{b_Q}{W_1}A_{11} + \frac{b_q}{W_1}A_{12} + \frac{k^2}{2W_1}A_{15}\right), \tag{B8}$$

$$\mathcal{F}_9 = \mathrm{q}\sin\vartheta\Big[-\beta b_P A_3 - \Big\{\tilde{k}_0 + \alpha(\check{k}_0 - k_0)\Big\}A_6 + \Big\{\tilde{k}_0 + 2\alpha(\check{k}_0 - k_0)\Big\}A_7 + (\beta q_0 - \tilde{q}_0 - \check{q}_0)\,b_P\,A_9 + (2\beta - 1)b_P A_{10} + (2\beta - 1)b_Q A_{11} - \Big\{k_0\tilde{q}_0 - \tilde{k}_0\check{q}_0 + \alpha q_0(\check{k}_0 - k_0)\Big\}A_{12} + \frac{1}{2}(2\beta - 1)k^2 A_{15}\Big], \tag{B9}$$

$$\mathcal{F}_{10} = \mathrm{q}^2\,\mathrm{k}\sin^2\vartheta\left(\frac{b_P}{W_1}A_9 + \alpha A_{12}\right), \tag{B10}$$

$$\mathcal{F}_{11} = \mathrm{q}\,\mathrm{k}\sin\vartheta\Big\{\frac{2\mathrm{Q}}{W_2}\left(-\frac{b_P}{W_1}A_3 + \alpha A_6 - 2\alpha A_7 + \frac{2b_P}{W_1}A_{10} + \frac{2b_Q}{W_1}A_{11} + \frac{k^2}{W_1}A_{15}\right) + \left(\mathrm{q}\cos\vartheta + \frac{2\mathrm{Q}}{W_2}q_0\right)\left(\frac{b_P}{W_1}A_9 + \alpha\,A_{12}\right)\Big\}, \tag{B11}$$

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{2\mathrm{Q}\,\mathrm{q}^2}{W_2}\sin^2\vartheta\left(b_P A_9 - \tilde{k}_0 A_{12}\right), \tag{B12}$$

$$\mathcal{F}_{13} = \cot\vartheta\,\mathcal{F}_9 + \mathrm{Q}\Big[\frac{2\tilde{k}_0}{W_2}A_1 - \beta c_1 A_2 - \beta b_q A_3 + \Big\{\tilde{k}_0 + \alpha(\check{k}_0 - k_0) - \frac{2b_P}{W_2}\Big\}A_4 - \Big\{\tilde{k}_0 + \alpha(\check{k}_0 - k_0) + \frac{2b_Q}{W_2}\Big\}A_5 - \frac{2b_q}{W_2}A_6 + \frac{2}{W_2}(2b_q - q_0\tilde{k}_0)A_7 + (\beta q_0 - \tilde{q}_0 - \check{q}_0)\,c_1\,A_8 + (\beta q_0 - \tilde{q}_0 - \check{q}_0)\,b_q\,A_9 + \Big\{k_0\tilde{q}_0 - \tilde{k}_0\check{q}_0 + (\check{k}_0 - k_0)(2\tilde{q}_0 - \alpha q_0) + b_q - \frac{2q_0 b_P}{W_2}\Big\}A_{10} - \Big\{k_0\tilde{q}_0 - \tilde{k}_0\check{q}_0 + (\check{k}_0 - k_0)(2\tilde{q}_0 - \alpha q_0) + b_q + \frac{2b_Q q_0}{W_2}\Big\}A_{11} - \frac{2q_0 b_q}{W_2}A_{12} - \frac{k^2}{W_2}A_{13} - \beta k^2 A_{14} - \frac{q_0 k^2}{W_2}A_{15} + (\beta q_0 - \tilde{q}_0 - \check{q}_0)\,k^2\,A_{16}\Big], \tag{B13}$$

$$\mathcal{F}_{14} = \text{余切}\ \vartheta\,\mathcal{F}_{10} + \mathrm{Q}\,\mathrm{q}\,\mathrm{k}\ \text{正弦}\ \vartheta\left(\frac{c_1}{W_1}A_8 + \text{——} \frac{b_q}{W_1}A_9 - \alpha A_{10} + \alpha A_{11} + \frac{k^2}{W_1}A_{16}\right), \tag{B14}$$

$$\mathcal{F}_{15} = -\cot^2\vartheta\,\mathcal{F}_{10} + \cot\vartheta\,(\mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{14}) + \frac{2\mathrm{Q}^2\,\mathrm{k}}{W_2}\Big(-\frac{c_1}{W_1}A_2 - \frac{b_q}{W_1}A_3 - \alpha A_4 + \alpha A_5 + \frac{q_0 c_1}{W_1}A_8 + \frac{q_0 b_q}{W_1}A_9$$

$$-(2\tilde{q}_0-\alpha q_0)A_{10}+(2\tilde{q}_0-\alpha q_0)A_{11}-\frac{k^2}{W_1}A_{14}+\frac{q_0k^2}{W_1}A_{16}\Big), \tag{B15}$$

$$\mathcal{F}_{16}=\cot\vartheta\,\mathcal{F}_{12}+\frac{2\mathrm{Q}^2\,\mathrm{q}}{W_2}\sin\vartheta\,\Big(c_1A_8+b_qA_9+\tilde{k}_0A_{10}-\tilde{k}_0A_{11}+k^2A_{16}\Big). \tag{B16}$$

注意，我们将 P、Q 和 k 分别定义为向量 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的大小。此外，我们引入了以下记号：

$$\begin{aligned} W_1&=E_1+m_1\ , & W_2&=E_2+m_2\ , & c_1&=(s-m_1^2)/2\ ,\\ \alpha&=1+\frac{k_0}{W_1}\ , & \beta&=1-\frac{2\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{k}}{W_1W_2}, \end{aligned} \tag{B17}$$

以及某个广义符号：

$$\begin{aligned} b_X&\equiv X\cdot k\ , & b_{XY}&\equiv b_XY_0-b_YX_0\ ,\\ \tilde{X}&\equiv X_0+\frac{\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{k}}{W_1}\ , & \check{X}&\equiv X_0+\frac{2\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Q}}{W_2}\ , \end{aligned} \tag{B18}$$

其中 X、Y 是来自 P、Q、q 和 k 的任意四维向量。另请注意，由于 $b_k=k^2$，在我们的公式中，我们使用 k^2 而不是记号 b_k。

附录 C：强子张量的分量

与强子张量相关的分量 $H^{\mu\nu}$ 对于第 IID 节讨论的响应函数和微分截面为

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{|J_x|^2+|J_y|^2}{4\mathcal{N}^2}\\ &=|\mathcal{F}_5|^2+|\mathcal{F}_8|^2+\mathcal{F}_{5,10}+\mathcal{F}_{5,15}+\mathcal{F}_{6,16}-\mathcal{F}_{7,12}-\mathcal{F}_{8,11}+\mathcal{F}_{8,14}+\tfrac{1}{2}\big(|\mathcal{F}_6|^2+|\mathcal{F}_7|^2+|\mathcal{F}_9|^2+|\mathcal{F}_{10}|^2\\ &\quad+|\mathcal{F}_{11}|^2+|\mathcal{F}_{12}|^2+|\mathcal{F}_{13}|^2+|\mathcal{F}_{14}|^2+|\mathcal{F}_{15}|^2+|\mathcal{F}_{16}|^2\big)+\big(2\mathcal{F}_{5,7}-\mathcal{F}_{5,12}+\mathcal{F}_{6,8}+\mathcal{F}_{7,10}+\mathcal{F}_{7,15}\\ &\quad+\mathcal{F}_{8,9}-\mathcal{F}_{10,12}-\mathcal{F}_{14,16}\big)\cos\theta+\tfrac{1}{2}\big(|\mathcal{F}_7|^2-|\mathcal{F}_{11}|^2-|\mathcal{F}_{13}|^2-|\mathcal{F}_{14}|^2-2|\mathcal{F}_{15}|^2-|\mathcal{F}_{16}|^2-2\mathcal{F}_{5,15}\\ &\quad-2\mathcal{F}_{6,16}+2\mathcal{F}_{8,11}-2\mathcal{F}_{8,14}\big)\cos^2\theta-\big(\mathcal{F}_{7,15}-\mathcal{F}_{14,16}\big)\cos^3\theta+\tfrac{1}{2}\ |\mathcal{F}_{15}|^2\cos^4\theta-\big(2\mathcal{F}_{5,6}+\mathcal{F}_{5,16}\\ &\quad+\mathcal{F}_{6,10}+\mathcal{F}_{6,15}-\mathcal{F}_{7,8}-\mathcal{F}_{8,13}+\mathcal{F}_{11,12}+\mathcal{F}_{15,16}\big)\cos\varphi\sin\theta+\tfrac{1}{2}\big(|\mathcal{F}_6|^2-|\mathcal{F}_9|^2-2|\mathcal{F}_{10}|^2-|\mathcal{F}_{11}|^2\\ &\quad-|\mathcal{F}_{12}|^2-|\mathcal{F}_{14}|^2-2\mathcal{F}_{5,10}+2\mathcal{F}_{7,12}+2\mathcal{F}_{8,11}-2\mathcal{F}_{8,14}\big)\cos^2\varphi\sin^2\theta+\big(\mathcal{F}_{6,10}+\mathcal{F}_{11,12}\big)\cos^3\varphi\sin^3\theta\\ &\quad+\tfrac{1}{2}\ |\mathcal{F}_{10}|^2\cos^4\varphi\sin^4\theta+\big(\mathcal{F}_{5,11}+\mathcal{F}_{5,14}-\mathcal{F}_{6,7}+\mathcal{F}_{6,12}-\mathcal{F}_{7,16}+\mathcal{F}_{9,13}+\mathcal{F}_{10,11}+\mathcal{F}_{10,14}\\ &\quad+\mathcal{F}_{11,15}+\mathcal{F}_{12,16}+\mathcal{F}_{14,15}\big)\cos\varphi\sin\theta\cos\theta-\big(\mathcal{F}_{6,11}+\mathcal{F}_{6,14}+\mathcal{F}_{7,10}-\mathcal{F}_{10,12}+\mathcal{F}_{11,16}\\ &\quad+\mathcal{F}_{12,15}\big)\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos\theta-\big(\mathcal{F}_{10,11}+\mathcal{F}_{10,14}\big)\cos^3\varphi\sin^3\theta\cos\theta+\big(\mathcal{F}_{6,15}+\mathcal{F}_{7,11}+\mathcal{F}_{7,14}-\mathcal{F}_{10,16}\\ &\quad-\mathcal{F}_{12,14}+\mathcal{F}_{15,16}\big)\cos\varphi\sin\theta\cos^2\theta+\tfrac{1}{2}\big(|\mathcal{F}_{11}|^2+|\mathcal{F}_{14}|^2+2\mathcal{F}_{10,15}+2\mathcal{F}_{11,14}\big)\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta\\ &\quad-\big(\mathcal{F}_{11,15}+\mathcal{F}_{14,15}\big)\cos\varphi\sin\theta\cos^3\theta, \end{aligned} \tag{C1}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{|J_x|^2-|J_y|^2}{4\mathcal{N}^2}\\ &=\frac{1}{2}\Big[-2\big(\mathcal{F}_{5,12}+\mathcal{F}_{6,8}-\mathcal{F}_{8,9}\big)\cos2\varphi\cos\theta-2\big(\mathcal{F}_{5,16}+\mathcal{F}_{7,8}-\mathcal{F}_{8,13}\big)\cos\varphi\sin\theta\\ &\quad+\Big\{-|\mathcal{F}_7|^2+|\mathcal{F}_{13}|^2+|\mathcal{F}_{14}|^2+|\mathcal{F}_{15}|^2+|\mathcal{F}_{16}|^2+2\mathcal{F}_{5,15}+2\mathcal{F}_{6,16}+2\big(\mathcal{F}_{7,15}-\mathcal{F}_{14,16}\big)\cos\theta\\ &\quad-|\mathcal{F}_{15}|^2\cos^2\theta-2\big(\mathcal{F}_{6,15}+\mathcal{F}_{15,16}\big)\cos\varphi\sin\theta-|\mathcal{F}_{14}|^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\mathcal{F}_{14,15}\cos\varphi\sin2\theta\\ &\quad+2\big(\mathcal{F}_{8,11}+\mathcal{F}_{8,14}\big)\sin^2\varphi\Big\}\sin^2\theta+\mathcal{F}_{8,10}\sin\varphi\sin2\varphi\sin2\theta\\ &\quad+\Big\{\mathcal{F}_{5,11}+\mathcal{F}_{5,14}-\mathcal{F}_{6,7}+\mathcal{F}_{6,12}-\mathcal{F}_{7,16}+\mathcal{F}_{9,13}+\mathcal{F}_{10,14}+\mathcal{F}_{11,15}+\mathcal{F}_{12,16} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\big(\mathcal{F}_{7,11}+\mathcal{F}_{7,14}-\mathcal{F}_{10,16}-\mathcal{F}_{12,14}\big)\cos\theta-\mathcal{F}_{11,15}\cos^2\theta-\big(\mathcal{F}_{6,11}+\mathcal{F}_{6,14}+\mathcal{F}_{11,16}\\
&+\mathcal{F}_{12,15}\big)\cos\varphi\sin\theta-\mathcal{F}_{10,14}\cos^2\varphi\sin^2\theta+\big(\mathcal{F}_{10,15}+\mathcal{F}_{11,14}\big)\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\Big\}\cos\varphi\sin2\theta\\
&+\Big\{-|\mathcal{F}_6|^2+|\mathcal{F}_9|^2+|\mathcal{F}_{10}|^2+|\mathcal{F}_{11}|^2+|\mathcal{F}_{12}|^2+2\mathcal{F}_{5,10}-2\mathcal{F}_{7,12}+2\big(\mathcal{F}_{7,10}-\mathcal{F}_{10,12}\big)\cos\theta\\
&-|\mathcal{F}_{11}|^2\cos^2\theta-2\big(\mathcal{F}_{6,10}+\mathcal{F}_{11,12}\big)\cos\varphi\sin\theta-|\mathcal{F}_{10}|^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\\
&+\mathcal{F}_{10,11}\cos\varphi\sin2\theta\Big\}\big(\cos^2\theta\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\big)\Big]\cos2\phi\\
&+\frac{1}{2}\Big[\big(\mathcal{F}_{5,12}+\mathcal{F}_{6,8}-\mathcal{F}_{8,9}\big)\sin2\varphi\big(1+\cos^2\theta\big)+\big(\mathcal{F}_{5,16}+\mathcal{F}_{7,8}-\mathcal{F}_{8,13}\big)\sin\varphi\sin2\theta\\
&-2\Big\{\mathcal{F}_{5,11}+\mathcal{F}_{5,14}-\mathcal{F}_{6,7}+\mathcal{F}_{6,12}-\mathcal{F}_{7,16}+\mathcal{F}_{9,13}+\mathcal{F}_{10,14}+\mathcal{F}_{11,15}+\mathcal{F}_{12,16}\\
&+\big(\mathcal{F}_{7,11}+\mathcal{F}_{7,14}-\mathcal{F}_{10,16}-\mathcal{F}_{12,14}\big)\cos\theta-\mathcal{F}_{11,15}\cos^2\theta-\big(\mathcal{F}_{6,11}+\mathcal{F}_{6,14}+\mathcal{F}_{11,16}\\
&+\mathcal{F}_{12,15}\big)\cos\varphi\sin\theta-\mathcal{F}_{10,14}\cos^2\varphi\sin^2\theta+\big(\mathcal{F}_{10,15}+\mathcal{F}_{11,14}\big)\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\Big\}\sin\varphi\sin\theta\\
&-\Big\{-|\mathcal{F}_6|^2+|\mathcal{F}_9|^2+|\mathcal{F}_{10}|^2+|\mathcal{F}_{11}|^2+|\mathcal{F}_{12}|^2+2\mathcal{F}_{5,10}-2\mathcal{F}_{7,12}+2\big(\mathcal{F}_{7,10}-\mathcal{F}_{10,12}\big)\cos\theta\\
&-|\mathcal{F}_{11}|^2\cos^2\theta-2\big(\mathcal{F}_{6,10}+\mathcal{F}_{11,12}\big)\cos\varphi\sin\theta-|\mathcal{F}_{10}|^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\\
&+\mathcal{F}_{10,11}\cos\varphi\sin2\theta\Big\}\sin2\varphi\cos\theta+2\mathcal{F}_{8,10}\big(\cos^2\theta\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\big)\sin\varphi\sin\theta\\
&+2\mathcal{F}_{8,15}\sin\varphi\sin^3\theta+\big(\mathcal{F}_{8,11}+\mathcal{F}_{8,14}\big)\sin2\varphi\sin^2\theta\cos\theta\Big]\sin2\phi,
\end{aligned}
\tag{C2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{|J_z|^2}{2\mathcal{N}^2}\\
&=\frac{k_0^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\Big[|\mathcal{F}_1|^2+\sin^2\varphi\,|\mathcal{F}_2|^2+|\mathcal{F}_3|^2+|\mathcal{F}_4|^2-2\mathcal{F}_{2,4}\,\cos\theta+\big(\cos^2\varphi\,|\mathcal{F}_2|^2-|\mathcal{F}_3|^2\big)\cos^2\theta\\
&-2\cos\varphi\,\mathcal{F}_{3,4}\,\sin\theta+2\cos\varphi\,\mathcal{F}_{2,3}\,\sin\theta\cos\theta\Big],
\end{aligned}
\tag{C3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda_N,\lambda_B}\frac{\mathrm{Re}(J_x^*J_z)}{2\mathcal{N}^2}\\
&=\frac{k_0}{|\boldsymbol{k}|}\Bigg\{\Bigg[\big(\mathcal{F}_{1,8}-\mathcal{F}_{4,5}\big)\cos\varphi+\big(\mathcal{F}_{1,9}+\mathcal{F}_{2,5}+\mathcal{F}_{2,10}-\mathcal{F}_{4,7}+\mathcal{F}_{4,12}\big)\cos\varphi\cos\theta+\big(\mathcal{F}_{2,7}-\mathcal{F}_{2,12}\\
&-\mathcal{F}_{4,10}\big)\cos\varphi\cos^2\theta+\big(\mathcal{F}_{1,13}+\mathcal{F}_{2,8}\sin^2\varphi+\mathcal{F}_{2,14}+\mathcal{F}_{3,5}+\mathcal{F}_{4,6}+\mathcal{F}_{4,16}\big)\sin\theta\\
&-\Big\{\big(\mathcal{F}_{2,6}+\mathcal{F}_{3,12}+\mathcal{F}_{4,11}\big)\cos^2\varphi-\mathcal{F}_{3,7}+\mathcal{F}_{2,16}+\mathcal{F}_{4,14}\Big\}\sin\theta\cos\theta\\
&+\big(\mathcal{F}_{2,11}+\mathcal{F}_{3,10}\big)\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi-\big(\mathcal{F}_{3,6}+\mathcal{F}_{3,16}+\mathcal{F}_{4,15}\big)\sin^2\theta\cos\varphi\\
&+\Big\{\big(\mathcal{F}_{2,15}+\mathcal{F}_{3,11}+\mathcal{F}_{3,14}\big)\cos\varphi-\mathcal{F}_{2,10}\cos^3\varphi\Big\}\sin^2\theta\cos\theta+\big(\mathcal{F}_{3,15}-\cos^2\varphi\,\mathcal{F}_{2,14}\big)\sin^3\theta\Big]\cos\phi\\
&+\Big[-\big(\mathcal{F}_{1,9}+\mathcal{F}_{2,5}+\mathcal{F}_{2,10}-\mathcal{F}_{4,7}+\mathcal{F}_{4,12}\big)\sin\varphi-\big(\mathcal{F}_{1,8}+\mathcal{F}_{2,7}-\mathcal{F}_{2,12}-\mathcal{F}_{4,5}-\mathcal{F}_{4,10}\big)\sin\varphi\cos\theta\\
&+\big(\mathcal{F}_{2,6}+\mathcal{F}_{3,12}+\mathcal{F}_{4,11}\big)\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi+\big(\mathcal{F}_{2,8}-\mathcal{F}_{2,11}-\mathcal{F}_{3,10}\big)\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\\
&+\big(\mathcal{F}_{3,8}-\mathcal{F}_{3,11}+\cos^2\varphi\,\mathcal{F}_{2,10}\big)\sin^2\theta\sin\varphi\Big]\sin\phi\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{C4}
$$

其中

$$
\mathcal{F}_{i,j}=\mathrm{Re}(\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j^*)\ .
\tag{C5}
$$

[1] W. Roberts 和 T. Oed，核子上的双π介子产生的极化可观测量，《Physical Review C》71，055201（2005），arXiv:nucl-th/0410012。[2] H. Kamano、B. Julia-Diaz、T. S. H. Lee、A. Matsuyama 和 T. Sato，$\pi N \to \pi\pi N$ 反应的动力学耦合道研究，《Physical Review C》79，025206（2009），arXiv:0807.2273 [nucl-th]。[3] H. Kamano、B. Julia-Diaz、T. S. H. Lee、A. Matsuyama 和 T. Sato，动力学耦合道模型中的双π介子和单π介子光产生，《Physical Review C》80，065203（2009），arXiv:0909.1129 [nucl-th]。[4] H. Arenh¨ovel 和 A. Fix，核子上两个赝标量介子光产生的完备可观测量集合，《Physical Review C》89，034003（2014），arXiv:1402.6940 [nucl-th]。[5] T. Mart 和 A. Sulaksono，多极方法中的K介子光产生，《Physical Review C》74，055203（2006），arXiv:nucl- th/0609077。[6] A. Fix 和 H. Arenhoevel，核子和氘核上的双π介子光产生，《European Physical Journal A》25，115（2005），arXiv:nucl-th/0503042。[7] M. Mai、J. Hergenrather、M. D¨oring、T. Mart、U.-G. Meißner、D. R¨onchen 和 R. Workman（J¨ulich–Bonn–Washington），在耦合道分析中纳入 $K\Lambda$ [ ] **59**, 286 2023 2307 10051 电产生数据，《European Physical Journal A》（），arXiv: 。nucl-th 。[8] Y.-F. Wang、M. D¨oring、J. Hergenrather、M. Mai、T. Mart、U.-G. Meißner、D. R¨onchen 和 R. Workman（J¨ulich-Bonn- Washington），重子跃迁形状因子的全球数据驱动确定，《Physical Review Letters》133，101901（2024），arXiv:2404.17444 [nucl-th]。[9] V. D. Burkert 和 C. D. Roberts，综述：罗珀共振：破解持续五十年的谜题，《现代物理评论》91，011003（2019），arXiv:1710.02549 [nucl-ex]。[10] A. Thiel *et al.*（CBELSA/TAPS），由级联衰变链揭示 N^* 和 Δ^* 共振的三体性质，《物理评论快报》114，091803（2015），arXiv:1501.02094 [nucl-ex]。[11] I. G. Aznauryan、V. D. Burkert、G. V. Fedotov、B. S. Ishkhanov 和 V. I. Mokeev，在 $Q^2 = 0.65$（GeV /c **72**, ） ² 045201 2005 0508057 处通过单π介子和双π介子电产生数据的联合分析研究核子共振的电激发，《Physical Review C》（），arXiv:hep-ph/ 。[12] E. Golovatch *et al.*（CLAS），来自 $\gamma p \to \pi^+\pi^- p$ 反应的核子共振光耦合的首批结果，《物理快报B》788，371（2019），arXiv:1806.01767 [nucl-ex]。[13] A. Trivedi *et al.*（CLAS），使用CLAS探测器测量 $\gamma_v p \to \pi^+\pi^- p'$ 的截面： Q^2 的能量为2.0–5.0 GeV^2， W 的能量为1.400–2.125 GeV，（2026），arXiv:2607.06793 [nucl-ex]。[14] V. Mokeev、I.、P. Achenbach、V. D. Burkert、D. S. Carman、R. W. Gothe、E. L. Isupov、K. Joo、K. Neupane 和 Y. Wunderlich，来自 $ep \to e'\pi^+\pi^- p'$ 截面的核子共振电激发振幅的首批结果： W 处的 $1.56 - 1.76$ GeV以及 Q^2 处的 $2.0 - 5.0$ GeV^2，（2026），arXiv:2608.04997 [nucl-ex]。[15] H. Kamano、S. X. Nakamura、T. S. H. Lee 和 T. Sato，πN 和 γN 反应动力学耦合道模型中的核子共振，《Physical Review C》88，035209（2013），arXiv:1305.4351 [nucl-th]。[16] H. Haberzettl，含缀饰强子的π介子光产生规范不变理论，《Physical Review C》56，2041（1997），arXiv:nucl-th/9704057。[17] H. Haberzettl、C. Bennhold、T. Mart 和 T. Feuster，带形状因子的规范不变树图级光产生振幅，《Physical Review C》58，R40（1998），arXiv:nucl-th/9804051。[18] R. M. Davidson 和 R. Workman，形状因子与光产生振幅，《Physical Review C》63，025210（2001年），arXiv:nucl-th/0101066。[19] H. Haberzettl、K. Nakayama 和 Y. Oh，核子上的双介子光产生和电产生理论，《物理评论D》99，053001（2019年），arXiv:1811.01475 [nucl-th]。[20] M. Hirata、N. Katagiri 和 T. Takaki，πNN **67**, 耦合与核子上的双π介子光产生，《Physical Review C》（），arXiv:nucl-th/ 。[21] B. M. Chasan、G. Cocconi、V. T. Cocconi、R. M. Schectman 和 D. H. White，光子在氢中的多介子产生，《Physical Review》119，811（1960）。[22] J. V. Allaby、H. L. Lynch 和 D. M. Ritson，低于1 BeV的 π对光产生，《Physical Review》142，887（1966）。[23] A. Piazza、G. Susinno、L. Fiore、G. Gialanella、E. Lodi-Rizzini、G. C. Mantovani、A. Piazzoli、F. Carbonara、G. Palomba- Nicodemi 和 R. Rinzivillo，在氖气泡室中对中子上的 $\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^-\pi^0$ 光产生进行总截面测量，入射伽马射线能量最高达900兆电子伏，《Lett. Nuovo Cim.》3S1，403（1970）。[24] M. Beneventano、S. D' Angelo、F. De Notaristefani、P. Monacelli、L. Paoluzi、P. Persi、F. Sebastiani 和 M. Severi，测量入射伽马射线能量为600至900兆电子伏时 $\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^0\pi^0$ 光产生的微分截面，《Nuovo Cim. A》15，449（1973年）。[25] L. Pittner 和 P. Urban，双π介子光产生的有效拉格朗日量模型，《Nucl. Phys. B》39，227（1972）。[26] A. Kusumegi、M. Mishina、Y. Murata、K. Ukai、K. Ueno、K. Takahashi 和 S. Matsumoto，低于1 GeV的质子上的双π介子光产生，《Nuovo Cim. A》7，727（1972）。[27] W. Struczinski *et al.*（Aachen-Hamburg-Heidelberg-Muenchen），能量范围为4.1 GeV–6.2 GeV的两个π介子光产生，《Nucl. Phys. B》57，1（1973年）。[28] A. Braghieri *et al.*，质子上三个双π介子产生道的总截面测量，《物理快报B》363，46（1995）。

[29] M. Kotulla *et al.*，质子上的阈值双 π^0 光产生，《物理快报B》578，63（2004），arXiv:nucl- ex/0310031。[30] J. Ahrens *et al.*（GDH，A2），第二共振区 $\vec{\gamma}\vec{p} \to n\pi^+\pi^0$ 反应的螺旋度依赖性，《物理快报B》551，49（2003）。[31] J. Ahrens *et al.*（GDH，A2），$\gamma p \to p\pi^0\pi^0$ 反应中的中间共振激发，《物理快报B》624，173（2005）。[32] D. Krambrich *et al.*（MAMI上的Crystal Ball、TAPS、A2），质子上双π介子光产生的束流螺旋度不对称性，《物理评论快报》103，052002（2009），arXiv:0907.0358 [nucl-ex]。[33] F. Zehr *et al.*，质子上从阈值到第二共振区的 $\pi^0\pi^0$ 和 $\pi^0\pi^\pm$ 对光产生，《European Physical Journal A》48，98（2012），arXiv:1207.2361 [nucl-ex]。[34] V. Sokhoyan *et al.*（CBELSA/TAPS），反应 $\gamma p \to p\ 2\pi^0$的高统计量研究，《European Physical Journal A》51，95（2015），[勘误：European Physical Journal A 51，187（2015）], arXiv:1507.02488 [nucl-ex]。[35] Q.-H. He *et al.*，约1 GeV光产生中两个π介子的玻色–爱因斯坦关联的事件混合法，《Chinese Physics C》40，114002（2016），arXiv:1602.08216 [nucl-ex]。[36] M. Dieterle *et al.*，核子的 π^0 对光产生的螺旋度依赖截面，《物理评论快报》125，062001（2020），arXiv:2007.06079 [nucl-ex]。[37] T. Seifen *et al.*（TAPS、CBELSA），双中性π介子光产生中的极化可观测量，《European Physical Journal A》61，173 2025 2207（），arXiv:。01981 [nucl-ex]。[38] S. Garni *et al.*（A2），$\gamma p \to \pi^0\pi^0 p$ 反应的靶不对称性和束流靶不对称性，（2022），arXiv:2207.14079 [hep-ex]。[39] D. Ghosal *et al.*（A2），准自由核子的 $\pi^0\pi^\pm$ 对光产生的螺旋度依赖截面，《物理快报B》847，138273（2023），arXiv:2308.15240 [nucl-ex]。[40] I. A. Skorodumina *et al.*（CLAS），氘中质子上的双π介子电产生：准自由截面和末态相互作用，《Physical Review C》109，065205（2024），arXiv:2308.13962 [nucl-ex]。[41] A. G. Acar *et al.*（CLAS），CLAS12上 $\pi^\pm\pi^0$ 双强子束流自旋不对称性的测量，（2026），arXiv:2602.14271 [hep-ex]。[42] K. Neupane *et al.*（CLAS），使用CLAS12探测器测量 $\gamma_v p \to \pi^+\pi^- p'$ 截面： Q^2 的能量为2.4–8.0 GeV^2， W 的能量为1.4–2.1 GeV，（2026），arXiv:2609.19395 [nucl-ex]。[43] H. G. Dosch 和 D. Gordon，从质量色散和流代数理论角度看双π介子电产生和光产生，《Annals Phys.》50，472（1968）。[44] S. C. Bhargava，流代数与双π介子光产生，《Physical Review》174，1969（1968）。[45] H. W. Huang，高自旋重子的手征动力学及其在双π介子光产生中的应用，《Physical Review》174，1799 1968（）。[46] D. L

¨ **58**, 234 1968

uke、M. Scheunert 和 P. Stichel，低能双π介子光产生理论，《Nuovo Cim. A》（）。[47] M. Benmerrouche 和 E. Tomusiak，双π介子光产生的低能展开，《物理评论快报》73，400（1994）。[48] V. Bernard、N. Kaiser、U. G. Meissner 和 A. Schmidt，阈值双 π 介子光产生和电产生：中性介子多于预期，《 Nucl. Phys. A 》 580，475 （ 1994 ），arXiv:nucl-th/9403013。[49] J. A. G´omez Tejedor 和 E. Oset，核子上的双π介子光产生：同位旋道研究，《Nucl. Phys. A》600，413（1996），arXiv:hep-ph/9506209。[50] R. R. Dusaev 和 M. V. Egorov，质子和氘核上的双中性π介子光产生，《 Russ. Phys. J.》60，26 2017（）。[51] K.-G. Kang、X.-H. Cao、D.-L. Yao 和 H.-Q. Zheng，协变手征微扰理论中的核子上的双π介子光产生，《物理评论D》110，114053（2024），arXiv:2406.08165 [hep-ph]。[52] V. Bernard、N. Kaiser 和 U.-G. Meissner，阈值双中性π介子光产生，《物理快报B》382，19（1996），arXiv:nucl-th/9604010。[53] L. Roca、E. Oset 和 M. J. Vicente Vacas，核介质中的 σ 介子：通过双π介子光产生研究，《物理快报B》541，77（2002），arXiv:nucl-th/0201054。[54] F. A. Berends、A. Donnachie 和 D. L. Weaver，π介子的光产生和电产生。1. 色散关系理论，《Nucl. Phys. B》4，1（1967）。[55] G. F. Chew、M. L. Goldberger、F. E. Low 和 Y. Nambu，光介子产生的相对论色散关系方法，《Physical Review》106，1345（1957）。[56] D. Drechsel 和 L. Tiator，核子上的阈值π介子光产生，《J. Phys. G》18，449（1992）。[57] G. Knochlein、D. Drechsel 和 L. Tiator，η介子的光产生和电产生，《Z. Phys. A》352，327（1995），arXiv:nucl-th/9506029。[58] D. Drechsel、S. S. Kamalov 和 L. Tiator，幺正同位旋子模型—MAID2007，《European Physical Journal A》34，69（2007），arXiv:0710.0306 [nucl-th]。[59] T. Mart、J. A. Djaja 和 D. S. Carman，核子上的K介子电磁产生，《Prog. Part. Nucl. Phys.》150，104252（2026），arXiv:2602.16230 [hep-ph]。[60] T. Mart、L. Tiator、D. Drechsel 和 C. Bennhold，超氚核的电磁产生，《Nucl. Phys. A》640，235（1998），arXiv:nucl-th/9610038。[61] K. Miyagawa、T. Mart、C. Bennhold 和 W. Glockle，氘核上独占K介子光产生的极化可观测量，《Physical Review C》74，034002（2006），arXiv:nucl-th/0608052。[62] T. Mart，费曼理论和Regge理论中的五夸克态光产生，《Physical Review C》71，022202（2005），arXiv:nucl- th/0412096。

[63] T. Mart, 《介子光产生中1650 MeV处窄态的证据》, 《物理评论D》83, 094015（2011）, arXiv:1104.2389 [高能物理—现象学]。[64] T. Mart, 《约束

N^* 1685 **88**, 057501 2013 1309 5191 ( )共

[ ]

振的质量和宽度》, 《物理评论D》（ ）, arXiv: 。高能物理—现象学。[65] T. Mart, 《核子上的耦合 $K^+\Lambda$ 和 $K^0\Lambda$ 光产生: 近期CLAS和MAMI数据以及 $N(1680)P_{11}$ 窄态带来的影响》, 《物理评论D》100, 056008（2019）, arXiv:1909.02696 [高能物理—现象学]。[66] S. Clymton和T. Mart, 《从 $\gamma N \to K\Sigma$ 光产生中提取核子及 Δ共振的极点和Breit-Wigner性质》, 《物理评论D》104, 056015（2021）, arXiv:2104.10333 [高能物理—现象学]。[67] P. Dennery, 《 π 介子的电产生和光产生理论》, 《物理评论》124, 2000（1961年）。[68] I. A. Skorodumina、V. D. Burkert、E. N. Golovach、R. W. Gothe、E. L. Isupov、B. S. Ishkhanov、V. I. Mokeev和G. V. Fedotov, 《介子光产生和电产生独占反应中的核子共振》, 《莫斯科大学物理学通报》70, 429（2015年）。[69] J. D. Bjorken和S. D. Drell, 《 *Relativistic Quantum Mechanics*》, 《纯粹与应用物理国际丛书》（McGraw-Hill, 纽约, 1965年）。[70] K. Schilling和G. Wolf, 《如何分析非弹性轻子散射中的矢量介子产生》, Nucl. Phys. B 61, 381（1973年）。[71] V. Pascalutsa, 《通过等价定理建立一致自旋3/2耦合与不一致自旋3/2耦合之间的对应关系》, 《物理快报B》503, 85（2001年）, arXiv:hep-ph/0008026。[72] T. Vrancx、L. De Cruz、J. Ryckebusch和P. Vancraeyveld, 《高自旋费米子场的一致相互作用》, Physical Review C 84, 045201（2011年）, arXiv:1105.2688 [核理论]。[73] J. Kristiano、S. Clymton和T. Mart, 《用于粒子物理和核物理的纯自旋3 96, 052201 2 2017 1710 /传播子》, Physical Review C（ ）, arXiv: 。07930 [核理论]。[74] T. Mart、J. Kristiano和S. Clymton, 《具有一致相互作用的纯自旋3/2表示》, Physical Review C 100, 035207（2019年）, arXiv:1909.04282 [核理论]。