arXiv:2611.30768v2 [math.CV] 24 Nov 2026

具有连续边界的伪凸域的超凸性

Xu Wang 和 CHENWEI YANG

摘要。本文是一篇阅读笔记，介绍了用圆盘公式证明具有连续边界的 $\mathbb{C}^n$ 中有界伪凸域的超凸性。

1. 引言

若存在 Ω 上的连续多重次调和（psh）函数 ψ，使得对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $\{\psi < t\} \Subset \Omega$，我们就称域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是伪凸的（我们称这样的 ψ 为穷竭函数）。若可以选取 ψ，使得对于 Ω 上某个负的连续 psh 函数 ρ，有 $\psi = -\log(-\rho)$，那么我们称 Ω 为双曲凸域。注意，对每个 $c < 0$ 都有 $\{\rho < c\} \Subset \Omega$，我们称这样的 ρ 为负穷竭函数。因此，若一个域具有连续的负 psh 穷竭函数，它就是双曲凸的。

众所周知，在某些光滑边界假设下，有界伪凸域是超凸的。Diederich–Fornæss [7] 证明了 C^2 情形，随后 Kerzman–Rosay [11]证明了 C^1 情形，Demailly [6] 证明了 Lipschitz 情形，Avelin–Hed–Persson [1] 证明了对数-Lipschitz 情形，Wang [16] 证明了径向对数-Lipschitz 情形，最后由 Chen 证明了 Hölder 情形 [5]。

以下 连续边界情形在 [5, 问题 1] 和 [3, 问题 2]中被提出 .

定理1.1。 具有连续边界的有界伪凸域是超凸的。

关于 AI 的使用。上述定理的证明由 GPT-5.6 Sol 找到。我们的目标是简化并分享该证明。我们不声称对该证明有任何贡献。

致谢。感谢 Bo-Yong Chen 分享这一问题，并指出 (2.7) 蕴含：具有C^α 边界的伪凸域的双曲凸性指数为 $\geq \alpha/2$。特别地， [4, 推论 1.8] 表明，对于具有 Hölder连续边界的伪凸域 Ω 中固定的 z_0，Bergman距离 $d(z, z_0)$ 满足$d(z, z_0) \geq C|\log \delta(z)|/\log|\log \delta(z)|$，其中 δ表示边界距离；当 z充分接近边界时成立。我们还感谢 Włodzimierz Zwonek 对定理 2.1 证明所作的澄清。

2. 格林圆盘公式证明

设 D 为一个有界域。固定 $a \in D$，这是 D 上的典范负拟亚纯函数，即在 a处具有极点的多复 Green 函数，定义为

$$G_D(z, a) := \sup\{\psi(z) : \psi \text{ is negative psh on } D \text{ and } \nu_a(\psi) \geq 1\},$$

日期：2026年11月25日。

其中

$$\nu_a(\psi) := \liminf_{z\to a} \frac{\psi(z)}{\log|z-a|}$$

¯表示 ψ 在 a处的勒隆数。用 $\mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$表示在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的闭包的某个邻域上_f 的全纯映射空间，其中 $f(\mathbb{D}) \subset D$。对于 $f(\alpha) = a$ ，我们使用$m_f(\alpha)$表示 $f - a$ 在 α处的消失阶。于是，对于 G_D ，我们有如下 Poletsky 型圆盘公式（关于 Poletsky 理论，见 [13, 14] ； 首个完整证明见 [10] ； 流形版本见 [15, 12], ； 奇异空间表述见 [8, 定理 1。另见 [9]，其中给出了 Poletsky 理论较早的弱勒让德对偶版本）。

定理 2.1 （见 [10]中的定理 1）。 对于有界域 $D \subset \mathbb{C}^n$中的 $z \neq a$，我们有

$$G_D(z,a) = \inf_{\substack{f\in\mathcal{O}(\mathbb{D},D)\\ f(0)=z}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{D}\\ f(\alpha)=a}} m_f(\alpha)\log|\alpha|, \tag{2.1}$$

（由于只有有限个满足 f（α）$= a$ 的 $\alpha \in \mathbb{D}$，因此它总是有限和。）

为证明定理 1.1，我们还需要以下关于伪凸域的连续性结果。

引理 2.2。 设 V 是 $\mathbb{C}$ 中的有界开集，且 $X \subset \mathbb{C}^n$ 为伪凸域。假设（s， ζ）$\mapsto f_s$（ζ） 在 $[0,1]\times V$ 上连续，并且每个 f_s 都是从 $\overline{V}$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的全纯映射。如果

$$f_0(\overline{V}) \subset X \quad \textit{and} \quad K := \bigcup_{0\le s\le 1} f_s(\partial V) \Subset X,$$

则对于每不 $s \in [0,1]$，有 f_s（V） $\subset X$。

证明。 取 X 上的一个连续多重次调和穷竭函数 ψ，并令

$$I := \{s \in [0,1] : f_s(\overline{V}) \subset X\}.$$

那么，由于 V 的紧性以及 $f_s(\zeta)$ 的连续性， I 包含 0 且是相对开集。对于 $s \in I$，对 $\psi \circ f_s$ 应用最大值原理可得

$$f_s(\overline{V}) \subset \left\{\psi \le \max_K \psi\right\} \Subset X,$$

这意味着 I 也是相对闭的。因此 $I = [0,1]$。 □

定理证明*1.1*。 设 Ω 是一个有界伪凸域。固定 $a \in \Omega$，已知（参见 [2] 中定理 1.4.6 的证明）Ω是超凸的，当且仅当

$$\lim_{z\to z_0} G_\Omega(z,a) = 0 \tag{2.2}$$

对每个 $z_0 \in \partial\Omega$。Kerzman–Rosay 局部性定理（见 [11, 命题 1.1]）进一步表明，如果对每个 $z_0 \in \partial\Omega$,

$$\lim_{z\to\partial\Omega\cap Q} G_{\Omega\cap Q}(z,a) = 0 \quad \left(\text{i.e. } \lim_{z\to w} G_{\Omega\cap Q}(z,a) = 0 \text{ for every } w \in \partial\Omega\cap Q\right), \tag{2.3}$$

存在某个凸开邻域 Q 属于 z_0 以及某个 $a \in \Omega \cap Q$。为证明（2.3），我们进行全纯仿射坐标变换，使得 $z_0 = 0$并且

$$\Omega \cap 2Q = \{z = (z', z_n) \in 2Q : \operatorname{Im} z_n < g(z', \operatorname{Re} z_n)\}, \tag{2.4}$$

其中，对某个较小常数 $0 < r < 1/2$，Q 定义为

$$Q := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : |z'| < r,\ |\operatorname{Re} z_n| < r,\ |\operatorname{Im} z_n| < 1\},$$

$g(z', \operatorname{Re} z_n)$ 对 $|z'| \le 2r$ 连续，$|\operatorname{Re} z_n| \le 2r$，$g(0) = 0$ 且

$$\max_{|z'|\le 2r,\ |\operatorname{Re} z_n|\le 2r} |g(z', \operatorname{Re} z_n)| < 1. \tag{2.5}$$

Put

$$D := \Omega \cap Q = \{z \in Q : \operatorname{Im} z_n < g(z', \operatorname{Re} z_n)\}. \tag{2.6}$$

我们知道，如果能够证明2.3，则结论（

$$0 < 1 - e^{G_D(z,a)} < \frac{8}{\delta(a)} \sqrt{g(z', \operatorname{Re} z_n) - \operatorname{Im} z_n}, \quad z \in D, \tag{2.7}$$

其中 $\delta(a) := \inf_{z\in\partial D} |z - a|$ 表示边界距离函数。为证明（2.7），我们应用¯定理 2.1。对于 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ 满足 $f(0) = z$，设

$$\mathcal{B}_{f,a}(\zeta) := c \prod_{f(\alpha)=a,\ \alpha\in\mathbb{D}} \left(\frac{\zeta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\zeta}\right)^{m_f(\alpha)}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}, \tag{2.8}$$

其中常数 $|c| = 1$ 选取为使得 $\mathcal{B}_{f,\,a}(0) = \prod_{j=1}^{s} |\alpha_j|^{m_j} > 0$。由于 $G_D < 0$，我们总有 $0 < 1 - e^{G_D(z,\,a)}$。因此，定理 2.1 表明（2.7）等价于

$$1 - \mathcal{B}_{f,a}(0) < \frac{8}{\delta(a)} \sqrt{g(z', \operatorname{Re} z_n) - \operatorname{Im} z_n}, \qquad z \in D, \tag{2.9}$$

¯对所有 $f \in \mathcal{O}$（$\mathbb{D}$，D）满足 f（0）$= z$。其主要思想是引入如下变形

$$f_s(\zeta) := f(\zeta) + \left(0', -is\varepsilon^2 B(0) J(B(\zeta))\right), \quad \varepsilon := \frac{\delta(a)}{4} < \frac{1}{2}, \tag{2.10}$$

至 $f \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}, D)$（其中 $f(0) = z$），其中 $0'$ 表示 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的原点，B 是 $\mathcal{B}_{f,\,a}$ 的简写，并且

$$J(\lambda) := \frac{2 - \lambda - \lambda^{-1}}{4} \tag{2.11}$$

表示 Joukowski 映射。我们将通过对 $X := \Omega \cap 2Q$ 和$V := \{\zeta \in \mathbb{D} : |B(\zeta)| > \varepsilon B(0)\}$. 应用引理 2.2 来证明 (2.9)。下面验证引理 2.2 的假设：$f_0(V) \subset X$成立，这是因为 $D \subset X$；为验证第二个假设，我们使用 $\partial V \subset \{|\zeta| = 1\} \cup \{|B(\zeta)| = \varepsilon B(0)\}$. 对于第一个 $|\zeta| = 1$ 部分，我们有 $|B(\zeta)| = 1$。由于 J 将 $|\lambda| = 1$ 映射到 $[0, 1]$, , (2.4) 和 (2.5) 给出

$$\bigcup_{0\le s\le 1} f_s(\partial\mathbb{D}) \in f(\partial\mathbb{D}) + \{(0', -it\varepsilon^2) : t \in [0, 1]\} \Subset \Omega \cap 2Q.$$

为处理 ∂V 的第二部分，我们对 $(f(\zeta) - a)/B(\zeta)$ 应用最大值原理：

$$|f(\zeta) - a| \leq |B(\zeta)| \sup_{|\xi|=1} \left|\frac{f(\xi) - a}{B(\xi)}\right| = |B(\zeta)| \sup_{|\xi|=1} |f(\xi) - a| \leq 3|B(\zeta)|, \ \forall\, |\zeta| \leq 1.$$

因此，对于 ζ with $|B(\zeta)| = \varepsilon B(0) \leq \varepsilon = \delta(a)/4$，我们有 $|f(\zeta) - a| \leq 3\delta(a)/4$ 和

$$|f_s(\zeta) - a| \leq |f(\zeta) - a| + \varepsilon |B(\zeta) J(B(\zeta))| \leq \frac{3\delta(a)}{4} + \frac{\delta(a)}{4}\frac{9}{16} < \delta(a), \quad \forall\, s \in [0,1].$$

因此我们有 $\bigcup_{0\leq s\leq 1} f_s(\partial V) \Subset \Omega \cap 2Q$ 以及引理2.2 对于 $X = \Omega \cap 2Q$ 给出 $f_s(V) \subset X$ 对所有 $s \in [0,1]$。特别地，

$$f_1(0) = \left(z', z_n + \frac{i\varepsilon^2(1 - B(0))^2}{4}\right) \in \Omega \cap 2Q$$

给出$\operatorname{Im} z_n + \frac{\varepsilon^2 (1-B(\quad 0\quad)^2}{4} < g^{))}(z', \operatorname{Re} z_n)$，由此可得（2.9）。 □

参考文献

[1] B. Avelin、L. Hed 和 H. Persson，关于超越利普希茨正则性的伪凸域的超凸性，Potential Anal. 43 (2015)，第 3 期，531–545。doi:10.1007/s11118-015-9486-1。页码 1[2]Z. Błocki，多复势理论中的复 Monge–Ampère 算子，讲义，雅盖隆大学，1998。作者在线讲义。页码 2[3] Z. Błocki，伯格曼核与多复势理论，载于 Analysis, Complex Geometry, and Mathematical Physics，Contemp. Math. 644，Amer. Math. Soc.，2015，1–10。doi:10.1090/conm/644/12785。页码 1[4] B.-Y. Chen，伯格曼核与双曲凸性指数，Anal. PDE 10 (2017)，1429–1454。页码 1[5] B.-Y. Chen，每个具有赫尔德边界的有界伪凸域都是超凸的，Bull. Lond. Math. Soc. 53 (2021)，1009–1015。doi:10.1112/blms.12478。页码 1[6] J.-P. Demailly，Monge–Ampère 测度与多重调和测度，Math. Z. 194 (1987)，519–564。doi:10.1007/BF01161920。页码 1[7] K. Diederich 和 J. E. Fornæss，伪凸域：有界严格多重次调和穷竭函数，Invent. Math. 39 (1977)，129–141。页码 1[8] B. Drinovec Drnovšek 和 F. Forstnerič，奇异复空间上的 Poletsky–Rosay 定理，Indiana Univ. Math. J. 61 (2012)，第 4 期，1407–1423。作者提供的副本；参见定理1.1。页码 2[9] D. A. Edwards，某些下半连续函数空间的 Choquet 边界理论，载于 Function Algebras（1965年杜兰大学国际研讨会论文集），F. T. Birtel（编），Scott, Foresman and Co.，芝加哥，1966，300–309。页码 2[10] A. Edigarian，关于多复 Green 函数的定义，Ann. Polon. Math. 67 (1997)，233–246。页码 2[11] N. Kerzman 和 J.-P. Rosay，有界多重次调和穷竭函数与 taut 域，Math. Ann. 257 (1981)，171–184。doi:10.1007/BF01458282。页码 1, 2[12] F. Lárusson 和 R. Sigurdsson，流形上圆盘泛函包络的多重次调和性，J. reine angew. Math. 555 (2003)，27–38。doi:10.1515/crll.2003.013。页码 2[13] E. A. Poletsky，多重次调和函数作为变分问题的解，载于 Several Complex Variables and Complex Geometry, Part 1（1989年圣克鲁兹，CA），Proc. Sympos. Pure Math. 52, Part 1，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，RI，1991，163–171。doi:10.1090/pspum/052.1/1128523。页码 2[14] E. A. Poletsky，全纯流，Indiana Univ. Math. J. 42 (1993)，第 1 期，85–144。期刊记录。页码 2[15] J.-P. Rosay，全纯流形上的圆盘 Poletsky 理论，Indiana Univ. Math. J. 52 (2003)，第 1 期，157–169。doi:10.1512/iumj.2003.52.2170。页码 2

[16] X. Wang，非光滑伪凸域的超凸性，《波兰数学年刊》**111** (2014)，1–11。页码 1

数学科学系，挪威科技大学，NO-7491 特隆赫姆，挪威

电子邮箱地址：xu.wang@ntnu.no

数学科学学院，复旦大学，中国上海，20043电子邮箱地址：23110180045@m.fudan.edu.cn