通过超导体中的逆自旋霍尔效应实现完美的自旋-电荷信号转换

Rodrigo de las Heras，[1, 2, *] Ilya V. Tokatly，[3, 4, 5] 和 F. Sebastian Bergeret [1, 3]1材料物理中心（*CFM-MPC*）*CSIC-UPV/EHU*联合中心，西班牙多诺斯蒂亚-圣塞瓦斯蒂安 *E-20018* 2巴斯克大学（*UPV/EHU*）3多诺斯蒂亚国际物理中心（*DIPC*），西班牙多诺斯蒂亚-圣塞瓦斯蒂安 *20018*4巴斯克大学（*UPV/EHU*）高分子与先进材料系，西班牙多诺斯蒂亚-圣塞瓦斯蒂安 *20018*5*IKERBASQUE*，巴斯克科学基金会，西班牙毕尔巴鄂 *48009*

arXiv:2611.30781v1 [cond-mat.supr-con] 23 Nov 2026

自旋-电荷转换是自旋电子学的核心，但传统自旋霍尔机制受限于较小的自旋霍尔角。本文表明，超导性能够克服这一限制，实现接近百分之百的自旋-电荷信号转换。我们考虑一种非局域自旋阀几何结构，其中自旋积累被注入超导体，并通过逆自旋霍尔效应转换为横向电荷信号。在超导态中，能隙以下受到强烈抑制的准粒子电导使产生的电荷不平衡能够形成与注入的自旋偏压相当的电压，尽管自旋霍尔角很小。我们推导了包含有限谱展宽和有限温度的完整非平衡响应，并提出测量探测器电压随温度和自旋偏压的变化，以检验我们的预测。

超导体中的自旋注入和自旋积累研究历史悠久，涵盖了多种在概念上各不相同的实验 [1–10]。超导体中的自旋注入已成为超导自旋电子学的核心课题 [11]，在这一领域，无耗散电荷输运与自旋相关的非平衡现象并存。

在具有强自旋轨道耦合的系统中，自旋注入可通过逆自旋霍尔效应（ISHE）产生横向电荷流 [12, 13]，，从而实现对自旋输运的电学探测。尽管逆自旋霍尔效应在正常金属中已得到充分确立，但它在超导体中的表现要微妙得多。超导会深刻改变准粒子谱，进而影响弛豫特征长度，因此其非平衡响应与正常态有着本质区别。

此前关于超导体中自旋注入 [14–17]，以及超导体中逆自旋霍尔效应（ISHE） [18, 19]，的理论研究，通常忽略了自旋注入器附近、距离约为 ξ 范围内发生的过程，其中 ξ 为超导相干长度。这些研究通常还假设注入器（一般为正常金属或铁磁体）不会扰动超导能谱。对于电荷注入 [20–22]，，这类近似或许适用，但对自旋注入未必成立。正如参考文献 [23]，最近所示，忽略超导性的局部变化可能会遗漏非平衡响应中的关键贡献，并导致对自旋注入实验的不完整解读。这些贡献如何影响在非局域几何结构中测得的逆自旋霍尔电压，仍是一个悬而未决的问题。尤其是，目前尚不清楚超导性会抑制还是增强相对于正常态的检测电压，也不清楚哪些实验特征能够明确揭示这些效应。

在本通信中，我们探讨这些问题。我们建立了超导体中逆自旋霍尔效应的理论。我们发现，与能隙打开会抑制信号这一简单预期相反，超导反而能够显著增强探测到的电压。值得注意的是，在理想的BCS超导体中，当 $T \to 0$ 时，自旋-电荷信号转换效率趋近于**1**，从而几乎可以完美地将自旋积累转换为电荷电压。非弹性过程导致的有限谱展宽以及温度都会降低这一效率。尽管如此，在很宽的温度和自旋偏压范围内，探测到的电压仍比正常态高出数个数量级。

具体而言，我们考虑典型的非局域自旋阀几何结构，如图 1(a)–(b)所示。非磁金属通道中存在非平衡自旋积累，其特征由自旋偏压 V_s描述，该偏压定义为自旋种类 [17,24] 的电化学势之差。在长度为 $L_{\rm inj}$ 的界面处，部分自旋积累被注入超导体，其中由自旋霍尔角θ 介导的自旋-电荷转换会产生横向电荷响应。该响应通过电压 $V_{\rm det}$ 由非磁金属探针探测。

我们首先关注众所周知的正常态结果。对于图 1(a)–(b)所示的几何结构，注入超导体中的自旋积累 S 满足自旋扩散方程。如果 $L_{\rm inj}$ 远大于自旋弛豫长度 κ_s^{-1}，在接触区域深处，注入的自旋沿着

厚度 $z \in [0, W]$ 变化，呈

$$S(z) = N_0 V_s \frac{R_s}{R_b} \frac{\cosh(\kappa_s(z-W))}{\sinh(\kappa_s W)}. \tag{1}$$

其中， R_b 是正常态界面电阻，$R_s = 1/(\kappa_s \sigma_n A)$ 是自旋电阻， σ_n 是正常态德鲁德电导率， A 是接触面积， N_0 是费米能级处的态密度。自旋积累梯度驱动自旋流，随后通过逆自旋霍尔效应将其转换为横向电荷流（自旋霍尔电流）。在开路条件下，会产生横向电压 V_{det} ，其表达式为:

$$V_{\text{det}} = \theta \frac{L_{\text{inj}}}{W} \frac{S(0) - S(W)}{N_0}. \tag{2}$$

结合式（1）和（2），可得:

$$V_{\text{det}} = r V_s \tag{3}$$

其中，正常态下的自旋到电荷信号转换效率为:

$$r = \theta \frac{L_{\text{inj}}}{W} \frac{R_s}{R_b} \tanh\left(\frac{\kappa_s W}{2}\right). \tag{4}$$

因此，在正常态下， r 受限于较小的自旋霍尔角 θ，通常只有百分之几。

超导态则有本质上的不同。注入的自旋积累会转化为准粒子电荷不平衡 Q^*，它决定准粒子相对于凝聚体的电化学势。测得的电压 V_{det}，图1(a)–(b)，由探测器两端的电荷不平衡之差决定 δQ^* ，通过 [17, 21]

$$\delta Q^* = \int_0^\infty N_\omega f_T(V_{\text{det}}) d\omega \tag{5}$$

其中

$$N_\omega = \text{Re}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}\right) \tag{6}$$

是归一化的BCS态密度，

$$f_T(V) = n_{FD}(\omega - V) - n_{FD}(\omega + V)\,, \tag{7}$$

而 n_{FD} 是费米-狄拉克分布。

由自旋偏压产生的电荷不平衡压降V_s 在与自旋通道的接触处可表示为（详见附录B3 ）:

$$\delta Q^* = r \int_\Delta^\infty N_\omega f_T(V_s) d\omega. \tag{8}$$

将此表达式与方程(5)结合，可得探测器电压的积分方程:

$$\int_\Delta^\infty N_\omega f_T(V_{\text{det}}) d\omega = r \int_\Delta^\infty N_\omega f_T(V_s) d\omega. \tag{9}$$

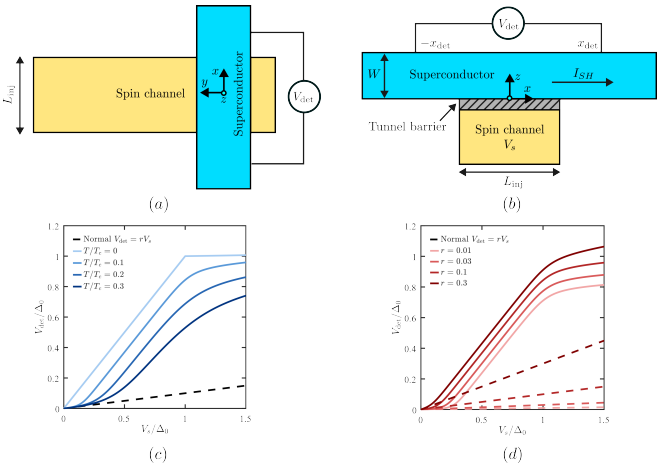


FIG. （a）–（b）本研究所考虑装置的示意图。宽度为 W 的二维超导线通过隧穿势垒与长度为 L_{inj} （$x \in [-\frac{L_{\text{inj}}}{2}, \frac{L_{注入}}{2}]$）的normal金属自旋通道耦合，自旋偏压为 V_s。正常金属电压探针位于距自旋通道中心 x_{det} 处。（c）–（d）对于理想BCS超导体，探测器电压 V_{det} 随自旋偏压的变化关系。超导能隙取为满足温度依赖性 $\Delta = \Delta_0 \tanh\left(1.74\sqrt{T_c/T - 1}\right)$。（c）对于 $r = 0.1$和 T的若干取值。（d）对于 $T/T_c = 0.1$和 r的若干取值。虚线表示正常态行为 $V_{\text{det}} = rV_s$

在高温极限 $T \gg V_s$下，此方程给出正常态结果，即方程(1)，见附录A1。而在极限 $T \to 0$下，则得到（详情见附录A3 ）:

$$\lim_{T\to 0} V_{\text{det}} = \begin{cases} V_s & \text{if } V_s < \Delta_0 \\ \sqrt{\Delta_0^2 + r^2(V_s^2 - \Delta_0^2)} & \text{if } V_s > \Delta_0 \end{cases}. \tag{10}$$

因此，在零温度下，对于低于超导能隙的自旋偏压，自旋到电荷信号转换效率与自旋霍尔角无关θ ，且达到 1。

在有限温度下，转换效率会低于这一理想极限，但在很宽的温度范围内，它仍远高于正常态值。图1(c)–(d)通过数值求解方程 V_{det}（V_s）展示了对方程（9）的依赖关系。在有限温度下，会出现三个区域：(i) 初始线性区间，斜率为 r，与正常态相同；(ii) 中间区间，其中 V_{det} 趋近于 V_s，对应着接近单位值的转换效率；以及 (iii) 高偏置区间，此时响应再次呈线性，斜率为 r。进入增强区域的交叉发生在自旋偏压约为 $V_s \sim T|\ln r|$。

方程（9）适用于理想的BCS超导体。不过，在真实的超导体中，即使在 $T \to 0$ [25, 26]，非弹性散射过程也不可避免。

这类非弹性过程通常用Dynes参数 η描述，会使零能量处出现有限的态密度，其量级为 η。在本文余下部分，我们将方程（9）推广到有限的 η ，并表明，尽管 $V_{\rm det}$ 会因非弹性过程而减小，该信号仍可比正常态下大几个数量级。

我们的出发点是推广至包含自旋霍尔效应的 Usadel方程 [27–29]:

$$\partial_k \mathcal{J}_k + [-i\omega\tau_3 + \Delta e^{i\tau_3\varphi}\tau_1, g] + \frac{1}{8\tau_{so}}[\sigma_i g \sigma_i, g] = \mathcal{T} \quad (11)$$

其中， g 表示 Keldysh-Nambu-自旋空间中的准经典格林函数矩阵（GF），满足归一化条件 $g^2 = 1$ [17]。符号 σ_i 和 τ_i 分别表示作用于自旋空间和Nambu空间的泡利矩阵。此外， φ为超导相位， τ_{so} 为自旋弛豫时间，我们假定其源于自旋轨道相互作用。矩阵电流 $\mathcal{J}_k$ 和力矩 $\mathcal{T}$ 定义如下:

$$\mathcal{J}_k = -D\left(g\partial_k g - \epsilon_{klm}\frac{\theta}{4}\{\partial_l g, \sigma_m + g\sigma_m g\}\right) \quad (12)$$

$$\mathcal{T} = \frac{D}{4}\epsilon_{ijk}\theta[\sigma_k, g\partial_i g\partial_j g] \quad (13)$$

其中， D 为正常态扩散常数， ϵ_{ijk} 为 Levi-Civita 张量， θ 为自旋霍尔角。

为描述通过隧穿势垒与超导体耦合的正常金属电极中的自旋注入，我们采用广义的Kupriyanov-Lukichev边界条件 [30]:

$$n_k \mathcal{J}_k = \frac{D}{2\sigma_n R_b A}[g, g_{\rm inj}] \quad (14)$$

其中， n_k 为垂直于界面的单位矢量。注入器处的 GF，即 $g_{\rm inj}$，分别具有推迟、超前和 Keldysh 分量 $g^R_{\rm inj} = -g^A_{\rm inj} = \tau_3$ 和 $g^K_{\rm inj} = 2\tau_3 \tanh\left(\frac{\omega+\sigma_y V_s}{2T}\right)$。

由于 Usadel方程高度非线性，通常必须将其与 Δ 的自洽方程一并数值求解。然而，对界面电阻倒数 R_b^{-1} 进行微扰展开后，即可在隧穿极限下获得解析解。这一极限也最便于清晰地解释实验，因为高度透明的界面会引发显著的近邻效应，从而抑制能隙，并掩盖超导体的内禀物理。

自旋注入。 对于自旋注入过程，我们设定$\theta = 0$。这样一来，自旋积累由 θ的零阶项决定，而该自旋积累产生的电荷响应则出现在 θ的一阶项中。因此，我们的处理相当于对自旋霍尔角进行微扰展开。

在这些假设下，我们在附录 B1中证明，接触区域内注入的自旋积累的空间分布（$|x| \ll L_{\rm inj}/2$）为 [17]:

$$S(z) = \frac{N_0}{8}\int_0^\infty {\rm Tr}\left(\sigma_y\tau_3 g^K\right) d\omega = \int_0^\infty S_\omega(z) d\omega \quad (15)$$

其中，每单位准粒子能量 ω 对应的谱自旋积累为:

$$S_\omega(z) = N_0 \frac{R_s}{2R_b}\left(1 + \frac{\Delta^2 + \omega^2 + \eta^2}{|\Delta^2 - (\omega + i\eta)^2|}\right) \frac{f_T(V_s)}{\sqrt{1 + \frac{\kappa_\omega^2}{\kappa_s^2}}} \frac{\cosh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2}(z - W)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2}W\right)} \quad (16)$$

而 $\kappa_\omega = \sqrt{\frac{2}{D}{\rm Re}\left(\sqrt{\Delta^2 - (\omega + i\eta)^2}\right)}$ 定义了进入超导体的能量依赖的衰减长度。

值得注意的是， $S_\omega(z)$即使在亚能隙能量（$|\omega| < \Delta$）下仍保持有限；这一行为在参考文献 [23]中有详细讨论。对于 $\Delta, \kappa_\omega \to 0$ 将其代入式（15）和（16），即可直接恢复式（1）中的正常态结果。

自旋-电荷转换。通过逆自旋霍尔效应，这种自旋积累的梯度会产生横向电荷流。在开路条件下，该电流受到两个不同贡献的屏蔽：库珀对超电流，以及会引起电荷不平衡 Q^*。在附录B2中，我们证明，由式（ δQ^*16）中的自旋积累所产生的探测器两端总电荷不平衡降为:

$$\delta Q^* = 2\theta\int_0^\infty \frac{q_\omega(S_\omega(0) - S_\omega(W))}{N_0\kappa_\omega W}\sinh\left(\frac{\kappa_\omega L_{\rm inj}}{2}\right)e^{-\kappa_\omega x} d\omega \quad (17)$$

其中 $q_\omega = {\rm Re}\left(\frac{\sqrt{(\omega+i\eta)^2 - \Delta^2}}{\omega}\right)$为有效准粒子电荷 [31]。与正常态类似，电荷不平衡仍与两个界面间的自旋积累降幅成正比，此时还受到准粒子电荷 q_ω的加权。令 $\Delta, \kappa_\omega \to$

0 代入式（17）可得 $\delta Q^* = V_{\rm det} = rV_s$，从而恢复了正常态下的结果，来自方程（3）。

将方程（17）的结果代入方程（5），得到：

$$\int_0^\infty N_\omega f_T(V_{\rm det})d\omega = 2\theta\int_0^\infty \frac{q_\omega(S_\omega(0)-S_\omega(W))}{N_0\kappa_\omega W}\sinh\left(\frac{\kappa_\omega L_{\rm inj}}{2}\right)e^{-\kappa_\omega x_{\rm det}}d\omega. \tag{18}$$

这里，态密度包含 Dynes展宽，表达式为

$$N_\omega = {\rm Re}\left(\frac{\omega+i\eta}{\sqrt{(\omega+i\eta)^2-\Delta^2}}\right). \tag{19}$$

在极限 $\eta\to 0$下，方程（18）化为方程（9），恢复了理想BCS结果。

图2展示了通过数值求解方程（18）得到的 $V_{\rm det}(V_s)$ 依赖关系。有趣的是，在很大范围的亚能隙自旋电压下，$V_{\rm det}$ 大于正常态中检测到的电压（虚线），这与图1中讨论的解析结果一致。在低温下，随着 V_s 接近超导能隙，$V_{\rm det}$ 会出现尤为显著的非线性增强。从图2(b)和(c)可以看出，升高温度T 或增大展宽 η ，都会显著影响信号大小。这些结果表明，有两种互补的实验检验方法。首先，在远低于 T_c的固定温度下，可以增大自旋偏压 V_s。在正常态下，$V_{\rm det}$ 随 V_s线性增长；而在超导态下，它会呈现强烈的非线性增长：超过某一阈值自旋偏压后，$V_{\rm det}$ 便超过其正常态值，且增强迅速增大，在某些情况下，当 V_s 接近 Δ_0时，可达到一至两个数量级。其次，在固定且足够大的自旋偏压下，可以在冷却样品、使其从正常态转变为超导态的过程中测量 $V_{\rm det}$。此时，$V_{\rm det}$ 应升至远高于其正常态值，随后在温度降至最低时回落。

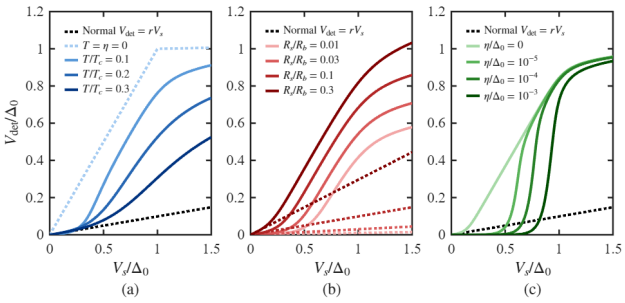


图 2. 探测器电压 $V_{\rm det}$ 随自旋偏压 V_s 的变化，参数为 $L_{\rm inj}/\xi_0 = 50$、$W/\xi_0 = 5$、$\kappa_s\xi_0 = 1$、$x_{\rm det}/\xi_0 = 100$ 和 $\theta = 0.1$。其中，$\xi_0 = \sqrt{D/\Delta_0}$ 为零温超导相干长度。假设超导能隙遵循温度依赖性 $\Delta = \Delta_0\tanh\left(1.74\sqrt{T_c/T-1}\right)$。(a) 对于以及若干个的取值。(b) 对于$T/T_c = 0.2$ 和 $\eta/\Delta_0 = 10^{-4}$，取若干个 R_s/R_b值。(c) 对于 $T/T_c = 0.1$和 $R_s/R_b = 0.1$，取若干个 η值。在低温下，当注入的自旋积累接近超导能隙 $V_s\sim\Delta_0$时，探测器信号会出现显著的非线性增强。虚线表示正常态行为 $V_{\rm det} = rV_s$

闭环几何。对于闭合成环的导线，即沿着 x方向呈周期性（几何形状与参考文献 [13]相同），总环流自旋霍尔电流为（见附录 B1）：

$$I_{SH} = -\theta\frac{\sigma_n}{e}\frac{L_{\rm inj}}{L}\int_0^\infty\frac{S_\omega(0)-S_\omega(W)}{N_0}d\omega \tag{20}$$

其中，e 为电子电荷，L 为环路长度。如上所述，该电流由自旋积累沿导线宽度 W方向的横向梯度产生。

对于亚能隙自旋偏压，$V_s < \Delta$，公式（20）的主要贡献来自亚能隙能量。因此，在一个相干长度内，它将转化为超电流。这种超电流可以通过其磁通量检测到，例如使用超导量子干涉仪。相反，对于 $V_s > \Delta$，准粒子贡献变得重要，并产生电荷不平衡 Q^*。因此，在小于电荷不平衡弛豫长度 λ_{Q^*}的距离处，可以使用正常金属电压探针检测这种非平衡电流。在大于 λ_{Q^*} 的距离处，准粒子贡献发生弛豫，电流逐渐转移至凝聚体中，恢复为超电流。

结论。总之，我们证明，超导能够通过逆自旋霍尔效应，显著增强自旋偏压向电荷信号的转换。与转换效率直接受自旋霍尔角限制的正常态不同，超导态能够产生与自旋偏压同量级的电压。在理想的BCS极限下，这意味着在低温亚能隙注入时可达到 $V_{\rm det}\approx V_s$，即使自旋霍尔角很小，也能实现单位自旋-电荷信号转换效率。

在闭合超导几何结构中，同样的自旋霍尔响应会产生环流。对于亚能隙注入，该电流主要转换为超电流，从而产生可通过超导量子干涉仪测量的磁通特征。因此，我们的研究表明，超导自旋霍尔器件为实现高效的自旋-电荷信号转换提供了一条途径。

致谢。 R. H. 和 F. S. B. 感谢西班牙科学与创新部/国家研究署通过项目 PID2023-148225NB-C31 和 TED2021-130292B-C41 提供的资金支持。F. S. B. 还感谢欧盟地平线欧洲计划研究与创新项目根据资助协议编号 101130224（JOSEPHINE）提供的资金支持。I. V. T. 感谢西班牙科学与创新部/国家研究署通过项目编号 PID2023-148225NB-C32 以及巴斯克政府（资助编号 IT1453-22）提供的支持。

* rodrigo.delasheras@ehu.eus

[1] P. M. Tedrow 和 R. Meservey，从铁磁镍隧穿的自旋依赖隧穿，《物理评论快报》26，192（1971）。[2] P. M. Tedrow 和 R. Meservey，铁、钴、镍和钆薄膜中隧穿电子的自旋极化，《物理评论B辑》7，318（1973）。[3] J. Y. Gu、J. A. Caballero、R. D. Slater、R. Loloee 和 W. P. Pratt，脏超导体中准粒子倏逝波的直接测量，《物理评论B辑》66，140507(R)（2002）。[4] N. Poli、J. P. Morten、M. Urech、A. Brataas、D. B. Haviland 和 V. Korenivski，介观超导体中的自旋注入与弛豫，《物理评论快报》100，136601（2008）。[5] H. Yang、S.-H. Yang、S. Takahashi、S. Maekawa 和 S. S. Parkin，使用氧化镁隧穿自旋注入器在超导铝中实现的超长准粒子自旋寿命，自然·材料 9，586（2010）。[6] F. Hübler、M. J. Wolf、D. Beckmann 和 H. v. Löhneysen，具有塞曼劈裂的介观铝超导体中的长程自旋极化准粒子输运，《物理评论快报》109，207001（2012）。[7] C. Quay、D. Chevallier、C. Bena 和 M. Aprili，介观超导体中的自旋不平衡与自旋-电荷分离，自然·物理 9，84（2013）。[8] T. Wakamura、N. Hasegawa、K. Ohnishi、Y. Niimi 和 Y. Otani，向具有强自旋轨道耦合的超导体中注入自旋，《物理评论快报》112，036602（2014）。[9] T. Wakamura、H. Akaike、Y. Omori、Y. Niimi、S. Takahashi、A. Fujimaki、S. Maekawa 和 Y. Otani，超导体中的准粒子介导的自旋霍尔效应，自然·材料 14，675（2015）。[10] D. Beckmann，纳米尺度超导体中的自旋操控，物理学杂志：凝聚态 28，163001（2016）。[11] J. Linder 和 J. W. Robinson，超导自旋电子学，自然·物理 11，307（2015）。[12] S. Zhang，《自旋扩散存在时的自旋霍尔效应》，《物理评论快报》85, 393（2000年）。[13] Y. Omori、F. Auvray、T. Wakamura、Y. Niimi、A. Fert 和 Y. Otani，《闭环电路中的逆自旋霍尔效应》，《应用物理快报》104, https://doi.org/10.1063/1.4884520（2014年）。[14] A. Aronov，《超导体中激发与原子核的自旋注入和极化》，Zh. Eksp. Teor. Fiz 71, 370（1976年）。[15] S. Takahashi 和 S. Maekawa，《磁性纳米结构中的自旋注入与探测》，《物理评论B辑》67, 052409（2003年）。[16] J. P. Morten、A. Brataas 和 W. Belzig，《扩散型超导体中的自旋输运》，《物理评论B辑》70, 212508（2004年）。[17] F. S. Bergeret、M. Silaev、P. Virtanen 和 T. T. Heikkilä，专题综述：《具有自旋劈裂场的超导体中的非平衡效应》，《现代物理评论》90, 041001（2018年）。[18] S. Takahashi 和 S. Maekawa，《超导体中的自旋霍尔效应》，《日本应用物理学杂志》51, 010110（2011年）。[19] C. Espedal、P. Lange、S. Sadjina、A. G. Mal'shukov 和 A. Brataas，《扩散型超导体中的自旋霍尔效应与自旋交换》，《物理评论B辑》95, 054509（2017年）。[20] J. Clarke，《非平衡超导体中库珀对-准粒子电势差的实验观测》，《物理评论快报》28, 1363（1972年）。[21] M. Tinkham 和 J. Clarke，《非平衡超导体中库珀对-准粒子电势差的理论》，《物理评论快报》28, 1366（1972年）。[22] F. Hübler、J. C. Lemyre、D. Beckmann 和 H. v. Löhneysen，《低温极限下超导体中的电荷不平衡》，《物理评论B辑》81, 184524（2010年）。[23] I. V. Tokatly、Y. Lu 和 F. S. Bergeret，《具有自旋轨道耦合的超导体中对非平衡自旋注入的自旋伽伐尼响应》（2025年），arXiv:2512.23536 [cond-mat.supr-con]。[24] F. J. Jedema、M. S. Nijboer、A. T. Filip 和 B. J. van Wees，《全金属介观自旋阀中的自旋注入与自旋积累》，《物理评论B辑》67, 085319（2003年）。[25] J. P. Pekola、V. F. Maisi、S. Kafanov、N. Chekurov、A. Kemppinen、Y. A. Pashkin、O.-P. Saira、M. Möttönen 和 J. S. Tsai，《环境辅助隧穿作为Dynes态密度的起源》，《物理评论快报》105, 026803（2010年）。[26] H. Boschker、E. Fillis-Tsirakis、C. Richter、D. Zhang、J. Smet 和 L. Kuerten，《$LaAlO_3$ – –₃/$SrTiO_3$ ₃界面超导体中Dynes参数 Γ 的微观起源》，《物理评论B辑》102, 134506（2020年）。[27] P. Virtanen、F. S. Bergeret 和 I. V. Tokatly，《由自旋轨道散射引起的超导体磁电效应：非线性σ模型描述》，《物理评论B辑》104, 064515（2021年）。[28] F. S. Bergeret 和 I. V. Tokatly，《超导结构中外禀自旋霍尔效应的体现：无耗散磁电效应》，《物理评论B辑》94, 180502（2016年）。[29] C. Huang、I. V. Tokatly 和 F. S. Bergeret，《扩散型超导系统中的外禀自旋-电荷耦合》，《物理评论B辑》98, 144515（2018年）。[30] M. Y. Kuprianov 和 V. Lukichev，《界面透明度对"脏"ss's临界电流的影响

结构，Zh. Eksp. Teor. Fiz**94**，139（1988）。

[31] M. Tinkham，《超导导论》，第2版（麦格劳-希尔，纽约，1996）。

附录 A：低温下自旋霍尔信号的分析

对于理想的BCS超导体，探测器电压 $V_{\rm det}$ 由方程（9）确定。我们首先计算积分

$$I(V)=\int_{\Delta}^{\infty}N_{\omega}f_T(V)d\omega. \tag{A1}$$

1. 高温极限

在此极限下，分布函数可以按 V/T 的幂次展开。利用

$$f_T(V)=n_{FD}(\omega-V)-n_{FD}(\omega+V)\simeq -2V\frac{\partial n_{FD}(\omega)}{\partial\omega}+\mathcal{O}\left(\frac{V^2}{T^2}\right) \tag{A2}$$

积分变为：

$$I(V)\simeq VY(T) \tag{A3}$$

其中， $Y(T)$ 是吉田函数：

$$Y(T)=2\int_{\Delta}^{\infty}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2}}\left(-\frac{\partial n_{FD}(\omega)}{\partial\omega}\right)d\omega. \tag{A4}$$

代入式（9），并保留 V/T 的首阶项，可得

$$V_{\rm det}=rV_s. \tag{A5}$$

2. 低温极限

在此极限下，将分布函数改写为以下形式较为方便：

$$f_T(V)=\frac{\sinh\frac{V}{T}}{\cosh\frac{\omega}{T}+\cosh\frac{V}{T}}=\frac{2e^{-\omega/T}\sinh\frac{V}{T}}{1+2e^{-\omega/T}\cosh\frac{V}{T}+e^{-2\omega/T}}\simeq 2e^{-\omega/T}\sinh\frac{V}{T}\left(1+O\left(e^{-\frac{\omega-V}{T}}\right)\right), \tag{A6}$$

其中，最后一步在 $e^{-\frac{\Delta-V}{T}}\ll 1$ 时成立，因为积分下限为 $\omega=\Delta$。代入此展开式，可得

$$I(V)=2\Delta\sinh\frac{V}{T}K_1\left(\frac{\Delta}{T}\right) \tag{A7}$$

其中 $K_1(x)$ 是第二类修正贝塞尔函数。利用这一结果，式（9）可简化为

$$\sinh\frac{V_{\rm det}}{T}=r\sinh\frac{V_s}{T}. \tag{A8}$$

该方程的解为：

$$V_{\rm det}=T\ln\left(r\sinh\frac{V_s}{T}+\sqrt{1+r^2\sinh^2\frac{V_s}{T}}\right). \tag{A9}$$

显然，控制方程 (A9) 中函数的参数是 $r\sinh(V_s/T)$。该解的极限形式为：

$$V_{\rm det}\simeq\begin{cases}rV_s & \text{if } r\sinh\frac{V_s}{T}\ll 1\\ V_s+T\ln r & \text{if } r\sinh\frac{V_s}{T}\gg 1\end{cases}. \tag{A10}$$

这两个极限描述了从具有类似正常态的行为的区域 $V_{\rm det}\approx rV_s$到探测器电压紧密跟随自旋偏压的区域 $V_{\rm det}\approx V_s$的交叉。这两个区域之间的交叉发生在 $V_s\sim T|\ln\ r|$时。

3. 零温极限

对于 $V_s < \Delta_0$，在式（A9）中取 $T \to 0$ 的极限可得

$$V_{\text{det}} = V_s \quad \text{if} \quad V_s < \Delta_0. \tag{A11}$$

对于 $V_s > \Delta_0$，方程（A1）中的积分可以精确求出。在零温极限下，f_T（V）变为阶跃函数，从而得到

$$I(V) = \lim_{T\to 0} \int_{\Delta}^{\infty} N_\omega f_T(V) d\omega = \int_{\Delta_0}^{V} N_\omega d\omega = \sqrt{V^2 - \Delta_0^2}. \tag{A12}$$

利用这一结果，我们得到

$$V_{\text{det}} = \sqrt{\Delta_0^2 + r^2(V_s^2 - \Delta_0^2)} \quad \text{if} \quad V_s > \Delta_0. \tag{A13}$$

结合这两个区域，零温下的探测器电压因此为

$$\lim_{T\to 0} V_{\text{det}} = \begin{cases} V_s & \text{if } V_s \le \Delta_0 \\ \sqrt{\Delta_0^2 + r^2(V_s^2 - \Delta_0^2)} & \text{if } V_s > \Delta_0 \end{cases}. \tag{A14}$$

附录B：超导体中逆自旋霍尔效应的推导

方程（11）的超前/推迟分量和 Keldysh 分量分别为：

$$-D\partial_k(g^{R/A}\partial_k g^{R/A}) + [-i(\omega \pm i\eta)\tau_3 + \Delta e^{i\tau_3\varphi}\tau_1, g^{R/A}] + \frac{1}{8\tau_s}[\sigma_i g^{R/A}\sigma_i, g^{R/A}] = 0 \tag{B1}$$

$$-D\partial_k(g^R\partial_k g^K + g^K\partial_k g^A) + [-i\omega\tau_3 + \Delta e^{i\tau_3\varphi}\tau_1, g^K] + \frac{1}{8\tau_s}[\sigma_i, g^R\sigma_i g^K + g^K\sigma_i g^A] = 0. \tag{B2}$$

保留自旋霍尔角 θ的一阶项，式（14）中的边界条件可简化为：

$$-\, g^{R/A}\partial_z g^{R/A}\Big|_{z=0} = \pm\frac{1}{2\sigma_n R_b A}\Theta\left(\frac{L_{\text{inj}}}{2} - |x|\right)[g^{R/A}, \tau_3] \tag{B3}$$

$$-\, g^{R/A}\partial_z g^{R/A}\Big|_{z=W} = 0 \tag{B4}$$

$$-\,(g^R\partial_z g^K + g^K\partial_z g^A - \theta\sigma_y\partial_x g^K)\big|_{z=0} = \frac{1}{2\sigma_n R_b A}\Theta\left(\frac{L_{\text{inj}}}{2} - |x|\right)\left[2\left(f_L(V_s) + f_T(V_s)\sigma_y\right)(g^R\tau_3 - \tau_3 g^A) - \{g^K, \tau_3\}\right] \tag{B5}$$

$$-\,(g^R\partial_z g^K + g^K\partial_z g^A - \theta\sigma_y\partial_x g^K)\big|_{z=W} = 0 \tag{B6}$$

其中，Θ（x）表示 Heaviside 阶跃函数，且：

$$f_L(V) = 1 - n_{FD}(\omega + V) - n_{FD}(\omega - V). \tag{B7}$$

请注意，在 θ的一阶近似下，推迟和超前格林函数仍与自旋无关，因此只包含单态分量。

接下来，我们对界面电阻倒数 R_b^{-1} 进行微扰展开（稍后将说明，实际上该展开由无量纲参数 R_s/R_b控制，其中 R_s 是界面的自旋电阻）：

$$g^{R/A} = g_0^{R/A} + g_{1s}^{R/A} + \mathcal{O}(R_b^{-2}) \tag{B8}$$

$$g^K = g_0^K + (g_{1s}^R - g_{1s}^A)f_L(0) + g_{1s}^K + \sigma_y g_{1t}^K + \mathcal{O}(R_b^{-2}) \tag{B9}$$

其中，数字下标表示 R_b^{-1} 中的阶数，而 s 和 t 分别表示单重态和三重态分量。零阶格林函数对应于处于平衡态的体相 BCS超导体：

$$g_0^{R/A} = \frac{-i(\omega \pm i\eta)\tau_3 + \Delta\tau_1}{\sqrt{\Delta^2 - (\omega \pm i\eta)^2}} \tag{B10}$$

$$g_0^K = (g_0^R - g_0^A) f_L(0). \tag{B11}$$

1. 超导体中的二维自旋注入

将方程 (B8) 和 (B9) 代入方程 (B2)，保留 R_b^{-1} 的一阶项，并用 σ_y 对自旋空间取迹，可得到三重态分量 g_{1t}^K 的方程：

$$\nabla^2 g_{1t}^K - (\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2) g_{1t}^K = 0 \tag{B12}$$

其中

$$\kappa_s = \sqrt{\frac{1}{\tau_s D}}, \qquad \kappa_\omega = \sqrt{\frac{2}{D}\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{\Delta^2 - (\omega + i\eta)^2}\right)}. \tag{B13}$$

相应的边界条件由方程 (B5) 和 (B6) 得出：

$$\partial_z g_{1t}^K\big|_{z=0} = -\frac{f_T(V_s)}{\sigma_n R_b A}\Theta\left(\frac{L_{\mathrm{inj}}}{2} - |x|\right)(\tau_3 - g_0^R \tau_3 g_0^A) \tag{B14}$$

$$\partial_z g_{1t}^K\big|_{z=W} = 0. \tag{B15}$$

通过变量分离求解可得：

$$\begin{aligned} g_{1t}^K &= (\tau_3 - g_0^R\tau_3 g_0^A)\frac{f_T(V_s)}{\sigma_n R_b A}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta_q}{\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2 + q^2}} \frac{\cosh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2 + q^2}(z - W)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2 + q^2}W\right)} \frac{e^{iqx}}{2\pi} dq \\ &\approx (\tau_3 - g_0^R\tau_3 g_0^A)\frac{f_T(V_s)}{\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2}\sigma_n R_b A} \frac{\cosh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2}(z - W)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2}W\right)}\Theta\left(\frac{L_{\mathrm{inj}}}{2} - |x|\right) \end{aligned} \tag{B16}$$

其中 $\Theta_q = \frac{2}{q}\sin(\frac{qL_{\mathrm{inj}}}{2})$。第二行中的近似在 $L_{\mathrm{inj}} \gg \max\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_s^2+\kappa_\omega^2}}, W\right)$ 且距离注入器边缘足够远时成立，即 $\left||x| - \frac{L_{\mathrm{inj}}}{2}\right| \gg \frac{1}{\sqrt{\kappa_s^2+\kappa_\omega^2}}$。这些条件在自旋弛豫占主导的实验相关区域内均能满足。

由此产生的自旋积累为：

$$S = \frac{N_0}{8}\int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(\sigma_y\tau_3 g^K\right) d\omega = \frac{N_0}{8}\int_0^\infty \mathrm{Tr}(\tau_3 g_{1t}^K) d\omega = \Theta\left(\frac{L_{\mathrm{inj}}}{2} - |x|\right)\int_0^\infty S_\omega(z) d\omega \tag{B17}$$

其中：

$$S_\omega(z) = N_0\frac{R_s}{2R_b}\left(1 + \frac{\Delta^2 + \omega^2 + \eta^2}{|\Delta^2 - (\omega + i\eta)^2|}\right)\frac{f_T(V_s)}{\sqrt{1 + \frac{\kappa_\omega^2}{\kappa_s^2}}}\frac{\cosh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2}(z - W)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\kappa_s^2 + \kappa_\omega^2}W\right)}. \tag{B18}$$

并且 $R_s = \frac{1}{\kappa_s\sigma_n A}$ 是势垒的正常态自旋电阻。这明确表明，微扰展开受小比值 R_s/R_b 控制。

对于一根弯成长度为 L 的闭合回路的超导导线，沿 x 方向的总环流为:

$$I_{SH}=\frac{1}{L}\int_0^L dx\int_0^W dz\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\sigma_n}{16eD}\right)\mathrm{Tr}_\sigma(\tau_3\mathcal{J}_x^K)d\omega=\frac{1}{L}\int_0^L dx\int_0^W dz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta\sigma_n}{8e}\,\mathrm{Tr}(\tau_3\partial_z g_{1t}^K)d\omega. \tag{B19}$$

此处利用了沿 x方向的空间周期性，因此所有涉及 ∂_x 的项在一个完整周期内积分后均为零。代入方程（B16）可得:

$$I_{SH}=-\theta\frac{\sigma_n}{e}\frac{L_{\mathrm{inj}}}{L}\int_0^\infty\frac{S_\omega(0)-S_\omega(W)}{N_0}d\omega \tag{B20}$$

2. 自旋到电荷的转换

将方程（B8）和（B9）代入方程（B2），保留R_b^{-1} 的一阶项，并对自旋空间取迹，得到关于g_{1s}^K的方程:

$$\nabla^2 g_{1s}^K-\kappa_\omega^2 g_{1s}^K=0. \tag{B21}$$

由方程（B5）和（B6）导出的相应边界条件为:

$$\partial_z g_{1s}^K\big|_{z=0}=\theta g_0^R\partial_x g_{1t}^K\big|_{z=0}+\frac{1}{\sigma_n R_b A}(f_L(V_s)-f_L(0))(\tau_3+g_0^R\tau_3 g_0^A)\Theta\left(\frac{L_{\mathrm{inj}}}{2}-|x|\right) \tag{B22}$$

$$\partial_z g_{1s}^K\big|_{z=W}=\theta g_0^R\partial_x g_{1t}^K\big|_{z=W}. \tag{B23}$$

电荷不平衡 Q^* 定义为:

$$Q^*=\int_0^\infty Q_\omega^* d\omega=\frac{1}{4}\int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(g_{1s}^K\right)d\omega. \tag{B24}$$

对方程（B21）–（B23）取迹并代入方程（B16），得到关于 Q_ω^*的方程:

$$\nabla^2 Q_\omega^*-\kappa_\omega^2 Q_\omega^*=0 \tag{B25}$$

$$\partial_z Q_\omega^*|_{z=0}=\theta q_\omega\frac{S_\omega(0)}{N_0}\partial_x\Theta\left(\frac{L_{\mathrm{inj}}}{2}-|x|\right) \tag{B26}$$

$$\partial_z Q_\omega^*|_{z=W}=\theta q_\omega\frac{S_\omega(W)}{N_0}\partial_x\Theta\left(\frac{L_{\mathrm{inj}}}{2}-|x|\right) \tag{B27}$$

其中 $q_\omega=\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{(\omega+i\eta)^2-\Delta^2}}{\omega}\right)$ 是有效准粒子电荷。通过变量分离求解可得:

$$Q_\omega^*=\theta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{iq\Theta_q}{\sqrt{\kappa_\omega^2+q^2}}\left[\frac{q_\omega S_\omega(W)\cosh\left(\sqrt{\kappa_\omega^2+q^2}z\right)-q_\omega S_\omega(0)\cosh\left(\sqrt{\kappa_\omega^2+q^2}(z-W)\right)}{N_0\sinh\left(\sqrt{\kappa_\omega^2+q^2}W\right)}\right]\frac{e^{iqx}}{2\pi}dq. \tag{B28}$$

为了简化此表达式，我们对 ω 进行积分，并对导线的宽度 W 取平均:

$$\overline{Q^*}=\frac{1}{W}\int_0^W dz\int_0^\infty d\omega Q_\omega=\theta\int_0^\infty d\omega\frac{q_\omega(S_\omega(W)-S_\omega(0))}{N_0W}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{iq\Theta_q}{\kappa_\omega^2+q^2}\frac{e^{iqx}}{2\pi}dq. \tag{B29}$$

计算 q 中的傅里叶积分可得:

$$\overline{Q^*}(x)=\theta\int_0^\infty d\omega\frac{q_\omega(S_\omega(0)-S_\omega(W))}{N_0\kappa_\omega W}\cdot\begin{cases}-\sinh(\frac{\kappa_\omega L_{\mathrm{inj}}}{2})e^{\kappa_\omega x} & \text{if } x<-L_{\mathrm{inj}}/2\\ e^{-\kappa_\omega L_{\mathrm{inj}}/2}\sinh(\kappa_\omega x) & \text{if } -L_{\mathrm{inj}}/2\le x\le L_{\mathrm{inj}}/2\\ \sinh(\frac{\kappa_\omega L_{\mathrm{inj}}}{2})e^{-\kappa_\omega x} & \text{if } x>L_{\mathrm{inj}}/2\end{cases}. \tag{B30}$$

该表达式表明，通过自旋霍尔角 θ，顶面和底面之间的自旋积累差异 $S_\omega(0) - S_\omega(W)$ 可作为电荷不平衡的来源。

图中所示两个探测器触点之间的净电荷不平衡降落 1(a)–(b) 为：

$$\delta Q^* = \overline{Q^*}(x_{\rm det}) - \overline{Q^*}(-x_{\rm det}) = 2\theta \int_0^\infty d\omega \frac{q_\omega (S_\omega(0) - S_\omega(W))}{N_0 \kappa_\omega W} \sinh\left(\frac{\kappa_\omega L_{\rm inj}}{2}\right) e^{-\kappa_\omega x_{\rm det}}. \tag{B31}$$

实验中，探测器触点被放置在距离 $x_{\rm det} \gg \xi$ 处，其中 ξ 是超导相干长度。在这些尺度下，由于 κ_ω 的能量依赖性，亚能隙贡献 $|\omega| < \Delta$ 受到指数抑制：

$$\kappa_\omega^{-1} \sim \begin{cases} \xi & |\omega| < \Delta \\ \lambda_{Q^*} & |\omega| \geq \Delta \end{cases} \tag{B32}$$

其中λ_{Q^*} 是非弹性电荷不平衡弛豫长度（通常为数微米量级）。由于$\lambda_{Q^*} \gg \xi$，亚能隙贡献会在远离注入器时迅速衰减，与 δQ^* 相比，其对 $|\omega| > \Delta$的贡献可以忽略不计。此外，前因子 q_ω 在亚能隙能量下也很小。因此，通常可以将式（B31）中的积分下限安全地设为 Δ。

3. η →0 极限下的电荷不平衡

在 $\eta \to 0$的极限下，式（B31）可进一步简化。对于 $|\omega| > \Delta$， $\kappa_\omega \to 0$ 被积函数可通过下式简化：

$$q_\omega \frac{S_\omega(0) - S_\omega(W)}{N_0} = \begin{cases} 0 & \text{if } |\omega| < \Delta \\ \frac{R_s}{R_b} N_\omega f_T(V_s) \tanh\left(\frac{\kappa_s W}{2}\right) & \text{if } |\omega| \geq \Delta \end{cases} \tag{B33}$$

将此关系代入方程 (B31) 得到最终结果：

$$\lim_{\eta \to 0} \delta Q^* = r \int_\Delta^\infty N_\omega f_T(V_s) d\omega \tag{B34}$$

其中

$$r = \theta \frac{R_s}{R_b} \frac{L_{\rm inj}}{W} \tanh\left(\frac{\kappa_s W}{2}\right). \tag{B35}$$

4. 探测器信号

The 探测器电压 $V_{\rm det}$ 由施加零电流条件确定，从而得到 g:

$$\delta Q^* = \int_0^\infty N_\omega f_T(V_{\rm det}) d\omega. \tag{B36}$$

代入方程 (B31) 可得关于 $V_{\rm det}$ 的积分方程：

$$2\theta \int_0^\infty d\omega \frac{q_\omega (S_\omega(0) - S_\omega(W))}{N_0 \kappa_\omega W} \sinh\left(\frac{\kappa_\omega L_{\rm inj}}{2}\right) e^{-\kappa_\omega x_{\rm det}} = \int_0^\infty N_\omega f_T(V_{\rm det}) d\omega \tag{B37}$$

或者在 $\eta \to 0$ 的极限下代入方程 (B34)：

$$r \int_\Delta^\infty N_\omega f_T(V_s) d\omega = \int_\Delta^\infty N_\omega f_T(V_{\rm det}) d\omega. \tag{B38}$$