arXiv:2611.30790v1 [math.AG] 23 Nov 2026

MONSKY 的节点三次曲线与 Frobenius不变量的算术

S

Hoang Le Truong

摘要。我们证明了 Monsky关于理想 $(x^q,\ y^q,\ z^q,\ h^j)$ 在 $\mathbb{F}_2[x,y,z]$ 中的余长度的猜想，其中 $h = x^3+y^3+xyz$, $q=2^e$，且 $0\le j\le q$。我们通过交换三次曲线节点处的两个分支上的 syzygy 丛截面的取值，推导出 Monsky 的递推关系 $h = 0$。对于超曲面 $uv+h = 0$, Hilbert–Kunz 重数级数和 Frobenius 分裂级数在 $\mathbb{Q}(w)$ 上是二次代数的。对于 $uv+h(X_1)+\cdots+h(X_m) = 0$，其中 X_i 是不相交的变量三元组，且 $m\ge 2$，这两个级数在 $\mathbb{Q}(w)$ 上都是超越的。当 $m = 2$ 时，我们用特征零椭圆曲线的一个周期来表示 Hilbert–Kunz 重数。这给出了一个在 $\mathbb{F}_2$ 上的显式七维超曲面，其 Hilbert–Kunz 重数和 F-符号都是超越的。

1. 引言

设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 d、特征为 $p>0$ 的诺特局部环。对于 $q=p^e$，Frobenius幂 $\mathfrak{m}^{[q]}$ 是由 $\mathfrak{m}$ 中元素的 q 次幂生成的理想。在正则局部环中，长度 $\mathrm{l}_A(A/\mathfrak{m}^{[q]})$ 恰为 q^d [16]。一般而言，该长度除以 q^d 的商有一个极限，即 Hilbert–Kunz 重数 $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A)$ [17]。即使 A 是整环，这个极限也可能是无理数 [8]。本文证明了 Monsky 关于一条节点平面三次曲线的猜想，并据此给出一个定义在 $\mathbb{F}_2$ 上、具有超越的 Hilbert–Kunz 重数的超曲面。同一个方程还展现了算术性质的变化：将三次式的一份拷贝作悬挂，得到一个二次无理数；而将两份拷贝之和作悬挂，则得到一个超越数。

设 k 是一个特征为二的域，令 $h = x^3+y^3+xyz$，并令 $C\subset\mathbb{P}^2_k$ 为由 $h = 0$ 定义的三次式。其 j 次加厚由 $h^j=0$ 定义。对于 $q=2^e$ 和 $j\ge 0$，记

$$E_q(j)=\dim_k k[x,y,z]/(x^q,y^q,z^q,h^j).$$

$E_q(1)$ 的公式，即约化三次曲线上的余长度，可追溯至 Pardue，并由 Buchweitz 和 Chen 在 [9, 定理 3], [21] 中证明。加入两个变量并转入悬挂时，会出现更高阶的加厚

$$R=\mathbb{F}_2[[u,v,x,y,z]]/(uv+h).$$

事实上，将 $\mathfrak{m}_R$ 写作其极大理想，并取 $k=\mathbb{F}_2$，Monsky 得到了

$$\ell_R(R/\mathfrak{m}_R^{[q]}) = q^3+2\sum_{j=1}^{q-1}E_q(j).$$

他猜想，单个直和项可以用二进参数 $t=j/q$[18, 定理 2.2 和猜想 1.5], [19, 猜想 2.3] 来表示。该猜想的递归形式使用定义在 $[0,1]$ 中二进有理数上的函数 ϕ_m，其指标为 $m\ge 0$。这些函数在两端均为零

2020数学主题分类。 主要分类 13A35。次要分类 13D40、13H15、14H60。关键词和短语。 Hilbert–Kunz 重数、 F-符号、节点三次曲线、Syzygy 丛、Frobenius分裂级数、超越性。ChatGPT（OpenAI）在基于作者研究笔记和详细指示的迭代起草过程中得到了使用，并协助完成了手稿的后续修订。作者审阅并大幅修订了生成的文本，核实了数学论证和参考文献，并对最终手稿负责。

端点。式（2.1）中的两条半区间规则按分母递增的顺序逐步确定它们的取值。余长度公式中只出现初始函数 ϕ_0。

定理 A（Monsky 的节点三次曲线猜想）。设 k 是一个特征为二的域。对于每个 $q = 2^e$ 和每个整数 $0 \le j \le q$,

$$E_q(j) = q^3\big(t + \phi_0(t)\big), \qquad t = j/q,$$

其中函数 ϕ_m 定义为 (2.1)。对于 $j \ge q$ 有 $E_q(j) = q^3$。

证明从 C 节点处的几何性质中重新得到两条半区间规则。在分次维数二的情形下，Frobenius 拉回已被用于计算 Hilbert–Kunz 重数 [34, 35]。在约化节点三次曲线上，这样的丛可以由其在正规化 $\mathbb{P}^1$ 上的拉回，以及节点上方两个纤维之间的一个识别 [33, 30] 来描述。Burban 用这种方式描述了 Frobenius 拉回 [10], ，而 Monsky 则利用这一描述在约化三次曲线上进行计算 [21]。

在第 j 次加厚上，一个分支上的截面必须在整个交集上与另一分支上的截面相一致。对于形式参数 a, b 使得三次曲线的局部方程为 $ab = 0$，该交集的环为 $k[[a,b]]/(a^j, b^j)$，长度为 j^2。这一长度体现了递推关系中的二次修正。为比较截面空间，我们改变C 的一个拐点处的扭转，使节点处的两个限制互换（引理 2.2）。这种互换使一个截面能够按相反顺序延拓穿过另一分支上的直和项。第 2节推导由此得到的余长度比较。第 3 节追踪该比较中产生的冒号运算下 Syzygy 直和项链的长度变化。这些变化解释了 (m 中指标的移位2.1)。

第4 节结合比较结果与指标移位，证明了定理 A。同一公式还回答了 Blickle、Schwede 和 Tucker 针对该三次式提出的两个问题 [7, 问题 4.7–4。8]事实上，对于 $B = \mathbb{F}_2[[x,y,z]]$ 以及二进制分点 $t = j/q$ 中的 $[0,1]$, 该 F-对偶对 (B, h^t) 是$1 - q^{-3}E_q(j)$。递推关系在每个有理指数处都产生有理数值，但不存在多项式能在其阈值左侧的某个邻域内与签名函数一致。

现在回到悬挂。为了记录 Frobenius 在每次迭代中的作用，我们使用两个生成级数。对于具有完美剩余域的 F-有限局部环（A, $\mathfrak{m}$），令 $a_e(A)$ 表示沿第 e 次 Frobenius 映射进行标量限制所得到的模 $F_*^e A$ 的自由秩。$a_e(A)/p^{e\,\text{维数}\,A}$ 的极限是 F-签名 $s(A)$ [15, 25, 29]。令 w 为一个不定元，Hilbert–Kunz 级数和 Frobenius分裂级数分别为

$$H_A(w) = \sum_{e\ge 0} \ell_A(A/\mathfrak{m}^{[p^e]})w^e, \qquad S_A(w) = \sum_{e\ge 0} a_e(A)w^e.$$

对于 $A = R$，Monsky 在假设其猜想 [18, 20], 的前提下计算了 Hilbert–Kunz 级数及其极限重数，而 Tucker 推导出了相应的符号 [29, 命题 4。22]。定理A 使这些计算成为无条件的（第5节）。

推论B。三次悬挂 R 具有

$$\mathrm{e_{HK}}(R) = \frac{4}{3} + \frac{5}{14\sqrt{7}}, \qquad s(R) = \frac{2}{3} - \frac{5}{14\sqrt{7}}.$$

推论C。对于 R，有 $S_R(w) = 2/(1-16w) - H_R(w)$。每个级数都生成 $\mathbb{Q}(w)$ 的二次扩张 $\mathbb{Q}(w, \sqrt{1-4w^2})$。

Monsky 还展示了一个三次式的余长度如何揭示六个相关超曲面重数之间的超越性 [20, 定理 1.10 和 2.2]。令 X 和 X' 表示不相交的变量三元组，并记在这两个三元组中分别取值的同一个三次式为 $h(X)$ 和 $h(X')$。再引入一个变量 t 后，Monsky的六个环为

$$A_{i,b} = \mathbb{F}_2[[u,v,X,X',t]]/(uv + h(X) + h(X')^{2^i} + t^b), \qquad i \in \{0,1,2\}, \quad b \in \{3,5\}.$$

他的论证将一个归一化超越椭圆周期表示为它们的重数的有理数线性组合。应用定理 A 以及恒等式 $s(A_{i,b}) = 2 - \mathrm{e_{HK}}(A_{i,b})$，可在第 6 节得到以下结果。

定理 D. 这六个环 $A_{i,b}$ 都是八维、强 F-正则的 *Gorenstein* 超曲面。至少存在一对 (i, b)，使得 $\mathrm{e_{HK}}(A_{i,b})$ 和 $s(A_{i,b})$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上的超越数。

Das、Landsittel 和 Pham 证明，在每个特征为 $p > 2$ [11] 的不可数代数闭域上，正规标准分次整环中的一个齐次主理想具有超越性。这里，该理想是极大理想，基域为 $\mathbb{F}_2$。为确定一个具有超越重数的特定超曲面，我们直接研究 $m \geq 1$ 个 h 的副本之和。对于 $m \geq 1$，取互不相交的三元组 $X_1, \dots, X_m$，并令

$$R_m = \mathbb{F}_2[[u, v, X_1, \dots, X_m]]/\left(uv + \sum_{i=1}^{m} h(X_i)\right).$$

因此，R_1 是 R 的悬挂。从一个副本增加到两个副本，就已经改变了两个生成级数的算术性质。

定理 E. 对于每个 $m \geq 2$，H_{R_m} 和 S_{R_m} 都是 $\mathbb{Q}(w)$ 上的超越数。它们各自满足一个系数属于 $\mathbb{Q}[w]$ 的非零线性微分方程。环 R_m 是强 F-正则的，并且 $s(R_m) \geq 1/3$。

第 7 节通过取逐系数乘积证明了级数命题。为了从级数的超越性推出 R_2的重数的超越性，还必须控制一个特定值。第8 节将 $w = 1/128$ 处的相关值表示为特征零中的一个椭圆周期。微分的留数是某个整数除子的代数倍，而该除子的类具有无限阶。这正是 Wüstholz 周期定理所需的输入，并得出以下结论。

定理 F。 七维超曲面 R_2 具有超越的 *Hilbert–Kunz*重数和超越的 F-符号。

这两个重数还给出了 Çelikbaş、Dao、Huneke 和 Zhang 所考虑类型的聚点 [3, 第 151] 页。在定义方程中添加一个 2^r次根，可以将归一化的弗罗贝尼乌斯余长度实现为高一维超曲面的重数。所得的二进有理数从下方趋近于 $\mathrm{e_{HK}}(R_1)$（在五维中），并从下方趋近于 $\mathrm{e_{HK}}(R_2)$（在八维中）。对于 R_2，证明中使用的逐系数平方还给出了连续差及其衰减速率（推论 8.5）。最后，这些级数揭示了每个 R_m的弗罗贝尼乌斯推前中存在无穷多个不可分解直和项。对于 R_2，这两个极限不变量还确定了衡量其 F-有理性的符号，以及其剩余域的正次数弗罗贝尼乌斯贝蒂数。

2. 分支匹配与余长度比较

定理 A 中的余长度，对于特征二中每条具有普通节点的几何整平面三次曲线都相同。在代数闭包上选取坐标，使节点为$[0 : 0 : 1]$，切线为 $x = 0$，$y = 0$。经过缩放，其方程为 $xyz + f_3(x, y)$。对 z进行线性变换可消去 x^2y和 xy^2项。由不可约性，x^3、y^3的系数均非零，因此重新缩放坐标可得 h。可逆线性代换保持 (x^q, y^q, z^q)不变，而系数域扩张保持余长度不变。

由于h 定义在 $\mathbb{F}_2$上，我们在该域上进行计算。记 $P = \mathbb{F}_2[x, y, z]$,$B = P/(h)$和 $\mathbb{D} = [0, 1] \cap \mathbb{Z}[1/2]$。对于 $\mathbb{D}$上的函数 g，令

$$(T_0 g)(t) = g(t/2), \qquad (T_1 g)(t) = g((1 + t)/2), \qquad \epsilon(t) = t(1 - t).$$

Monsky 函数 ϕ_m 在0和1处取零。对于 $c_m = 4m+3$，它们在 $\mathbb{D}$的两半上的值满足

	$8T_0\phi_m$	$8T_1\phi_m$
$m=0$	$\phi_1 + 3t$	$\phi_0 + 3(1-t)$
$m>0$ even	$\phi_{m+1} + c_m t$	$\phi_{m-1} + \epsilon + c_m(1-t)$
m odd	$\phi_{m-1} + \epsilon + c_m t$	$\phi_{m+1} + c_m(1-t)$.

(2.1)

每个内部二进制分点处的右端都使用分母更小的点处的值。因此，端点值决定了所有函数。

2.1. **节点处的两个分支**。 正规化 $\nu:\ \mathbb{P}^1 \to C$ 是

$$[s:t] \longmapsto [s^2t : st^2 : s^3+t^3].$$

点 $s=0$ 和 $t=0$映射到节点 $p=[0:0:1]$。$\mathcal{O}_C(d)$ 的一个截面是一个次数为 $3d$ 的二元形式，它在标架 t^{3d} 和 s^{3d}中于这些点处取值相等。对于 $d\geq 0$，参数化和 B 的 Hilbert函数将这个空间识别为 B_d。

固定 $1\leq j\leq q$并令 $X_j = V(h^j)$。$\mathcal{O}_{X_j}(D)$ 的每个截面都可提升为一个平面形式，因为对于每个 n，$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) = 0$。令 $a=x+y$、$b=z+a$ 和 $P_{\mathrm{f}}=[1:1:0]$。直线 $b=0$ 以三重重数截出拐点 P_{f}。在图表 $b=1$ 上，我们有 $h = a^3+xy$。在p 处的完备化中，取满足 $\theta(0)=0$ 且 $\theta^2+\theta=a$的 θ。于是

$$u = x+a\theta, \qquad v = x+a(1+\theta), \qquad a = u+v, \qquad h = uv.$$

写作 $S=\mathbb{F}_2[[u,v]]$和 $T_j = S/(u^j, v^j)$。

我们在 p处分离 X_j 的分支。对于任意二的幂 $n\geq j$，令 $I_j = (x^n, y^n) : \mathrm{h}^{n-j}$。由于 z 在模 (x^n,y^n) 下是非零因子，因此在模 I_j 下仍是非零因子。因此 I_j 是饱和的。其射影支撑为 p。在完备局部环中，$(x^n,y^n) = (u^n, v^n)$，所以 $I_jS = (u^j, v^j)$。令 $\mathcal{D}_j$为由 I_j 在 X_j上诱导的理想层的自同态代数。在 p 之外，它是 $\mathcal{O}_{X_j}$。在 $S/(u^jv^j)$ 中，该理想是直和 $(u^j)\oplus(v^j)$，两个直和项之间没有同态。因此，完备代数为 $S/(u^j)\oplus S/(v^j)$，导子序列为

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_j} \longrightarrow \mathcal{D}_j \xrightarrow{\delta} T_j \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

我们将 T_j 视为 p处的层。在特征二下，δ 将两个分支值相加。

在 X_j上，令 Z_q 为 P_{f} 处由局部方程 $(a/x)^q$定义的卡蒂埃除子。X_j 上的恒等式 $b^q(xy)^q = a^{3q}$ 给出 $\mathrm{div}(b^q) = 3Z_q$。记$\rho_j:\ Y_j = $ 谱$_{X_j}\mathcal{D}_j \to X_j$ 为通过分离各分支得到的曲线。$X_j\to C$ 上的 q次幂映射 F_q 可提升为Y_j 上的 $\widetilde{F}_q:\ Y_j\to\mathbb{P}^1$。事实上，在 C上，$s/(s+t) = x/a$；而 $(x/a)^q$在一个分支上为 $1+\theta^q$，在另一个分支上为 θ^q，因为 $q\geq j$。在 p 之外，该提升由逆正规化给出。由于在拐点处 $(s+t)/s = a/x$，$F_q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = \rho_j^*\mathcal{O}_{X_j}(Z_q)$。在 T_j上，我们有 $\theta^q=0$，因此该提升的两个限制分别是映至 p上方各点的常值映射。我们利用 $b=1$ 和标架 $s+t$比较它们的值。

引理 2.1. 对于 $m\in H^0(\mathcal{D}_j(D))$，值 $\delta(m)\in T_j$ 是 $\mathcal{O}_{X_j}(D)$的一个截面的限制。

证明。 首先我们证明 $h^j\in I_j^2$。对于 $j=2l+1$，将 b 取逆，添加满足 $\theta^2+\theta=a/b$ 的 θ，并令$w = x+a\theta$。其范数为 h/b。写作 $b^lw^{2l+1} = G_l + K_l\theta$。这些系数是平面形式。事实上 $(G_0,K_0) = (x,a)$，而乘以 bw^2 的作用为

$$\begin{pmatrix} bx^2+a^3 & a^3 \\ ba^2 & by^2+a^3 \end{pmatrix}.$$

在 p 处，该元素及其共轭都属于 (u^j, v^j)。它们的和为 K_l，因此由饱和性可知，两个系数都属于 I_j。取范数得到 $h^j = bG_l^2 + bG_lK_l + aK_l^2$。对于偶数 j，将 $h^{j/2}$ 的相应表达式平方。局部描述给出：只要 $f \in I_{j/2}$，就有 $f^2 \in I_j$。

设 $h^j = \sum_i f_i g_i$ 与 f_i 均为 $g_i \in I_j$ 齐次的。由（2.2），$f_i m$ 和 $g_i m$ 下降到 X_j。选取平面提升 F_i，G_i 中的两项在 $f_iG_i + g_iF_i$ 上相消 X_j，因此

$$L = \frac{\sum_i (f_iG_i + g_iF_i)}{h^j}$$

是次数为 D 的平面形式。为计算其值，令 $U = u^j$，$V = v^j$ 并写成 $f_i = c_iU + d_iV, g_i = e_iU + k_iV$。对于分支值的代表元 m_s，m_t 我们有 $F_i = c_iUm_s + d_iVm_t$ 模 UV，对于 G_i 同样如此。在 T_j 这给出

$$L = (m_s + m_t) \sum_i (c_ik_i + d_ie_i).$$

该和在 T_j 中为 1。事实上，它是 $\sum_i f_ig_i = UV$ 中 UV 的系数，模 $(U, V)^3$，且 U，V 构成一个正则序列。因此 $L|_{T_j} = \delta(m)$。□

引理 2.2。设 $(\alpha, \beta) = (1,2)$ 或 $(2,4)$。若 $\mathcal{D}_j(D)(-\beta Z_q)$ 的一个截面在 T_j 中具有分支值 (A, B)，则 $\mathcal{D}_j(D)(-\alpha Z_q)$ 的一个截面具有值 (B, A)。

证明。对于 $(2,4)$，将给定截面除以 b^q 并应用引理 2.1。将其公共提升乘以 b^q，再将所得结果加到原截面上。这两个值互换，而所加的截面沿着 $3Z_q$ 消失。对于 $(1,2)$ 以及 $j \le q/2$，在相同论证中使用 $b^{q/2}$ 和 $Z_q = 2Z_{q/2}$。

对于 $(1,2)$，定义

$$V_D = \operatorname{im}\Big(H^0(\mathcal{O}_{X_j}(D)(-Z_q)) \longrightarrow T_j\Big), \qquad W_D = \delta H^0(\mathcal{D}_j(D)(-2Z_q)).$$

只需证明 $W_D \subseteq V_D$。$A + B$ 的一个公共提升通过加法将 (A, B) 变为 (B, A)。置 $D' = 3j - 3 + q - D$。对于 $\lambda_j(r) = [u^{j-1}v^{j-1}]r$，乘法后再施加 λ_j 是在 T_j 上的完美配对。我们断言

$$W_D = V_{D'}^{\perp}, \qquad \langle r, s\rangle = \lambda_j(rs). \tag{2.3}$$

将 (2.2) 扭转 $M = \mathcal{O}_{X_j}(D)(-2Z_q)$。边界 $\partial\colon T_j \to H^1(X_j, M)$ 的核为 W_D。由于 X_j 是一个射影平面超曲面，因此它是纯一维的 Cohen–Macaulay。根据 Serre 对偶，[27]，转置的源为 $H^0(X_j, \omega_{X_j}M^{-1})$。在上面固定的局部标架中，转置将 $s \in H^0(\omega_{X_j}M^{-1})$ 发送到泛函 $r \mapsto \lambda_j(r\,s|_{T_j})$。这里 $\omega_{X_j}M^{-1} = \mathcal{O}_{X_j}(D')(-Z_q)$，因为 $\omega_{X_j} = \mathcal{O}_{X_j}(3j-3)$ 且 $\operatorname{div}(b^q) = 3Z_q$。

为验证这些标架中的泛函，将完备导子序列与 $S/(UV)$ 的消解拼接起来，其中 $U = u^j$，$V = v^j$。这给出

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{UV} S \xrightarrow{\operatorname{diag}} S/(U) \oplus S/(V) \xrightarrow{+} T_j \longrightarrow 0.$$

从 (U, V) 的 Koszul 消解出发的比较映射将次数零中的 1 映射为 $(1, 0)$，并将次数一中的 e_1, e_2 映射为 $0, V$。由于 $d_2(1) = Ve_1 + Ue_2$，它将次数二中的 1 映射为 1。因此，扩张类为 $1 \in \operatorname{Ext}^2_S(T_j, S) = T_j$。坐标变换保持体积形式 $da \wedge dx = du \wedge dv$，因此其留数泛函为 λ_j。这表明 $\operatorname{im}(\partial^\vee)$ 等于 $V_{D'}$，并证明了 (2.3)。在 (2.3) 中交换 D, D' 可得 $V_D = W_{D'}^{\perp}$。剩下的工作是证明 $\lambda_j(W_DW_{D'}) = 0$。

用于定义 W_D 的每个截面都可以写成 $m_g = b^q g/a^q$，其中

$$g \in S(q, j)_D, \qquad S(q, j) = (x^q, y^q, h^j) : z^\infty.$$

事实上，将该截面乘以 a^q/b^q，便得到一个在拐点处正则的截面。由于 a^q 消去了 T_j，它在节点处下降，并提升为平面形式 g。反过来，m_g 在两个分支上都正则，当且仅当在 p 的局部有：

$$g \in (u^q, v^j) \cap (u^j, v^q) = (u^q, v^q, h^j).$$

按 z 饱和会在 p 处施加此条件。设 A_g，B_g 为 m_g 的分支值。对于次数为 D，D' 的 g，g'，乘积 $m_g m_{g'}/b^q$ 是一个分离规范截面，因为分子沿着 $4Z_q$ 消失。在按 ω_{X_j} 扭曲的导子序列中，其分支值之差的边界为零。将该边界与 $1 \in H^0(\mathcal{O}_{X_j})$ 配对，结果为零。因此

$$\lambda_j(A_g A_{g'} + B_g B_{g'}) = 0. \tag{2.4}$$

我们通过对 q 作归纳来证明所需的消失性。对于 $j = q$，$S(q,\ q) = (x^q,\ y^q)$。对于任一生成元乘以 c，其分支值之差在 T_j 上为 $b^q c$，因为 $(x/a)^q$ 的两个值，以及 $(y/a)^q$ 的两个值，彼此相差一。这给出了一个沿着 $3Z_q$消失的公共提升。

对于归纳步骤，令 $Q = 2q$, $J = q + j$。模去 $(x^{2q},\ y^{2q})$ 后，我们有 $h^{q+j} = (xyz)^q h^j$。乘以 $(xy)^q$，可将指数小于 q 的 x，y 单项式识别为较大商中关于 $\mathbb{F}_2[z]$ 的一个直和项。饱和给出

$$S(Q, J) = (x^Q, y^Q) + (xy)^q S(q, j).$$

一个 x^Q或 y^Q的倍数会给出上述公共提升，因此与互补的W根据（2.3）配对为零。还需将 $G = (xy)^q g$与 $G' = (xy)^q g'$配对。

在分支 $v^J = 0$ 上，使用 $b = 1$, $a^{2q} = u^{2q}$ 和 $(xy)^q = (uv)^q + a^{3q}$。将 G 除以 a^{2q} 得到 $a^q g + v^q \widehat{A}_g$，其中 $\widehat{A}_g$ 表示模 v^j 意义下的 g/u^q。在另一分支上，结果为 $a^q g + u^q \widehat{B}_g$。公共项在 δm_G 中抵消。与 $\delta m_{G'}$ 相乘时，能被 u^{2q} 或 v^{2q} 整除的项在 T_J 中为零。两个交叉项给出

$$\lambda_J(\delta m_G\, \delta m_{G'}) = \lambda_j(A_g B_{g'} + B_g A_{g'}) = \lambda_j\big((A_g + B_g)(A_{g'} + B_{g'})\big)$$

根据（2.4）。较小的次数互补，因为 $(3J - 3 + Q) - 4q = 3j - 3 + q$。最后一个表达式由归纳可知为零。每个包含 $Q/2 < J < Q$ 的配对都可由此得到。情形$J \le Q/2$ 和 $J = Q$ 已在上文讨论。 □

2.2. 两个余长度函数的比较。对于齐次的 $\mathfrak{m}$-primary 理想 $I \subset P$，其中$\mathfrak{m} = (x, y, z)$，定义

$$\Phi_I(j/q) = q^{-3} \dim_{\mathbb{F}_2} P/(I^{[q]}, h^j).$$

Frobenius 的平坦性使Φ_I在 $\mathbb{D}$上定义良好。选取次数为d_i的齐次形式 $f_i \in I$，使其生成 IB 作为分次理想。它们在 C 上的 Syzygy 丛 S_I 是下式中的核：

$$0 \longrightarrow S_I \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_C(-d_i) \xrightarrow{(f_i)} \mathcal{O}_C \longrightarrow 0. \tag{2.5}$$

添加一个次数为 d 的冗余形式，会给 S_I添加一个直和项 $\mathcal{O}_C(-d)$。分次生成还确保，对于 $j \le q$，f_i^q 在模 h^j 意义下生成 $I^{[q]}$。

令 $C_L(\alpha, \beta)$ 表示这样一个丛：其拉回到 $\mathbb{P}^1$ 后，依次有 L 个 $\mathcal{O}(-\alpha)$ 和 L 个 $\mathcal{O}(-\beta)$。在标架 s 和 t中，将每个直和项在 $t = 0$ 处的纤维与下一个直和项在 $s = 0$ 处的纤维用恒等映射粘合，最后一个直和项与第一个直和项也如此。我们称之为半长度为L的环，并记作 $\mathrm{B}_L = C_L(1,2)$。作 $-N$ 的平面扭曲层会使每个指标增加 $3N$。Frobenius 拉回会将指标乘以 q，并保持粘合方式 [10]。

对于 $1 \le j \le q$，考虑循环 C 沿 F_q 的拉回：$X_j \to C$。记 δ_1，……，δ_{2L} 为其直和项按循环次序排列的指标。在第2.1节的标架中，令 A_i 和 B_i 为其取值

分别是在 $s=0$ 和 $t=0$ 上方的分支处， i 次直和项的截面取值。存在一个定义在 X_j 上的层的正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (F_q^{*}\mathcal{C})(D) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{2L} \mathcal{D}_j(D)(-\delta_i Z_q) \xrightarrow{\Delta} T_j^{2L} \longrightarrow 0, \\ \Delta((A_i,B_i)_i) = (B_i - A_{i+1})_i, \qquad A_{2L+1} = A_1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

~实际上，将导子序列（2.2）与局部自由层（$F_q^{*}\mathcal{C}$）（D）作张量积。由于 $F_q\rho_j = \nu F_q$，中间项是将拉回到 Y_j 的正规化直和项沿 ρ_j 推前所得。这给出了由 $-\delta_i Z_q$ 确定的扭结。在谱 T_j 的两个副本上，提升是常值的，取值分别为 $[0:\ 1]$ 和 $[1:\ 0]$。因此， $\mathcal{C}$ 的粘合会在整个交上，将直和项 i 的第二个值与直和项 $i+1$ 的第一个值相对应。这给出 Δ。由 H^0 的左正合性，截面（$F_q^{*}\mathcal{C}$）（D）恰好是满足这些次数为 D 的匹配条件的元组。

命题2.3。 假设 S_I 和 S_J 各有一个环，其余所有直和项均为 $\mathcal{O}_C$ 的扭结。对于 $r\in\mathbb{Z}$ 和 $c\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$，设它们的环分别为 $C_L(\alpha,\beta)$ 和 $C_L(\alpha+3c,\beta+3c+3)$。若 $(\alpha,\beta) = (3r+1,3r+2)$ 或 $(3r+2,3r+4)$，则

$$\Phi_J(t) - \Phi_I(t) = \big(\Phi_J(1) - \Phi_I(1)\big)t + \epsilon(t) \qquad (t\in\mathbb{D}).$$

证明。 固定 $t=j/q$，其中 $1\le j\le q$ 并令 $R_j = P/(h^j)$。将（2.5）拉回到 X_j 后所得序列是正合的，因为其商是局部自由的。由于 $H^0(X_j,\ \mathcal{O}_{X_j}(D)) = (R_j)_D$，其行次数以及其核的截面决定了该商的 Hilbert级数。

考虑第一条环中 L 个指标为 β 的直和项所组成的路径。为其设置自由的外端，并沿该路径施加 $L-1$ 条件 $B_i = A_{i+1}$。每个这样的元组都是该环的一个整体截面的限制。事实上，将其截面的顺序反转。对于其中每个截面，引理 2.2都会在相反的路径上提供一个取值互换的截面。现在，（$2L$ 中的所有等式 2.6）都成立，包括原路径两端的两个等式。公共平移 $3r$ 可通过 $\operatorname{div}(b^q) = 3Z_q$ 吸收到平面扭曲层中。第二条环也适用同样的证明。将 $3c$ 从两个指标中移除后， $\beta+3$ 的截面也是 β 的截面，并具有相同的分支值。在任一环中，限制的核都是外端取值为零的低指标路径。

令 $K(T)$ 为第一个具有自由端的高指标路径的 Hilbert级数。在充分大的次数 D 下，每个分离直和项的一个截面都可以在两个 谱 T_j 的副本上取任意值。这是通过对 Y_j 上它们并集的理想层应用 Serre消灭定理 得到的。因此，匹配条件彼此独立。根据（2.2），在这些次数下，分离使每个直和项的 Hilbert函数增加 j^2。因子 Z_q 的长度为 qj，因为 $3Z_q = \operatorname{div}(b^q)$ 的长度为 $3qj$。因此，扭曲 $-\beta Z_q$ 使该 Hilbert函数的常数项改变了 $-\beta qj$。因此

$$K(T) = L\,\mathrm{Hilb}_{R_j}(T) + \frac{j^2 - L\beta qj}{1-T} + O(1) \qquad (T\to 1).$$

I put $A_I(z) = 1 - \sum_i z^{d_i} + \sum_l z^{e_l}$ 的行中，其中 $\mathcal{O}_C(-e_l)$ 是环外部的直线丛直和项。类似地定义 A_J，并令 $z=T^q$。 J 的低指标路径是 I 的路径平移 cq 得到的，而高指标路径平移了 $(c+1)q$。乘以 b^q 的适当幂可实现这两个对应关系，并保持图表 $b=1$ 中的分支值。从 J 的商级数中减去 I 的商级数乘以 T^{cq} 后所得的级数。低指标路径相互抵消。差值为

$$(A_J(z) - z^c A_I(z))\,\mathrm{Hilb}_{R_j}(T) + (z^{c+1} - z^c)K(T).$$

令 $G(z) = A_J(z) - z^c A_I(z) + L(z^{c+1} - z^c)$。式 (2.5) 中的秩和次数给出 $A_I(1) = -2L$ 和 $3A_I'(1) = -L(\alpha+\beta)$。对应的 J 恒等式给出 $G(1) = G'(1) = 0$。由于 $\mathrm{Hilb}^{R_j}(T) =$

$(1-T^{3j})/(1-T)^3$ 和 $z^{c+1}-z^c=-q(1-T)+O((1-T)^2)$，在 $T=1$ 处求值可得余长度之差

$$\left(\tfrac{3}{2}G''(1)+L\beta\right)q^2j-qj^2.$$

除以 q^3 后，这是 $\gamma t-t^2$。其在 $t=1$ 处的值给出 $\gamma=\Phi_J(1)-\Phi_I(1)+1$。在 $t=0$ 处，两个余长度均为零。□

例如，取 $I=\mathfrak{m}$ 和 $J=\mathfrak{m}^{[4]}$。行 (x,y,z) 的循环指标为 $(4,5)$，这可从第 4 节中的两列看出。四次幂行的指标为 $(16,20)$。由于 $E_1(1)=1$ 且 $E_4(1)=35$，根据约化三次曲线 [9, 定理 3],的公式，该命题给出

$$E_{4q}(j)-E_q(j)=35q^2j-qj^2,\qquad 0\le j\le q. \tag{2.7}$$

这里，术语 $-qj^2$ 记录了两个分支交的长度。

3. 冒号理想与合 syzygy 循环

命题 2.3 中的比较需要每个 Syzygy 丛的环。我们确定定理 $(I^{[2]}:\ h)$ 和 $(I^{[4]}:\ h)$ 中的环 3.4。

3.1. 重三次曲线上的扩张类。对于 $c=2,\ 4$，令 $U_c(I)=(I^{[c]}:h)B/I^{[c]}B$。这个分次模刻画了必须添加到行 (f_i^c) 中的形式。使用 c 次幂映射 $\sim F_c\colon X_2\to C$，并令 $V=F_c^*S_I$，$V=V|_C$。

引理 3.1。 行 (f_i^c) 诱导出单射 $B_d/(I^{[c]}B)_d\hookrightarrow H^1(C,V(d))$。在此单射下，$U_c(I)_d$ 是下列边界的像

$$0\longrightarrow V(d)\xrightarrow{h}\widetilde{V}(d+3)\longrightarrow V(d+3)\longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

若形式 g_ν 的次数为 d_ν，并代表此类，则扩展行的核 S' 是一个扩张

$$0\longrightarrow V\longrightarrow S'\longrightarrow\bigoplus_\nu \mathcal{O}_C(-d_\nu)\longrightarrow 0$$

其扩张类是 $H^1(C,V(d_\nu))$ 中 g_ν 的像。

证明。将 $V(d+3)$ 的一个截面的系数提升为齐次多项式 $\widehat{u}_i$。它们在 C 上的关系给出 $\sum_i \widehat{u}_i f_i^c=\mathrm{h}g$，其中 g 是一个次数为 d 的形式。改变提升会使 g 改变一个属于 (f_i^c) 的元素。反过来，f_i^c 模 h^2，生成 $I^{[c]}$，因为 $c\ge 2$，且 f_i 生成 IB。条件 $\mathrm{h}g\in I^{[c]}+(\mathrm{h}^2)$ 仅取决于 $\bar{g}\in B$，并等价于 $\bar{g}\in(I^{[c]}:\mathrm{h})B$。事实上，若 $\mathrm{h}g=f+\mathrm{h}^2v$，其中 $f\in I^{[c]}$，则 $\mathrm{h}(g-\mathrm{h}v)=f$。这将 g 的可能取值类与 $U_c(I)_d$ 对应起来。

在局部上，C 写作 $g=\sum_i b_i f_i^c$。将 b_i 提升到 X_2 并将 $\widehat{u}_i$ 替换为 $\widehat{u}_i-hb_i$。原 Syzygy（关系）的这些局部提升在交叠处相差一个余循环，它表示旧行中 g 的边界。这给出了（3.1）中的识别。对于扩展行，投影到新的系数直和项是满射，因为旧行已经生成了 $\mathcal{O}_C$。其局部分裂由相同的 b_i 给出，因此具有所述的扩张类。□

我们记录这一构造如何依赖于输入向量丛。对于丛 S 上的 C 置 $V_S=(F_c^*S)|_C$，并记 $\partial_{S,\ d}$ 为 (3.1) 中的边界。设 $S_1=S(-a)\oplus\mathrm{L}$，其中 L 是平面扭曲的和。第一个直和项的包含给出交换方块

$$\begin{array}{ccc} H^0(C,V_S(d+3)) & \xrightarrow{\partial_{S,d}} & H^1(C,V_S(d)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(C,V_{S_1}(d+ca+3)) & \xrightarrow{\partial_{S_1,d+ca}} & H^1(C,V_{S_1}(d+ca)). \end{array} \tag{3.2}$$

下方行中的另一个直和项的边界为零。事实上， C 上的平面扭曲的每个截面都可提升为平面形式，因而可提升至 X_2。因此，下方的像就是上方像在其第一个直和项中的部分。引理 3.1 通过实际冒号理想的一个形式实现每个传输类。由于

$$\operatorname{Ext}^1_C\left(\bigoplus_v \mathcal{O}_C(-d_v), V\right) = \bigoplus_v H^1(C, V(d_v)).$$

该元组确定了扩大的核，且只确定到扩张等价性为止。它在 L 的拉回中的分量为零，因此该直和项可以分裂出来。

接下来，我们计算每个次数中的完整冒号商的维数。记 $b(s) = \dim B_s$，分别等于 0、1、$3s$，其中 $s<0$、$s=0$、$s>0$。令 $\sigma_L(v、w)$ 表示一个环的截面维数，该环在正规化上具有 L 个次数为 v 的直和项，后面跟着 L 个次数为 w 的直和项。对于下文使用的非零次数 $v>w$，匹配端点可得

$$\sigma_L(v,w) = \begin{cases} L(v+w), & v,w>0, \\ Lv-1, & v>0>w, \\ 0, & v,w<0. \end{cases} \tag{3.3}$$

在中间情形中， L 正的直和项构成一条路径，两端的值均为零。令$h_{c、L}(s) = \sigma_L(3s-c、\ 3s-2c)$，其中 $c=1、\ 2、4$。

引理 3.2. 假设 S_I 是$\mathrm{B}_L(-N)$与 $\mathcal{O}_C$的若干扭结的直和，其中 $L\ge 1$。下列各项给出$\dim U_c(I)_{cN+s}$ 在 s的连续四个取值处的值。所有其他分次部分均为零。

c	s	$\dim U_c(I)_{cN+s}$			
2	$-2,-1,0,1$	$L-1$	$3L$	$3L$	$L-1$
4	$-1,0,1,2$	L	$3L+3$	$3L+3$	L

(3.4)

证明。 令 $R'=P/I^{[c]}$。乘以h 得到

$$0 \longrightarrow U_c(I)(-3) \longrightarrow (R'/hR')(-3) \xrightarrow{h} R'/h^2R' \longrightarrow R'/hR' \longrightarrow 0.$$

除以 h^2 所得的商是 $P/(I^{[c/2]}, \mathrm{h})$的 Frobenius 拉回。其 Hilbert级数为$(1+T)^3\mathrm{Hilb}_{P/(I^{[c/2]},\mathrm{h})}(T^2)$。在行公式 (2.5) 中，生成元项和线直和项通过$(1+T^3)\ \mathrm{Hilb}_B(T) = (1+T)^3\ \mathrm{Hilb}_B(T^2)$相消。环给出

$$\dim U_c(I)_{cN+s} = h_{c,L}(s+3) + h_{c,L}(s) - \sum_{\substack{0\le i\le 3 \\ s+3-i \text{ even}}} \binom{3}{i} h_{c/2,L}\big((s+3-i)/2\big). \tag{3.5}$$

代入 (3.3) 得到 (3.4) 每一行的四个项。在任一范围之上，所有环次数均为正。线性项相消，因为 $\sum\binom{3}{i}=4$ 以及 $\sum i\binom{3}{i}=6$ 在每个奇偶类上。低于这些范围时，每一项都为零。□

3.2. **模型行的关系。** 我们计算具有一个环的丛对应的两个冒号理想行。随后，利用（3.2）中扩张类的传输，即可得到任意同类型输入向量丛的结果。固定 $L\ge 3$，令 $d=3L$ 并在正规化上记 $w=s/t$。在 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 中令

$$\Lambda = \{1,\dots,L\}, \qquad p_j = L+1+2j \pmod d\ (0\le j\le L),$$
$$\Pi = \{p_0,\dots,p_L\}, \qquad \Sigma = \Lambda\cup\Pi.$$

因此 $p_L=1$。我们的模型行由 $1+w^d$ 和单项式 w^p 构成，其中 $p\in\Sigma$，它们的平面次数均为 L。令 $I\subset P$ 由该行的齐次提升及 h 生成。该行在 C 上没有公共零点，因此 I 是 $\mathfrak{m}$-primary。

令 K 为满射行 $\bigoplus^{r}{}_{l=1}\mathcal{O}_C(-e_\ell)\to\mathcal{O}_C$ 的核。二元次数为 n 的齐次 syzygy（关系）是一个列，其第 l 个分量的次数为 $n-3e_\ell$。它给出一个映射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)\to\nu^*K$。我们用 $v\to v'$ 表示它在 $s=0$ 和 $t=0$ 处的取值。利用来自 b 的平面标架，我们将两个纤维都与 K_p 认同。事实上，$\nu^*b=(s+t)^3$,，因此这些就是列计算中使用的标架。

引理（基的下降）。设 $r-1$ 列的次数为 n_i，端点对为 $v_i\to v_{\sigma(i)}$，其中(v_i)是 K_p 的一组基，且 σ 是一个置换。若 $\sum_i n_i=3\sum_l e_\ell$，则 K 是与 σ 的轨道相对应的丛的直和。一个轨道的标准化直和项为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n_i)$，按其循环次序排列。特别地，当 $n_i=3e$ 时，一个单元素轨道给出 $\mathcal{O}_C(-e)$。

证明。这些列定义了一个映射 $\bigoplus_i\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n_i)\to\nu^*K$，它是秩相同的丛之间的映射。其行列式在 $s=0$ 处非零，且由次数和可知其次数为零。因此它处处非零，且该映射是一个同构。

对于一个轨道 Γ，令 W_Γ 为满足 $i\in\Gamma$ 的 v_i 的张成空间。相应的标准化线丛之和在 p 上方的两个点处的纤维均为 W_Γ。由于 $K_p=\bigoplus_\Gamma W_\Gamma$，两个分支值相等等价于每个 W_Γ中相等。因此，将 $j=1$ 的导子序列与K张量后，匹配截层分解为按 Γ取直和。在一个轨道内，端点对给出了所述的循环粘合。在次数为 $3e$ 的单元素轨道上，两个标架一致，这就是平面扭曲层 $\mathcal{O}_C($ $-e)$ 的粘合。□

次数为 $n'<n$ 的列，乘以一个次数为 $n-n'$ 的二元形式后，可以加到次数为 n 的列上。单项式 $t^{n-n'}$ 和 $s^{n-n'}$ 分别规定了两个端点处的修正。

在该模型中，相邻单项式之间的间隔为 $g=1$ 或 2。从 p 到 $p+g$ 的间隔处的关系，其系数为 s^g，t^g，端点对为 $e_{p+g}\to e_p$，其中 e_p 是单项式坐标。从 $d-1$ 到 1 的间隔处，$1+w^d$ 的附加系数为 st，因为 $w(1+w^d)=w+w^{d+1}$。它在两个端点处均为零。$2L$ 个单项式坐标构成纤维的基。这些端点对沿纤维依次排列，其中两种大小的间隔各连续出现 L 次。列次数之和等于行次数之和，即 $(2L+1)d$。该引理给出模型核 $\mathrm{B}_L(-L)$。

命题 3.3. 对于 $c=2,4$，可以将 $(I^{[c]}:h)B$ 中的形式添加到旧幂所在的行，使其核有一个环以及下文列出的固定列。每一对中，第一个数是次数，第二个数是重数。行项的次数为平面次数，列的次数为二元次数。记作$D=3cL$。

c	新行项	环列	固定列
2	$(2L-2,\ L-1),\ (2L-1,\ L)$	$(D-4,\ L-2),\ (D+1,\ L-2)$	$(D,2L+3)$
4	$(4L-1,L),(4L,L+1)$	$(D+1,\ L+2),\ (D+2,\ L+2)$	$(D,\ L-2),\ (D+6,\ L-1)$

在每个环中，任一次数的列都是连续出现的。

为在任一冒号理想中构造形式，我们使用（3.1）。对于提升关系 $\sum\widehat{u}_i f_i^c=hg$，对其进行微分 z 可得

$$xy\,\bar{g}=\sum_i\overline{\partial_z\widehat{u}_i}\,\bar{f}_i^{\,c}\quad\text{in } B. \tag{3.6}$$

相同的判据适用于两行。方程（3.6）确定了由提升关系得到的新项。对于扩展行，我们构造齐次列，检验其关系，并展示纤维在节点处的一组基；其端点值会对这组基进行置换。于是，两个次数和相等，依据基引理即可得到核丛。完整冒号理想的生成性则在定理 3.4 中另行检验。

3.2.1. 四次幂。旧的四次幂的二元次数为 $D = 12L$。保留这些形式$Z = 1 + w^D$ 和 $F_p = w^{4p}$，用于 $p \in \Sigma$。在大小为一的间隔上，将其列的四次幂乘以 st。这两个系数 s^5t、st^5 提升为 $xz + y^2$、$yz + x^2$。由（3.6）可得

$$w^{4p-1}(1 + w^3), \qquad p \in \Lambda,$$

在二元次数 $D - 3$ 中。

在每个 $p = p_j$ 处还有一个次数为 D 的形式。令 g_-, g_+ 表示它与相邻项之间的间隔。将相邻的四次幂列分别乘以 t^{9-4g_-} 和 s^{9-4g_+}，然后相加。在 p 处，系数为 $1 + w^9$，相邻系数为 w^{4g_-} 和 w^{9-4g_+}。在 C 上，所需的提升及其 z-导数为

coefficient	$1 + w^9$	w^4	w^5	w^8	w
lift	$z^3 + x^3 + y^3$	xy^2	x^2y	$xz^2 + y^2z + x^2y$	$yz^2 + x^2z + xy^2$
∂_z	z^2	0	0	y^2	x^2.

在跨越零点的间隔处，额外系数属于旧生成元所在的列 Z。因此，它在（3.6）中的导数要乘以 Z，并且模 Z 后为零。由于 $xy = w^3$ 在 $Z = 1 + w^D$ 模 $t = 1$ 下是单位元，我们可以模 Z 计算（3.6）。所得结果为

$$M_j = w^{4p-3} + w^{4p+3} + \mathbf{1}_{j>0}w^{4p-9} + \mathbf{1}_{j<L}w^{4p+9} \pmod{Z}. \tag{3.7}$$

此处**1** 表示一个指示函数，指数均取模 D。这至多会使该形式相差所保留生成元 Z 的一个标量倍数。

为计算其关系，在二元次数 $D + k$ 下进行。除 Z 外，所有行项都在两个端点处为零。如果其他项的去齐次化和模 $Z = 1 + w^D$ 为零，则其除以 Z 所得的商的次数至多为 k。将该商齐次化后，得到 Z 中缺失的系数。由于其他行项在端点处均为零，且 Z 在两个标架中的值都为 1，因此该系数在两个端点处的值都为零。在 $\mathbb{F}_2[Y]/(Y^d + 1)$ 中取 $Y = w^4$。对于次数为 $D - 3$ 的形式、F_p 和 M_j，分别收集支撑于 Λ、Σ、Π 上的多项式 A_i、B_i、C_i 中 w^i 的系数。A_i的范围为 0、……、$k+3$，而 B_i的范围为 0、……、k、C_i。若 $C|_p$ 表示其在 p 处的单项，则设

$$D_1(C) = Y^{-1}C + Y^2(C - C|_{p_L}), \qquad D_3(C) = C + Y^{-3}(C - C|_{p_0}).$$

根据（3.7），列的条件为

$$\sum_i w^i\big((w^3Y^{-1} + w^2)A_i + B_i + wD_1(C_i) + w^3D_3(C_i)\big) = 0 \pmod{1 + w^D}. \tag{3.8}$$

在次数 D 中，令 A 的支集包含于 $\{2, \ldots\ldots, L - 1\}$。取 $A_0 = A_3 = A$、$A_1 = Y^{-1}A$、$A_2 = YA$、$B_0 = (Y^{-1} + Y^2)A$ 以及 $C_0 = 0$。这些解满足（3.8），并给出 $L - 2$ 个端点向量为 $(A, (Y^{-1} + Y^2)A, 0)$ 的固定列。

对于次数 $D + 1$，令 $C_0 = C_1 = 0$。取 A_0、A_4、T，其支集分别包含于 $[2, L]$、$[1, L - 1]$、$[1, L]$ 中，并令

$$A_1 = Y^{-1}A_0 + A_4, \quad A_2 = T, \quad A_3 = A_0 + YA_4, \qquad B_0 = A_1 + YT, \quad B_1 = T + YA_3.$$

w 在（3.8）中的四个剩余类均为零。对于 A 支撑在 Λ 上且 B 支撑在 $[1, L + 1]$上的端点向量，定义 $\pi(A, B) = B + (Y^{-1} + Y^2)A$。其核是上面固定列的张成空间，而其像的基为 1、$Y$ ……、Y^{L+2}。应用 π后，右端点为$T + YA_0 + Y^{-1}A_4$，左端点为它的 Y 倍。$Y^{-1}A_4$ 的支撑包括指数零，T 提供指数 1、……、L，而 YA_0 提供指数 $L + 1$。因此，每次选取一个单项式，右端点依次遍历 1、Y ……、Y^{L+1}。所得的列给出路径

$$Y^{L+2} \longrightarrow Y^{L+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow 1.$$

对于 $\mathbf{1}$，选择代表元（Y Y^3）；对于 Y^{L+2}，选择（Y^L， Y^{L-1}）；对于带有 $1 \le i \le L+1$的 Y^i，选择（$\mathbf{0}$， Y^i）。列端点与其所选代表元之间的任何差异都属于 $\ker \pi$。一个端点为（k， k）的固定列，在乘以 t 后给出（k，$\mathbf{0}$），在乘以 s后给出（$\mathbf{0}$， k）。由于固定列在每个端点处张成 $\ker \pi$，我们可以在相交于 Y^j的两条边上使用同一个代表元v_j。

引理（端点修正）。设 E 为端点空间，其中 A 支撑在 $[1, L]$ 上，而 B 支撑在$[1, L+1]$上。记 v_j 为 Y^j 的所选提升，并记 $K = $核 π。在次数 $D+2$下，次数为 D 的固定列及次数为 $D+1$ 的路径列的倍数，恰好给出端点修正

$$\big(K + \langle v_1, \dots, v_{L+2}\rangle\big) \times \big(K + \langle v_0, \dots, v_{L+1}\rangle\big) \quad in\ E \times E.$$

证明。对于 $0 \le j \le L+1$，路径列的端点为 (v_{j+1},v_j)。乘以 t 或 s，在端点标架中分别得到 (v_{j+1},0) 或 (0, v_j)。固定列的端点为 (k, k)；乘以 t^2 或 s^2，分别得到 (k,0) 或 (0, k)。这些张成 K。这证明了所示乘积中的每一对都能出现。反过来，齐次乘子在每个端点处的作用都是乘以其在该处的取值，因此由这些列产生的每个修正都属于该乘积。□

返回路径的次数为 $D+2$。设 $C_1 = 0$。写成$\alpha_j = (C_0)^{p_j}$ 以及 $\beta_j = (C_2)^{p_j}$。任意选取α_j 和 β_L，并令 $\beta_j = \alpha_{j+1}$ 对于 $j < L$。取 $A_0 = \beta_L Y$ $A_5 = \alpha_0 Y^L$， $A_2 = A_3 = A_4 = 0$。方程（3.8）由以下各项满足：

$$\begin{aligned} A_1 &= Y^{-1}A_0 + YA_5 + D_3(C_0) + D_1(C_2), \\ B_0 &= A_1 + YA_5, \qquad B_1 = D_1(C_0) + YD_3(C_2), \qquad B_2 = A_0. \end{aligned}$$

要检查支集， Σ 之外的指标对于 $0 \le j < L$为 $m_j = p_j + 1$，其中 $m_{L-1} = 0$。如果$C_{p_j} = c_j$，则 $D_1(C)$ $_{m_j} = c_{j+1}$ 以及（$YD_3(C)$）$_{m_j} = c_j$。这给出（B_1）$_{m_j} = 0$。在 $D_3(C_0) + D_1(C_2)$中，p_j、 $1 \le j < L$处的系数为 $\alpha_j + \beta_{j-1}$，而m_j、 $j < L-1$处的系数为 $\alpha_{j+2} + \beta_{j+1}$。它们全部为零。 Λ之外剩余的两个系数，即0和 $L+1$ 处的系数，与 $Y^{-1}A_0$ 和 YA_5相消。

端点修正引理只在左侧保留 π 的常数系数，在右侧保留 Y^{L+2} 的系数。新的端点对于 $1 \le j < L$没有 F_{p_j} 坐标。在剩余的端点坐标后接上 C 坐标后，该对为

$$(\beta_L, \alpha_0, \dots, \alpha_L) \longmapsto (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_L, \beta_L).$$

记 M_j的单位向量为 c_j，我们得到路径 $1 \to c_L \to c_{L-1} \to \cdots \to c_0 \to Y^{L+2}$。它闭合成环，其中每个次数 $D+1$有 $L+2$ 列， $D+2$。

最后，对于 $p = p_j$， $1 \le j < L$，方程（3.7）给出

$$(1 + w^6)F_p + w^3 M_j + w^2 F_{p_{j-1}} + w^4 F_{p_{j+1}} = 0 \pmod{Z}.$$

这些次数为 $D+6$ 的 $L-1$ 列在两端具有相同的 F_p 单位向量。现在我们在节点处有一个单一的基。在坐标 A 和 F_1， $\dots$， F_{L+1} 上，取张成$\ker \pi$ 的 $L-2$ 向量以及$\mathbf{1}$， Y $\dots$， Y^{L+2}的所选提升。首先应用 π即可推出它们线性无关。再添上c_j 这些 $L+1$ 向量，以及占据彼此不相交的新坐标的$e_{F_{p_j}}$这些 $L-1$ 内部向量。除 Z 以外，所有行项在节点处都为零，因此这些 $4L+1$ 向量构成核纤维的一组基。在这组基下，两条路径形成一个轨道。$\ker \pi$ 向量和内部 F_{p_j} 向量保持不变。列次数之和为$(4L+1)D + 9L$，这等于二元行次数之和，因为 $D = 12L$。基引理给出环以及四次幂行中的两组直线丛直和项。

3.2.2. 平方。对于平方，旧的二元次数为 $D = 6L$。在内部顶点 $p, 2 \le p \le L$处，取相邻的两列间隙为一的列。它们的平方给出一个匹配截面，其平面系数 x, z, y 位于位置 $p-1, p, p+1$。由 (3.6)，其像在二元次数$D-6$中为 w^{2p-3}。对于从 p 到 $p+2$的大小为二的间隙，将平方列乘以 st。和之前一样，其系数可提升为 $xz + y^2, yz + x^2$。它们在次数 $D-3$中给出 $w^{2p-1}(1+w^3)$。在从 $3L-1$ 到1的间隙处，这给出 $1 + w^{D-3}$。旧二项式上的额外系数提升为 xy，且其z导数为零。

设 $n = L-1$ 和 $b_0 = 2L+1$。对于 $0 \le i < n$，该行化简为

form	binary degree
$A_i = w^{1+2i}$	$D-6$
$B_i = w^{b_0+4i}(1+w^3), \quad Z = 1 + w^{D-3}$	$D-3$
$C_i = w^{b_0+4i+5}$	D.

(3.9)

事实上，对于 $1 \le p \le L+1$，旧的平方 w^{2p} 是 A_i 的倍数，其倍数分别为 w，w^3 或 w^5，它们都是二次平面形式。沿另一条路径的旧内部平方是 C_i。要恢复 $1 + w^D$，使用

$$(1+w^3)Z = 1 + w^D + w^3 + w^{D-3}, \qquad wB_{n-1} = w^{D-6} + w^{D-3}.$$

这里 $w^3 = w^2 A_0$ 和 w^{D-6} 是一个旧平方。因此，将遗漏的形式 $L+2$ 加回后，会增加 $L+2$个 $\mathcal{O}_C(-2L)$。

我们用 a_i、b_i、c_i表示坐标 A_i、B_i、C_i对应的单位向量。在次数 $D-4$下，关系式$w^2 A_i + A_{i+1} = 0$ 给出一个$_{i+1} \to \mathsf{a}_i$。这些 $n-1$ 列构成该环的前半部分。为找出固定列和返回路径，我们在次数 $D+k$下模 Z 计算，其中 $k = 0,\ 1$。(3.9) 中除 Z 外的所有形式在端点处都为零，因此 Z 的系数再次具有零端点值。

设 $Y = w^4$。令 $P_r(Y)$为次数小于 n 的多项式，其 i 次系数是乘以 B_i 的 w^r 的系数。对 C_i 以相同方式定义 Q_r。这两组的贡献除以 w^{b_0} 后为

$$S = (1+w^3)\sum_{r=0}^{3+k} w^r P_r(Y) + w^5 \sum_{r=0}^{k} w^r Q_r(Y). \tag{3.10}$$

引理（提升一列）。固定 $k = 0$ 或1 以及 B_i，C_i 中（3.10）的系数。它们可以扩展为二元次数为 $D+k$ 的齐次 *syzygy*，当且仅当

$$[w^j]S = 0 \qquad (k+3 \le j \le 4n).$$

左侧 A_0 和右侧 A_{n-1} 坐标于是被迫为

$$a = [w^{4n+1}]S, \qquad a' = [w^{k+2}]S.$$

两个端点处所有其余的 A 坐标均可独立指定。

证明。$A_i = w^{1+2i}$ 的系数在 $t=1$上的次数至多为 $6+k$。因此，这些项张成指数从 1 到 $M = b_0 + k + 2$ 的单项式。只有 A_0 能达到第一个指数，只有 A_{n-1} 能达到最后一个指数。令 $N = D - 3 = b_0 + 4n$。模 $Z = 1 + w^N$ 下，约化将指数为 $N+j$ 的项映射为 j。由于 $\deg S \le 4n+2+k$ 且 $2+k < b_0$，回绕的项在约化后的指数至多为 $2+k$。因此，$w^{b_0}S$ 的禁用指数为 $M+1$，……，N，其中 N 表示常数项。这些恰好给出了所述的消失条件。指数为 1 和 M 的系数分别给出 a 和 a'。

为 A_i 选择系数，以消去约化多项式。约化前的和可被 Z 整除，次数至多为 $D+k$。它除以 Z 所得的商次数至多为 $3+k$，这正是最后一个系数允许的次数。对各项进行齐次化即可得到所需的 Syzygy（关系）。最后，第 $w^2 A_i + A_{i+1} = 0$ 列的端点对为$\mathbf{a}_{i+1} \to \mathbf{a}_i$。将其乘以 t^{4+k} 或 s^{4+k}

分别只会改变左端点或右端点。对于 $0 \le i < n-1$，这些操作涵盖了每个自由坐标。□

对于固定列，取 $k=0$。将 $[\cdot]_{<n}$ 记为截断到次数 n，并记 $\ell P = (P - P(0))/Y$ 给定次数小于 n 的 P 以及 $a,\ a' \in \mathbb{F}_2$，令

$$P_0 = P_3 = P, \qquad P_1 = \ell P, \qquad P_2 = a' + [YP]_{<n},$$
$$Q_0 = \ell^2 P + [YP]_{<n} + a' + aY^{n-1}.$$

(3.10) 的四个留数为 $P + YP_1$、$P_1 + Y(P_2 + Q_0)$、$P_2 + YP_3$和 $P_3 + P$。它们满足消去条件，并给出所指定的 $a,\ a'$。两端的 B 和 C 坐标相同。两端也选取相同的 A 向量 $a\mathbf{a}_0 + a'\mathbf{a}_{n-1}$。对于 $P=0$ 的两个单位选取，$a,\ a'$ 给出固定向量

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{c}_{n-1}, \qquad \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{c}_0.$$

对于 $P = Y^i$ 和 $a = a' = 0$，我们得到固定向量 $\mathbf{b}_i + \mathbf{c}_{i-2} + \mathbf{c}_{i+1}$，省略 $[0, n-1]$ 之外的指标。这给出次数为 D 的 $n+2$ 个固定列。

对于返回路径，取 $k=1$。只需自由选择 Q_1，并令

$$P_0 = P_1 = P_4 = 0, \qquad P_3 = a', \qquad P_2 = [YQ_1]_{<n} + a'Y, \qquad Q_0 = P_2 + aY^{n-1}.$$

S 的四个留数现在分别为 0、aY^n、$P_2 + Y(a' + Q_1)$ 和 a'。第三个是 Y^n 的倍数，因此消去条件成立。两个 C 向量为 $Q_0,\ Q_1$，而两个 B 向量均为零。对于$n > 2$，以下选择给出返回路径。

Q_1	a	a'	endpoints
Y^{n-2}	1	0	$\mathbf{a}_0 \to \mathbf{c}_{n-2}$
Y^{i-1}	0	0	$\mathbf{c}_i \to \mathbf{c}_{i-1} \quad (2 \le i \le n-2)$
0	0	1	$\mathbf{c}_1 \to \mathbf{a}_{n-1}$.

在第一行中，$Q_0 = 0$，因为两项 Y^{n-1} 相互消去。在中间行中，$Q_0 = Y^i$；在最后一行中，$Q_0 = Y$ 提升引理在每种情况下都给出了所示的 A 坐标。对于 $L=3$，我们有 $n=2$。取 $Q_1 = 0$ 和 $a = a' = 1$。于是 $Q_0 = 0$，得到单条边 $\mathbf{a}_0 \to \mathbf{a}_1$。在每种情况下，该环都有 $n-1$ 列，次数为 $D-4$，以及 $n-1$ 列，次数为 $D+1$。

这个环的顶点是 $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ 和 $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-2}$。它们与上面展示的 $n+2$ 个固定向量一起构成核纤维的一组基。事实上，在它们之间的一个关系中，$\mathbf{b}_i$ 坐标首先消去 n 个固定向量。随后，坐标 $\mathbf{c}_0$,$\mathbf{c}_{n-1}$ 消去另外两个。即使在 $n=2$ 的情况下，这些环顶点仍是互不相同的坐标向量。由此得到的 $3n$ 个向量张成整个纤维。它们的端点置换具有所述的环和 $n+2$ 个单元素轨道。各列的次数之和为 $(n+2)D + (n-1)(2D-3)$，即 (3.9) 中二元行次数之和。因此，基引理将约化核分解到 C 上。恢复 $L+2$ 个冗余项后，会增加 $L+2$ 个平面扭曲层，并在完整方阵行中得到 $2L+3$ 个直和项 $O_C(-2L)$。这就证明了命题 3.3。

3.3. **Frobenius 下环的变化**。命题 3.3 确定了模型行的核。现在，我们将其扩张类转移到 I 所在的行，并比较 Hilbert 函数，以证明所得生成元给出了 C上的完整冒号理想。

定理 3.4. 设 $S_I = \mathrm{B}_L(-N) \oplus \mathrm{L}$，其中 $L \ge 3$ 且 L 是 O_C 的扭结之和。对于 $c = 2,\ 4$ 存在一个齐次生成行，其所在的理想为 $(I^{[c]} : h)B$，且该行包含原行的 c 次幂。若 S_c 表示其 *Syzygy*（关系）丛，且$\mathrm{L}^{[c]}$ 表示 *Frobenius* 拉回，则

$$S_4 \simeq \mathcal{B}_{L+2}(-4N) \oplus O_C(-4N)^{L-2} \oplus O_C(-4N-2)^{L-1} \oplus \mathcal{L}^{[4]},$$
$$S_2 \simeq C_{L-2}(6N-4, 6N+1) \oplus O_C(-2N)^{2L+3} \oplus \mathcal{L}^{[2]}.$$

对于 $c=4$，额外生成元的次数为 $4N-1$ 和 $4N$，重数分别为 L 和 $L+1$。对于$c=2$，它们的次数为 $2N-2$ 和 $2N-1$，重数分别为 $L-1$ 和 L。

证明。 将命题 3.3 应用于核为 $\mathrm{B}_L(-L)$的模型。其新行项给出一个类元组，属于（3.1）的像。将（3.2）应用于 $a=N-L$。传递形式属于 $(I^{[c]}:\ h)B$，其次数增加 $c(N-L)$，而扩展行的核具有所示的分解。

还需证明传递形式在每个次数上都生成冒号理想。若 K_c 是包含旧幂的传递形式所在行的理想，则

$$I^{[c]}B \subseteq K_c \subseteq (I^{[c]} : h)B.$$

记 $v_c(s) = \dim (K_c/I^{[c]}B)_{cN+s}$。利用（2.5）从两行计算这个差值。它们共有的直线丛直和项相互抵消。新增生成元以及环的变化给出

$$v_4(s) = Lb(s+1) + 3b(s) - (L-1)b(s-2) + h_{4,L}(s) - h_{1,L+2}(s),$$
$$v_2(s) = (L-1)b(s+2) + Lb(s+1) - (2L+3)b(s) + h_{2,L}(s) - \sigma_{L-2}(3s+4, 3s-1).$$

例如，3 是 $b(s)$ 中第一行的系数，它统计了 $L+1$ 个次数为 $4N$的新生成元，减去该次数的 $L-2$ 个直线丛直和项。由（3.3）代入可得

$$\sum_{s} v_2(s)T^{s+2} = (1+T)\big((L-1)(1+T^2) + (2L+1)T\big),$$
$$\sum_{s} v_4(s)T^{s+1} = (1+T)\big(L(1+T^2) + (2L+3)T\big).$$

它们的系数恰好是 $U_2(I)$ 和 $U_4(I)$ 在（3.4）中的维数，包括在 $L=3$处。因此，包含关系 $K_c/I^{[c]}B \subseteq U_c(I)$ 在每个次数上都是等式。这证明了 $K_c = (I^{[c]}:\ h)B$。 □

4. Monsky公式与该对的符号

4.1. **二进递归**。令 $N_k = 4^k$ 并且

$$A_k = (x^{N_k}, y^{N_k}, z^{N_k}) : h^{(N_k-1)/3}.$$

Frobenius平坦性给出 $A_{k+1} = (A_k^{[4]} : h)$。对于 $A_0 = \mathfrak{m}$，行 $(x,\ y,\ z)$ 的归一化列为 $(t,\ s,\ 0)$ 和 $(s^2,\ t^2,\ st)$，其次数分别为 4 和 5。它们构成环 $\mathrm{B}_1(-1)$。

引理 4.1。 对于每个 $k \geq 0$，A_kB 都有一个生成行，其 *Syzygy* 丛为$\mathrm{B}_{2k+1}(-N_k)$，相差若干个 $\mathcal{O}_C$ 的扭结直和项。

证明。 第一步，在正规化上取 $I = (x^4,\ y^4,\ z^4)$ 和 $w = s/t$。如下七个形式都属于 $I:\ h$，这可由乘以 h 得到证明。最后一列给出了它们在 $t=1$ 上的限制。

i	g_i	$g_i(w)$
0	x^3+y^3	w^3+w^6
1	z^4	$1+w^{12}$
2	y^4	w^4
3	xy^3	w^5
4	$yz^3+xy^2z+x^2z^2$	$w+w^4$
5	$y^2z^2+xz^3+x^2yz$	w^8+w^{11}
6	$y^3z+x^2y^2$	w^3

它们的限制生成一个包含 IB 的理想，因为 $w^8 = w^5 + w^2(w^3+w^6)$。下方各列是拉回到正规化后的关系。将每个条目齐次化至该列

次数减去相应形式的二元次数。

次数列	
13	$(1, 0,0, w, 0, 0, 1)$
13	$(0, 0, w, 1, 0,0, 0)$
13	$(0, 0,1, 0, 0, 0, w)$
14	$(0, 0,0, w, w^2, 0,1)$
14	$(w + w^4, w,0, 0, 1, w^2, 0)$
14	$(w^5, 0, w, 0, 0,1, w^2)$

记作 e_i，表示对应于 g_i 的坐标向量。端点向量依次从 $e_0 + e_6$到 e_3、e_2、e_6、e_4、e_5，再回到 $e_0 + e_6$。这六个向量线性无关。次数和$81 = 9 + 6 \cdot 12$ 等于行次数之和，因此这些列构成 $\mathbb{P}^1$ 上的一组基。它们的端点置换正是上面所示的单循环。根据第 3.2 节中的基引理，它们给出 $\mathrm{B}_3(-4)$ 在 C上。在次数 $4 + s$下，这一行生成的理想模 IB 的维数为

$$b(s + 1) + 3b(s) + h_{4,1}(s) - h_{1,3}(s).$$

根据（3.3），这是 $c = 4$，$L = 1$ 行（3.4），因此这些形式生成$(I : h)B = A_1B$ 每个次数。定理 3.4 的四次情形现通过归纳证明该引理。□

定理证明*A*. 对于每个齐次 $\mathfrak{m}$-初等理想 I，我们有

$$8T_0\Phi_I = \Phi_{I^{[2]}}, \qquad 8T_1\Phi_I = \Phi_{I^{[2]}}(1) + \Phi_{(I^{[2]}:h)}. \tag{4.1}$$

第一个等式由取 $t = j/q$ 得出。对于第二个等式，将 $P/(I^{[2q]}, h^{q+j})$ 按h^q 的像滤链化。对该像取商后的长度为 $q^3\Phi_{I^{[2]}}(1)$。该像与 $P/((I^{[2q]} : h^q), h^j)$ 同构，至多相差一个次数平移。平坦性给出 $(I^{[2q]} : h^q) = (I^{[2]} : h)^{[q]}$。

设 $P_k = \Phi_{A_k}$，$Q_k = \Phi_{A_k^{[2]}}$，并令 $p_k = P_k(1)$，$r_k = Q_k(1)$ 以及 $s_k = \Phi_{A_k^{[4]}}(1)$。引理 3.2 证明中的正合列给出

$$\dim U_c(A_k) = 2\Phi_{A_k^{[c]}}(1) - 8\Phi_{A_k^{[c/2]}}(1).$$

由于 $L = 2k + 1$ 对于 A_k，将（3.4）的两行相加，得到

$$r_k - 4p_k = 4L - 1 = 8k + 3, \qquad s_k - 4r_k = 4L + 3 = 8k + 7. \tag{4.2}$$

通过减去端点值之间的线性插值，令

$$\psi_{2k}(t) = P_k(t) - p_kt, \qquad \psi_{2k+1}(t) = Q_k(t) - r_kt.$$

这些函数在 0 和 1处取零。我们证明它们满足（2.1）。

首先，（4.1）给出 $8T_0P_k = Q_k$ 和 $8T_1Q_k = s_k + P_{k+1}$。将第二个等式代入 1 处求值得到 $p_{k+1} = 8r_k - s_k$。由此可得

$$8T_0\psi_{2k} = \psi_{2k+1} + (8k + 3)t, \qquad 8T_1\psi_{2k+1} = \psi_{2k+2} + (8k + 7)(1 - t).$$

对于降低指标的两个步骤，比较半长度相同的环。A_k 的指标为 $\alpha = 3N_k + 1$ 和 $\beta = 3N_k + 2$。在 $A_k^{[4]}$ 中，它们分别增加 3α 和 $3\alpha + 3$。命题 2.3以及 $8T_0Q_k = \Phi_{A_k^{[4]}}$ 给出

$$8T_0\psi_{2k+1} = \psi_{2k} + \epsilon + (s_k - 4r_k)t.$$

对于 $k \geq 1$，令 $J = (A_k^{[2]} : h)$。根据定理3.4，其环的半长度为 $2k - 1$，指标为 $6N_k - 4$，$6N_k + 1$。在 $A_{k-1}^{[2]}$ 中，该环具有相同的半长度和指标 $6N_{k-1} + 2$，$6N_{k-1} + 4$。两次增加分别为 $18N_{k-1} - 6$ 和 $18N_{k-1} - 3$。现在 $8T_1P_k = r_k + \Phi_J$ 和 $\Phi_J(1) = 8p_k - r_k$ 由（4.1）得到。再次应用命题2.3 可得

$$8T_1\psi_{2k} = \psi_{2k-1} + \epsilon + (r_k - 4p_k)(1 - t).$$

在 $k=0$处，剩下的恒等式可直接由$h^q=(xyz)^q$模$(x^{2q},\ y^{2q},\ z^{2q})$得到。乘以$(xyz)^q$将 $P/(x^q,\ y^q,\ z^q)$与其在更大商中的像对应起来。因此$E_{2q}(q+j)=7q^3+E_q(j)$。由于 $p_0=1$，可得 $8T_1\psi_0=\psi_0+3(1-t)$。

结合 (4.2)，这些恒等式给出了完整的递推关系 (2.1)。对二进制分母作归纳可得 $\psi_m=\phi_m$ 对所有 m 均成立。最后 $A_0=\mathfrak{m}$，因此当 $0\le j\le q$时，$q^{-3}E_q(j)=P_0(j/q)=j/q+\phi_0(j/q)$。对于 $j\ge q$，由 $\mathrm{h}^q=0$ 属于 $P/(x^q,y^q,z^q)$ 可得该断言。□

4.2. **有理指数与阈值**。 Blickle、Schwede 和 Tucker 曾询问，成对对象的符号在有理指数 [7, 处是否取有理数值。问题 4.7]。他们在 [7, 备注 4.10]中特别指出了这条三次曲线。他们的问题针对局部化多项式环提出。他们论文命题 4.1 中的完备化保留了有限余长度，因此两个环中的二进制分点处的数值相同。连续性则推出对每个实指数都相等。

推论4.2。 令 $h=x^3+y^3+xyz$，且令 A 为 $\mathbb{F}_2[x,y,z]_{(x,y,z)}$ 或 $\mathbb{F}_2[[x,y,z]]$。则对于每个有理数 $t\ge 0$，$s(A,\ h^t)$ 都是有理数。特别地，$s(A,\ h^{1/3})=16/49$。

证明。 记 $\mathfrak{n}=(x,\ y,\ z)A$。对于 $t=j/q\in[0,1]$，在 $q=2^e$的条件下，主对公式 [7,命题 4.1] 给出

$$s(A,h^t)=q^{-3}\ell(A/(\mathfrak{n}^{[q]}:h^j))=1-q^{-3}E_q(j)=1-t-\phi_0(t).$$

中间的等式是对 $A/\mathfrak{n}^{[q]}$上的乘法 h^j 应用秩-零化度定理所得。符号非负且不增，并且其在 1 处的值为零。接下来只需处理 (0，1) 中的非二进有理数。

记 $t=0.b_1b_2\ldots$用二进制表示，并令 $t_n=\{2^nt\}$。从 $m_0=0$开始，在（2.1）中一次读取一位。在第 n 步，选择 m_n 对应的行以及 b_{n+1}对应的列。令 m_{n+1} 为下一个指标，并令 r_n 为该项中剩余的项，在 t_{n+1} 处求值。于是

$$1-t-s(A,h^t)=\sum_{n\ge 0}8^{-n-1}r_n.$$

确实，对于在 N 个数字处截断的二进制展开，递推关系给出一个有限和，因为所有 $\phi_m(0)$ 都为零。对于每个固定的 n，截断的尾项趋于 t_{n+1}。由于 $m_n\le n$，各直和项的绝对值一致有界于 $(4n+4)8^{-n-1}$。取极限时用到了符号的连续性 [7,定理3.2]。

对于有理数 t，其数字和尾项最终呈周期性。如果指标无限次回到零，那么两次这样的回归会发生在周期的同一相位。之后的指标和项r_n 便会重复。否则，从某个时刻起，指标始终为正，并且每一步都会改变奇偶性。取数字周期的一个偶数倍。对于每个后续的同长度分块，指标的增量都会重复，因此在每个相位上，指标都是块编号的仿射函数。现在，表格表明 r_n 也具有相同性质，且系数为有理数。对所得几何级数及其一阶矩求和，在两种情形下都得到有理数值。

对于 $t=1/3=\overline{0.01}_2$ 表格给出了 $m_n=n$ 和 $r_n=2(4n+3)/3$。因此，正如所声称的，$1-t-s(A,\ h^t)=\frac{2}{3}\sum_{n\ge0}(4n+3)8^{-n-1}=50/147$。□

Blickle、Schwede 和 Tucker 还提出了签名函数何时为分段多项式的问题[7, 问题 4.8]。他们问题的第一部分涉及固定特征。对于特征二中的节点三次曲线，在 F-纯阈值处的行为排除了有限的多项式划分。第二部分涉及当特征趋于无穷大时各个分段的变化。

推论 *4.3.* 设 A 和 h 如推论*4.2* 中所述，令 $S(t)=s(A,h^t)$。h 的 F-纯阈值为 *1*。函数 S 在任何区间 $(1-\varepsilon,\ 1)$ 上都不与任何 $0<\varepsilon\le 1$的多项式一致。$[1,29/27]$ 中的每个值都是 $S(t)/(1-t)^3$ 在 $t\to 1^-$时的聚点值。利用定理 A，此区间可延伸至 $[1,54/49]$。

证明。 模 (x^q, y^q, z^q) 下，$(xyz)^{q-1}$ 在 h^{q-1} 中的系数为 1，而 $h^q = 0$。因此，最大的幸存指数为 $q-1$，阈值为 1。在二进制分点 $t = j/q$ 处，上述初等恒等式 $E_{2q}(q+j) = 7q^3 + E_q(j)$ 根据主对公式给出 $S((1+t)/2) = S(t)/8$。由连续性可将此结论延伸至 $[0,1]$。

令 $G(u) = S(1-u)$。则 $G(u/2) = G(u)/8$，因此 $G(u)/u^3$ 沿着每个序列$u, u/2, u/4, \ldots$保持不变。在 $u = 1$ 处，这个商等于 1。在 $u = 3/4$ 处，约化三次曲线公式$E_4(1) = 35$ 给出 $S(1/4) = 29/64$，因此该商等于 29/27。对 $[3/4, 1]$ 应用介值定理，可得这两个端点之间的每个值；反复折半即可使每个值成为趋近于零时的极限。推论4.2还给出另一个值 $S(1/3)/(2/3)^3 = 54/49$。

如果 G 在零附近与多项式 P 一致，那么 $P(u/2) = P(u)/8$ 将迫使除 u^3 的系数外，其余所有系数都为零。这样一来，该商在零附近就会保持常数，这与上述两个不同的值矛盾。□

Frobenius序列与非限制左极限之间的区别在此处至关重要。Canton 的近似左导数使用了一个指定的、趋近于阈值 [36] 的序列。在此例中，归一化商沿着 $t = 1 - 2^{-n}$ 等于一，但不存在非限制左极限。

5. 三次悬挂的不变量

我们通过将分裂数与每个 Frobenius幂处的 Hilbert–Kunz余长度联系起来，从三次式转到其悬挂。相同的恒等式也适用于 [40] 中的族。设 k 是特征为 p 的完美域，令 $0 \neq g \in (x_1、\ldots\ldots、x_r)k[[x_1, \ldots\ldots、x_r]]$，并置

$$Y_g = k[[u, v, x_1, \ldots, x_r]]/(uv + g), \qquad d = r + 1.$$

命题 5.1。对于 $A = Y_g$ 和 $q = p^e$，

$$a_e(A) = 2q^d - \ell(A/\mathfrak{m}^{[q]}), \tag{5.1}$$

$$s(A) = 2 - \mathrm{e_{HK}}(A), \qquad S_A(w) = \frac{2}{1 - p^d w} - H_A(w). \tag{5.2}$$

证明。参数理想 $I = (x_1、\ldots\ldots、x_r、u+v)$ 具有 $A/I = k[[u]]/(u^2)$。其本原子由 $\bar{u}$ 生成，且 $I + (u) = \mathfrak{m}$。对于极大 Cohen–Macaulay A-模 M，Gorenstein本原子公式给出其自由秩为 $\mathrm{l}\,(u(M/IM))$ [15,定理 11(2) 的证明]。事实上，每个自由直和项贡献一。如果 $u\bar{n} \neq 0$ 对某个直和项 N 的元素成立，则将 1 映到 $\bar{n}$ 的映射 $A/I \to N/IN$ 是单射，因为 A/I 的每个非零理想都包含 $\bar{u}$。由于 A/I 是 Artinian Gorenstein，该映射分裂。由 $\mathrm{Ext}^i_A(N, A) = 0$ 对于 $i > 0$ 以及沿生成 I 的正则序列进行约化，截影提升到 $N \to A$。它在 n 上的值是一个单位，因此 N 具有一个自由直和项。

将公式应用于 $M = F^e_* A$。由于 k 是完美的，Frobenius 的标量限制保持有限长度。因此

$$\ell(u(M/IM)) = \ell(A/I^{[q]}) - \ell(A/\mathfrak{m}^{[q]}).$$

正则序列给出 $l\,(A/I^{[q]}) = q^d l(A/I) = 2q^d$。取极限并使用生成级数得到（5.2）。□

令 $B_q = k[[x_1, \ldots, x_r]]/(x_1^q, \ldots, x_r^q)$ 并置 $E_q(g, j) =$维数$_k\, B_q/(g^j)$。在 $g = h$ 处，这是定理 $E_q(j)$ 的余长度A。

引理 5.2。对于 $q = p^e$，

$$\ell(Y_g/\mathfrak{m}^{[q]}) = q^r + 2\sum_{j=1}^{q-1} E_q(g, j), \qquad a_e(Y_g) = q^r + 2\sum_{j=1}^{q-1} \mathrm{rank}(g^j \mid B_q).$$

如果 g 是关于一个变量的首一多项式，次数为 $b \geq 1$，那么 $s(Y_g) \geq 1/b$ 和 Y_g 是强 F-正则的。

证明。在 $k[u,v]/(u^q, v^q)$ 中，乘以 $-uv$ 后，有一条长度为 q、从 1 开始的链，以及两条长度为 $q-i$、分别从 u^i 和 v^i 开始的链，其中 $1 \leq i < q$。施加 $g = -uv$ 后，得到 $B_q/(g^j)$，对应一条长度为 j 的链。由于 $g^q = 0$ 属于 B_q，这就给出了第一个公式 [18, 定理 2。2], [6, 引理 2.4(1)]。第二个公式由 (5.1) 和秩-零化度定理得出。

假设 g 在 t 中是首一的。若 $bj < q$，则乘以 g^j 在由 t 次数小于 $q - bj$ 的单项式张成的空间上是单射。事实上，非零乘积中 t 的最高次幂在模 t^q 约化后仍然存在。因此，秩至少为 $q^{r-1}\max(q - bj, 0)$。将第二个公式除以 q^{r+1} 并取黎曼和，得到 $s(Y_g) \geq 2\int_0^{1/b} (1 - bx)\,dx = 1/b$。强 F-正则性由符号 [5] 的正性得出。□

5.1. **二次级数**。 在特征二中，沿用 Monsky [20], 的记号

$$\theta_g(w) = (1 - 2^{r+1}w)H_{Y_g}(w), \qquad \theta_g(2^{-r-1}) = \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(Y_g). \tag{5.3}$$

第二个恒等式通过裂项相消得到。在 $w = 2^{-r-1}$ 处，θ_g 到次数 e 为止的部分和为 $2^{-e(r+1)}\ell(Y_g/\mathfrak{m}^{[2^e]})$。

推论 *B* 和 *C* 的证明。 对于三次式 h，令

$$D = 1 - 6w + 8w^2, \qquad B = 1 - 2w, \qquad C = 2w - 8w^2 - 24w^3.$$

Monsky 根据定理A的余长度公式进行的计算给出

$$D\theta_h = B + \frac{C}{\sqrt{1 - 4w^2}}, \tag{5.4}$$

其中平方根的常数项为 1 [20, 引理 2.1]。在 $w = 1/16$ 处，三个多项式的值分别为 21/32、7/8 和 45/512，平方根为 $3\sqrt{7}/8$。因此 $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(R) = \theta_h(1/16) = 4/3 + 5/(14\sqrt{7})$。符号由 (5.2) 得出。

对于该级数，令 $L = (1-16w)D$ 和 $P = 2D - B = 1 - 10w + 16w^2$。由于 $LS_R = P - C/\sqrt{1 - 4w^2}$，我们得到

$$(1 - 4w^2)\big(L(w)S_R(w) - P(w)\big)^2 = C(w)^2. \tag{5.5}$$

H_R 和 S_R 都能还原平方根，因为 $C \neq 0$。被开方数在 $\pm 1/2$ 处有简单零点。这证明每个级数都生成所述二次扩张。□

推论C 解决了Caminata和Zerman例子中的条件性部分 [37, 例4。6]他们证明余长函数 $\phi_{h,\,2}(j/q) = q^{-3}E_q(j)$ 是一个弱2-分形。若它是一个2-分形，他们的论证便会得出 $uv + h$的有理Hilbert–Kunz级数。推论C 排除了这种可能。

Monsky代数性定理也适用于在不相交变量中加入强有理级数的情形。对于特征为二的有限域 k，一个关于 r 个变量的此类级数 g，其特征是 T_0、T_1 在 $j/q \mapsto q^{-r}E_q(g, j)$ [23, 19]上的迭代所张成的空间在 $\mathbb{Q}$ 上为有限维。由于$uv + g$ 仍然是强有理的，定理 A和 [19, 定理3.4] 给出 Y_{h+g}的代数Hilbert–Kunz级数和重数。方程(5.2)给出其分裂级数和符号的代数性。这包括在不相交变量对中 $g = \sum_i g_i(x_i, y_i)$ [19, 定理3.3]。

6. 一个椭圆周期与六个超曲面

Monsky乘积公式将不相交变量之和的级数表示为逐系数乘积。用 $\odot$ 表示逐系数乘法时，他的公式为 [20,定理 1.6]

$$\theta_{f_1+\cdots+f_k} = \theta_{f_1} \odot \cdots \odot \theta_{f_k}. \tag{6.1}$$

为分离偶系数和奇系数，我们还使用以下恒等式，其中 f 涉及 r 变量 [20,定理 1.8和引理1.9]。

$$\theta_{f^2} = 1 + 2^r w \theta_f, \tag{6.2}$$

$$\theta_{t^5} - \theta_{t^3} = 2\sum_{n\geq 1} w^{2n}, \qquad 2\theta_{t^3} - \theta_{t^5} = 1 + 2\sum_{n\geq 0} w^{2n+1}. \tag{6.3}$$

定理D的证明。令 $\mu_{i,\,b} = \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A_{i,\,b})$。这六个超曲面的维数为八，且都是 Gorenstein 环。每个和式 $h(X) + h(X')^{2^i} + t^b$ 都是关于 X 的第一个坐标的首一三次多项式。引理 5.2 给出 $s(A_{i,\,b}) \geq 1/3$，并证明这六个环均满足强 F-正则性。

考虑这个数

$$T = \sum_{n\geq 0} \frac{\binom{2n}{n}^2}{65536^n}.$$

Monsky 将这个数与 Hilbert–Kunz 重数联系起来， [20, 定理 1.10 和 2。2]对于定理 D中的六个环，其关系为

$$\begin{aligned} 2T + 94 = &-737\mu_{0,3} + 881\mu_{0,5} + 1440\mu_{1,3} - 1488\mu_{1,5} \\ &- 256\mu_{2,3} + 256\mu_{2,5}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

为计算这些系数，令 $b_n = [w^n]\theta_h$。比较 w^{2n+2} 在（5.4）中的系数，得

$$b_{2n+2} - 6b_{2n+1} + 8b_{2n} = -8\binom{2n}{n}, \qquad b_0 = 1.$$

令 $\xi = 1/256$， $z = \xi^2$，并记 $\langle d_n\rangle = \sum_{n\geq 0} d_n z^n$。由（5.3）和（6.1），$\mu_{i,\,b}$ 是 $\theta_h \odot \theta_{h^{2^i}} \odot \theta_{t^b}$ 在 ξ处的值。令 $U_i = \mu_{i,\,5} - \mu_{i,\,3}$ 和 $V_i = 2\mu_{i,\,3} - \mu_{i,\,5}$。方程（6.2）和（6.3）给出了递推关系平方中的六项。

$$\begin{aligned} \langle b_{2n}^2\rangle &= 1 + U_0/2 & \langle b_{2n+2}^2\rangle &= U_0/(2z), \\ \langle b_{2n+1}^2\rangle &= (V_0 - 1)/(2\xi) & \langle b_{2n+1}b_{2n+2}\rangle &= U_1/(16z), \\ \langle b_{2n}b_{2n+1}\rangle &= (V_1 - 1)/(16\xi) & \langle b_{2n}b_{2n+2}\rangle &= U_2/(128z). \end{aligned}$$

例如， $[w^{2n+2}]\theta_{h^2} = 8b_{2n+1}$ 给出 $U_1 = 16z\langle b_{2n+1}b_{2n+2}\rangle$。代入 $64T = \langle(b_{2n+2} - 6b_{2n+1} + 8b_{2n})^2\rangle$ 即可证明（6.4）。

欧拉积分将 $2\pi T$ 识别为$y^2 = (1-x^2)(1-16\xi^2x^2)$的光滑射影模型的一个非零实周期。根据 Schneider 定理，该周期除以 π 是超越的 [24],[20, 引理 2.4 和定理 2。5]。方程（6.4）由此迫使至少一个$\mu_{i,\,b}$ 为超越数。对于同一对， $s(A_{i,\,b}) = 2 - \mu_{i,\,b}$ 根据命题5.1。□

7. 节点三次曲线之和

Monsky 和 Teixeira 证明了有限域上变量成互不相交对的二元级数之和的 Hilbert–Kunz 级数具有有理性 [38]。这里每个直和项都是关于三个变量的三次式。对于 $g_m = \sum_j h(X_j)$，乘积公式（6.1）将每个系数 $b_n = [w^n]\theta_h$ 提升为m次幂。因此

$$(1 - 2^{3m+1}w)H_{R_m}(w) = \sum_{n\geq 0} b_n^m w^n. \tag{7.1}$$

b_n 的渐近展开中的第二项决定了 $m \geq 2$的超越性。

引理 7.1。 对于 $\alpha = 1 - \sqrt{3}/2$ 和 $c_n = b_n - \alpha 4^n$，有

$$c_n \sim 4\sqrt{2/\pi}\, 2^n \sqrt{n}.$$

证明。 令 $J(w)=(1-4w)\theta_h(w)=\sum d_n w^n$。方程（5.4）给出

$$J(w)=1+\frac{P(w)}{(1-4w^2)^{3/2}},\qquad P(w)=2w(1-6w)(1+2w)^2.$$

特别地， $J(1/4)=\alpha$。 w^{2k} 在 $(1-4w^2)^{-3/2}$ 中的系数为 $(2k+1)\binom{2k}{k}$，且奇系数为零。由斯特林公式，该偶系数与 $2^{2k}\sqrt{2k}$ 之比趋于 $\sqrt{2}/\pi$。因此，在 $d_n/(2^n\sqrt{n})$ 中，剩下的因子是 P 在 $1/2$ 处取值的偶部或奇部，具体取决于 n的奇偶性。二者的值均为 -4，因为 $P(1/2)=-8$且 $P(-1/2)=0$。

展开 $J/(1-4w)$ 得到 $b_n=4^n\sum_{i=0}^{n}d_i4^{-i}$。减去 $4^nJ(1/4)$，得到 $c_n=-\sum_{j\ge1}4^{-j}d_{n+j}$。除以 $2^n\sqrt{n}$后，第 j项的绝对值在 $n\ge1$时有界于某个常数乘以 $2^{-j}\sqrt{1+j}$。由控制收敛定理和 $\sum_{j\ge1}2^{-j}=1$，可得所述系数。□

定理 *E* 的证明。取 $m\ge2$并令 $\lambda=4^{m-1}$。级数 $U(w)=\sum c_nw^n=\theta_h(w)-\alpha/(1-4w)$在 $\mathbb{Q}(w)$上是代数的。从 c_n的 $b_n^m=(\alpha4^n+c_n)^m$中去掉常数项和关于 c_n 的一次项，并将余项写作

$$d_{n,m}=b_n^m-\alpha^m4^{mn}-m\alpha^{m-1}\lambda^nc_n.$$

由于 $c_n/4^n\to0$，二次项决定极限。引理7.1 给出

$$\frac{d_{n,m}}{n\lambda^n}\longrightarrow K_m=\binom{m}{2}\alpha^{m-2}\frac{32}{\pi}.$$

对于 $G_m(w)=\sum_{n\ge0}d_{n,\,m}w^n$，可得

$$\lim_{w\uparrow1/\lambda}(1-\lambda w)^2G_m(w)=K_m.$$

实际上，对每个 $\varepsilon>0$，所有充分大的系数与 $K_mn\lambda^n$ 的差至多为 $\varepsilon n\lambda^n$。将此估计求和时用到 $\sum_{n\ge0}nx^n=x/(1-x)^2$。

在 $\mathbb{Q}(w)$ 上的代数函数，若在一个代数点处有有限极限，则沿其有定义的任意实区间取极限时，极限为代数数。为说明这一点，在多项式关系中清除分母，并在特化之前，将其各系数除以局部参数的公因子幂。这里 K_m 是 $1/\pi$的一个非零代数倍，因此是超越的。所以 G_m 是超越的。从右侧（7.1）中去掉的两个级数为 $\alpha^m/(1-4^mw)$ 和 $m\alpha^{m-1}U(\lambda w)$，二者都是代数的。这证明了 H_{R_m}的超越性，而（5.2）则给出了 S_{R_m}的超越性。

特征零下的每个代数级数都满足一个系数为多项式的线性微分方程。此性质在 Hadamard乘积下保持不变 [28, 定理 2。10],加法以及乘以有理函数也具有这一性质。方程（7.1）和（5.2）给出了所述两个级数满足的微分方程。最后 g_m 关于 X_1 的第一坐标是一个三次首一多项式。引理 5.2 给出了符号和强 F-正则性的下界。 □

推论7.2。 对于每个 $m\ge1$，环 R_m 都具有无限的 F-表示型。

证明。 假设在这些 $F_*^eR_m$ 中只出现有限多个不可分解模的同构类，并选取代表元 M_1、……、M_r。由于 R_m 是完备的，Krull–Schmidt 定理保证重数定义良好。每个 M_i 的推前都是某个 $F_*^{e+1}R_m$的直和项。因此，存在一个固定的整数矩阵 B，将第 e 层的重数向量映射到第$e+1$层的重数向量。设 v 为初始向量， c_i 为 M_i的最小生成元数。由于剩余域是 $\mathbb{F}_2$，将 $F_*^eR_m$ 模极大理想约化后得到一个维数为 $l(R_m/\mathfrak{m}^{[2^e]})$ 的向量空间。因此

$$H_{R_m}(w)=c^{\mathsf T}(I-wB)^{-1}v.$$

这与推论 C （对于 $m=1$）和定理 E（对于 $m\ge2$）相矛盾。 □

定理 E 中的两个级数是 $2m$ 个变量的有理函数的对角线。根据代数对角线定理 [32], , 可写成 $\theta_h = \operatorname{Diag} F(x,y)$, 其中 F 在原点处有理且正则。令 $U = \prod_{i=1}^{m} x_i y_i$。提取（7.1）中所有指数均相等的系数，得到

$$H_{R_m}(w) = \operatorname{Diag}\left(\frac{\prod_{i=1}^{m} F(x_i, y_i)}{1 - 2^{3m+1}U}\right).$$

关于 S_{R_m} 的同一断言可由（5.2）推出。因此，这个族满足克里斯托尔猜想的结论：全局有界的 D-有限级数 [31]。

按照 Allouche 和 Mendès France 的术语 [39], , 关于 $\mathbb{Q}$ 的 Hadamard 级是指其逐系数乘积等于给定级数的代数级数的最少个数。由（7.1）, $(1 - 2^{3m+1}w)H_{R_m}(w)$ 的级至多为 m，因为它是 m次 Hadamard 幂，作用于 θ_h。对于 $m = 2$，由定理 E可知其级恰为二。

8. 两个节点三次曲线的重数

对于 R_2，方程（7.1）将重数化简为 θ_h的 Hadamard 平方的一个值。我们将此值表示为一个周期，并确定其算术性质。

引理 8.1. 设

$$a = \frac{1}{128}, \qquad Q(z) = \frac{2z(1-6z)(1+2z)}{(1-2z)(1-4z)}, \qquad T(z) = \frac{Q(z)}{\sqrt{1-4z^2}}.$$

Then

$$e_{\mathrm{HK}}(R_2) = \frac{8}{7} + \frac{221}{105\sqrt{255}} + I, \qquad I = (T \odot T)(a). \tag{8.1}$$

此外，在光滑亏格一曲线上

$$E: \quad y^2 = (1-4z^2)(z^2-4a^2) = (1-4z^2)\left(z^2 - \frac{1}{4096}\right), \tag{8.2}$$

令 $\Omega = Q（z）\, Q（a/z）\, dz/y$。在 $E（\mathbb{C}）$ 上存在一个闭路 γ , 使得

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \Omega, \qquad \int_{\gamma} \frac{dz}{y} = 2\pi i \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n}^2 a^{2n} \neq 0. \tag{8.3}$$

特别地， γ 在 $H_1（E, \mathbb{Z}）$ 中的像非零。

证明。 方程（5.4）可化简为 $\theta_h（z） = （1 - 4z）^{-1} + T（z）$ 。两个副本在 a 处的 Hadamard 乘积为

$$(\theta_h \odot \theta_h)(a) = \frac{1}{1-16a} + 2T(4a) + (T \odot T)(a).$$

由于 $4a = 1/32$ 且 $Q(1/32) = 221/3360$，我们得到 $2T(4a) = 221/(105\sqrt{255})$。等式$e_{\mathrm{HK}}(R_2) = (\theta_h \odot \theta_h)(a)$可通过在 (7.1) 中取径向极限得到。事实上，由引理 7.1， $b_n = O(4^n)$，因此 Hadamard 平方在 $a = 1/128$ 处收敛。在左侧，令 $w = x/128$。根据定义， $H_{R_2}(x/128)$ 的系数趋于 $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(R_2)$，因此阿贝尔极限定理给出与 $x \uparrow 1$ 相同的值，再乘以 $1 - x$。

For $2a < r < 1/4$ 和 $a/r < 1/4$（特别是 $r = \sqrt{a}$） , 由柯西系数公式可得

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} T(z)T(a/z)\,\frac{dz}{z}.$$

取该圆上由 $y = z\sqrt{1-4z^2}\sqrt{1-4a^2/z^2}$ 给出的分支。积分为 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Omega$。同样的展开式结合 $Q \equiv 1$ 可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{y} = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}^2 a^{2n} > 0.$$

由于 dz/y 是 E上的全纯微分， γ 的同调类不可能为零。 □

引理 8.2。设

$$P_\pm = \left(\frac{1}{4}, \pm\frac{3\sqrt{85}}{128}\right), \qquad Q_\pm = \left(\frac{1}{32}, \pm\frac{3\sqrt{85}}{1024}\right)$$

是 E上的点。Ω 的非零留数为

$$\operatorname{res}_{P_+}\Omega = \rho, \quad \operatorname{res}_{P_-}\Omega = -\rho, \quad \operatorname{res}_{Q_+}\Omega = -\rho, \quad \operatorname{res}_{Q_-}\Omega = \rho, \qquad \rho = \frac{221}{420\sqrt{85}} \neq 0.$$

Ω 的所有其他极点都是第二类的。设

$$\mathcal{D} = (P_+) + (Q_-) - (P_-) - (Q_+).$$

取 $O = (2a,0)$ 为 E 的原点，并取 $Z \in E(\mathbb{Q})$ ，其中 $[\mathcal{D}] = [(Z) - (O)]$ 属于 $\mathrm{Pic}^0(E)$。则 $Z = 4P_+$ 满足群律，且 Z 具有无限阶。

证明。 有理函数 $Q(z)$ 在 $z = 1/4$ 处的留数为 3/16；函数 $Q(a/z)$ 在 $z = 4a = 1/32$ 处的留数为 $-3a$ 。利用 $Q(1/32) = 221/3360$ 以及所示的 y-坐标，可得这四个留数。 $z = 1/2$ 和 $z = 2a$ 处的极点位于分支点之上。局部参数 t with$z - z_0 = t^2$ 表明，它们的主部没有留数。 $z = 0, \infty$ 处假定的极点是可去的。

超椭圆对合 $\sigma(z, y) = (z, -y)$ 是以 O 为原点的椭圆曲线上的取负映射。自同构

$$\iota(z, y) = \left(\frac{a}{z}, \frac{ay}{z^2}\right)$$

满足 $\iota^*(dz/y) = -dz/y$ ，并将 O 送到二扭点 $U = (1/2, 0)$。因此，对于 $R \in E$，有 $\iota(R) = U - R$。由于 $\iota(P_+) = Q_+$，故有 $P_- = -P_+$、 $Q_+ = U - P_+$ 和 $Q_- = P_+ - U$。于是 $\mathcal{D}$ 的群和为 $4P_+ - 2U = 4P_+$。

要证明 P_+ 是非扭的，使用二次映射

$$\pi : E \longrightarrow E', \qquad (z, y) \longmapsto (X, Y) = (-4z^2, 4zy),$$

其中

$$E' : \quad Y^2 = X(X+1)\left(X + \frac{1}{1024}\right). \tag{8.4}$$

点 P_+ 映射到 $P' = (-1/4, 3\sqrt{85}/128) \in E'(\mathbb{Q}(\sqrt{85}))$。素数 7 和 19 都在 $\mathbb{Q}(\sqrt{85})$ 中分裂，而 E' 在这些素数处有良约化。取 $\sqrt{85} \equiv 1 \pmod 7$ 和 $\sqrt{85} \equiv \overline{3} \pmod{19}$，约化为

素数	$\overline{P'}$	$2\overline{P'}$	$4\overline{P'}$
7	(5，5)	(0，0)	$O_{E'}$
19	(14，2)	(16，6)	(0，0)

因此它们各自的阶分别为 4 和 8。由于在奇剩余特征下的良约化在 2-幂挠点上是单射的， P' 不可能是挠点。态射 π 在经过 $-\pi(O)$ 平移后，是一个同源。由于 $\pi(O) = (-1/1024，0)$ 是挠点， P_+ 也同样是非扭的。□

引理 8.3。 椭圆曲线 E 没有复乘。

证明。 同源曲线 E' 在（8.4）中的勒让德参数为 $\lambda = 1/1024$，且

$$j(E') = 256\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

这个有理数不是整数，因为 $v_3(1-\lambda) > 0$但 $v_3(1-\lambda+\lambda^2) = 0$。CM j-不变量是代数整数。因此， E' 没有 CM，其同源曲线 E也如此。□

定理F的证明。根据引理8.2，因子 $\mathcal{D}$ 表示非挠点 $Z = 4P_+$，它属于$\mathrm{Pic}^0(E)$。因此，存在定义在 f 上的有理函数 E，其定义于 $\mathbb{Q}$，并且满足

$$\mathrm{div}(f) = \mathcal{D} - (Z) + (O).$$

取一个定义在 ξ_Z 上的第三类微分 $\mathbb{Q}$，它在 +1 处的留数为 Z，在 –1 处的留数为 O，且没有其他极点。任意两个这样的选择之差都是全纯微分，因此选择只会使其周期相差第一类周期。根据引理8.2，微分

$$\Omega - \rho\,\xi_Z - \rho\,d\log f$$

没有留数，因此属于第二类。在特征零的光滑射影曲线上，第二类微分模去恰当微分后代表其第一德拉姆上同调 [22, 42]。因此

$$\Omega = \rho\,\xi_Z + \rho\,d\log f + A\,\omega_E + B\,\eta_E + dF, \qquad A, B \in \overline{\mathbb{Q}}, \tag{8.5}$$

其中， ω_E 和 η_E 表示 $H^1{}_{\mathrm{dR}}(E/\mathbb{Q})$的一组基， F是 E上的一个有理函数。

从 E中去掉式 (8.5) 中所有微分的极点。对 γ 作一个微小变形，使其避开被去掉的点，同时保持其 Ω-周期不变。选取 γ_1、 γ_2 作为整系数同调基在穿孔曲线上的提升。根据引理 8.1， γ 在紧曲线上的像的坐标为 $(m, n) \neq (0, 0)$。在穿孔曲线上，差 $\gamma - m\gamma_1 - n\gamma_2$ 是围绕各个穿孔点的小回路之和。每个回路的贡献都是一个代数留数乘以 $2\pi i$。此外， $d\log f$的周期属于 $2\pi i\mathbb{Z}$。因此，模去 $2\pi i$的 $\mathbb{Q}$-张成空间以及 ω_E、 η_E的周期后，我们有

$$\int_\gamma \Omega \equiv \rho\left(m\int_{\gamma_1}\xi_Z + n\int_{\gamma_2}\xi_Z\right).$$

记 ω_i、 η_i、 ξ_i分别为 ω_E、 η_E、 ξ_Z沿 γ_i的积分。椭圆周期定理 [41,（定理 2 和第 3 节）4] 给出该周期空间在 $\mathbb{Q}$ 上的维数为八，其中椭圆曲线没有复乘，且其在Pic^0中的点具有无限阶。这两个假设由引理 8.3和 8.2均可得出。这八个生成元

$$1, \quad 2\pi i, \quad \omega_1, \omega_2, \quad \eta_1, \eta_2, \quad \xi_1, \xi_2$$

因此线性无关。改变一个环的提升，会使其第三类周期增加 $2\pi i$ 的一个倍数。将第三类微分改为具有相同简单极点和留数的微分，会增加第一类周期。代数德拉姆基的变换对每一对 (ω_i, η_i)施加一个系数属于 $\mathbb{Q}$的可逆矩阵；恰当微分的周期为零。这些变换保持线性无关性。由于 $\rho \neq 0$ 和 $(m, n) \neq (0, 0)$，前述同余关系给出 $\int_\gamma \Omega \notin 2\pi i\,\mathbb{Q}$，而 $I = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma \Omega$ 是超越的。方程 (8.1) 表明， $e_{\mathrm{HK}}(R_2)$ 是超越的。最后， $s(R_2) = 2 - e_{\mathrm{HK}}(R_2)$ 也是超越的。□

推论 8.4。 *Hochster* 和 *Yao* 的 F-有理数符号、*Smirnov* 和 *Tucker* 的相对 F-有理数符号，以及 *Sannai* 的对偶 F-符号，对于 R_2 都是超越的。其剩余域的每个正次数 *Frobenius* 贝蒂数也都是超越的。

证明。 超曲面 R_2 是 Gorenstein。其 F-有理数符号和相对 F-有理数符号因此等于 $s(R_2)$，这是由底公式 [26, 引言和命题 3。15]得到的。其典范模是秩为一的自由模，因此每个满射 $F_*^e\omega_{R_2}\to\omega_{R_2}^{\oplus n}$ 都分裂。最大的这种 n 是 $F_*^eR_2$的自由秩。取极限即可得到对偶符号的相同等式。对于剩余域$k=\mathbb{F}_2$，De Stefani、Huneke 和 Núñez-Betancourt 的超曲面公式 [4, 例 3。2]给出，对每个 $i\ge1$和 $m\ge1$,

$$\beta_i^F(k,R_m)=\mathrm{e_{HK}}(R_m)-s(R_m)=2\,\mathrm{e_{HK}}(R_m)-2.$$

对于 $m=1$ 这是 $2/3+5/(7\sqrt{7})$ 根据推论 C。对于 $m=2$ 这些断言由定理 F得出。 □

推论 8.5。 对于 $m\ge1$ 令 $f_m=uv+\sum_{j=1}^m h(X_j)$，并令 $C_{m,r}$ 为定义在 $\mathbb{F}_2$上的完备超曲面，其由 $f_m+z^{2^r}$定义，其中 z 是一个新变量。记 $E_{m,r}=\mathrm{e_{HK}}(C_{m,r})$、$b_r=[w^r]\theta_h(w)$ 以及 $\alpha=1-\sqrt{3}/2$。则 $E_{m,r}$ 是二进有理数，并且

$$E_{m,r}-E_{m,r-1}=\frac{b_r^m}{2^{(3m+1)r}}\quad(r\ge1),\qquad \mathrm{e_{HK}}(R_m)-E_{m,r}\sim\frac{\alpha^m}{2^{m+1}-1}\,2^{-(m+1)r}\quad(r\to\infty).$$

对于每个固定的 m，重数最终严格增加，而符号最终严格减少。对于偶数 m，重数从一开始就是非递减的。

证明。 令 $A=\mathbb{F}_2[[x_1,\dots,x_n]]$，令 $0\neq f\in\mathfrak{m}_A$，并设 $B=A/(f)$。对于 $Q=2^r$ 令 $C_Q=A[[z]]/(z^Q-f)$。Aberbach 和 Enescu 使用根式扩张来界定 Hilbert–Kunz 重数 [1],，而 Aberbach 和 Cox-Steib 使用它们在重数[2]之间进行插值。这里可以准确地读出 Frobenius 余长度。对于 $q=QP$，当 P 为二的幂时，我们有 $z^q=f^P$ 在 C_Q中。由于 C_Q 作为 A上的模是秩为 Q 的自由模，A 上的弗罗贝尼乌斯平坦性给出

$$\ell(C_Q/\mathfrak{m}_{C_Q}^{[q]})=Q\,\ell(A/(x_1^q,\dots,x_n^q,f^P))=QP^n\,\ell(B/\mathfrak{m}_B^{[Q]}).$$

除以 q^n 并令 P 趋于无穷大。这给出

$$\mathrm{e_{HK}}(C_Q)=Q^{1-n}\ell(B/\mathfrak{m}_B^{[Q]}).$$

右侧是二进有理数，并且当 $\mathrm{e_{HK}}(B)$ 趋于 r 无穷大时趋于无穷大。对于 $f=f_m$，根据 Polstra 和 Smirnov 的连续性定理，也可得到收敛性 [13]。为得到其速率，取 $n=3m+2$ 并在（7.1）中比较系数。这给出了所述差值。根据引理 7.1，$b_r\sim\alpha4^r$，因此该差值最终为正，并且与 $\alpha^m2^{-(m+1)r}$渐近等价。对几何级数尾项求和即可得到所声称的等价式。对于偶数 m，每个 b_r^m 均为非负数。最后$s(C_{m,\,r})=2-E_{m,\,r}$ 根据命题 5.1。 □

对于 $m=2$，重数递增并趋于 $\mathrm{e_{HK}}(R_2)$，误差与 $(\alpha^2/7)8^{-r}$渐近等价。符号递减并趋于 $s(R_2)\ge1/3$，因此每个 $C_{2,\,r}$ 都是强 F-正则的 [5]。因此，在 $\mathbb{F}_2$ 上的八维情形中，存在一个严格递增的二进 Hilbert–Kunz 重数链，以及一个严格递减的二进 F-符号链，二者的极限都是超越极限。Adams、Sandstrom 和 Simpson 研究了符号 [6]的升链条件。对于 $m=1$，相应的重数在五维中趋近于 $4/3+5/(14\sqrt{7})$。

参考文献

[1] I. M. Aberbach 和 F. Enescu，固定维数局部环中希尔伯特–孔茨重数的下界，arXiv:0708.0537。[2] I. M. Aberbach 和 N. O. Cox-Steib，奇异环的希尔伯特–孔茨重数界，arXiv:2402.05822。[3] O. Çelikbaş、H. Dao、C. Huneke 和 Y. Zhang，希尔伯特–孔茨重数的界，《Nagoya Math. J.》**205**（2012），149–165。[4] A. De Stefani、C. Huneke 和 L. Núñez-Betancourt，*Frobenius Betti* 数与有限投射维数模，《J. Commut. Algebra》**9**（2017），第 4 期。[5] I. M. Aberbach 和 G. J. Leuschke，*F*-签名与强 *F*-正则性，《Math. Res. Lett.》**10**（2003），第 1 期，51–56。

[6] C. Adams、T. J. Sandstrom 和 A. Simpson， *F*-签名的升链条件：一个很可能的反例，《实验数学》35（2026年），第 1 期，275–286。[7] M. Blickle、K. Schwede 和 K. Tucker，成对的 *F*-签名：连续性、 *p*-分形与最小对数不一致数，《伦敦数学会杂志》（2）87（2013），802–818。[8] H. Brenner，非有理的 Hilbert–Kunz 重数，2013，arXiv:1305.5873。[9] R.-O. Buchweitz 和 Q. Chen，三次曲线与曲面的希尔伯特–孔茨函数，《代数杂志》197（1997），246–267。[10] I. Burban，射影直线环上的弗罗贝尼乌斯态射与向量丛，《通讯代数》40（2012），2983–2988。[11] S. Das、S. Landsittel 和 V. A. Pham，超越希尔伯特–孔茨重数，2026年，arXiv:2607.28205。[12] M. Hochster 和 Y. Yao， *F*-有理签名与希尔伯特–孔茨重数的下降，《代数与数论》16（2022），1777–1809。[13] T. Polstra 和 I. Smirnov，希尔伯特–孔茨重数与 *F*-签名的连续性，《Nagoya Math. J.》239（2020），322–345。[14] A. Sannai，关于对偶 *F*-签名，《国际数学研究论文集》IMRN（2015），第 1 期，197–211。[15] C. Huneke 和 G. J. Leuschke，关于极大 Cohen–Macaulay 模的两个定理，《数学年刊》324（2002），391–404。[16] E. Kunz，特征为 *p* 的正则局部环的刻画，《美国数学杂志》91（1969），772–784。[17] P. Monsky，希尔伯特–孔茨函数，《数学年刊》263（1983），43–49。[18] P. Monsky，希尔伯特–孔茨重数的有理性：一个很可能的反例，《密歇根数学杂志》57（2008），605–613。[19] P. Monsky，某些希尔伯特–孔茨重数的代数性（模去一个猜想），2009，arXiv:0907.2470。[20] P. Monsky，某些希尔伯特–孔茨重数的超越性（模去一个猜想），2009，arXiv:0908.0971。[21] P. Monsky，利用层研究节点三次曲线的希尔伯特–孔茨理论，《代数杂志》346（2011），180–188。[22] S. Mukai，《不变量与模空间导论》，剑桥高等数学研究丛书 81，剑桥大学出版社，2003年。[23] P. Monsky 和 P. Teixeira， *p*-分形与幂级数。I. 一些二变量结果，《代数杂志》280（2004），505–536。[24] T. Schneider，《超越数导论》，施普林格出版社，柏林，1957年。[25] K. E. Smith 和 M. Van den Bergh，素特征下微分算子环的单性，《伦敦数学会会刊》（3）75（1997），32–62。[26] I. Smirnov 和 K. Tucker， *F*-有理签名理论，《纯粹与应用数学杂志》（2024）。本文采用 arXiv:1911.02642 中的编号。[27] Stacks Project 作者，Stacks Project，代数曲线，标签 0BS3。[28] R. P. Stanley，微分有限幂级数，《欧洲组合数学杂志》1（1980），第 2 期，175–188。[29] K. Tucker，F-签名的存在性，《数学创刊》190（2012），第 3 期，743–765。[30] L. Bodnarchuk、I. Burban、Y. Drozd 和 G.-M. Greuel，椭圆曲线退化上的向量丛与无挠层，arXiv:math/0603261。[31] G. Christol，微分方程的全局有界解，《数学讲义》1434（1990）。[32] J. Denef 和 L. Lipshitz，代数幂级数与对角线，《数论杂志》26（1987），46–67。[33] Y. A. Drozd 和 G.-M. Greuel，驯顺与野性射影曲线及向量丛分类，《代数杂志》246（2001），1–54。[34] H. Brenner，分次维数二时希尔伯特–孔茨重数的有理性，《数学年刊》334（2006），91–102。[35] V. Trivedi，曲线的半稳定性与希尔伯特–孔茨重数，《代数杂志》284（2005），627–644。[36] E. Canton，利用左导数关联成对的 *F*-签名与 *F*-分裂比，arXiv:1206.4293。[37] A. Caminata 和 F. Zerman，希尔伯特–孔茨级数、 *F*-签名级数与弱 *p*-分形，arXiv:2510.19355。[38] P. Monsky 和 P. Teixeira， *p*-分形与幂级数 II. 希尔伯特–孔茨理论的一些应用，arXiv:math/0506584。[39] J.-P. Allouche 和 M. Mendès France，幂级数的 Hadamard 级，arXiv:1101.0526。[40] H. L. Truong， *F*-签名的升链与 Brenner–Monsky 四次曲线，配套手稿。[41] G. Wüstholz，椭圆与阿贝尔周期空间，《算术学报》198（2021），第 4 期，329–357。doi:10.4064/aa190417-23-12。[42] A. Huber 和 G. Wüstholz，《1-周期的超越性与线性关系》，剑桥数学专题丛书 227，剑桥大学出版社，2022年。

I 越南河内VNU工程技术大学人工智能研究所电子邮箱地址</style】：hltruong@vnu.edu.vn, truonghoangle@gmail.com