arXiv:2611.30821v1 [math.LO] 23 Nov 2026

超紧 Prikry 扩张中的科恩泛型集

TOM BENHAMOU 和 GABRIEL GOLDBERG

ABSTRACT. 设 κ 对正则 $\lambda > \kappa$而言是 λ-超紧致的。我们证明，如果 λ 不是共尾数小于 κ的奇异基数的后继，那么 $\diamondsuit(S^{\lambda}_{\geq\kappa})$蕴含：每个大小至多为 λ的 $<\kappa$-策略闭强迫都是 λ-超紧 Prikry forcing 的一个投影。我们证明，对于小余终性的奇异基数的后继，其情形是独立的。最后，我们进一步给出 λ-超紧 Prikry forcing 的 κ-分配投影类的限制，并给出大小为 λ、不能成为该强迫投影的 κ-分配强迫的例子。

1. INTRODUCTION

本文研究能够产生超紧 Prikry 扩张的中间泛型扩张的各种可能强迫。这项研究属于通过对数学结构的子结构进行分类来研究该结构这一主题。在迫迫理论中，给定强迫 $\mathbb{P}$ 的子强迫分类问题，可以归结为对强迫 $\mathbb{Q}$ 的分类；这些强迫通过 $\mathbb{P}$ 产生某个泛型扩张的中间泛型扩张。

许多核心强迫都已有完整的分类。例如，众所周知，科恩强迫的任何子迫迫都同构于科恩强迫[1]。Maharam 证明了 [Mah47] 随机迫迫的任何子迫迫都同构于随机迫迫。其他例子包括萨克斯迫迫 [Sac71]，它产生一个极小的泛型扩张，即不存在真中间模型的泛型扩张。

在普里克里型强迫的领域中，Gitik-Kanovei-Koepke [GKK10] 证明了：如果 U 是 κ上的正规超滤子，那么带有 U 的普里克里强迫的唯一非平凡子迫迫，都与带有 U的普里克里强迫强迫等价。后来，Benhamou-Gitik 将这一结果推广到了 Magidor-Radin 强迫[BG21b, BG21a, BG22]。此外，Koepke-R¨asch-Schlicht [KRS13] 证明了，带有不同正规测度的树普里克里强迫在萨克斯意义下是极小的。

虽然上述例子展示了子强迫类较为狭窄的情形，但也存在具有普适性的强迫：它们能够吸收给定类中的每一种强迫。一个典型例子是坍缩偏序集 $Col(\kappa, \lambda)$，它会产生一个泛型滤子，为每个 κ-策略闭

Date：2026年11月24日。[1]确实，任何无原子可数强迫都与科恩强迫强迫等价。

基数至多为 λ 的闭强迫。另一个例子是在放弃正规性时使用普里克里强迫所得到的结果。Benhamou-Hayut-Gitik [BGH24] 和 Benhamou-Gitik [BG24] 证明了，多种强迫都可以被吸收到非正规树普里克里强迫中，而这一类强迫可能取决于初始的大基数假设。事实上，如果 κ 是强紧致的，那么每个基数至多为 κ 的 κ-分配强迫，都是某个测度树的树普里克里强迫的一个投影 [BGH24，命题 12]。

与本文更为相关的一般构造是强紧致普里克里强迫（见定义 2.14），我们将其记为 $Pr_T(\mathcal{U})$:

定理 1.1（民间结果）。设 κ 是 2^λ-强紧致的。那么对于每个大小至多为 λ 的 κ-分配强迫 $\mathbb{Q}$，以及 P_κ上的每个细 κ-完备超滤子 $\mathcal{U}$（2^λ），存在从 Pr_T（$\mathcal{U}$） 到 $\mathbb{Q}$ 的弱投影 [2]。

特别地，如果 κ 是超紧致的，那么每个基数至多为 λ 的 κ-分配强迫都是 2^λ-超紧致普里克里强迫的一个投影。

最近， 2^λ-强紧致普里克里强迫被降至λ-强紧致普里克里强迫:

定理 1.2（Benhamou-Thei-Weltsch）。设 κ是 2^λ-强紧致的。那么对于每个大小为 $\leq \lambda$ 的 κ-分配强迫 $\mathbb{Q}$，存在 P_κ上的细 κ-完备超滤子 $\mathcal{U}$（λ），使得 $\mathbb{Q}$ 是Pr_T（$\mathcal{U}$）的一个弱投影。

上述结果引出了以下问题，这些问题由 [BTW26]提出:

问题 1.3。

（1）假设 κ 是 2^λ-超紧致的，大小为 $\leq \lambda$ 的每个 κ-分配强迫是否都是 λ-超紧 Prikry 强迫的投影？（2） $Add(\lambda, 1)$ 和 $Col(\kappa, \lambda)$ 的情形又如何?

本文的主要结果回答了这些问题:

主定理 1。假设 $\lambda > \kappa$ 是正则基数，并且不是共尾数小于 κ 的奇异基数的后继，同时假设 $\diamondsuit(S^\lambda_{\geq\kappa})$。那么，对于每个大小为 $\leq \lambda$ 的 $<\kappa$-策略闭迫迫，以及 P_κ（λ）上的每个正规超滤子$\mathcal{U}$，都存在从 Pr_T（$\mathcal{U}$）到 $\mathbb{Q}$的弱投影。

这为问题（2）给出了肯定答案。定理 1 与 $\lambda = \kappa$的情形形成对比，即带有 κ上的正规超滤子的标准普里克里强迫。事实上，根据 Gitik-Kanovei-Koepke [GKK10], ，如果 κ上的 U 是正规超滤子，那么 Cohen(κ, 1)（以及许多其他强迫）不能成为 Prikry 强迫 $Pr(U)$ 的投影。实际上，我们对稍大的一类强迫证明了主定理 1（见定理 3.9），称之为 $<\kappa$-对角分配强迫（见定义 3.7）。随后我们在命题 3.11 中证明

$<\kappa$- $\implies$ $<\kappa$-对角分配 $\implies$ κ-分配且策略封闭。

我们还证明了上述蕴含关系不可逆。

[2]参见定义 2.1。

对于共尾数小于 κ 的奇异基数的后继，情形更为微妙。我们能够证明以下独立性结果：

定理 2. 相对于无穷多个超紧致基数，$Add(\kappa^{+\omega+1}, 1)$ 是否为 $\kappa^{+\omega+1}$-超紧 *Prikry forcing* 的投影是独立的。

至于（1），我们得到以下否定答案：

主要定理 3. 假设 $\lambda = \kappa^+$。存在一个大小为 $\leq \lambda$ 的 κ-分配强迫，它不可能是 λ-超紧 *Prikry forcing* 的投影。

主定理 3 中的强迫是通过胖平稳集射击一个闭无界集的强迫。

2. Preliminaries

2.1. 强迫预备知识。 我们从投影的概念开始：

定义 2.1。 设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是强迫偏序集。弱投影 是一个映射$\pi\colon\ \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$，满足：

(1) 对所有 $p,\ p' \in \mathbb{P}$，若 $p \geq p'$，则 $\pi(p) \geq \pi(p')$；(2) 对所有 $p \in \mathbb{P}$，存在 $q^* \leq \pi(p)$，使得对于每个 $q \leq q^*$，存在$p' \leq p$，使得 $\pi(p') \leq q$。

投影是满足以下条件的弱投影：

(1) $\pi(1\!\!1_{\mathbb{P}}) = 1\!\!1_{\mathbb{Q}}$；(2*)在上面的条件 (2) 中，我们可以取 $q^* = \pi(p)$。（也就是说，$\pi[\mathbb{P}/p]$ 在 $\mathbb{Q}/\pi(p)$ 中稠密。）

注记 2.2。 条件 (2) 等价于以下要求：对于每个$p \in \mathbb{P}$ 以及每个在 $\pi(p)$ 上方稠密的 $D \subseteq \mathbb{Q}$，$\pi^{-1}[D]$ 在 p 上方的 $\mathbb{P}$ 中稠密。

命题 2.3。 设 $\mathbb{P}$、$\mathbb{Q}$ 是强迫概念。

(1) 以下命题等价：*(a)* 存在一个弱投影 $\pi : \mathbb{P} \to RO(\mathbb{Q})$。*(b)* 对每个 V-泛型 $G \subseteq \mathbb{P}$，都存在一个 V-泛型 $H \subseteq \mathbb{Q}$，使得 $H \in V[G]$。*(2)* 以下命题等价：*(a)* 存在一个投影 $\pi : \mathbb{P} \to RO(\mathbb{Q})$。

(b) 存在一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{H}$，使得 $1\!\!1_{\mathbb{P}} \Vdash$ “$\dot{H}$ 是 $\mathbb{Q}$的 V-泛型”，并且对于每个 V-泛型 $H \subseteq \mathbb{Q}$，都存在一个 V-泛型 $G \subseteq \mathbb{P}$，使得 $\dot{H}_G = H$。

上述命题表明，为了分析 $\mathbb{P}$ 的（弱）投影，只需考察由 $\mathbb{P}$ 强迫得到的泛型扩张的中间模型 $V \subseteq M \subseteq V[G]$，并研究满足以下条件的强迫 $\mathbb{Q}$：M 可以是由 $\mathbb{Q}$ 得到的泛型扩张。

我们将考虑强迫概念的以下组合性质：

定义 2.4。 设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，且 κ 是正则的。我们称：

(1) 若每个由两两相容元素组成的 $X \in [\mathbb{P}]^{<\kappa}$ 在 $\mathbb{P}$中都有上界，则 $\mathbb{P}$ 是 κ-有向闭的。(2) 若对于任意 $\lambda < \kappa$ 和任意递减的 $\langle p_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle \subseteq \mathbb{P}$，都存在一个下界，则 $\mathbb{P}$ 是 κ-闭的。(3) 若 Good 在博弈$G_\kappa(\mathbb{P})$中有获胜策略，则 $\mathbb{P}$是 κ-策略闭的。该博弈定义如下：设 γ 是一个序数。我们定义两位玩家 Bad 和 Good 之间的博弈$G_\gamma(\mathbb{P})$。在第 0 轮之前，Bad 选择一个起始条件 $p \in \mathbb{P}$，之后每一步都在 $\mathbb{P}/p$中进行。在第 $\rho < \gamma$轮，已经进行了一条 $\langle p_i,\ q_i \mid i < \rho \rangle$，Good 首先打出$p_\rho$，即所有此前打出的条件的下界，然后 Bad 打出 $q_\rho \leq p_\rho$。当双方都能进行每个阶段 $\rho < \gamma$时，Good 获胜。(4) 若对于每个 $\rho < \kappa$，Good 在博弈 $G_\rho(\mathbb{P})$中都有获胜策略，则 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-策略闭的。(5) 若少于 κ 个稠密开集的交集仍是稠密开集，则 $\mathbb{P}$ 是 κ-分配的。

事实 2.5。

(1) κ-定向闭 $\Rightarrow$ κ-闭 $\Rightarrow$ κ-强闭 $\Rightarrow$ $<\kappa$-强闭 $\Rightarrow$ κ-分配。(2) $\mathbb{Q}$ 是 κ-分配的，当且仅当 $\mathbb{Q}$ 不添加 $< \kappa$-序数序列。

以下结果归于 Dobrinen：

命题 2.6 （[Dob03，推论 1。6]）。设 κ 为一个极限基数。则对于每个强迫概念 $\mathbb{Q}$，以下各项等价：

（1） $\mathbb{Q}$是 κ-分配的。（2）*Bad* 在长度为 $<\kappa$的博弈中没有获胜策略。

注意到，$\mathbb{Q}$是 κ-分配的，等价于说，对每个 q，由下式生成的滤子 $\mathcal{D}_q(\mathbb{Q})$

$$\{D \subseteq \mathbb{Q} \mid D \text{ is dense open above } q\}$$

是 κ-完备的。

2.2. **超滤子与超幂预备知识**。 我们用 $P_\kappa(A)$ 表示所有基数严格小于 κ 的 A 的子集构成的集合族。现在，我们确立本文将使用的基本术语。关于 $P_\kappa(\lambda)$ 上的超滤子理论，更多信息请参阅 [Jec03] 和 [Gol22]。

定义 2.7。 称 $\mathcal{U}$ 上的超滤子 $P_\kappa(\lambda)$ 为：

(1) 若对每个 $\alpha < \lambda$, $\{x \mid \alpha \in x\} \in \mathcal{U}$ 都成立，则称其为细；(2) 若它是一个细的、 κ-完备且对对角交封闭的超滤子，则称其为正规，即若 $(A_\alpha \mid \alpha < \lambda) \subseteq \mathcal{U}$, 则

$$\Delta_{\alpha<\lambda} A_\alpha := \{x \in P_\kappa(\lambda) \mid \forall \alpha \in x,\ x \in A_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

给定一个集合论模型 M，以及定义在 $X \in M$ [3] 上的一个 M-超滤子 U，我们将 M 的超幂（的传递塌缩）记作 U，即 M_U，并将相应的映射记作 j_U^M: $M \to M_U$，其定义为 $j_U(x) = [c_x]_U$。若 $M = V$ 是全集，则记作 $j_U^V = j_U$。

命题 2.8。设 $\mathcal{U}$ 是 P_κ上的一个 κ-完备超滤子（λ）。则:

（1） $\mathcal{U}$是细的，当且仅当 $j''_{\mathcal{U}}\lambda \subseteq [id]_{\mathcal{U}}$。（2） $\mathcal{U}$是正规的，当且仅当 $j''_{\mathcal{U}}\lambda = [id]_{\mathcal{U}}$。以下命题的证明见 [Gol22]

.

命题 2.9。设 U 是一个 M-超滤子，且 λ 是一个基数，其中 M 在 λ-序列下闭。则以下各项等价:

(1) $(M_U)^\lambda \cap M \subseteq M_U$（即 M_U在来自 M的 λ-序列下封闭）。(2) $j''_U\lambda \in M_U$。

注 2.10. 我们注意到，若 $\kappa = \lambda$，则一个 $P_\kappa(\lambda)$ 细 κ-完备测度集中于序数上，因此我们可以将其视为定义在 κ上的测度。此外，正规性取其通常含义。从这个意义上说， $P_\kappa(\lambda)$ 的超滤子理论推广了定义在 κ上的超滤子理论。

在大基数的语境中，构造超滤子的最常见方法是令 $j: M \to N$ 为一个初等嵌入， $X \in M$ 为任意集合，并令 $x \in j(X) \cap N$。我们如下导出一个定义在 X上的 M-超滤子 $D(x, j)$: 对任意属于 M的 $A \subseteq X$，

$$A \in D(x, j) \iff x \in j(A)$$

考虑 $j_{D(x,j)}: M \to M_{D(x,j)}$，我们可以用映射 $k: M_{D(x,j)} \to N$ 补全该图，其中映射由 $k([f]_{D(x,j)}) = j(f)(x)$ 定义。这是一个初等嵌入，并且满足 $k \circ j_{D(x,j)} = j$ 以及 $k([\mathrm{id}]_{D(x,j)}) = x$。

若我们从某个定义在 Y 上的超滤子 U 开始，则函数$f: Y \to X$（其中 $[f]_U = x$）可用于定义超滤子 $D(x, j)$，如下所示:

$$f_*(U) := \{A \subseteq X \mid f^{-1}[A] \in U\}.$$

由此得到鲁丁-凯斯勒序:

定义 2.11（鲁丁-凯斯勒序与卡捷托夫序）。设 U, W 分别是定义在集合 X, Y 上的超滤子。我们将鲁丁-凯斯勒序 定义为$U \leq_{RK} W$当且仅当存在函数 $f: Y \to X$，使得 $A \in U$当且仅当 $f^{-1}[A] \in W$。记作 $U = f_*W$。

给定定义在 X 上的滤子 F，若存在定义在 X 上的超滤子 $F \subseteq U$，使得 $U \leq_{RK} W$，则我们将卡捷托夫序 定义为 $F \leq_K W$。

综上可得

命题 2.12。设 U 和 W 分别是 X 和 Y 上的 M-超滤子。以下各项等价:

[3]即 $(M, U) \models U$ 是定义在 X 上的超滤子。

（1） $U \leq_{RK} W$。（2）存在 $f\colon\ Y \to X$，使得 $U = D([f]_W$、$j_W)$。（3）存在初等嵌入 $k\colon\ M_U \to M_W$，使得 $k \circ j_U = j_W$。

推论 2.13。设 F 是 X 上的一个滤子，W 是任意超滤子。那么 $F \leq_K W$ 当且仅当存在某个 $x \in j_W(X)$，使得 $F \subseteq D(x, j_W)$。

下面介绍关于长度为 δ、通过 U（U 是 V 上的一个超滤子）进行迭代超幂的记号。这是一个系统 $\{M_\alpha^U, j_{\beta,\gamma}^U\colon\ \alpha < \delta$ 以及 $\beta < \gamma < \delta\}$，其中：

(1) $M_0^U = V$。(2) $M_{\alpha+1}^U$ 是通过 $j_{0,\alpha}^U(U)$ 对 M_α^U 取的超幂，而 $j_{\alpha,\alpha+1}^U$ 是相应的超幂映射。(3) $j_{\xi,\alpha+1}^U = j_{\alpha,\alpha+1}^U \circ j_{\xi,\alpha}^U$ 对于 $\xi < \alpha$。(4) 每当 λ 为极限序数时，M_λ^U 是 $\langle M_\alpha^U$ 的直接极限：$\alpha < \lambda\rangle$ 通过 $j_{\alpha,\beta}^U$'s（$\alpha < \beta < \lambda$），而 $j_{\alpha,\lambda}^U$'s 是直接极限映射。

在没有歧义时，我们省略上标 U。

2.3. **强紧致与超紧致 Prikry 强迫**。下面介绍本文关注的主要强迫。该强迫由 Magidor [Mag77] 提出，相关证明见 [Git10]。固定一个基数κ，它对某个基数 $\lambda \geq \kappa$ 是 λ-强紧致的。

设 $\mathcal{U}$ 是 $P_\kappa(\lambda)$上的一个细 κ-完备超滤子。使用$\mathcal{U}$ 的 Prikry 强迫将产生一个 $P_\kappa(\lambda)$中的 ω-序列，该序列相对于如下定义的 Magidor 序：

$$x \prec y \text{ iff } x \subseteq y \text{ and } |x| < |y \cap \kappa|.$$

用 $[P_\kappa(\lambda)]_\prec^{<\omega}$表示$P_\kappa(\lambda)$中所有有限的 $\prec$-递增序列所构成的集合族。

定义 2.14（树普里克里强迫）。设 $Pr_T(\mathcal{U})$由如下形式的条件组成：$\langle x_0, ..., x_{n-1}, T\rangle$，其中：

(1) $\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}\rangle \in [P_\kappa(\lambda)]_\prec^{<\omega}$；(2) $T \subseteq [P_\kappa(\lambda)]_\prec^{<\omega}$，且 $(T, \sqsubseteq)$ 是一棵树[4]；(3) $\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ 是 T 的茎，也就是说，每个 $t \in T$ 都与 $\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ 是 $\sqsubseteq$-可比较的；(4) T 是 $\mathcal{U}$-胖的，即对于每个 $t \in T/\langle x_0, ..., x_{n-1}\rangle$

$$\mathrm{Succ}_T(t) = \{x \in P_\kappa(\lambda) \mid t^\frown x \in T\} \in \mathcal{U}.$$

当且仅当该序由 $\langle x_0, ..., x_{n-1}, T\rangle \leq \langle y_0, ..., y_{m-1}, S\rangle$ 定义时

(1) $\langle y_0, ..., y_{m-1}\rangle \sqsubseteq \langle x_0, ..., x_{n-1}\rangle$。

(2) $\langle x_0, ..., x_{n-1}\rangle \in S$。(3) $T \subseteq S$。

[4]也就是说，它按端扩张序 $\sqsubseteq$ 排序，并且在限制下闭合。

我们还将直接扩张序定义为 $\langle x_0,...,x_{n-1},T\rangle \leq^* \langle y_0,...,y_{m-1},S\rangle$当且仅当 $\langle x_0,...,x_{n-1},T\rangle \leq \langle y_0,...,y_{m-1},S\rangle$ 且 $n=m$。□

注意，$\langle x_0,.....,x_{n-1},T\rangle \leq \langle y_0,.....,y_{m-1},S\rangle$ 当且仅当 $T\subseteq S$。

若 $\mathcal{U}$ 是正规的，则我们可以用单个集合 $A\in\mathcal{U}$替换树 T：

断言 2.15。若 T 是带有茎 t_0的 $\mathcal{U}$-胖的，且 $\mathcal{U}$ 是正规的，则存在$A\in\mathcal{U}$ 使得

$$t_0^\frown[A]^{\leq\omega}_{\prec} := \{t_0^\frown s \mid s\in[A]^{\leq\omega}_{\prec}\}\subseteq T.$$

证明。令 $A=\{x\mid t_0\prec x\}\cap\Delta_{t\in T/t_0}\mathrm{Succ}_T(t)$，其中

$$\Delta_{t\in T/t_0}\mathrm{Succ}_T(t):=\{x\in P_\kappa(\lambda)\mid \forall s\in T, s\prec x\Rightarrow x\in\mathrm{Succ}_T(s)\}.$$

那么 $A\in\mathcal{U}$。事实上，若 $s\in j_{\mathcal{U}}(T)$ 且 $s\prec j''_{\mathcal{U}}\lambda$，则存在 $s'\in T$，使得 $j_{\mathcal{U}}(s')=s$。由于 $\mathrm{Succ}_T(s')\in\mathcal{U}$，可得

$$j''_{\mathcal{U}}\lambda\in j_{\mathcal{U}}(\mathrm{Succ}_T(s'))=\mathrm{Succ}_{j_{\mathcal{U}}(T)}(s).$$

因此 $j''_{\mathcal{U}}\lambda\in j_{\mathcal{U}}(A)$。为证明 $t_0^\frown[A]^{\leq\omega}_{\prec}\subseteq T$，任取 $(x_0,.....,x_{n-1})\in[A]^{\leq\omega}_{\prec}$，则 $t_0\prec x_0$，从而 $x_0\in\mathrm{Succ}_T(t_0)$，即 $t_0^\frown x_0\in T$。然后$t_0^\frown x_0\prec x_1$，从而 $x_1\in\mathrm{Succ}_T(t_0\frown x_0)$，依此类推。□

我们得出以下结论：

推论 2.16。设 $\mathcal{U}$ 是 $P_\kappa(\lambda)$ 上的正规测度。那么 $Pr_T(\mathcal{U})$与由$(\vec{x},A)\in[P_\kappa(\lambda)]^{\leq\omega}_{\prec}\times\mathcal{U}$以及$(\vec{x},A)\leq(\vec{y},B)$组成的强迫 $Pr(\mathcal{U})$强迫等价，当且仅当 $\vec{y}\sqsubseteq\vec{x}$、$\vec{x}\setminus\vec{y}\subseteq B$ 和 $A\subseteq B$。

对于条件 $p=(t,T)$，记 $t(p)=t$和 $T(p)=T$。此外，对于每个 $n<\omega$，我们定义 $\mathcal{L}_n(T)=T\cap[P_\kappa(\lambda)]^n$。

命题 2.17 ($Pr_T(\mathcal{U}$ 的性质)。

(1) $Pr_T(\mathcal{U})$ 是 $(\lambda^{<\kappa})^+$-链条件。*(2)* $(Pr_T(\mathcal{U})\leq^*)$ 是 κ-有向闭的。*(3)* 普里克里性质：对于强迫语言中的每个句子 σ 以及每个 $p\in Pr_T(\mathcal{U})$，存在 $p^*\leq^* p$ 使得 $p^*||\sigma$。*(4)* 强普里克里性质：对于每个稠密开集 D 以及每个 $p\in Pr_T(\mathcal{U})$，存在 $n<\omega$ 和 $p^*\leq^* p$，使得对于每个 $s\in\mathcal{L}_n(T(p^*))$，$p^{*\frown}s\in D$。

作为推论，我们看到 $Pr_T(\mathcal{U})$ 不会向 κ 添加有界子集，并且保留区间 $[0,\kappa]\cup[(\lambda^{<\kappa})^+,\infty)$ 内的基数。

定理 2.18。$Pr_T(\mathcal{U})$ 将区间 $(\kappa,\lambda^{<\kappa}]$ 中的每个基数坍缩，并使 κ 变为共尾数为 ω 的奇异基数。

我们将频繁用到 Bukovsky-Dehornoy 对 Prikry 强迫和迭代超幂的分析：

定理 2.19。 设 $\mathcal{U}$ 是 $P_\kappa(\lambda)$ 上的一个细 κ-完备超滤子。设$\{M_n, j_{m,n} : m < n \in \omega\}$ 是 V 经 $\mathcal{U}$ 进行长度为 ω 的迭代超幂。考虑序列

$$S = \{j_{n,\omega}([\mathrm{id}]_{\mathcal{U}^n}) : 1 \leq n < \omega\}$$

那么， S是一个在 M_ω 上的 $j_{0,\omega}(Pr_T(\mathcal{U}))$-泛序列。此外，

$$\bigcap_{n<\omega} M_n = M_\omega[S].$$

由此可知， $M_\omega[S]$ 对来自 V 的 κ-序列封闭。

回到强紧致 Prikry 强迫的中间模型问题， 下面的 [BTW26] 在大小为 $\leq \lambda$ 的 κ- 分配强迫类中给出了一个有用的刻画:

定理 2.20 (Benhamou-Thei-Weltsch)。 设 κ 是一个 λ-强紧致基数。设 $\mathbb{Q}$ 是一个大小为 $\leq \lambda$ 的强迫，且 $\mathcal{U}$ 是 $P_\kappa(\lambda)$ 上的细 κ-完备超滤子。那么以下条件等价:

(1) $\mathbb{Q}$ 是一个 κ-分配弱投影，其稠密像为 $Pr_T(\mathcal{U})$。(2) 对于每个 $q \in \mathbb{Q}$, 存在 n_q 使得

$$\bigcap j_{\mathcal{U}^{n_q}}{}``\mathcal{D}_q(\mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

(3) 对于每个 $q \in \mathbb{Q}$，都存在 n_q，使得 $\mathcal{D}_q(\mathbb{Q}) \leq_K \mathcal{U}^{n_q}$。

3. Constructing generic filters over ultrapowers

3.1. Woodin 的构造。

主定理 1 的出发点是 Woodin 的如下构造:

命题 3.1 (Woodin)。 假设 $\langle\!\langle S_\kappa^{\kappa^+} \rangle\!\rangle$，且令 U 为 κ上的非主 κ-完备超滤子。令 $\mathbb{Q} \in M_U$ 为一种强迫，在 M_U中它是κ^+-闭的，且其基数至多为 $j_U(\kappa^+)$。那么对任意 $q \in \mathbb{Q}$，存在一个 M_U-泛型滤子 $G \in V$，使其关于 $\mathbb{Q}$ 且满足 $q \in G$。

证明。 假设 $\mathbb{Q} = [\nu \mapsto \mathbb{Q}_\nu]_U$ 是超幂表示，并且不失一般性地假设对每个 ν, 都有 $\mathbb{Q}_\nu \subseteq \kappa^+$。令 $\langle A_\alpha \mid \alpha \in S_\kappa^{\kappa^+} \rangle$ 为一个菱形序列。固定一个双射 $\varphi : \kappa^+ \times \kappa \leftrightarrow \kappa^+$，并令 C_0 为由满足 $\varphi \restriction \alpha \times \kappa : \alpha \times \kappa \leftrightarrow \alpha$的点 α 构成的闭无界集。对于每个$\alpha \in S_\kappa^{\kappa^+}$，令 $A_\alpha^* = \varphi^{-1}[A_\alpha]$。对于 $X \subseteq \kappa^+ \times \kappa$ 和 $\nu < \kappa$，用$X_\nu = \{\alpha < \kappa^+ \mid (\alpha, \nu) \text{ 表示 } \in X\}$。那么，序列 $\langle A_\alpha^* \mid \alpha \in S_\kappa^{\kappa^+} \rangle$ 具有以下性质:

对于每个序列 $(X_\nu \mid \nu < \kappa) \subseteq P(\kappa^+)$,

(1) $\{\alpha \in S_\kappa^{\kappa^+} \mid \langle (A_\alpha^*)_\nu \mid \nu < \kappa \rangle = \langle X_\nu \cap \alpha \mid \nu < \kappa \rangle\}$ 在 κ^+. 中是平稳集

令 $\mathbb{Q}_{\alpha,\ \nu} = \mathbb{Q}_\nu \cap \alpha$。我们来构造一个 q 以下的下降序列 $\langle q_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle \subseteq \mathbb{Q}$，使得对于 M_U 中的每个稠密集 $D \subseteq \mathbb{Q}$，都存在 $\xi < \kappa^+$ 使得 $q_\xi \in D$。此外，在构造的 ξ 阶段，我们还将任意固定一个函数 $f_\xi : \kappa \to \kappa^+$，使得对于每个 $\nu < \kappa$ 和 $[f_\xi]_U = q_\xi$，都有 $f_\xi(\nu) \in \mathbb{Q}_\nu$。

置 $q_0 = q_\circ$ 在后继步骤中，我们令 $q_{\alpha+1} = q_\alpha$；而在共尾数小于 κ的阶段，我们令 q_α 为 $\{q_\beta \mid \beta < \alpha\}$的一个下界。根据 $\mathbb{Q}$ 在 M_U 中的 κ^+闭性以及 M_U 对 κ-序列的闭性，该下界存在。

假设 $cf(\alpha) = \kappa_\circ$ 如果满足以下条件，我们称 α 为活跃阶段：

(1) 假设 1：对于每个 $\beta < \alpha$ 和 $\nu < \kappa$，$f_\beta(\nu) \in \mathbb{Q}_{\alpha,\ \nu\circ}$ (2) 假设 2：A^*_α 编码了一个序列 $(E_\nu \mid \nu < \kappa)$，其中 E_ν 在$\mathbb{Q}_\alpha$中稠密，$_\nu\circ$ (3) 假设 3：$\mathbb{Q} \cap j_U(\alpha)$ 在 M_U 中是 κ^+-闭的。

假设 1 确保，对于每个 $\beta < \alpha$，$q_\beta = j_U(f_\beta)([\mathrm{id}]_U) \in \mathbb{Q} \cap j_U(\alpha)$。根据假设 2，$E^*$: $= [\nu \mapsto E_\nu]_U$在 $\mathbb{Q}\cap j_U(\alpha)$ 中稠密；根据假设 3，存在某个 $q_\alpha \in E^*$，使得对于每个 $\beta < \alpha$，$q_\alpha \leq q_\beta$。

如果 $cf(\alpha) = \kappa$ 且 α 不是活跃阶段，则取 q_α 为$\{q_\beta \mid \beta < \alpha\}$的下界；根据 $\mathbb{Q}$ 在 M_U中的 κ^+-闭性，这一下界存在。

这就完成了对 $\langle q_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle$的定义。现在令 $D \in M_U$ 为 $\mathbb{Q}$的一个稠密开子集。写作 $D = [\nu \mapsto D_\nu]_U$，其中每个 D_ν都是 $\mathbb{Q}_\nu$中的稠密开集。对于每个 $\nu < \kappa$，存在一个闭无界集 $C_\nu \subseteq \kappa^+$，使得对每个$\alpha \in C_\nu$，$D_\nu \cap \alpha$在$\mathbb{Q}_\alpha$中稠密，$_\nu\circ$（令 C_ν为函数的闭点所成的闭无界集，该函数将每个 $\zeta \in \mathbb{Q}_\nu$ 映射到某个满足 $\zeta' \leq_{\mathbb{Q}_\nu} \zeta$的 $\zeta' \in D_\nu$。）令$C^* = \bigcap_{\nu<\kappa} C_\nu\circ$ 那么对于每个 $\alpha \in C^*$和每个 $\nu < \kappa$，$D_\nu \cap \alpha$在$\mathbb{Q}_\alpha$中稠密，$_\nu\circ$容易看出，假设 1也出现在某个闭无界集上。选择$\theta_\nu < \kappa$使得 $[\nu \mapsto \theta_\nu]_U = \kappa^+\circ$ 根据 Lo´s定理，对于 U-几乎所有的 ν，$\mathbb{Q}_\nu$ 都是 θ_ν-闭的。对于每个这样的 ν，固定长度为 $< \theta_\nu$的下降序列的下界选取。由于 $\kappa^{<\kappa} = \kappa$，存在一个 $\alpha < \kappa^+$ 的闭无界集，使得只要 $\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$，$\mathbb{Q}_\alpha$中的每个这样的序列 $_\nu$ 都有其所选下界低于 α，并且对所有这样的 ν同时成立。因此，在这些阶段，$\mathbb{Q}\cap j_U(\alpha)$在 M_U 中是 κ^+-闭的。根据 $\langle A^*_\alpha \mid \alpha \in S^{\kappa^+}_\kappa\rangle$的性质，存在某个 $\alpha \in C^* \cap S^{\kappa^+}_\kappa$ 满足假设 1和假设 3，使得 $(D_\nu \cap \alpha)_{\nu<\kappa}$由 A^*_α编码。因此 α 是一个活跃阶段。根据我们的构造，

$$q_\alpha \in [\nu \mapsto D_\nu \cap \alpha]_U = D \cap j_U(\alpha),$$

如所需。 □

现在我们可以推出主定理 1 的一个部分。

定理 3.2. 假设 $\diamondsuit(S^{\kappa^+}_\kappa)$ 成立，并令 $\mathcal{U}$ 为 κ-完备的正规细超滤，定义在 $P_\kappa(\kappa^+)$上。那么对于每个基数为 κ^+ 的 κ-闭强迫 $\mathbb{P}$，以及每个 $p \in \mathbb{P}$，$\bigcap_{D\in\mathcal{D}_p(\mathbb{P})} j_{\mathcal{U}}(D) \neq \emptyset_\circ$

证明。令 U 为 $\mathcal{U}$ 在κ上的正规 κ-完备超滤子的投影。令 $i : V \to M_U$、$j : V \to M_{\mathcal{U}}$ 和 $k : M_U \to M_{\mathcal{U}}$ 为通常的交换图。令 $p \in \mathbb{P}_\circ$由命题 3.1，取 $G \in V$ 为 $i(\mathbb{P})$ 的 M_U-泛型，满足 $i(p) \in G$，并注意到由菱形假设，$|G| = |i(\mathbb{P})| = \kappa^+$。由强迫的 κ-闭性（或者简单地由我们构造泛型的方式），可以找到一个下降序列$\langle q_\alpha : \alpha < \kappa^+\rangle \subseteq G$，它生成 $G_\circ$由 $\mathcal{U}$ 的正规性，$M_{\mathcal{U}}$ 对其元素构成的 κ^+-序列封闭，因此 $\langle k(q_\alpha) : \alpha < \kappa^+\rangle \in M_{\mathcal{U}\circ}$

由于 $j(\mathbb{P})$ 是 $j(\kappa)$-闭的，且 $j(\kappa) > \kappa^+$，所以存在一个下界 $q \in j(\mathbb{P})$，使得 $\langle k(q_\alpha) : \alpha < \kappa^+ \rangle$。下面证明 q 符合要求。取 $D \in \mathcal{D}_p(\mathbb{P})$。那么，$i(D) \in M_U$ 在 $i(\mathbb{P})$ 中、$i(p)$ 以上是稠密的；由 G 的 M_U-泛型性，且由于 $i(p) \in G$，存在 $p' \in i(D) \cap G$。因此 $k(p') \in j(D)$，又由于 D 是开集且 $q \leq k(p')$，我们得出 $q \in j(D)$，如所求。□

由定理 3.2 和定理 2.20 可得：

推论 3.3。假设 $\diamondsuit(S^{\kappa^+}_\kappa)$，则对于每个基数为 κ^+ 的 κ-闭强迫 $\mathbb{P}$，以及 $P_\kappa(\kappa^+)$ 上的每个正规测度 $\mathcal{U}$，都存在从 $Pr(\mathcal{U})$ 到 $\mathbb{P}$ 的弱投影。

正规性在这里似乎至关重要，因此下面的问题尚不明确：

问题 3.4。对于 $P_\kappa(\kappa^+)$ 上的每个细的 κ-完备超滤子 $\mathcal{U}$，每个大小为 $\leq \kappa^+$（或仅为 $Add(\kappa^+,1)$）的 κ-闭强迫是否都是 $Pr_T(\mathcal{U})$ 的投影？

注 3.5。在 $2^\kappa > \kappa^+$，$Add(\kappa^+,1)$ 将 2^κ 压缩到 κ^+ 的情形下。另一方面，不作任何基数算术假设时，κ^+-超紧 Prikry 强迫是 κ^{++}-链条件的（因为 $(\kappa^+)^{<\kappa} = \kappa^+$），因此不会压缩 κ^{++}。所以，如果 $2^\kappa > \kappa^+$, $Add(\kappa^+,1)$，它就不可能是 κ^+-超紧 Prikry 强迫的投影。

我们不知道 $\diamondsuit(S^{\kappa^+}_\kappa)$ 假设是否是必要的：

问题 3.6。是否存在一个 GCH 的模型，使得 $Add(\kappa^+, 1)$ 不是 κ^+-超紧 Prikry forcing 的投影？

注意，在这样的模型中，$\diamondsuit(S^{\kappa^+}_\kappa)$ 必然不成立。

3.2. **主定理 1**。现在我们陈述并证明第一个一般性结果，主定理 1 将由此推出。我们先引入该定理所适用的强迫类。假设 $\mathbb{P}$ 是一个偏序集，p 是 $\mathbb{P}$ 中的一个条件，且 κ 是一个基数。给定一个 $\subseteq$- 递增的初等子模型序列 $\vec{N} = \langle N_i \mid i < \gamma \rangle$，其中的初等子模型取自某个足够大的 θ，并满足：

(i) $\gamma < \kappa$;
(ii) for every $i < \gamma$, $(\bigcup_{j<i} N_j)^{<\kappa} \subseteq N_i$;
(iii) $\kappa + 1 \cup \{p, \mathbb{P}\} \subseteq N_0$.

我们将 $G(\vec{N}, \mathbb{P}/p)$ 定义为两个玩家分别在 p_i，$q_i \in \mathbb{P} \cap N_i$ 中于 p 之上进行条件博弈。博弈长度为 γ，在阶段 $i < \gamma$，Good 先行动，并选择一个 $p_i \in N_i$，使其强于序列 $\langle p_j, q_j \mid j < i \rangle$ 中的每个元素；随后 Bad 选择一个同样属于 N_i 的 $q_i \leq p_i$。如果不存在这样的 p_i，则该轮结束（且 Bad 赢得该轮）。当 Good 挺过所有阶段 $i < \gamma$，并且序列 $\langle p_i \mid i < \gamma \rangle$ 存在一个下界时，Good 赢得该轮。

满足 (i)–(iii) 的序列称为 H_θ 的一个 $(\kappa, p, \mathbb{P})$-可玩序列 初等子模型序列。

定义 3.7。 若对所有充分大的 θ，以及所有 H_θ 的 $(\kappa, p, \mathbb{P})$-可玩初等子模型序列，Bad 在 $G(\vec{N}, \mathbb{P}/p)$ 中都没有获胜策略，则称强迫概念 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-对角分配的。

注记 3.8。 (1) Shelah 有类似的定义 [She03，定义 A.114]。(2) 众所周知，Bad 不具有获胜策略 $G(\mathbb{P}/p)$ 等价于 κ-分配性。因此，在大小为 $\leq \kappa$ 的强迫类上， κ-分配性蕴含$=<\kappa$-对角分配。(3) 如果 $|\mathbb{P}| \leq \kappa$，那么模型 N_0 已经包含 $\mathbb{P}$ ，因此博弈 $G(\vec{N}, \mathbb{P}/p)$ 与 $G(\mathbb{P}/p)$ 相同。(4) 由前一项可知，如果 $|\mathbb{P}| \leq \kappa$ ，那么 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-对角分配的，当且仅当它是 κ-分配的。

主定理 1 由以下定理和命题 3.11 推出：

定理 3.9。 设 $\kappa < \lambda$ 使得：

(a) λ 不是共尾数为 $< \kappa$ 的奇异基数的后继。[5](b) $\langle\langle S^\lambda_{\geq \kappa})$。那么对于每个基数为 λ 的 $<\kappa$-对角分配强迫 $\mathbb{P}$ ，以及每个定义在 P_κ 上的正规超滤子 $\mathcal{U}(\lambda)$ 和每个 $p \in \mathbb{P}$， $\bigcap j_{\mathcal{U}}``\mathcal{D}_p(\mathbb{P}) \neq \emptyset$。

证明。令 $\langle A_\alpha \mid \alpha \in S^\lambda_{\geq \kappa}\rangle$ 为一个菱形序列，并假设 $\mathbb{P} = \lambda$。由于 $\mathcal{U}$ 是正规的，$\langle A_\alpha \mid \alpha \in S^\lambda_{\geq \kappa}\rangle \in M_{\mathcal{U}}$。在 V 中，令 θ 足够大且正则。由于 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$，选取 $X \prec H_\theta$ ，使得 $|X| = \lambda$、$\lambda \cup \{\mathbb{P}, p\} \subseteq X$ 且 $X^{<\kappa} \subseteq X$。固定一个由 H_θ 的初等子模型组成的序列 $\vec{N} = \langle N_i \mid i < \lambda\rangle$ ，其中每个模型都包含于 X，满足：

(1) $\vec{N}$ 是 $\subseteq$-递增的，并且在共尾数为 $\geq \kappa$ 的点处连续。(2) 对每个 $i < \lambda$， $|N_i| < \lambda$。(3) $(\bigcup_{j<i} N_j)^{<\kappa} \cup \sup(\bigcup_{j<i} N_j \cap \lambda) \subseteq N_i$。(4) $p, \mathbb{P} \in N_0$ 且 $\kappa + 1 \subseteq N_0$。(5) $\bigcup_{i<\lambda} N_i = X$。

为证明这样的序列存在，我们首先注意到，由于 λ 不是余终数为 $< \kappa$的奇异基数的后继，若 $\delta < \lambda$，则 $\delta^{<\kappa} < \lambda$。枚举$X = \{x_i \mid i < \lambda\}$。找到满足 $x_0 \in N_0$ 且使得（4）成立的 $N_0 \prec X$ 。在那些不是余终数为 $\geq \kappa$ 的极限点的阶段（即后继阶段或小余终性的极限序数处）， λ的正则性、归纳假设以及前面的观察保证了 $\sup(\bigcup_{j<i} N_j \cap \lambda) < \lambda$ 且$|(\bigcup_{j<i} N_j)^{<\kappa}| < \lambda$。因此，根据 Löwenheim–Skolem 定理，我们可以找到包含 $(\bigcup_{j<i} N_j)^{<\kappa} \cup \sup(\bigcup_{j<i} N_j \cap \lambda)$ 的 $N_i \prec X$ ，其中 $|N_i| < \lambda$。在后继步骤 $i + 1$ ，我们还要求 $x_i \in N_{i+1}$。在余终数为 $\geq \kappa$的极限点处，必须取并集。因此，（1）成立。（2）由正则性仍然成立。（3）由归纳假设以及余终数为$\geq \kappa$这一事实得到。最后，（4），（5）由构造得出。

[5]回忆一下，根据 Solovay [74] [22] κ δ $cf\ \delta \geq \kappa$ $\delta^{<\kappa} = \delta$ Sol（另见 Gol），如果 是强紧致的且 ( )，那么 。

令 $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P} \cap N_\alpha = \lambda \cap N_\alpha$。在 $M_\mathcal{U}$中进行论证，则由初等性， $j_\mathcal{U}(\vec{N})$具有相同的性质，因此我们可以考虑子序列 $j''_\mathcal{U}\vec{N} = j_\mathcal{U}(\vec{N}) \restriction j''_\mathcal{U}\lambda$。注意，这是 $M_\mathcal{U}$中的一个（$j_\mathcal{U}(\kappa)$ $j_\mathcal{U}(p)$ $j_\mathcal{U}(\mathbb{P})$)-可博弈的、 $\subseteq$-递增的（处处不连续）序列：（i）成立，因为这是一个长度为$\lambda < j_\mathcal{U}(\kappa)$的序列；（$ii$）成立，因为对于每个 $i < \lambda$，由初等性可知

$$\left(\bigcup_{j<i} j_\mathcal{U}(N_j)\right)^{<j_\mathcal{U}(\kappa)} \subseteq \left(j_\mathcal{U}\left(\bigcup_{j<i} N_j\right)\right)^{<j_\mathcal{U}(\kappa)} \subseteq j_\mathcal{U}(N_i).$$

(iii) 由 (4) 和初等性推出。由于 $M_\mathcal{U} \models j_\mathcal{U}(\mathbb{P})$ 是 $<j_\mathcal{U}(\kappa)$-对角分配的，Bad 在 $M_\mathcal{U}$ 中没有获胜策略来进行博弈$G(j''_\mathcal{U}\vec{N},\ j_\mathcal{U}(\mathbb{P}/p))^{M_\mathcal{U}}$。

我们如下定义 Bad 在 $G(j_\mathcal{U}\text{“}\ \vec{N},\ j_\mathcal{U}(\mathbb{P}/p))^{M_\mathcal{U}}$中的策略。假设在阶段 $\alpha < \lambda$，我们递归地得到了一场按照该策略进行的对局 $\langle p_i,\ q_i \mid i < \alpha\rangle$，而 Good 出 $p_\alpha \in j_\mathcal{U}(N_\alpha)$。

我们称 α 为一个 活跃 阶段，如果 α 是一个共尾数至少为 κ 的极限序数，且满足以下条件：

(∗) 菱形序列 A_α 是 p 以上的一个稠密开子集 $E \subseteq \mathbb{P}_\alpha$。

由初等性可知， $E^* := j_\mathcal{U}(E)$ 在 $j_\mathcal{U}(\mathbb{P}_\alpha)$ 中稠密，因此 Bad 可以在 E^* 中出某个 $q_\alpha \leq p_\alpha$。注意，这在模型 $j_\mathcal{U}(N_\alpha)$ 内是一个合法着法。

如果 α 不是活跃阶段，且 Good 出了 $p_\alpha \in j_\mathcal{U}(\mathbb{P}_\alpha)$，那么 Bad 出 $q_\alpha = p_\alpha$。

这就完成了 Bad 的策略定义。设 $\langle p_\alpha, q_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$ 是 $G(j_\mathcal{U}\text{“}\ \vec{N}, j_\mathcal{U}(\mathbb{P}/p))^{M_\mathcal{U}}$ 中的一场制胜对局，其中 Good 按照该策略行棋。这意味着存在一个条件 p^*，使得对每个 $\alpha < \lambda$，都有 $p^* \leq p_\alpha$。

断言 3.10. $p^* \in \bigcap j''_\mathcal{U}\mathcal{D}_p(\mathbb{P})$。

证明。 设 $D \subseteq \mathbb{P}$ 是 p 以上的稠密开集。设 C_0 为所有满足 $\mathbb{P}_\alpha = N_\alpha \cap \lambda \in \lambda$ 的 α 的集合。于是由 (3) 以及在共尾数为 $\geq \kappa$ 的点处的连续性， C_0 是相对于共尾数 $\geq \kappa$ 的闭无界集。设 C_1 为满足 $\mathbb{P}_\alpha = \alpha$ 的 α 的集合。则 C_1 仍是相对于共尾数 $\geq \kappa$ 的闭无界集。存在一个闭无界集 C_2，使得对每个 $\alpha \in C_2$，$D \cap \mathbb{P}_\alpha$ 在 $\mathbb{P}_\alpha$ 中稠密（取 C_2 为函数的闭点所成的闭无界集，该函数将 $\zeta < \lambda$ 映射到一个指标 $\zeta' \in D$，满足 $\zeta \geq_\mathbb{P} \zeta'$）。

由于 $\langle A_\alpha \mid \alpha \in S^\lambda_{\geq\kappa}\rangle$ 是菱形序列，因此存在某个 $\alpha \in S^\lambda_{\geq\kappa} \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2$ 使得 $D \cap \mathbb{P}_\alpha = D \cap \alpha = A_\alpha$。所以 α 是一个活跃阶段，故根据我们的构造， $q_\alpha \in j_\mathcal{U}(D \cap \mathbb{P}_\alpha)$。于是 $p^* \leq q_\alpha$，因此$p^* \in j_\mathcal{U}(D)$。□

□

命题 3.11. 设 κ 是超紧致基数。假设 $\mathbb{P}$ 是一个基数为 λ 的强迫，其中 λ 是一个正则基数，且不是某个

共尾数为 $<\kappa$ 的奇异基数的后继。那么， $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-策略闭的，这意味着 $\mathbb{P}$ 是$<\kappa$-对角分配的，这意味着 $\mathbb{P}$ 是 κ-分配的。

证明。设 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-策略闭的，并证明它是$<\kappa$-对角分配的。令 $p\in\mathbb{P}$，并令 $\vec{N}=\langle N_i\mid i<\gamma\rangle$ 为一个（κ， p， $\mathbb{P}$）-可玩序列。由初等性，并且由于 $H_\theta\models\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-策略闭的，存在 $\vec{\sigma}=$ （$\sigma_i\mid i<\kappa$） $\in N_0$ ，使得每个 σ_i 都是长度为 i 、起始条件为 p的博弈中 Good 的获胜策略。

设 τ是 G（$\vec{N}$， $\mathbb{P}/p$）的策略。我们来证明 τ不是 Bad 的获胜策略。关键在于让 τ 对抗$\sigma_{\gamma+1}$进行博弈，并为 Good 生成一场制胜对局。注意，由于 $\kappa+1\cup\{\vec{\sigma}\}\subseteq N_0$， $\sigma_{\gamma+1}\in N_0$。从 $p_0=$$\sigma_{\gamma+1}$（$\langle\rangle$）开始。注意， $p_0\in N_0$ （因为 $\sigma_{\gamma+1}\in N_0$），并令 $q_0=\tau$（$\langle p_0\rangle$） $\in N_0$（根据博弈规则）。假设 $\langle p_i$， $q_i\mid i<\beta\rangle$ 已被定义，使得 $p_i=\sigma_{\gamma+1}$（$\langle p_j$， $q_j\mid j<i\rangle$）且 $q_i=\tau$（$\langle p_j$， $q_j\mid j<i\rangle^\frown p_i$）。注意，对于每个 $i<\beta$， （p_i， q_i） $\in N_i$ 。因此根据条件（ii），$\langle p_i$， $q_i\mid i<\beta\rangle\in N_\beta$。由于 $\sigma_{\gamma+1}\in N_\beta$， $\sigma_{\gamma+1}$（$\langle p_i$， $q_i\mid i<\beta\rangle$） $=p_\beta\in N_\beta$，并且 $q_\beta=\tau$（$\langle p_i$， $q_i\mid i<\beta\rangle^\frown p_\beta$） $\in N_\beta$。由于 $\sigma_{\gamma+1}$ 是 Good 的获胜策略，存在一个比阶段 γ之前所下的所有条件都更强的条件。因此，Good 在对抗 τ、长度为 γ 的对局中获胜，这表明 τ 不是 Bad 的获胜策略。

接下来，假设 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-对角分配的，并证明它是 κ-分配的。令 $\vec{D}=$($D_\alpha\mid\alpha<\gamma$) 为 $\mathbb{P}$ 的一个由 $\gamma<\kappa$ 个稠密开子集组成的集合族。我们希望证明 $\bigcap_{i<\gamma}D_i$ 是稠密的。为此，令 $p\in\mathbb{P}$。令 $\vec{N}$ 为一个 (κ， p， $\mathbb{P}$)-可玩序列，使得 $\vec{D}$， $p\in N_0$。注意，由初等性可知，对于每个 $\alpha<\gamma$， $D_\alpha\cap N_\alpha$ 在 $\mathbb{P}\cap N_\alpha$ 中是稠密的。我们为 G($\vec{N}$， $\mathbb{P}/p$) 中的 Bad 定义一个策略（因此该策略必定不是制胜的）。

该策略定义如下：在阶段 $\alpha<\gamma$，如果 (p_i， $q_i\mid i<\alpha$) 是一个部分运行，并且 $p_\alpha\in N_\alpha$ 是 Good 的回应，那么 Bad 选择 $q_\alpha\leq p_\alpha$ ，使其属于 $D_\alpha\cap N_\alpha$。这是可能的，因为 $p_\alpha\in N_\alpha\cap\mathbb{P}$ ，且 $D_\alpha\cap N_\alpha$ 在 $\mathbb{P}\cap N_\alpha$ 中是稠密的。根据假设，对于 Good，存在一个遵循该策略且低于 p 的制胜对局。这产生了一个下界 $p^*\in\bigcap_{\alpha<\gamma}D_\alpha$ ，使得 $p^*\leq p$。

□

命题 3.12. 设 $\kappa<\lambda$ 是正则基数，且对每个 $\delta<\lambda$ 都有 $\delta^{<\kappa}<\lambda$ 。若 $\mathbb{P}$ 是 $<\kappa$-对角分配的，则 $\mathbb{P}$ 保持 $S^\lambda_{<\kappa}$ 的平稳子集。

证明。设 S 是 $S^\lambda_{<\kappa}$ 的一个平稳子集，并反设以导出矛盾： $p\in\mathbb{P}$ ，且 C 是一个 $\mathbb{P}$-名称，表示一个由 p 强制与 S 不相交的闭无界集 ˇ→。设 θ 足够大且为正则基数，并令 N 是一个由初等子模型构成的 λ-序列，使得：

(a) $\vec{N}$ 是递增且连续的。(b) $N_i\prec H_\theta$。 (c) $|N_i|<\lambda$(d) (N_i) $^{<\kappa}\cup\{N_i\}\subseteq N_{i+1}$

(e) $N_i \cap \lambda \in \lambda$.
(f) $\kappa + 1 \cup \{\dot{C}, p, \mathbb{P}, \lambda\} \subseteq N_0$.

为证明这样的序列存在，我们在后继步骤中定义 $N_{i+1} \prec H_\theta$，使得满足 (a)–(f)：由于 $|N_i|^{<\kappa} < \lambda$，$(d)$ 是可能的。为确保 (e)，我们在定义 N_{i+1} 之前迭代 ω 次。在极限序数处，根据 (a)，我们必须取并集。注意，(a)，(b)，(c)，(e) 在取并集时仍成立，而 (d)，(f) 对它们没有任何说明。因此，对于每个 $\gamma < \kappa$ 和处处不连续递增序列 $(\alpha_i \mid i < \gamma)$，$\vec{N} \restriction \{\alpha_i \mid i < \gamma\}$ 都是 $(\kappa, p, \mathbb{P})$-可博弈的：为验证条件 (ii)，对于每个 i，这里的 i^{th} 模型是 N_{α_i}，且 $\alpha_i \geq \sup_{j<i} \alpha_j + 1$。因此，根据 (d)，$(\bigcup_{j<i} N_{\alpha_j})^{<\kappa} = (N_{\sup_{j<i} \alpha_j})^{<\kappa} \subseteq N_{\sup_{j<i} \alpha_j + 1} \subseteq N_{\alpha_i}$。

由于 $\vec{N}$ 是连续的，并且根据（e），$\{N_i \cap \lambda \mid i < \lambda$ 极限序数$\}$ 是一个闭无界集，因此存在 $\rho < \lambda$ 极限序数，使得 $\mu := N_\rho \cap \lambda \in S$。由于 $S \subseteq cof(< \kappa)$，$\mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\rho) = \gamma < \kappa$。设 $\{\alpha_i \mid i < \gamma\}$ 是 ρ 中的一个处处不连续的递增共尾序列。那么 $\{N_{\alpha_i} \cap \lambda \mid i < \gamma\}$ 在 μ 中是共尾的。

在博弈 $G(\vec{N} \restriction \{\alpha_i \mid i < \gamma\}, \mathbb{P}/p)$ 中定义一个策略，要求 Good 出 p_i 后，Bad 出 $q_i \in N_{\alpha_i}$，满足 $q_i \leq p_i$，从而强迫某个序数 ξ_i 进入 C 且高于 $N_{\sup_{j<i} \alpha_j} \cap \lambda$。注意 $p_i, C, N_{\sup_{j<i} \alpha_j} \in N_{\alpha_i}$。根据初等性，我们可以选择 $\xi_i < N_{\alpha_i} \cap \lambda$。由于这不是一个获胜策略，存在一个按照该策略进行的对局 $(p_\alpha, q_\alpha \mid \alpha < \gamma)$，且该对局对 Good 获胜。特别地，存在一个下界 $p^* \leq p_\alpha$，它是所有 α 的下界。于是 $p^* \leq p$ 且 $p^* \Vdash \check{\mu} = \sup\{\check{\xi}_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \in \check{S} \cap \dot{C}$，矛盾。□

这一类严格介于 $<\kappa$-策略闭强迫和 κ-分配强迫之间。例如，沿着 κ 的一个胖平稳子集添加闭无界集的强迫是 κ-分配的、非 $<\kappa$-策略闭的，大小为 κ（假设 κ 是强极限）。因此，它也是 $<\kappa$-对角分配的。

在下一节中，我们构造一个 κ-分配强迫，它不是投影，因而也不是 $<\kappa$-对角分配的。

4. Preservation of Stationary sets

在本节中，我们构造大小为 λ 的 κ-分配强迫的例子；这些强迫不是 λ-超紧致 Prikry 强迫的投影。根据命题 3.12，一个自然的例子是沿着 $S^\lambda_{<\kappa}$ 的一个平稳子集添加闭无界集的强迫。在此之前，我们先给出一个关于 Prikry 强迫的投影以及平稳集的保持的一般结果：

定理 4.1。假设 $\mathcal{U}$ 是 $P_\kappa(\lambda)$ 上的正规测度。假设 N 是 $V^{Pr(\mathcal{U})}$ 的一个中间模型，且 $N^{<\kappa} \subseteq V$，并且其中的 λ 仍然是正则的。那么 N 保留了 $S^\lambda_{<\kappa}$ 的平稳子集。

反设 $\mathbb{B}$ 是 $\mathcal{RO}(Pr(\mathcal{U}))$ 的一个完备 κ-分配布尔子代数，$S \subseteq S^\lambda_{<\kappa}$ 是 λ 中的平稳集，并且 $\dot{C}$ 是一个 $\mathbb{B}$-名称，使得某个条件 $b \in \mathbb{B}$ 强迫 C 是 λ 中与之不相交的闭无界集

于 $\check{S}$，且 $\check{\lambda}$ 是一个正则基数。我们可以找到 $p \in Pr(\mathcal{U})$，它强迫 $\check{b}$ 属于 $\mathbb{B}$ 的诱导泛型。现在将这些信息转移到 ω^{th}- 迭代超幂中。由定理 2.19，$\bigcap_{n<\omega} M_n$ 是通过 $j_\omega(Pr(\mathcal{U}))$ 得到的一个 M_ω-泛型扩张，所用的泛型包含 $j_\omega(p)$。令 H 为 $j_\omega(\mathbb{B})$ 的诱导M_ω-泛型，于是 $j_\omega(b) \in H$。根据初等性，在 $M_\omega[H]$ 中，$j_\omega(\lambda)$ 是正则的，而 $j_\omega(C)_H$ 是与 $j_\omega(S)$ 不相交的闭无界集。

引理 *4.2*。设 $\lambda \geq \kappa$ 为正则的，设 $\mathcal{U}$ 为 $P_\kappa(\lambda)$ 上的正规细超滤子，并设 $\langle M_n、j_{m、n} \mid m \leq n \leq \omega\rangle$ 为它的迭代超幂。假设 $\mathbb{Q}$ 是一种强迫，且 $H \in V$ 是 j_0、$\omega(\mathbb{Q})$ 上的一个 M_ω- 泛型滤子，使得 j_0、$\omega(\lambda)$ 在 $M_\omega[H]$ 中是正则的。那么存在 $n<\omega$，使得 $sup\left(Hull^{M_\omega[H]}(j_{n,\omega}[M_n]\cup\{H\}) \cap j_\omega(\lambda)\right) = sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$。

引理的证明。设

$$M = Hull^{M_\omega[H]}(j_{0,\omega}[V] \cup \{H\}),$$

并设 $\pi:\ M \to N$ 为传递塌缩，且

$$k = \pi^{-1},\ \text{and}\ i = \pi \circ j_{0,\omega} : V \to N.$$

记 $M = \pi[M_\omega \cap M]$ 和 $H = \pi(H)$。注意到 $N = M[H]$。事实上，每个 $x \in N$ 都是 $\pi(y)$，且对于某个 $f \in V$，$y = j_{0,\omega}(f)(H)$。因此 $x = \pi(y) = i(f)(H)$。注意到 $i(f) \in M$，因此 $x \in M[H]$。另一边的包含关系证明类似。我们还声称，N 对来自 V 的 κ-序列封闭。事实上，若 $(x_i \mid i<\kappa) \in N^\kappa \cap V$，取 y_i 使得 $\pi(y_i) = x_i$。令 $f_i \in V$满足 $j_\omega(f_i)(H) = y_i$。那么 $(j_\omega(f_i) \mid i<\kappa) = j_\omega((f_i \mid i<\kappa)) \restriction \kappa$ 属于 M。因此 $(y_i \mid i<\kappa) = (j_\omega(f_i)(H) \mid i<\kappa) \in M$。由此可得，$N$ 对来自 V 的 κ-序列封闭。

由于 $j_\omega(\lambda)$ 在 $M_\omega[H]$ 中是正则的，$M \models j_\omega(\lambda)$ 也因此是正则的。因此 $i(\lambda)$ 在 N 中是正则的。由此可知，$i(\lambda)$ 在 V 中必须具有不可数共尾数！由于 $j_\omega(\lambda)$ 在 V 中具有可数共尾数，$\nu := \sup k[i(\lambda)] < k(i(\lambda)) = j_\omega(\lambda)$。我们来论证

$$\nu = j_\omega(\lambda) \cap Hull^{M_\omega[H]}(k[N] \cup \nu).$$

显然，$\nu \leq j_\omega(\lambda) \cap Hull^{M_\omega[H]}(k[N]\cup\nu)$。此外，如果 $\rho \in Hull^{M_\omega[H]}(k[N]\cup\nu) \cap j_\omega(\lambda)$，那么存在 $f \in V$和 $\vec{\xi} \in [\nu]^{<\omega}$，使得 $j_\omega(f)(H,\vec{\xi}) = \rho$。不妨设 $\text{rng}(f) = \lambda$。考虑 $i(f) \in N$，并考虑满足 $\vec{\xi} \leq k(\bar{\rho})$ 的 $\bar{\rho} < i(\lambda)$。由于 $i(\lambda)$ 是正则的，$\mu = \sup_{\vec{\zeta}\in[\bar{\rho}]^{<\omega}} i(f)(\bar{H},\vec{\zeta}) < i(\lambda)$。于是 $\nu \geq k(\mu) = \sup_{\vec{\zeta}\in[k(\bar{\rho})]^{<\omega}} j_\omega(f)(H,\vec{\zeta}) \geq \rho$。令 $\xi_n = \sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$。则 $\{\xi_n \mid n<\omega\}$ 在 $j_\omega(\lambda)$ 中共尾，因此存在最小的 n 使得 $\nu \leq \xi_n$。每个 $\rho < \xi_n = \sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$ 都被某个满足 $\bar{\rho} < j_n(\lambda)$ 的 $j_{n,\omega}(\bar{\rho})$ 所有界。然而，存在 g，其 $\text{rng}(g) = \lambda$，使得 $j_n(g)(j_n^{-1}{}''\omega\xi_0, ..., \xi_{n-1}) = \bar{\rho}$ 且 $j_\omega(g)(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}) = j_{n,\omega}(\bar{\rho})$。因此 $j_{n,\omega}(\bar{\rho}) \in Hull^{M_\omega[H]}(j_{0,\omega}[V]\cup\nu) \cap j_\omega(\lambda) = \nu$，所以 $\rho < \nu$。

□

定理 *4.1* 的证明结束。令 $n < \omega$ 如引理 4.2 中所述。注意， $Hull^{M_\omega[H]}(j_{n,\omega}[M_n] \cup \{H\})$ 对来自 M_n 的 $j_n(\kappa)$-序列是闭的。事实上，假设 $\langle x_\alpha \mid \alpha < j_n(\kappa)\rangle \subseteq Hull^{M_\omega[H]}(j_{n,\omega}[M_n] \cup \{H\})$ 且 $\langle x_\alpha \mid \alpha < j_n(\kappa)\rangle \in M_n$。取满足 $j_{n,\omega}(y_\alpha)(H) = x_\alpha$ 的 $\langle y_\alpha \mid \alpha < j_n(\kappa)\rangle \in M_n$。由于 $j_{n,\omega}$ 的临界点是 $j_n(\kappa)$，我们得到

$$\langle j_{n,\omega}(y_\alpha) \mid \alpha < j_n(\kappa)\rangle = j_{n,\omega}(\langle y_\alpha \mid \alpha < j_n(\kappa)\rangle) \restriction j_n(\kappa) \in Hull^{M_\omega[H]}(j_{n,\omega}[M_n] \cup \{H\}),$$

以及

$$\langle x_\alpha \mid \alpha < j_n(\kappa)\rangle = \langle j_{n,\omega}(y_\alpha)(H) \mid \alpha < j_n(\kappa)\rangle \in Hull^{M_\omega[H]}(j_{n,\omega}[M_n] \cup \{H\}).$$

我们令 $C := j_\omega(\dot{C})_H \in Hull^{M_\omega[H]}(j_{n,\omega}[M_n] \cup \{H\})$ 为一个与 $j_\omega(S)$ 不相交的闭无界集。由于 $\sup\big(Hull^{M_\omega[H]}(j_{n,\omega}[M_n] \cup \{H\}) \cap j_\omega(\lambda)\big) = \sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$，我们得出 $C \cap \sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$ 是 $\sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$ 中的一个闭无界集。因此，$C \cap j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$ 是 $\sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda)$ 的一个 $< j_n(\kappa)$-闭无界子集。根据对 $< j_n(\kappa)$-序列的闭性，$C^* := j_n^{-1}{}''_\omega[C \cap j''_{n,\omega} j_n(\lambda)]$ 是 $j_n(\lambda)$ 的一个 $< j_n(\kappa)$-闭子集，并且与 $j_n(S)$ 不相交。这与 $j_n(S)$ 是 $(S^{j_n(\lambda)}{}_{<j_n(\kappa)})^{M_n}$ 的一个平稳子集相矛盾。□

接下来，我们希望强迫得到这样一种情形：κ 是超紧致基数，并且存在一种强迫可以产生定理 4.1 中的情形。正如我们先前所说，我们将考虑通过平稳集射入一个闭无界集的强迫：

定义 4.3. 设 λ 是正则基数，且 $S \subseteq \lambda$ 是平稳集。强迫 $Q(S)$ 由满足以下条件的条件 $a \subseteq S$ 组成：它们是闭的、在 λ 中有界，且 $\max(a)$ 存在。$Q(S)$ 上的序关系是末端延拓。

定义 4.4. 设 $\theta \leq \lambda$ 是正则基数。若对任意闭无界集 $C \subseteq \lambda$ 及每个 $\tau < \theta$，$S \cap C$ 都包含一个序型为 $\tau + 1$ 的闭集，则称平稳集 $S \subseteq \lambda$ 为 θ-胖的。若它是 λ-胖的，则称其为胖。

以下结果实质上已由 Abraham 和 Shelah [AS83] 证明。

命题 4.5. 设 $\theta \leq \lambda$ 是正则基数，并假设 λ 要么是不可达基数，要么是满足 $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ 的 $\lambda = \kappa^+$。若 $S \subseteq \lambda$ 是 θ-胖的，则通过 S 射入闭无界集的强迫是 θ-分配的。

证明。令 $\vec{D} = \langle D_i \mid i < \rho\rangle$ for $\rho < \theta$。我们令 $\langle M_i \mid i < \lambda\rangle$ 为一列递增且连续的初等模型，$\rho \cup \{\vec{D}, \theta, \rho, \lambda\} \subseteq M_0$，$M_{i+1}$ 包含来自 M_i 的 $< \kappa$-序列，并且 $M_i \cap \lambda \in \lambda$。根据关于 λ 的基数算术假设，这样的序列存在。令 C 为闭无界集 $\{M_i \cap \lambda \mid i < \lambda\}$，并取一个序型为 $\rho + 1$ 的闭集 $A \subseteq S \cap C$。然后我们可以递归地满足稠密集 D_i，并取一个条件 p_i，使得 $(\sup(p_i), \sup(p_{i+1})) \cap A \neq \emptyset$。最后，我们可以取 p_i 的并集，并加入上确界；可以保证它属于 A（因而也属于 S），从而形成 $Q(S)$ 中的一个合法条件。□

推论 4.6。假设 κ 的超紧致性在 科恩$(\kappa^+, 1)$ 下具有不可破坏性。令 $G \subseteq$ 科恩$(\kappa^+, 1)$ 为 V-泛型。则在 $V[G]$ 中

存在一个胖平稳集 $S \subseteq \kappa^+$，使得 $S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus S$ 是平稳的。特别地，Q（S）不可能是 Pr（$\mathcal{U}$）在 P_κ（κ^+）上的任何正规超滤子的投影。

证明。令 $A_G \subseteq \kappa^+$ 为泛型科恩(κ^+,1)集合。我们来证明$S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus A_G$ 是平稳集。令 $\dot{C}$ 为一个科恩(κ^+,1)-名称，表示一个闭无界集，并反设某个 p 强制 $(S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus A_G) \cap \dot{C} = \emptyset$。我们构造一个 ω-序列

$$p = p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots$$

使得 p_{n+1} 强制某个序数 $\xi_n \in (\sup(\mathrm{supp}(p_n)) \ \kappa^+) \cap \dot{C}$。于是令 $\xi^* = \sup_{n<\omega} \xi_n$ 和 $p' = \bigcup_{n<\omega} p_n$，再令 $p^* = p' \cup \{(\xi^*,0)\}$。于是$cf(\xi^*) = \omega$ 且 $p^* \Vdash \xi^* \in S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus A_{\dot{G}}$。此外 $p^* \Vdash \xi^* \in \dot{C}$，并且 $p^* \Vdash \xi^* \in (S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus A_{\dot{G}}) \cap \dot{C}$。另一方面 $p^* \leq p$，矛盾。

最后，我们注意到 A_G 是 κ^+-胖的。这是一个众所周知的事实，为求完整起见，我们在此给出其简短证明。事实上，若 C 是一个由条件 p 强迫为闭无界集的 Cohen(κ^+，1)-名称，且 $\tau < \kappa^+$，我们就进行稠密性论证。令 $p' \leq p$，并构造一个条件的递减序列 $(p_i \mid i \leq \omega \cdot \tau)$，使得：

(1) 对每个 $i < \omega \cdot \tau$，存在某个序数 $\xi_i \in (\sup(\mathrm{supp}(p_i)) \ \kappa^+)$使得 $p_{i+1} \Vdash \xi_i \in C$。(2) 对于极限序数 $i \leq \omega \cdot \tau$，$p_i = (\bigcup_{j<i} p_j) \cup \{(\sup_{j<i} \xi_j, 1)\}$。

利用 Cohen(κ^+，1) 的 κ^+-闭性，可以很容易地递归构造出这样的序列。因此 $p_{\omega\cdot\tau} \Vdash \{\sup_{j<\omega\cdot i} \xi_j \mid i \leq \tau\} \subseteq \dot{C} \cap A_{\dot{G}}$。□

在 [Kru03], Krueger 将既是胖的又是 $cf(<\kappa) \setminus S$平稳的集合 $S \subseteq \kappa^+$ 称为非平凡胖平稳集。Krueger 证明，在 L（或者当 $\square_\kappa$成立时），存在 κ^+的非平凡胖平稳子集。另一方面，他证明，如果每个平稳子集 $S \subseteq S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ 都相对于 $S^{\kappa^+}_{\kappa}$ 在一个闭无界集上反射，那么 κ^+就不存在非平凡胖平稳子集。假设弱紧基数存在，Magidor [Mag82] 构造了一个模型，其中这种类型的平稳反射在正则基数 κ的后继基数 κ^+ 处成立。这个模型是通过使用通常的 L´evy 塌缩 $Col(\kappa, <\lambda)$ 将一个弱紧$\lambda > \kappa$ 塌缩得到的，随后进行长度为 κ^{++} 的 $<\kappa$-支撑迭代，将 κ^+的胖平稳子集上的 κ-闭无界集射入。这个强迫显然是 $<\kappa$-有向闭的。Magidor 证明的关键点是，κ^+ 在该迭代下得以保持。因此，如果我们从一个具有弱紧基数 $\lambda > \kappa$的 Laver 不可破坏的超紧致基数 κ [Lav78]出发，就得到以下推论：

推论 4.7。假设存在一个超紧基数 κ 和一个弱紧基数 $\lambda > \kappa$。则一致地，κ 是超紧致的，并且 κ^+ 的每个胖平稳子集都是平凡的。

仍有可能存在一个大小为 κ^+ 的 κ^+-分配强迫，它不是形如 $Q(S)$ 的强迫，且不能是 $Pr(\mathcal{U})$ 的投影，因此有如下问题：

问题 4.8。是否一致：每个大小为 κ^+的 κ^+-分配强迫都是超紧 Prikry 强迫的一个投影?

放宽 κ^+-分配性后，我们接下来的目标是证明，在 ZFC 中，我们总能找到一个大小为 κ^+ 的 κ-分配强迫，它不是任何正规超滤子 $\mathcal{U}$对应的 $Pr(\mathcal{U})$ 的投影。再一次，我们将寻找合适的平稳集。这次我们将使用 κ-胖平稳集，而不是完全胖平稳集。对于这类集合，Krueger 有如下结果 [Kru03，定理 2]:

定理 4.9 (Krueger)。设 $\mu = \kappa^+$，其中 κ 是正则不可数基数，且 $A \subseteq \mu$ 是一个 κ-胖平稳集。那么，每个平稳子集 $B \subseteq A$ 都包含一个平稳集 B_0，使得 $A \setminus B_0$ 是 κ-胖的。

特别地，如果 κ 是超紧致的，那么取 $A = S^{\kappa^+}_{<\kappa}$，存在一个平稳子集 $S^* \subseteq S^{\kappa^+}_{<\kappa}$，使得 $S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus S^*$ 是 κ-胖的。于是，根据命题 4.5，强迫 $Q(S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus S^*)$（它通过 $S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus S^*$ 射出一个闭无界集）是 κ-分配的。注意，由于该强迫会破坏 $S^{\kappa^+}_{\kappa}$ 的平稳性（或者仅仅因为它向 κ^+添加了一个序型为 κ的闭无界集），它会压塌 κ^+。

注记 4.10. 注意，由于该强迫是 κ-分配的，由上述强迫添加的泛滤子对来自基模型的 $<\kappa$-序列封闭。

定理 4.11. 设 $\mathcal{U}$ 是 $P_\kappa(\kappa^+)$上的正规超滤子，并设 $S \subseteq \kappa^+$是 κ^+ 的一个 κ-胖平稳子集，且 $S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus S$ 也是平稳的。那么，不存在从 $Pr(\mathcal{U})$ 到 $Q(S)$的投影。

证明。由 S 的 κ-胖性，命题 4.5 推出 $Q(S)$ 是 κ-分配的。因此，根据定理 2.20，要排除投影，只需证明对每个 $n < \omega$，都有 $\bigcap j''_{\mathcal{U}^n}\mathcal{D}(Q(S)) = \emptyset$。反设不然，即 $\bigcap j''_{\mathcal{U}^n}\mathcal{D} \neq \emptyset$。现在，我们先针对任意初等嵌入 $j : V \to M$，证明一系列命题，其中其临界点为 κ，且 M 对 κ-序列封闭，并满足 $\bigcap j''\mathcal{D}(Q(S)) \neq \emptyset$。

$$\text{Suppose that } q = q(j) \in \bigcap j''\mathcal{D}(Q(S)) \text{ has minimal } \max(q).$$

那么，对每个 $\eta < \max(q)$，都存在一个稠密开集 $D \subseteq Q(S)$，使得$q \cap \eta \notin j(D)$。对于下一个命题，S 是 κ-胖的这一点至关重要：

命题 4.12. 对于每个 $\eta < \max(q)$，$q \setminus \eta \in \bigcap j''\mathcal{D}(Q(S))$。

证明。否则，存在 D_1, η_1 使得 $q \setminus \eta_1 \notin j(D_1)$。由极小性可知，存在 D_2 使得 $q \cap (\eta_1 + 1) \notin j(D_2)$。定义 D^* 为所有满足以下条件的 p 组成的集合：对于某个 $\eta < \max(p)$:

(I) $p \cap (\eta + 1) \in D_2$.

(II) 对每个 $\alpha \leq \eta$, $p \setminus \alpha \in D_1$。
显然这是开集。为说明它是稠密的，设 p 是任意条件。将 p 延拓至某个 $p_1 \in D_2$。我们固定一个序列 $(M_\alpha \mid \alpha < \kappa^+)$，并取 θ 足够大，使得：

(1) 对每个 $\alpha < \kappa^+$，$M_\alpha \prec H(\theta)$。(2) $|M_\alpha| = \kappa$。
(3) 序列 M_α 是递增且连续的。(4)
$\{p_1, S, D_1\} \cup \kappa + 1 \cup \sup(p_1) \subseteq M_0$。(5) γ_α :
$= M_\alpha \cap \kappa^+ \in \kappa^+$。(6) $M_\alpha \in M_{\alpha+1}$ 且
$M_\alpha^{<\kappa} \subseteq M_{\alpha+1}$

设 $C = \{\gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}$。设 $\mathrm{otp}(p_1) = \rho < \kappa$。由 S 的丰满性，$S \cap C$ 包含一个序型为 $\rho+1$ 的闭集 A。按递增顺序枚举 $A = \{\gamma_{\alpha_i} \mid i \leq \rho\}$，并且 $p_1 = \{\delta_i \mid i \leq \rho\}$。现在我们递归地定义一个关于 $i \leq \rho$ 的递减序列 r_i，使得：

(a) $r_i \in M_{\alpha_{i+1}}$。(b) $\max(r_i)$
$\in [\gamma_{\alpha_i}, \gamma_{\alpha_{i+1}})$。(c) $r_{i+1} \setminus ($
$\delta_i + 1) \in D_1$。

设 $p_1 \geq r_0 \in D_1 \cap M_{\alpha_1}$，其中 $\max(r_0) \geq \gamma_{\alpha_0}$。这样的 r_0 存在，因为 $M_{\alpha_1} \models$ “D_1 是稠密的”，所以 p_1 有一个扩展 $r_0' \in D_1 \cap M_{\alpha_1}$，并且还有 $M_{\alpha_1} \models S \setminus \gamma_{\alpha_0} \neq \emptyset$；因此，如有必要，我们可以从 $S \cap M_{\alpha_1}$ 中添加一个点到 r_0'，从而构造出满足 $\max(r_0) \in [\gamma_{\alpha_0}, \gamma_{\alpha_1})$ 的 $r_0 \in M_{\alpha_1} \cap D_1$。

在后继步骤中，假设 $r_i \in M_{\alpha_i+1}$ 已定义。令 $r'_{i+1} \leq r_i$ 为 $M_{\alpha_{i+2}}$ 中满足 $\max(r'_{i+1}) \geq \gamma_{\alpha_{i+1}}$ 的一个元素。然后，令 $r''_{i+1} \leq r'_{i+1} \setminus (\delta_i + 1)$ 属于 $M_{\alpha_{i+2}} \cap D_1$，并令

$$r_{i+1} = r''_{i+1} \cup (p_1 \cap (\delta_i + 1)) \in M_{\alpha_{i+2}}.$$

注意，由于 $r_i \leq p_1$，且由于 $r''_{i+1} \leq r_i \setminus (\delta_i + 1)$，我们有 $r_{i+1} \leq r_i$。显然，r_{i+1} 满足 (a)，(b)，(c)。

在极限步骤 μ，我们构造了一个递减序列 $r_i \in M_{\alpha_{i+1}} \subseteq M_{\alpha_\mu}$。由条件 (6)，序列 $\{r_i \mid i < \mu\} \in M_{\alpha_{\mu+1}}$，因此，$\bigcup_{i<\mu} r_i \in M_{\alpha_{\mu+1}}$。由条件 (b)，我们有

$$\sup(\bigcup_{i<\mu} r_i) = \gamma_{\alpha_\mu} \in A \cap M_{\alpha_\mu} \subseteq S \cap M_{\alpha_{\mu+1}},$$

因此我们可以构造条件 $r'_\mu = \bigcup_{i<\mu} r_i \cup \{\gamma_{\alpha_\mu}\}$。与后继步骤中一样，我们将 $r'_\mu \setminus (\delta_\mu + 1)$ 延伸为条件 $r''_\mu \in D_1 \cap M_{\alpha_{\mu+1}}$，并令$r_\mu = r''_\mu \cup (p_1 \cap ($ $\delta_\mu + 1))$。至此，r_i 的序列的定义完成。

令 $p_2 := r_\rho$。那么 $p_2 \leq p_1 \leq p$，我们声称 $p_2 \in D^*$，其见证为 $\eta = \max(p_1)$。对于每个 $\alpha \leq \max(p_1)$，都存在 $i < \rho$，使得 $p_1 \setminus \alpha = p_1 \setminus (\delta_i + 1)$。因此，条件 $p_2 \setminus \alpha$ 比 $r_{i+1} \setminus \alpha = r_{i+1} \setminus (\delta_i + 1) \in D_1$更强（根据条件 (c)）。于是也有 $p_2 \setminus \alpha \in D_1$。

到目前为止，我们已经证明 D^* 是稠密开集，因此 $q \in j(D^*)$。令$\eta < \max(q)$ 为此作证。若 $\eta \leq \eta_1$，则由于 $q \cap (\eta_1 + 1) \notin j(D_2)$，且 D_2

是开集，$q \cap (\eta+1) \notin j(D_2)$，这与 (I) 矛盾。若 $\eta > \eta_1$，则根据条件 (II)，$q \setminus \eta_1 \in j(D_1)$，这与 D_1 的选取矛盾。□

推论 4.13。 q 在 $\max(q)$ 中无界。特别地，$q \cap \max(q)$ 是 $j(S) \cap \max(q)$中的一个闭无界集。

证明。令 D_2 为表示至少有三个元素的稠密开集。由于 $q \in j(D_2)$，若 $q \cap \max(q)$ 有界，则它将有一个最大元 $\beta < \max(q)$。于是 $q \setminus \beta$ 恰好有两个元素，但 $q \setminus \beta \in j(D_2)$，矛盾。□

对于下一个命题，我们只需 S 在 κ^+ 中无界，且 $S^{\kappa^+}_{<\kappa} \setminus S$ 在 κ^+ 中是平稳集：

命题 4.14。 $\max(q) > \sup j''\kappa^+$。此外，只要 $i : V \to N$和 $k : N \to M$ 是初等嵌入，且 k 在 N、$j = k \circ i$、$q \in N$ 中可定义，并且 $\mathrm{crit}(k) \geq i(\kappa)$，我们就可以得出 $\max(q) \neq \sup k''i(\kappa^+)$。

证明。对于第一部分，对每个 $\alpha < \kappa^+$，令 D_α 为表示在 α 之上存在元素的稠密开集。由于 S 无界，这个集合是稠密的。由于$q \in j(D_\alpha)$，$\max(q) > j(\alpha)$，并且 $\max(q) \geq \sup j''\kappa^+$。严格不等式由第二部分取 $i = id$ 和 $j = k$ 得出。否则，我们注意到 $k''i(\kappa^+)$ 是 $\sup k''i(\kappa^+) = \max(q)$ 中的一个 $<i(\kappa)$-闭无界集，$\max(q)$ 也如此。令 $C^* = k^{-1}[k''i(\kappa^+) \cap q]$。那么：

(1) $C^* \in N$（因为 k 在 N 中是可定义的）。(2) $C^* \subseteq i(S)$。(3) C^* 是一个 $<i(\kappa)$-闭无界集。

这是 N 中的矛盾，因为由 i 的初等性，$S^{i(\kappa^+)}_{<i(\kappa)} \setminus i(S)$ 在 N 中的 $i(\kappa^+)$ 里是平稳集。□

从现在起，我们假设 $j = j_n = j_{\mathcal{U}^n}$。由 $\mathcal{U}$ 的正规性可知，

$$[id]_{\mathcal{U}^n} = (j''_n\kappa^+, j''_{1,n}j_1(\kappa^+), ..., j''_{n-1,n}j_{n-1}(\kappa^+)).$$

此外，

$$j''_n\kappa^+ \prec j''_{1,n}j_1(\kappa^+) \prec ... \prec j''_{n-1,n}j_{n-1}(\kappa^+).$$

由命题 4.14，对每个 $0 \leq i \leq n-1$，都有 $\max(q) \neq \sup j''_{i,n}j_i(\kappa^+)$。令 $i^* < n$ 满足 $\max(q) \in (\sup j''_{i^*,n}j_{i^*}(\kappa^+), \sup j''_{i^*+1,n}j_{i^*+1}(\kappa^+))$。记 $\delta^* = \sup j''_{i^*,n}j_{i^*}(\kappa^+)$。由于 $\delta^* < \max(q)$，由命题 4.12 可得：

推论 4.15. $q^*(j) := q \setminus (\delta^*+1) \in \bigcap j''D(Q(S))$。

下面我们来说明，还可以在 $q^*(j)$ 下作进一步修改：

命题 4.16. 设 S 是 $<\kappa$-*fat*。对于每个 $p \in Q(S)$，$j(p) \cup q^*(j) \in \bigcap j''D(Q(S))$。

证明。证明本质上是齐次性，但我们还是补充一些细节。固定D_1、 p_1，并证明 $j(p_1) \cup q^*(j) \in j(D_1)$。定义 D^* 为所有满足 $p_1 \cup (p \setminus (\max(p_1)+1)) \in D_1$ 的 p 所构成的集合。假设我们将 $p \in D^*$ 扩展为某个 p'，那么 $p_1 \cup (p \setminus (\max(p_1)+1)) \sqsubseteq p_1 \cup (p' \setminus (\max(p_1)+1))$，因此 $p' \in D^*$，故 D^* 是开集。为了说明 D^* 稠密，任取一个 p，将它扩展为 p'，使得 $\max(p') > \max(p_1)+1$。找到一个 $q \in D_1$，使得 $q \sqsupseteq (p' \setminus (\max(p_1)+1)) \cup p_1$。令 $p'' = q \cup (p' \cap (\max(p_1)+1))$。于是 $p'' \leq p' \leq p$，并且 $(p'' \setminus (\max(p_1)+1)) \cup p_1 = q \in D_1$。

因此 D^* 是稠密开集，并由 (4.15) 可得 $q^* (j) \in j(D^*)$。这意味着 $j(p_1) \cup (q^* (j) \setminus (\max(j(p_1))+1)) \in j(D_1)$。但 $\max(j(p_1)) + 1 < \delta^*$。因此 $j(p_1) \cup q^* (j) \in j(D_1)$。□

令 $f\colon [P_\kappa(\kappa^+)]^n \to Q(S)$ 表示 q^* 在 $M_{\mathcal{U}^n}$ 中，即 $j_n(f)([id]_{\mathcal{U}^n}) = q^*$。

推论 4.17。对于每个稠密开集 $D \subseteq Q(S)$，

$$E_D := \{\vec{x} \in [P_\kappa(\kappa^+)]^n \mid \forall \vec{y} \prec \vec{x}_0,\ \bigcup_{k \leq \frac{|\vec{y}|}{n}} f(\vec{y} \restriction [kn,(k+1)n)) \cup f(\vec{x}) \in D\} \in \mathcal{U}^n.$$

证明。我们来证明 $[id]_{\mathcal{U}^n} \in j_n(E_D)$。任取 $\vec{y} = (y_1, \ldots\ldots, y_m) \prec j_n'' \kappa^+ = ([id]_{\mathcal{U}^n})_0$。于是对于每个 $1 \leq i \leq m$，存在 z_i 使得 $j_n(z_i) = j_n'' z_i = y_i$，且 $j_n(\vec{z}) = \vec{y}$。这意味着对于每个 $k \leq \frac{|\vec{y}|}{n}$，
$j_n(f)(\vec{y} \restriction [kn,(k+1)n)) = j_n(f)(j_n(\vec{z}) \restriction [kn,(k+1)n)) = j_n(f(\vec{z} \restriction [kn,(k+1)n)))$,
和

$$\bigcup_{k \leq \frac{|\vec{y}|}{n}} j_n(f)(\vec{y} \restriction [kn,(k+1)n)) = j_n(\bigcup_{k \leq \frac{|\vec{y}|}{n}} f(\vec{z} \restriction [kn,(k+1)n))).$$

注意到 $p := \bigcup_{k \leq \frac{|\vec{y}|}{n}} f(\vec{z} \restriction [kn,(k+1)n))$ 是 S 的闭子集，因此 $p \in Q(S)$。根据上述计算和前一个引理，

$$\bigcup_{k \leq \frac{|\vec{y}|}{n}} j_n(f)(\vec{y} \restriction [kn,(k+1)n)) \cup j_n(f)([id]_{\mathcal{U}^n}) = j_n(p) \cup q^* \in j_n(D),$$

按定义，这意味着 $[id]_{\mathcal{U}^n} \in j_n(E_D)$。 □

命题 4.18。存在一个递增函数 $g : \kappa^+ \to \kappa^+$，使得$j_n(g)(\delta^*) \geq \max(q^*)$。

证明。由于 $\max(q^*) < \sup(j''_{i^*+1,n} j_{i^*+1}(\kappa^+))$，存在 $\gamma < j_{i^*+1}(\kappa^+)$，使得 $\max(q^*) \leq j_{i^*+1,n}(\gamma)$。在 M_{i^*+1} 中进行论证。于是存在 $g'\colon [P_\kappa(\kappa^+)]^{i^*+1} \to \kappa^+$，使得 $\gamma = j_{i^*+1}(g')([id]_{\mathcal{U}^{i^*+1}})$；并回忆一下，$[id]_{\mathcal{U}^{i^*+1}}$ 是 $\prec$-递增的，且有一个顶元素 $j''_{i^*,i^*+1} j_{i^*}(\kappa^+)$。对每个 $\alpha < \kappa^+$，令 $g(\alpha) = \sup\{g'(\vec{y}) \mid \vec{y} \in [P_\kappa(\alpha+1)]^{i^*+1}\}$。由于 $\alpha^{<\kappa} < \kappa^+$, $g(\alpha) < \kappa^+$。回到 M_{i^*+1} 中，我们有

$$j_{i^*+1}(g)(\sup(j''_{i^*,i^*+1} j_{i^*}(\kappa^+))) \geq j_{i^*+1}(g')([id]_{\mathcal{U}^{i^*+1}}) = \gamma.$$

将 $j_{i^*+1,n}$ 应用于这个不等式，得到 $j_n(g)(j_{i^*+1,n}(\sup j''_{i^*,i^*+1} j_{i^*}(\kappa^+))) \geq j_{i^*+1,n}(\gamma) \geq \max(q^*)$。最后，我们注意到 $j_{i^*+1,n}(\sup j''_{i^*,i^*+1} j_{i^*}(\kappa^+)) = \delta^*$:

事实上，在 M_{i^*+1} 中，序数 $\sup j''_{i^*,i^*+1} j_{i^*}(\kappa^+)$ 的共尾数为 $j_{i^*}(\kappa^+) < j_{i^*+1}(\kappa) = \mathrm{crit}(j_{i^*+1,n})$。因此

$$j_{i^*+1,n}(\sup j''_{i^*,i^*+1} j_{i^*}(\kappa^+)) = \sup(j_{i^*+1,n}[j_{i^*,i^*+1}[j_{i^*}(\kappa^+)]]) = \sup j_{i^*,n}[j_{i^*}(\kappa^+)] = \delta^*.$$

□

断言 4.19。 $E = \{\vec{x} \in [P_\kappa(\kappa^+)]^n \mid \forall y \prec x_0, \quad g(\sup\ y) < \sup\ x_0\} \in \mathcal{U}^n.$

证明。确实，若 $y \prec j''_n\kappa^+$，则存在 z 使得 $j_n(z) = y$ 并且

$$j_n(g)(\sup y) = j_n(g(\sup z)) < \sup(j''_n\kappa^+).$$

□

在测度一集之下进行强迫后，任意 $\mathcal{U}$ 的 Prikry 泛型都会导出 $\mathcal{U}^n$ 的 Prikry 泛型，即 $(\vec{x}(m))_{m<\omega}$，其中 $\vec{x}(m) = (\vec{x}(m)_0, \ldots\ldots, \vec{x}(m)_{n-1})$。该测度一集的作用是确保对每个 $m < \omega$，以下不等式均成立：

$$\sup(\vec{x}(m)_{i^*}) <_{(1)} \min(f(\vec{x}(m))) \leq \max(f(\vec{x}(m))) \leq_{(2)} g(\sup(\vec{x}(m)_{i^*})) <_{(3)} \sup(\vec{x}(m+1)_0).$$

(1) 由 $\min(q^*) > \delta^*$ 可得。(2) 由 $j_n(g)(\delta^*) \geq \max(q^*)$ 可得。(3) 由前面的断言可得。

令 $q_m = f(\vec{x}(m))$。上述结果特别表明，q_m's 构成块。令 $C := \bigcup_{m<\omega} q_m$。

命题 4.20。 C 是 V-泛型于 $Q(S)$。

证明。令 D 为稠密开集。根据推论 4.17，存在 m使得$\vec{x}(m) \in E_D$。这意味着，对于每个 $\vec{y} \prec \vec{x}(m)_0$，$\bigcup_{k\leq|\vec{y}|/n} f(\vec{y} \restriction [kn, (k+1)n)) \cup f(\vec{x}(m)) \in D$。特别地，由于 $\vec{x}(0)^\frown\vec{x}(1)^\frown\ldots^\frown\vec{x}(m-1) \prec \vec{x}(m)$，我们得到 $C \cap (\max(q_m) + 1) = \bigcup_{i\leq m} q_i = \bigcup_{i\leq m} f(\vec{x}(i)) \in D$。因此，$C \cap (\max(q_m) + 1) \in D \cap G(C)$。□

定理 *4.11* 的证明结束。为导出矛盾，我们将证明 κ^+ 在 $V[C]$ 中的共尾数是 ω（这与强迫的 κ-分配性矛盾）。令 $\gamma_0 = \sup(\vec{x}(0)_{i^*})$。于是 $\delta_0 = g(\gamma_0)$，并令 $\gamma_1 = \min(C \setminus \delta_0 + 1)$，令 $\delta_1 = g(\gamma_1)$。一般而言，若 δ_m 已定义，我们令 $\gamma_{m+1} = \min(C \setminus \delta_m + 1)$，并令 $\delta_{m+1} = g(\gamma_{m+1})$。我们断言，$\gamma_m$（它显然在 $V[C]$ 中有定义）在 κ^+ 中无界：

只需证明对每个 m，$\gamma_m \geq \sup(\vec{x}(m)_{i^*})$。由归纳法可得。对于 $m = 0$，根据定义，$\gamma_0 = \sup(\vec{x}(0)_{i^*})$。假设这对 m 成立。那么$\gamma_m \geq \sup(\vec{x}(m)_{i^*})$。于是 $g(\gamma_m) = \delta_m \geq g(\sup(\vec{x}(m)_{i^*})) \geq \max(f(\vec{x}(m))) = \max(q_m)$（由单调性及 g 的选取）。最后，

$$\gamma_{m+1} = \min(C\setminus\delta_m+1) \geq \min(C\setminus\max(q_m)+1) = \min(q_{m+1}) \geq \sup(\vec{x}(m+1)_{i^*}),$$

如所需。 □

问题 4.21。 κ^+-超紧致 Prikry 强迫的每个投影是否都保持 $S^{\kappa^+}_{<\kappa}$ 的平稳子集，其中 $cf((\kappa^+)^V) \geq \kappa$？

5. Successors of singulars

到目前为止，我们的结果主要围绕不是共尾数低于 κ的奇异基数的后继的正则基数展开。在本节中，我们将看到，对于这类基数，情况会发生变化。首先，让我们回顾一些基本的布尔代数术语。给定一个完备布尔代数 $\mathbb{B}$， U上的超滤子是 $\mathbb{B}$ 的一个子集，满足 $0_{\mathbb{B}} \notin U$ 和 $1_{\mathbb{B}} \in U$，它是 $\leq_{\mathbb{B}}$-向上闭的；对于每个有限的 $\{b_0, ..., b_{n-1}\} \subseteq U$、 $b_0 \wedge ... \wedge b_{n-1} \in U$，以及对于每个 $b \in \mathbb{B}$， b 或其补集属于 U。

定义 5.1. 如果完备布尔代数$\mathbb{B}$ 上的超滤子 U 满足：对于每个极大反链 $\{a_i \mid i < \gamma\} \subseteq \mathbb{B}$，都存在 $\delta < \gamma$ 使得 $\bigvee_{i<\delta} a_i \in U$，则称其为 γ-不可分解的。

引理 5.2. 假设 λ 是一个极限基数， $\mathbb{B}$ 是一个 λ^+-分配的完备布尔代数，并且 U 是 $\mathbb{B}$ 上的超滤子，对所有 $\gamma \geq \lambda$而言均为 γ-不可分解的。那么存在一个极大反链 $A \subseteq \mathbb{B}$，使得对于 A的任意细化 B，都存在某个 $u \in U$ 使得 $B \mid u = A \mid u$。

证明。反设不然。我们构造一个序列 $\langle A_\alpha : \alpha \leq \lambda \rangle$ 个 $\mathbb{B}$ 的极大反链，选择 $A_{\alpha+1}$ 使得不存在满足 $A_{\alpha+1} \mid u = A_\alpha \mid u$ 的 $u \in U$；在极限阶段，利用 λ^+-分配性取最小公共细化。

由不可分解性，取 $u \in U$ 使得 $|A_\lambda \mid u| < \lambda$。令 $\gamma = |A_\lambda \mid u|$，并注意到对所有 α，都有 $|A_\alpha \mid u| \leq \gamma$。

若 $a \in A_{\gamma^+} \mid u$ 且 $\alpha < \gamma^+$，用 a_α 表示满足 $a \leq \bar{a}$ 的唯一 $\bar{a} \in A_\alpha \mid u$。对于不同的 a， $b \in A_{\gamma^+} \mid u$，令 $\alpha_{a,\, b} < \gamma^+$ 为满足 $a_\alpha \neq b_\alpha$ 的最小 α。注意，$\alpha_{a,\, b}$ 存在，因为 $A_{\gamma^+} \mid u$ 是 $\langle A_\alpha \mid u$ 的最小公共细化：$\alpha < \gamma^+\rangle$。令 $\beta < \gamma^+$ 为序数 $\alpha_{a,\, b}$ 这个大小为 γ 的集合的上界。于是 $A_\beta \mid u = A_{\gamma^+} \mid u$，矛盾。□

引理 5.3。 假设 λ是 λ-强紧致基数的奇异极限序数。若 $\mathbb{B}$ 是一个 λ^+-分配、λ^{++}-链条件、无原子的完备布尔代数，并且它强迫出现 λ^+的一个新子集，则 $\mathbb{B}$上不存在$\mathrm{cf}(\lambda)^+$-完备的 λ^+-不可分解超滤子。

证明。 假设U是一个反例。布尔超幂构造给出一个初等嵌入 j_U： $V \to M_U$ 以及一个 M_U-泛型滤子$G_U \subseteq j_U(\mathbb{B})$。

应用引理 5.2，取一个反链 $A \subseteq \mathbb{B}$，使得对 A的任意细化B，都存在某个 $u \in U$ 使得 $B \mid u = A \mid u$。将范围限制在一个测度一集上后，不妨假设 $|A| < \lambda$。取一个 λ-强紧致基数 $\eta < \lambda$，使得$\max\{|A|, \mathrm{cf}(\lambda)\} < \eta$。令 W为 U到 $P(A)$上的投影，则 W 是 A上的超滤子。

令 $k\colon M_W \to M_U$为因子嵌入，其定义为 $k([f]_W) = j_U(f)(a)$，其中 a是 $j_U(A) \cap G_U$中的唯一元素。我们断言 k是满射的。 M_U中的每个元素都具有 $j_U(f)(b)$的形式，其中 $B \subseteq \mathbb{B}$是细化 A的极大反链， $f\colon B \to V$，而 b 是

$_{\sim}j_U(B) \cap G_U$。固定 $u \in U$ 使得 $B \mid u = A \mid u$，并令 $f\colon A \to V$为由 $f(x) = f(x')$定义的$\tilde{}$，其中 $x' \in B$是满足 $x' \wedge u = x \wedge u$的唯一元素。$\tilde{}$ $\tilde{}$于是 $k([f]_W) = j_U(f)(a) = j_U(f)(b)$，如所要求。

因此 $M_U = M_W$。根据 Sakai 定理 [Sak15 的一个轻微推广，推论 3.3] 借助局部逼近判据 [Gol22，定理 7.3.23]，M_W 对 λ^+ 的子集在 V 中具有 η-逼近性质。取 $x \in M_W[G_U] \setminus M_W$，使得 $x \subseteq j_W(\lambda^+) = \lambda^+$。由分配性，$x$ 可由 M_W η-逼近。局部逼近性质给出 $x \in M_W$，这与之矛盾。□

定理 5.4。假设 λ 是 λ-强紧致基数的奇异极限，且 $\mathcal{U}$ 是 $P_\kappa(\lambda^+)$ 上的正规细 κ-完备超滤子，其中 $\kappa > \mathrm{cf}(\lambda)$。那么，使用 $\mathcal{U}$ 的 ***Prikry*** 强迫无法投影到任何 λ^+-分配的无原子强迫。特别地，它无法投影到 科恩$(\lambda^+,1)$。

证明。反设 $\mathbb{B}$ 是超紧 Prikry forcing 的一个无原子 λ^+-分配投影。由于超紧 Prikry forcing 是 λ^+-中心的，$\mathbb{B}$也如此。因此，$\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ 是 λ^{++}-链条件的；由[、Usu26、注 1.3(2) 和引理 1.5]可知，$\mathbb{B}$ 具有 λ^{++}-逼近性质。由于 $\mathbb{B}$ 是无原子的，用 $\mathbb{B}$ 强迫会添加一个新集合，因此由λ^{++}-逼近性质，它会添加 λ^+的一个新子集。

令 $j_{0,\omega}\colon V \to M_\omega$ 为 $\mathcal{U}$的第 ω次迭代。那么由定理 2.19，存在一个 M_ω-泛型超滤子 $G \subseteq j_{0,\omega}(\mathbb{B})$，使得 $M_\omega[G] \subseteq \bigcap_{n<\omega} M_n$。由引理 4.2，存在 $n < \omega$ 使得

$$\sup\left(j_{0,\omega}(\lambda^+) \cap \mathrm{Hull}^{M_\omega[G]}(j_{n,\omega}[M_n] \cup \{G\})\right) = \sup j''_{n,\omega} j_n(\lambda^+).$$

令 $U = j_n$、$_\omega[G]$。由于 $G \in \bigcap_{m<\omega} M_m$，我们有 $U \in M_n$。于是 U 是 $j_n(\kappa)$-完备超滤子，定义在 $\mathbb{B}^* = j_0$、$_n(\mathbb{B})$ 上。在 M_n 中应用引理 5.3，我们将通过验证 U 在 M_n 中是 j_0、$_n(\lambda^+)$-不可分解的来导出矛盾。为此，假设 $\langle a_\xi : \xi < j_0$、$_n(\lambda^+)\rangle \in M_n$ 枚举了 $\mathbb{B}^*$ 的一个极大反链。我们将证明存在某个 $\beta < j_0$、$_n(\lambda^+)$ 使得 $\bigvee_{\xi<\beta} a_\xi \in U$。令 $\langle a^*_\xi : \xi < j_0$、$_\omega(\lambda^+)\rangle = j_n$、$_\omega(\langle a_\xi : \xi < j_0$、$_n(\lambda^+)\rangle)$。那么，唯一的$\zeta < j_0$、$_\omega(\lambda^+)$ 使得 $a^*_\zeta \in G$ 属于 $\mathrm{Hull}^{M_\omega[G]}($ j_n、$_\omega[M_n] \cup \{G\})$。由此可知 $\zeta < \sup j''_n$、$_\omega j_0$、$_n(\lambda^+)$。因此固定 $\beta < j_0$、$_n(\lambda^+)$ 使得$\zeta < j_n$、$_\omega(\beta)$。于是我们有 $\bigvee_{\xi<\beta} a_\xi \in U$，因为 j_n、$_\omega(\bigvee_{\xi<\beta} a_\xi) \in G$。□

致谢。本文的研究成果并未以任何方式使用生成式人工智能。ChatGPT 找到了 Krueger 论文的参考文献[Kru03]。GPT-6.2 Sol 用于查找并更正拼写错误。第一作者谨此感谢 Moti Gitik 和 Menachem Magidor 在特拉维夫大学集合论研讨会介绍本研究期间提出的宝贵意见和建议。

References

[AS83] Uri Abraham 和 Saharon Shelah。强迫闭无界集。*The Journal of Symbolic Logic* 48 4 643 657, 1983 , （）：–。

[BG21a] Tom Benhamou 和 Moti Gitik。Magidor-Radin 强迫的中间模型——第一部分。 *Isr. J. of Mat.*，2021 年。[BG21b] Tom Benhamou 和 Moti Gitik。Prikry 和 Magidor 泛型扩张中的集合。*Annals of Pure and Applied Logic*，172(4):102926，2021 年。[BG22] Tom Benhamou 和 Moti Gitik。Magidor-Radin 强迫的中间模型——第二部分。 *Ann. Pure App. Log.*，173:103107，2022 年。[BG24] Tom Benhamou 和 Moti Gitik。关于科恩强迫概念和普里克里强迫概念。*Journal of Symbolic Logic* 89 2 858 904, 2024 *The* ，（）：–。[BGH24] Tom Benhamou、Moti Gitik 和 Yair Hayut。树普里克里强迫的投影多样性。 *Journal of Mathematical Logic*，24(03):2450006，2024 年。[BTW26] Tom Benhamou、Sebastiano Thei 和 Ben-Zion Weltsch。关于强紧致普里克里强迫的中间模型，2026年。[Dob03] Natasha Dobrinen。布尔代数中的博弈与一般分配律。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，131(1):309–318，2003 年。[Git10] Moti Gitik。 *Prikry Type Forcings*，第 1351–1447 页。Springer Netherlands，Dordrecht，（2010 年）。[GKK10] Moti Gitik、Vladimir Kanovei 和 Peter Koepke。普里克里泛型扩张的中间模型。 *http://www.math.tau.ac.il/ gitik/spr-kn.pdf*，未发表手稿，2010 年。[Gol22] G. Goldberg。 *The Ultrapower Axiom*。柏林、波士顿：De Gruyter，2022 年。[Jec03] Thomas Jech。 *Set Theory*。数学中的 Springer 专著。Springer-Verlag，柏林，2003 年。第三千年版，修订并扩充。[KRS13] Peter Koepke、Karen Rasch 和 Philipp Schlicht。使可测基数奇异化的极小普里克里型强迫。 *J. Symb. Logic*，78:85—100，2013 年。[Kru03] John Krueger。肥集与饱和理想。 *The Journal of Symbolic Logic*，68 3 837 845，2003（）：–。[Lav78] Richard Laver。使 κ 的超紧致性在 κ-有向闭强迫下不可破坏。 *Israel Journal of Mathematics*，29(4):385–388，1978 年。[Mag77] Menachem Magidor。关于奇异基数问题。i。 *Israel Journal of Mathematics* 28 1 2 1 31, 1977 ，（-）：–。[Mag82] Menachem Magidor。反射平稳集。 *Journal of Symbolic Logic*，47 4 755 771，1982（）：–。[Mah47] Dorothy Maharam。测度代数的代数刻画。 *Annals of Mathematics* 48 154 167, 1947 ，：–。[Sac71] Gerald E. Sacks。用完美闭集进行强迫。载于 *Axiomatic Set Theory*，第 13 卷 *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*，第 331–355 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1971 年。[Sak15] Hiroshi Sakai。关于覆盖性质和逼近性质的注记。 *RIMS Kôkyûroku* 1949 81 88, 2015 ，：–。[She03] Saharon Shelah。在 $\leq \kappa$ $< \kappa$ *Israel*（）-支撑迭代中不压缩基数。 *Journal of Mathematics* 136 29 115, 2003 ，：–。[Sol74] Robert M. Solovay。强紧致基数与 GCH。载于 *Proceedings of the Tarski Symposium* 25 *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*，第 卷，第 – 页。 *ematics* 365 372 1974 美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，。[Usu26] Toshimichi Usuba。超滤子数函数的单调性。 *Mathematical Logic* 65 545 568, 2026 *Archive for* ，：–。