1+1 维相对论黏性磁流体力学与自洽纵向加速

Shuoyan Liu[1], * **和 Ze-Fang Jiang**[2,3]

[1]暨南大学物理系与思源实验室，广州 *510632*，中国[2]湖北工程学院物理系与电子信息工程系，湖北孝感 *432000*，中国[3]华中师范大学粒子物理研究所与夸克和轻子物理教育部重点实验室，湖北武汉 *430079*，中国

电子邮箱： lsy0304@stu2026.jnu.edu.cn，jiangzf@mails.ccnu.edu.cn

arXiv:2611.30831v1 [nucl-th] 23 Nov 2026

Abstract: 我们研究了在共形状态方程 $\varepsilon = 3p$下具有自洽纵向加速的（$1+1$）维相对论黏性磁流体力学。在给定的横向磁应力下，我们利用能量守恒、纵向动量守恒和剪切弛豫定律演化温度、流体快度及剪切应力。超越纵向推进不变性后，我们在纳维–斯托克斯近似下推导了微扰解析表达式，并获得了包含剪切弛豫的非线性解；在相同初始条件下，对动力学加速流与指定加速流进行了比较。初始温度曲率产生纵向压力梯度，改变快度斜率，修正纵向膨胀功，并导致不同的冷却历史。对于参考参数，剪切黏度对最终中心温度差的增强作用远强于指定磁应力；而中心温度相等的条件会随固有时和初始剪切发生变化。在 $\chi = \lambda^* = 0.03$中，尽管指定流中持续存在动量残差，中心温度的最大相对差异在 0．18%，范围为 0．6–6 fm/c。由于速度映射也会进入单位流体快度熵，即使中心温度高度一致，快度分布仍会对流的演化保持敏感。将指定场替换为理想感应会消除直接磁功，同时在纵向动量平衡中保留磁压力和惯性。

Keywords: 夸克-胶子等离子体、有限温度或有限密度

*通讯作者。

目录

1 引言 1

2 指定磁应力下的纵向流 2

2.1 纵向运动学与热力学 32.2 磁应力与剪切应力 32.3 能量与纵向动量守恒 42.4 背景功与电磁闭合 52.5 剪切弛豫与应力记忆 52.6 瞬时剪切极限与投影方程 62.7 初始分布、中心对称性与适用范围 6

3 快度推进不变极限：从 Bjorken 流到黏性磁流 8

3.1 理想 Bjorken 流 83.2 黏性 Bjorken 流 83.3 黏性磁 Bjorken 流与剪切弛豫 9

4 纵向加速与指定流 1 1

4.1 理想加速流 114.2 黏性加速流 124.3 黏性磁性加速流 124.4 指定流的动量残差 13

5 S自洽加速流 1 5

5.1 理想极限下的压强梯度机制 155.2 压强梯度与演化中的速度场 165.2.1 压力作用力与温度求积 185.2.2 独立初始加速度与热曲率 205.3 剪切弛豫下的非线性演化 21

6 规定流与自洽流 2 2

6.1 中心温度差 226.2 膨胀功与温度平衡 236.2.1 温度差的源项分解 246.3 初始梯度与移动抵消条件 266.3.1 初始剪切与起始条件 266.4 初始梯度展开的精度 286.5 指定流精度与应力依赖性 286.6 应力与参数依赖性 296.6.1 磁场衰减与冷却的三个贡献 306.6.2 磁场与剪切的联合贡献 316.7 以理想感应取代指定场 32

6.8 对可观测量的影响 34

7 结论 **36**

A 数值方法与验证 37

A.1 线法与奇偶性条件 37A.2 守恒形式与独立检验 38A.3 收敛性诊断与系数比较 39A.4 带剪切弛豫的初始梯度展开 40A.4.1 二次源项与初始值 42A.5 高阶梯度结构与温度重构 42

---

1 引言

相对论性重离子碰撞会产生炽热的夸克-胶子等离子体，并在强纵向梯度作用下膨胀。非中心碰撞可产生量级为10^{18}–10^{19} G 的磁场，从而改变等离子体的应力和演化 [1, 2]。温度演化历史也会影响热光子观测量，因此其动力学不确定性对电磁探针十分重要 [3]。

比约肯流 [4] 假设纵向推进不变性，即流体快度等于时空快度，$\Omega = \eta_s$。Roy等 [5] 将这一框架扩展到理想磁流体力学，其中冻结在流体中的横向磁场按$B \propto \tau^{-1}$衰减。在此极限下，磁能与流体能量演化解耦，使比约肯冷却定律保持不变。Pu 等 [6] 引入了有限磁化，并研究了其对冷却的影响。Jiang等 [7] 在 boost 不变流中规定了幂律磁场演化，并比较了纳维–斯托克斯和 Israel–Stewart 对剪切应力的描述，包括后者对初始剪切应力的依赖性。

纵向加速要求放弃纵向推动不变性。Cs¨org˝o–Nagy–Csan´ad (CNC) [8, 9] 和 Cs¨org˝o–Kasza–Csan´ad–Jiang (CKCJ) [10] 解描述了理想流体流体力学中的精确加速流。在微扰框架内，She 等人 [11] 研究了横向磁场中的弱加速流，而Jiang等人 [12]推导出弱加速黏性解，并将其与弛豫模型进行了比较。这些微扰构造在所有固有时都将流体快度规定为 $\Omega = (1 + \lambda^*)\eta_s$。

因果黏性模拟将等离子体的膨胀与末态强子联系起来。VISH2+1 在具有纵向快变不变性的背景 [13], 上解析横向流，iEBE-VISHNU则将逐事件流体力学与强子输运耦合起来 [14]。三维模拟共同追踪纵向与横向演化，从理想流体MUSIC表述到采用MUSIC、vHLLE和ECHO-QGP进行的黏性计算 [15–18]。三维黏性流体力学还将膨胀与谱和飞米尺度半径联系起来 [19]。CLVisc利用这一框架将快度依赖的初始条件

和初始速度与纵向流退相关联系起来 [20]。与强子数据的比较可约束剪切黏度以及初始条件 [21–23]。快度依赖的耗散流体力学还可以直接比较不同的剪切应力闭合关系 [24]。纵向几何揭示了压强驱动的变化如何改变快度斜率，进而影响膨胀功和冷却。

本研究通过联立求解能量与纵向动量守恒方程以及剪切弛豫方程，在给定横向磁应力的情况下，自洽地确定 $\Omega(\tau,\ \eta_s)$、温度和剪切应力。Jiang等人 [12] 指出，同时依赖 τ 和 η_s 的流体快度的确定仍是一个尚待解决的问题，并注意到，任意的纵向加速都需要通过数值方法求解耦合方程。我们针对较小的初始梯度，对耦合非线性方程进行数值求解，并推导出纳维–斯托克斯极限下微扰系数的解析解。从物理上说，纵向压力梯度会改变流体速度，进而改变膨胀率 $\theta = \nabla_\mu u^\mu$，从而影响驱动每个流体元冷却的膨胀功项（$\varepsilon + p$）$\theta$。我们定量研究了剪切弛豫和磁应力存在时的这种反馈效应。

参考文献 [25] 中从带电粒子的赝快度分布中提取的加速参数刻画了给定的速度剖面。这里，我们分别指定初始温度分布和速度分布，以区分热曲率与初始膨胀的影响。在当前演化中，初始温度曲率决定了中快度附近的纵向压力梯度，因此也会影响晚期快度斜率。精确的共形二阶解提供了解析基准 [26]。对于具有一般快度依赖性的纵向演化，精确的理想流体解和动理学解 [27, 28]补充了各向异性及黏性流体动力学计算 [29, 30]。关于加速流体动力学的微扰处理同样将压力梯度与流体快度的演化联系起来 [31]。电阻性磁流体动力学计算则采用了不同的方法：参考文献 [32, 33] 研究了有限电导率下由电磁力驱动的纵向加速，并采用理想物质应力张量。参考文献 [34]在米尔恩坐标中以数值方法重现了一个纵向电阻性解。我们采用相同的初始温度、速度、剪切应力和磁应力分布，对比给定流速演化与自洽演化。第 2 节介绍守恒方程、场与剪切设定以及初始数据。第3 节讨论比约肯流中的剪切应力和磁应力。第 4 节检验给定加速剖面的动量平衡。随后，我们在第 5 节演化快度，并在第 6节比较由此得到的冷却、膨胀功和熵分布。附录 A 介绍数值方法和收敛性检验。

2 具有预设磁应力的纵向流

我们研究一种在剪切黏度和给定横向磁应力作用下发生纵向膨胀的共形流体。能量和动量守恒决定温度和快度。一个弛豫方程控制纵向剪切应力。

2.1 纵向运动学与热力学

我们采用自然单位制，$\hbar = c = k_B = 1$，以及米尔恩坐标 $x^\mu = (\tau,\ x,\ y,\ \eta_s)$，其中

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \qquad \eta_s = \frac{1}{2}\ln\frac{t+z}{t-z}. \tag{2.1}$$

度规为 $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,\ -1,\ -1,\ -\tau^2)$。所有流体变量都依赖于 τ和 η_s；忽略横向流和横向梯度。实验室系纵向速度为 $v_z = \tanh\Omega$。四速度和纵向单位矢量为

$$u^\mu = \left(\cosh(\Omega-\eta_s), 0, 0, \frac{\sinh(\Omega-\eta_s)}{\tau}\right), \tag{2.2}$$

$$n^\mu = \left(\sinh(\Omega-\eta_s), 0, 0, \frac{\cosh(\Omega-\eta_s)}{\tau}\right). \tag{2.3}$$

它们满足 $u^\mu u_\mu = 1$、$n^\mu n_\mu = -1$ 和 $u^\mu n_\mu = 0$。投影算符 $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ 选取与流体四速度 $\Delta^{\mu\nu}u_\nu = 0$正交的方向；它定义了下文剪切张量所用的局域静止空间。算符 D 沿流体元的运动方向求导，而$\theta = \nabla_\mu u^\mu$ 则测量其局域静止系体积在每单位物质固有时内的相对增长率。它们为

$$D = \cosh(\Omega-\eta_s)\partial_\tau + \frac{\sinh(\Omega-\eta_s)}{\tau}\partial_{\eta_s}, \tag{2.4}$$

$$\theta = \sinh(\Omega-\eta_s)\partial_\tau\Omega + \frac{\cosh(\Omega-\eta_s)}{\tau}\partial_{\eta_s}\Omega. \tag{2.5}$$

特别地，$n_\nu Du^\nu = -D\Omega$。

在化学势为零时，我们取

$$\varepsilon = 3p = 3a_1T^4, \quad s = 4a_1T^3, \quad \eta_{\rm sh} = 4a_1(\eta_{\rm sh}/s)T^3, \tag{2.6}$$

其中 ε，p和 s 分别表示物质能量密度、平衡压强和熵密度，不包括磁场贡献。剪切黏度与熵密度之比 $\eta_{\rm sh}/s$ 取为常数，而 $\eta_{\rm sh}$ 中的下标用于区分剪切黏度与时空快度 η_s。系数 $a_1 = g_*\pi^2/90$ 由有效无质量自由度数决定，胶子的自由度数为 $g_* = 16 + 21N_f/2$，夸克味数为 N_f，因此得到 $a_1 \simeq 5.21$，对于 $N_f = 3$。共形状态方程将声速确定为 $c_s^2 = 1/3$，并使温度成为唯一独立的热力学变量，从而可以得到解析的纵向推动不变基准解，并与参考文献 [7, 11, 12]直接比较。我们采用这一近似来描述量子色动力学交叉温度以上的物质。HotQCD 手征分析给出 $T_c \simeq 154$ 兆电子伏 [35]。晶格状态方程保留了迹反常的温度依赖性 $(\varepsilon - 3p)/T^4$ [36]。

2.2 磁性与剪切应力

按照参考文献 [7, 11], ，我们将共动系场强 B的固有时依赖性规定为，其中 $B_0 = B(\tau_0)$，即

$$B^2(\tau) = B_0^2\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2a}. \tag{2.7}$$

我们通过初始比值规定场强 $B_0^2/\varepsilon_0 = B_0^2/(3a_1T_0^4)$，其中 $\varepsilon_0 = \varepsilon(\tau_0,\ 0)$ =$3a_1T_0^4$；因此，初始磁能与物质能量之比为 $B_0^2/(2\varepsilon_0)$。指数 a决定衰减速率。为与参考文献 [7], 中的场约定相一致，我们定义

$$\widetilde{T} = T/T_0, \qquad \sigma = B_0^2/T_0^4, \qquad \frac{B_0^2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{3a_1}. \tag{2.8}$$

该参考系的参数， $\epsilon_1 = (a-1)\sigma/(12a_1)$和 $\epsilon_2 = 4(\eta_{\rm sh}/s)/(9T_0)$表示相同的磁性源项和黏性源项； ϵ_2 在自然单位制下具有时间的量纲。标量$\Phi \equiv -n_\mu n_\nu \pi^{\mu\nu}$ 表示纵向物质压强 $p-\Phi$的剪切修正。横向各向同性、无迹性以及与 u^μ 的正交性给出

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\Phi}{2}(-\Delta^{\mu\nu} - 3n^\mu n^\nu). \tag{2.9}$$

它给出 $\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = \Phi\theta$和 $n_\nu\nabla_\mu\pi^{\mu\nu} = n^\mu\partial_\mu\Phi + \Phi D\Omega$。

2.3 能量和纵向动量守恒

冷却和压强驱动流都由守恒定律 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ =0支配，其中有效的总能动张量包括物质贡献和给定的磁应力：

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p + B^2)u^\mu u^\nu - (p + B^2/2)g^{\mu\nu} - B^\mu B^\nu + \pi^{\mu\nu}, \qquad B^2 = -B^\mu B_\mu \geq 0. \tag{2.10}$$

磁四矢量 B^μ 表示在流体静止系中测得的磁场，并满足 $u_\mu B^\mu = 0$。磁场横向于束流轴，因此 $n_\mu B^\mu = 0$。在海维赛德–洛伦兹单位制下，共动磁能量密度为 $B^2/2$，而重离子现象学中的场强通常表示为 eB，其中 $e^2 = 4\pi\alpha$。物质能量密度 ε 不包括磁贡献 $B^2/2$。在共形极限下体黏度为零，并且我们忽略介质的磁化。沿u_ν 进行投影得到共动能量平衡，

$$\begin{aligned} u_\nu\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ &\Rightarrow\ D\varepsilon + (\varepsilon+p)\theta = \Phi\theta - D(B^2/2) - B^2\theta, \\ \varepsilon = 3a_1T^4 \ &\Rightarrow\ 12a_1T^3DT = -4a_1T^4\theta + \Phi\theta - D(B^2/2) - B^2\theta. \end{aligned} \tag{2.11}$$

相应的动量投影为

$$n_\nu\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ \Rightarrow\ (4a_1T^4 + B^2 - \Phi)D\Omega + n^\mu\partial_\mu(a_1T^4 + B^2/2 - \Phi) = 0. \tag{2.12}$$

将能量投影除以 $12a_1T^3$ ，并代入给定的历史，得到温度方程和动量方程

$$DT + \frac{T\theta}{3} - \frac{\Phi\theta}{12a_1T^3} + \frac{B^2}{12a_1T^3}\left[\theta - \frac{a\cosh(\Omega-\eta_s)}{\tau}\right] = 0. \tag{2.13}$$

$$n^\mu\partial_\mu(a_1T^4 + B^2/2) + (4a_1T^4 + B^2 - \Phi)D\Omega - n^\mu\partial_\mu\Phi = 0. \tag{2.14}$$

2.4 背景工作与电磁闭合关系

与方程（2.10）相关的物质平衡为

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{\text{matter}} = -\nabla_\mu \left[B^2 u^\mu u^\nu - \frac{B^2}{2} g^{\mu\nu} - B^\mu B^\nu \right], \tag{2.15}$$

其中，$T^{\mu\nu}$ 物质包含流体和剪切应力。方程（2.15）根据指定磁应力的散度，确定其施加的力和所做的功。

入射原子核产生的场取决于碰撞几何，并且在时空中迅速变化 [2, 37]。其后续演化取决于物质的电磁响应 [38, 39], ，而电导率的晶格估算为此提供了微观输入 [40]。正如 Bjorken 膨胀中的横向流解所示，指定场的空间梯度也会改变流动 [41]。在本文考虑的纵向几何中，指定的幂律提供了一种可控方式，用于比较不同衰减率对能量平衡的影响。

动态电磁闭合关系将场和电流与演化中的等离子体联系起来 [34, 42]。该闭合关系的理想感应极限为幂律历史轨迹提供了一个参照。

对于共动电场为零的物理场，齐次麦克斯韦方程则要求

$$\nabla_\mu (B^\mu u^\nu - B^\nu u^\mu) = 0. \tag{2.16}$$

在这种横向几何中，方程（2.16）给出 $D \ln B = -\theta$。因此，理想感应消除了物质能量方程中的直接磁源项 $-B^2 (D \ln B + \theta)$ 。磁压力和惯性仍出现在方程（2.14）中。对于给定的幂律，方程（2.15）规定了与物质的交换。若电磁模型采用不同的衰减历史，也必须规定相应的电场和电流。

2.5 剪切弛豫与应力记忆

剪切应力可以从低于其纳维–斯托克斯（NS）值的状态开始，并随着流体膨胀而增大。我们采用共形弛豫定律对其进行演化：

$$\begin{aligned} \tau_\pi D\Phi + \Phi &= \frac{4}{3}\eta_{\text{sh}}\theta - \frac{4}{3}\tau_\pi \theta \Phi, \\ \tau_\pi &= \frac{c_\pi (\eta_{\text{sh}}/s)}{T}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

参考文献 [7] 中的弛豫时间约定由下式得出：

$$\tau_\pi = 2\eta_{\text{sh}}\beta_2, \qquad \beta_2 = \frac{3}{4p} \quad \Longrightarrow \quad \tau_\pi = \frac{6(\eta_{\text{sh}}/s)}{T}, \tag{2.18}$$

使用 $s = 4p/T$，得到 $c_\pi = 6$。该值对应于针对无质量玻尔兹曼气体的原始 Israel–Stewart 矩选择 [43, 44]。参考文献 [45] 的 14矩截断给出 $c_\pi = 5$ ，适用于具有常截面的超相对论经典气体（该文献的表2）。其高阶矩截断会给出不同的值。这里 c_π

指定了标量模型中的剪切弛豫时间。瞬态相对论流体动力学将剪切应力作为动力学变量演化 [43, 46]。共形二阶流体力学允许存在额外的输运项 [47]。动力学推导根据碰撞核和闭合关系确定这些项的系数 [45, 48]。我们的标量方程在纵向扇区中保留了剪切弛豫和共形膨胀阻尼。

我们将剪切应力初始化为 $\Phi(\tau_0,\ \eta_s) = b_3 p(\tau_0,\ \eta_s)$。参考计算采用$b_3 = 0$，使黏性应力能够从零开始建立。在 $\eta_s = 0$，Φ 与参考文献 $\pi^{00} - \pi^{33}$ 中使用的笛卡尔组合 [7]相一致。方程（2.17）定义了非线性计算中采用的标量横向各向同性剪切模型。

2.6 瞬时剪切极限和投影方程

将 $\tau_\pi D\Phi$ 以及与 $\tau_\pi \theta\Phi$ 成正比的项设为零，可得 $\Phi = 4\eta_{\rm sh}\theta/3$。我们使用这一瞬时极限进行解析比较。

相应的张量关系为

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta_{\rm sh}\sigma^{\mu\nu}. \tag{2.19}$$

这里，$\pi^{\mu\nu}$ 是应力张量的剪切修正，其中静止空间投影算符已在上文定义。对称无迹速度梯度张量为

$$\sigma^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta}\left[\frac{\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha}{2} - \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{3}\theta\right]. \tag{2.20}$$

对于纵向几何，

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{2\eta_{\rm sh}\theta}{3}(-\Delta^{\mu\nu} - 3n^\mu n^\nu), \tag{2.21}$$

$$\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = \frac{4}{3}\eta_{\rm sh}\theta^2. \tag{2.22}$$

利用状态方程，$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 的两个独立投影可写为 T 和 Ω：

$$DT + \frac{T\theta}{3} - \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{9}\theta^2 + \frac{D(B^2/2) + B^2\theta}{12a_1T^3} = 0. \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} &n^\mu\partial_\mu(a_1T^4 + B^2/2) + \left(4a_1T^4 + B^2 - \frac{16}{3}a_1(\eta_{\rm sh}/s)T^3\theta\right)D\Omega \\ &- \frac{16}{3}a_1(\eta_{\rm sh}/s)n^\mu\partial_\mu(T^3\theta) = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

方程 D（2.24）中 Ω 的系数是有效纵向惯性，$\varepsilon + p + B^2 - \Phi$。最后一项包含 $n^\mu\partial_\mu(T^3\theta)$，即纳维–斯托克斯应力的纵向梯度。在比约肯流中，该梯度为零。

2.7 初始分布、中心对称性和适用范围

初始分布为

$$\begin{aligned} T(\tau_0,\eta_s) &= T_0(1 - \chi\eta_s^2/3), \\ \Omega(\tau_0,\eta_s) &= (1+\lambda^*)\eta_s. \end{aligned} \tag{2.25}$$

方程 (2.25) 中的两个参数是彼此独立的初始数据。热曲率$\chi = -3[\partial_{\eta_s}^2 T]_{\tau_0,0}/(2T_0)$ 决定初始压力梯度：当 $\chi > 0$ 温度在 $\eta_s = 0$ 处达到最大值时，压力梯度会将流体推离中心。根据参考文献 [11, 12], λ^* 是初始纵向加速度参数；它衡量初始快度斜率 $\partial_{\eta_s}\Omega|_{\tau_0} = 1+\lambda^*$ 相对于比约肯值的超额。三维初态模型通过参与者几何、阻滞以及在一系列快度和固有时范围内的沉积来赋予能量和纵向动量 [49–51]。倾斜源可以产生定向流 [52], ，而采用初始部分子速度的逐事件模拟表明，结果对密度分布和速度分布都很敏感 [53]。方程 (2.25) 提取了中快度附近这些分布的两个特征：决定初始压力作用力的曲率，以及决定初始膨胀的速度斜率。

除非另有说明，参数为

$$\begin{aligned} T_0 &= 0.65\ \text{GeV}, & \tau_0 &= 0.6\ \text{fm}/c, \\ \eta_{\text{sh}}/s &= 1/(4\pi), & c_\pi &= 6, \\ a &= 1.3, & B_0^2/\varepsilon_0 &= 0.1, \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 $\Phi_0 = b_3 p_0 = 0$。 $\eta_{\text{sh}}/s = 0.04$，0.16 用于比较黏度。参考值为全息值 $1/(4\pi)$ [54]。我们采用 $\lambda^* = 0.03$ 和 0.06 作为具有代表性的小加速度，并将范围扩展至 0.1。在反射中心$\eta_s = 0$ ，我们定义中心快度斜率 $\kappa_\Omega \equiv [\partial_{\eta_s}\Omega]_0$。反射对称性意味着 $\Omega = 0$ 在任何时刻都成立，因此 $D = \partial_\tau$、 $D\Omega = 0$，以及 $\theta = \kappa_\Omega/\tau$。因此，中心流体元不会加速；斜率 κ_Ω 则表示其以比约肯值 $1/\tau$ 为单位的膨胀率。 κ_Ω 的演化由中心处动量方程对 η_s 求导得到，因此动量平衡决定中心流体元所做的膨胀功大小。在中心处，能量投影变为

$$\tau\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -(\varepsilon + p - \Phi)\kappa_\Omega + B^2(a - \kappa_\Omega). \tag{2.27}$$

剪切修正 Φ遵循方程（2.17）。在中心处，能量投影包含绝热膨胀冷却项 $-\kappa_\Omega T/$（3τ）以及两个非绝热源项，分别来自剪切加热和磁功：

$$\begin{aligned} S_\eta &= \frac{\Phi\kappa_\Omega}{12a_1\tau T^3}, \\ S_B &= \frac{B^2(a-\kappa_\Omega)}{12a_1\tau T^3}, \\ \frac{dT}{d\tau} &= -\frac{\kappa_\Omega T}{3\tau} + S_\eta + S_B. \end{aligned} \tag{2.28}$$

在中心处，纳维–斯托克斯温度方程为

$$\frac{dT}{d\tau} = -\frac{\kappa_\Omega T}{3\tau} + \frac{4(\eta_{\text{sh}}/s)\kappa_\Omega^2}{9\tau^2} + \frac{B^2(a-\kappa_\Omega)}{12a_1\tau T^3}. \tag{2.29}$$

除非另有说明，有限梯度计算从 $\Phi(\tau_0,\ \eta_s) = 0$ 演化标量剪切弛豫系统，而纳维–斯托克斯极限则提供瞬时剪切比较。

该模型假设共形状态方程、纯纵向流、磁化和体黏度均为零、 $\eta_{\rm sh}/s$为常数，且剪切应力在横向上各向同性。在磁化等离子体中，剪切黏度分解为多个各向异性系数 [55]；本文考察的纵向剪切与这些系数的某种组合耦合，我们用单一系数 $\eta_{\rm sh}$来表示该组合。我们将分析限制在 $|\eta_s| \le 1$， $0.6 \le \tau \le 6$ fm/c范围内，初始梯度为 λ^*， $\chi \lesssim 0.1$；本窗口内梯度展开的精度将在第6.4节检验。对于核半径 $R = 6.38$ fm（金）和 6.62 fm（铅）， [56], 从边缘到中心的声学传播时间约为 $R/c_s \simeq 11\mathrm{fm}/c$。我们在同一横向均匀模型中比较两种纵向演化。在此窗口内，它们的中心温度均保持在约 0.3 GeV 或更高。

温度绘制为 T/T_0 ，温度差异绘制为 $\Delta T/T_0$；有量纲的差异以兆电子伏表示。以 fm/c 表示的固有时通过$\hbar c = 0.1973$ GeVfm 转换为自然单位，即 1 fm $= 5.0677$ GeV^{-1}。

3 boost 不变极限：从 Bjorken 到黏性磁流

我们从理想 Bjorken 流出发，依次加入剪切应力和磁应力。令$\lambda^* = \chi = 0$，则 $\Omega = \eta_s$、 $D = \partial_\tau$和 $\theta = 1/\tau$。当 T、 Φ和 B^2均与 η_s无关时，纵向动量方程中的每一项都消失，Bjorken 速度剖面保持不变。因此，能量方程是唯一非平凡的守恒方程；当 Φ 随时间动态演化时，还需补充剪切弛豫方程。这些 boost 不变极限在 Bjorken 流固定的情况下，分离出剪切应力和磁应力对热学性质的影响，并可直接与参考文献 [4, 5, 7, 57]中的已知解进行比较。

3.1 理想流体Bjorken流

在剪切应力和磁应力均为零时，能量守恒给出

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{T}{3\tau} = 0, \qquad T(\tau) = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/3}. \tag{3.1}$$

对于体积为 V的共动流体元， $D\ln V = \theta = 1/\tau$给出 $V \propto \tau$，因此方程（3.1）等价于 $TV^{1/3} =$常数。在 $s \propto T^3$的情况下，这表示每个流体元的熵 sV守恒：膨胀是绝热的，而温度下降是因为流体元沿束流轴伸展时对周围环境做功 $p\,dV$ [4]。该解是衡量下面剪切源项和磁源项的基准。

3.2 黏性Bjorken流

剪切使纵向物质压强从 p 变为 $p - \Phi$。均匀方程变为

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\tau} + \frac{T}{3\tau} - \frac{\Phi}{12a_1\tau T^3} &= 0, \\ \tau_\pi \frac{d\Phi}{d\tau} + \Phi &= \frac{4\eta_{\rm sh}}{3\tau} - \frac{4\tau_\pi \Phi}{3\tau}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

正的 Φ 会将纵向物质压强降低至 $p - \Phi$。因此，膨胀流体元所做的功会减少，即（$p - \Phi$）dV，并且冷却得更慢。在物质能量平衡中，

这种膨胀功的减少表现为剪切加热项 $\Phi\theta$。如果 $\Phi(\tau_0) = 0$，应力会在弛豫时间尺度 τ_π 上建立起来。对于 $\Phi(\tau_0) = b_3 p_0$，剪切应力从一开始就会改变膨胀功。对于相同的初始温度和膨胀率，$b_3 > 0$会减缓初始冷却，而 $b_3 < 0$ 会加快初始冷却。在有限的 τ_π 下，剪切应力取决于其初始值以及随后发生的膨胀历史。下文将考察，当纵向流也发生动态演化时，这种记忆效应如何影响冷却。

瞬时纳维–斯托克斯值 $\Phi = 4\eta_{\rm sh}/(3\tau)$ 给出

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\tau} + \frac{T}{3\tau} &= \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{9\tau^2}, \\ T_{\rm NS}(\tau) &= \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/3}\left[T_0 + \frac{2(\eta_{\rm sh}/s)}{3\tau_0}\left(1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2/3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

此处 τ_0 以自然单位表示，因此 $(\eta_{\rm sh}/s)/\tau_0$ 的单位为温度。方括号中的第二项是在提出理想比约肯冷却因子后得到的黏性修正。该项从零开始增长，并在晚时刻趋近于 $2(\eta_{\rm sh}/s)/(3\tau_0)$。对于参考参数，相对于理想 Bjorken 流的温度分数超额趋近于 $2(\eta_{\rm sh}/s)/(3T_0\tau_0) \simeq 0.027$，并且在 $\tau = 6$ fm/c处约为 2%。公式（3.3）给出了 Muronga [57]获得的比约肯流的纳维–斯托克斯解。参考文献 [12] 中的弱加速黏性解在快度推进不变极限下恢复这一结果。比值 $(\eta_{\rm sh}/s)/(T\tau)$ 衡量了比约肯流中的黏性梯度尺度。瞬时纳维–斯托克斯近似还要求弛豫在膨胀时间尺度上足够快。对于参考参数，该比值在 τ_0达到最大值 0.040。在公式（3.2）中，弛豫时间 τ_π 决定了纵向剪切应力对膨胀作出响应的时间尺度。

在包含横向膨胀的纵向推动不变计算中，纵向压力的降低同样存在 [13]。比约肯极限隔离了其对纵向冷却的影响。

比约肯对称性也用于将瞬态流体力学和各向异性流体力学与精确动力学演化进行比较 [58, 59]。对比约肯流体力学吸引子的研究按照微观尺度与膨胀尺度之比组织本构展开 [60]。而下文所使用的初始梯度阶数，则在固定剪切闭合关系下，按照偏离纵向推动不变初始剖面的程度的幂次计数。纳入横向膨胀后，古布瑟对称性提供了第二类流体动力学和动力学基准 [61, 62]。

3.3 黏性磁场比约肯流与剪切弛豫

将给定的横向场加入同一弛豫定律后，得到

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{T}{3\tau} - \frac{\Phi + (a-1)B^2}{12a_1\tau T^3} = 0. \tag{3.4}$$

令 $\Phi = 0$，首先确定 Roy等人 [5]所研究极限下的磁功。当$x = \tau/\tau_0$时，能量方程及其解为

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{4\varepsilon}{3\tau} &= \frac{(a-1)B_0^2}{\tau}x^{-2a}, \\ \widetilde{T}^4 &= x^{-4/3} + \frac{(a-1)\sigma}{3a_1}\frac{x^{-2a} - x^{-4/3}}{4/3 - 2a}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

表1。带剪切弛豫的一阶磁微扰解与未展开的纳维–斯托克斯方程的比较。温度以 T_0 归一化，并乘以 10^3。相对差异为（$T_{\rm pert}-T_{\rm relax}$）/$T_{\rm relax}$ 和（$T_{\rm pert}-T_{\rm NS}$）/$T_{\rm NS}$；最后一列以百万分率给出。我们取$B_0^2/\varepsilon_0=0.10$ 作为 $a=1.30$ ，并取0.40作为 $a=2.00$。

a	τ [fm/c]	$10^3T_{\rm pert}/T_0$	$10^3T_{\rm relax}/T_0$	$\Delta_{\rm relax}$ [%]	$\Delta_{\rm NS}$ [ppm]
1.30	1.00	852.32	849.89	0.29	11.4
1.30	2.00	682.39	680.80	0.23	29.8
1.30	4.00	544.36	543.24	0.21	39.6
1.30	6.00	476.47	475.53	0.20	42.6
2.00	1.00	873.27	870.00	0.38	1036.3
2.00	2.00	703.09	700.40	0.38	1653.5
2.00	4.00	561.06	559.01	0.37	1753.8
2.00	6.00	491.03	489.27	0.36	1764.1

当 $a=2/3$ 该分数取其极限值 $x^{-4/3}\ln x$时，方程（3.5）即为参考文献 [5], 中也采用的幂律磁性比约肯解 [7]。磁源项与 $a-1$成正比：当 $a>1$ 时，磁场衰减快于磁通守恒所预言的衰减，从而加热物质；当 $a<1$ 时，磁场会增强冷却；而在 $a=1$ 时，则恢复参考文献 [5]中的理想感应结果。对于参考值（$a-1$）$B_0^2/\varepsilon_0=0.03$，磁场会减缓初始冷却。在理想流体中，当该比值超过 $4/3$时，初始温度会升高。

取纳维–斯托克斯应力时，方程（3.4）化为文献 [7]中的磁黏性冷却方程；结合方程（2.17）可得到弛豫曲线（第2.5节）。在引入纵向梯度之前，这些比较确定了磁场归一化和弛豫约定。

两种计算均采用 $c_\pi=6$。在比约肯流中，文献 [7] 保留了弛豫项$-\frac{1}{2}\tau_\pi\Phi$（$1/\tau-5\,d\ln T/d\tau$）。对于理想比约肯冷却，该项化为方程（2.17）中的项，$d\ln T/d\tau=-1/(3\tau)$。剪切加热和磁功会改变这一冷却率。对于$\lambda^*=\chi=0$，文献 [7] 给出的一阶纳维–斯托克斯–磁流体动力学解提供了微扰检验。其零磁场背景 $T^{(0)}{}_{\rm NS}$ 为方程（3.3），将磁源项按B_0^2展开至一阶后，可得到其方程（40）的求积形式，

$$T_{\rm NS}(\tau)=T^{(0)}_{\rm NS}(\tau)+\delta T_B(\tau)+O(\sigma^2), \tag{3.6}$$

$$\delta T_B(\tau)=\tau^{-1/3}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{(a-1)B_0^2\,t^{1/3}}{12a_1t[T^{(0)}_{\rm NS}(t)]^3}\left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{2a}dt. \tag{3.7}$$

该表达式通过使用积分因子对线性化纳维–斯托克斯温度方程进行积分得到 $\tau^{1/3}$。当 $B_0\to0$时，它趋于黏性比约肯解；当 B_0 和 $\eta_{\rm sh}/s$ 均趋于零时，则趋于理想比约肯冷却。在参考场下，$\sigma=1.56$ 和 $a=1.3$ 给出$\epsilon_1=0.0075$，这处于微扰结果的小磁场区间内。图1 展示了在 $a=2$ 和 $B_0^2/\varepsilon_0=0.4$下的较强磁场比较；其 ϵ_1 为 0。10。纳维–斯托克斯曲线和弛豫曲线具有相同的初始温度和磁应力。早期时刻的差异源于弛豫应力需要有限时间才能趋近其瞬时纳维–斯托克斯值。

对于表1中的参数，微扰解与完整 NS

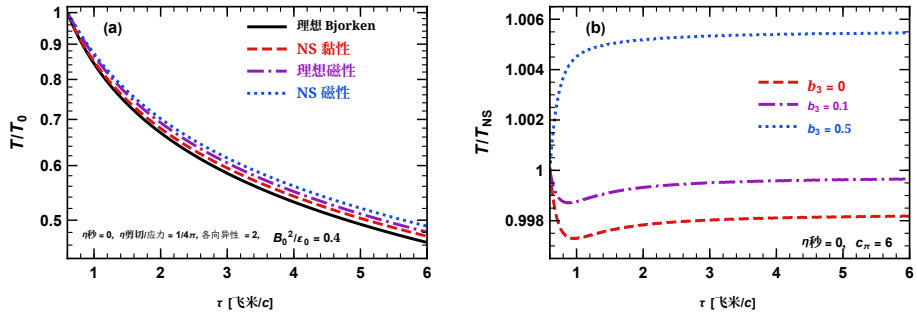

图1。纵向推动不变温度极限。左：理想 Bjorken、NS 黏性、理想磁性和 NS 磁流的归一化温度。右：弛豫温度与 NS 磁性温度之比，对应 $b_3 = 0$，0。1、0。5。我们采用 $a = 2$、$B_0^2/\varepsilon_0 = 0.4$ 和 $\eta_{\rm sh}/s = 1/(4\pi)$。

演化在参考场中的差异最多为 0.0043%。在更强的场中，差异最多为 0.18%。与弛豫的比较还反映了剪切应力的演化。每次比较均采用相同的初始温度和磁场历史。

图1 比较了这些温度演化历史。正的 b_3 会使早期比值升至 1 以上：初始剪切会在达到 NS 值之前降低纵向压力。

4 具有给定流的纵向加速

在第3节中，纵向推动不变性使膨胀率固定为 $1/\tau$，且纵向动量方程恒等成立。现在我们采用参考文献 $p = (1+\lambda^*)\eta_s$ 中的加速剖面 Ω [11, 12]。我们首先计算其冷却历史，然后检验由此产生的压力梯度能否维持所给定的运动。

4.1 理想加速流

对于理想无场极限下的指定流，中快度处的膨胀率为$\theta = (1+\lambda^*)/\tau$，温度方程给出 $\widetilde{T}_p = x^{-(1+\lambda^*)/3}$。该解与文献 [11] 中关于 $\sigma_0 = 0$ 和 $c_s^2 = 1/3$ 的公式（12）一致，并在 $\lambda^* \to 0$时恢复 Bjorken 冷却定律。较大的 λ^* 会增大纵向膨胀率，从而加速冷却。对于 $\lambda^* = 0.03$，中快度处的温度在$\tau = 6$ fm/c时比比约肯值低约 2%。

在共形理想极限下，将欧拉方程关于 λ^*展开至一阶可得

$$\begin{aligned} \partial_{\eta_s} \ln T_p &= -\frac{2\lambda^*}{3}\eta_s, \\ \frac{T_p(\tau,\eta_s)}{T_p(\tau,0)} &= \exp(-\lambda^*\eta_s^2/3) + O((\lambda^*)^2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

这是参考文献 [12] 中关于 $\Pi_d = 0$ 和 $\kappa = 3$的一阶 λ^*方程（2.25），当 $\chi = \lambda^*$时与方程（2.25）一致。在这一阶，理想压力梯度恰好维持了恒定的快度斜率，因此指定流满足两个守恒方程。在初始化时，方程（2.25）中的多项式剖面与该高斯函数的首次差异出现在（λ^*）阶$^2\eta_s^4$ 沿着

$\chi = \lambda^*$。高阶项、剪切和磁应力会改变动量平衡，因此指定的斜率不再满足动量方程。我们在第 χ 节，针对独立指定的 λ^* 和4.4，计算动量残差。

在存在动量残差的情况下，要维持给定的速度，就需要一个纵向约束力。它沿 u^μ 的投影为零，因此共动能量方程仍然决定 T_p。

4.2 黏性加速流

在磁场为零时，将给定的膨胀率代入NS能量方程可得

$$\Phi_p = \frac{4\eta_{\rm sh}}{3}\theta_p, \qquad \theta_p = \frac{1+\lambda^*}{\tau}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dT_p}{d\tau} + \frac{(1+\lambda^*)T_p}{3\tau} = \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)(1+\lambda^*)^2}{9\tau^2}.$$

对于 $m \neq 1$，两边乘以 τ^m 并从 τ_0 积分可得

$$T_p = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^m \left[T_0 + \frac{\mathcal{C}}{(1-m)\tau_0}\left(1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1-m}\right)\right],$$
$$m = \frac{1+\lambda^*}{3}, \qquad \mathcal{C} = \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)(1+\lambda^*)^2}{9}.$$

该解假设 $\eta_{\rm sh}/s$为常数。对于弱加速度， $m = (1+\lambda^*)/3$ 接近1/3。当 $\lambda^* \to 0$ 时，该解化为黏性Bjorken结果，即公式（3.3）；当 $\eta_{\rm sh}/s \to 0$时，则化为上文的理想加速解。对于 $\kappa = 3$ 且 $\Pi_d = 4(\eta_{\rm sh}/s)/3$时，黏性源项与参考文献 [12] 中公式（21）的结果一致，达到 λ^*的一阶。对该方程积分可得指数 $1 - m = (\kappa - 1 - \lambda^*)/\kappa$。在相应的系数中，同一参考文献的公式（22）包含 $\kappa - 1$，而不是 $\kappa - 1 - \lambda^*$。因此，这两个温度表达式在 $\lambda^*\Pi_d$阶上存在差异。

4.3 黏性磁性加速流

恢复横向场可得到NS能量方程

$$DT + \frac{T\theta}{3} - \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{9}\theta^2 + \frac{B^2}{12a_1T^3}\left[\theta - \frac{a\cosh(\Omega - \eta_s)}{\tau}\right] = 0. \tag{4.2}$$

在 $\eta_s = 0$处，反射对称性给出 $D = \partial_\tau$，且给定的斜率确定了 $\theta_p = （1+\lambda^*）/\tau$在所有时刻均成立。方程（2.13）和（2.17）随后化简为

$$\frac{dT_p}{d\tau} + \frac{(1+\lambda^*)T_p}{3\tau} = \frac{(1+\lambda^*)\Phi_p + (a-1-\lambda^*)B^2}{12a_1\tau T_p^3},$$
$$\tau_{\pi,p}\frac{d\Phi_p}{d\tau} + \Phi_p = \frac{4\eta_{{\rm sh},p}(1+\lambda^*)}{3\tau} - \frac{4\tau_{\pi,p}(1+\lambda^*)\Phi_p}{3\tau}. \tag{4.3}$$

For 在具有 $\Phi_p = 0$的指定流下，中快度处的能量方程形式为

$$\tau\frac{d\widetilde{\varepsilon}}{d\tau} + \frac{4}{3}(1+\lambda^*)\widetilde{\varepsilon} = \frac{B_0^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2a}\left[a - (1+\lambda^*)\right], \qquad \widetilde{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

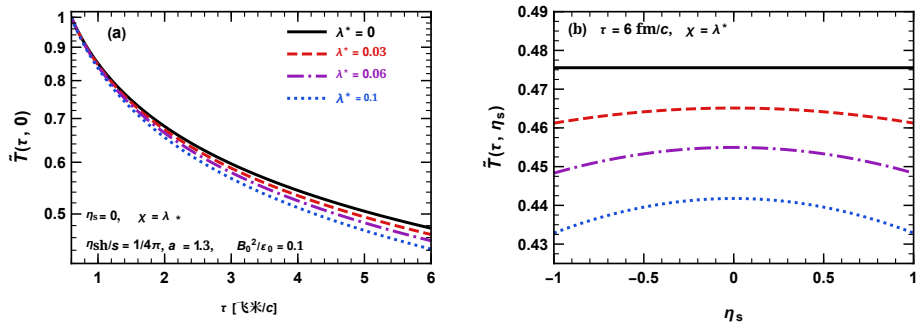

图2。在每个初始态中取 $\lambda^* = 0$，0。03，0。06，0。1 的指定加速流，且 $\chi = \lambda^*$。左：中心归一化温度。右： $\tau = 6$ fm/c处的温度分布，线型与左图相同。其他参数取参考值。

对于 $c_s^2 = 1/3$，该方程与参考文献 [11] 中的公式（12）在 $\eta_s = 0$处一致，其中磁化参数 σ_0 等于我们的 $B_0^2/\varepsilon_0 = \sigma/(3a_1)$。对于此流，磁通守恒要求$a = 1 + \lambda^*$。具有 $a = 1.3$ 的参考场衰减得比守恒磁通的磁场更快，因此会对物质做正功。在 $\lambda^* \to 0$的极限下，该方程给出公式（3.5）中的磁性比约肯解。在零场极限 $B_0 \to 0$下，它给出理想加速解 $\widetilde{T}_p = x^{-(1+\lambda^*)/3}$。计入纳维–斯托克斯剪切应力后，对于 $\Phi_p > 0$，纵向物质压强降至 $p - \Phi_p$，从而进一步减缓冷却。

在图 2中，指定斜率越大，中心膨胀率越高，中心温度越低。在这组扫描中，6 fm/c 处的分布也逐渐变窄，初始热曲率随 λ^*增大。在 $a = 1 + \lambda^*$ 处，对于此速度剖面，指定场在每个快度处均满足理想感应。

4.4 指定流的动量残差

我们由能量方程得到 T_p，其中 Ω_p 保持不变，然后沿着该解计算纵向动量方程。中快度附近，纵向动量守恒还要求演化中的温度曲率与指定的快度斜率相一致。我们将曲率定义为 $\chi_p(\tau) \equiv -\frac{3}{2}[\partial_{\eta_s}^2 \ln T_p]_0$，其中 $\chi_p(\tau_0) = \chi$，下标 0 表示在 $\eta_s = 0$处取值。为检验这一一致性条件，我们沿指定流解计算方程（2.14）的左端。根据反射对称性，$\mathcal{M}_p$ 关于 η_s 为奇函数，并在中快度处消失。因此，其首项系数为 $\mathcal{R} \equiv [\partial_{\eta_s}\mathcal{M}_p]_0$。

对于给定的快度 $\Omega_p = (1 + \lambda^*)\eta_s$，动量守恒的纵向投影涉及总纵向压强 $Q = a_1 T_p^4 + B^2/2 - \Phi_p$和有效惯性 $\mathcal{I} = 4a_1 T_p^4 + B^2 - \Phi_p$。残差形式为

$$\begin{aligned}\tau\mathcal{M}_p = {} & \sinh(\lambda^*\eta_s)\,\tau\partial_\tau Q + \cosh(\lambda^*\eta_s)\,\partial_{\eta_s} Q \\ & + (1+\lambda^*)\mathcal{I}\sinh(\lambda^*\eta_s).\end{aligned} \tag{4.4}$$

对 η_s 求导并在中快度处取值，得到

$$\tau\mathcal{R} = \lambda^*[\tau\partial_\tau Q]_0 + [\partial_{\eta_s}^2 Q]_0 + \lambda^*(1+\lambda^*)\mathcal{I}(\tau, 0). \tag{4.5}$$

中快度处的能量方程确定了物质压力的时间导数，

$$\tau\partial_\tau(a_1T_p^4) = -\frac{4}{3}(1+\lambda^*)a_1T_p^4 + \frac{(1+\lambda^*)\Phi_p + (a-1-\lambda^*)B^2}{3}. \tag{4.6}$$

反射对称性给出 $[\partial_{\eta_s}T_p]_0 = 0$。$\chi_p$ 的定义继而确定物质压力的快度曲率。指定场在 η_s中均匀，其时间导数由其幂律衰减决定。因此，

$$[\partial_{\eta_s}^2(a_1T_p^4)]_0 = -\frac{8}{3}\chi_p a_1 T_p^4, \qquad \tau\partial_\tau(B^2/2) = -aB^2. \tag{4.7}$$

下文中，中快度方程里的量均在 $\eta_s = 0$处取值。将这些关系代入方程（4.5），并定义剪切应力曲率 $C_\Phi \equiv [\partial_{\eta_s}^2\Phi_p]_0$，可得

$$\begin{aligned}\tau\mathcal{R} = {}& \frac{8}{3}a_1T_p^4\left[\lambda^*(1+\lambda^*) - \chi_p\right] \\ & + \lambda^*\left[\frac{2}{3}(1-a+\lambda^*)B^2 - \frac{2}{3}(1+\lambda^*)\Phi_p - \tau\partial_\tau\Phi_p\right] - C_\Phi.\end{aligned} \tag{4.8}$$

对于指定的快度和磁场历史，这个恒等式是精确成立的。要求 $\mathcal{M}_p$ 中 η_s 的一次项为零，即 $\mathcal{R} = 0$，即可确定所需曲率：

$$\begin{aligned}\chi_{\rm req}(\tau) = \lambda^*(1+\lambda^*) + \frac{3}{8a_1T_p^4}\Bigg\{\lambda^*\Bigg[&\frac{2}{3}(1-a+\lambda^*)B^2 \\ &- \frac{2}{3}(1+\lambda^*)\Phi_p - \tau\partial_\tau\Phi_p\Bigg] - C_\Phi\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

在理想无场极限下，所需曲率恰为 $\chi_{\rm req} = \lambda^*(1+\lambda^*)$，因此动量平衡要求 $\chi_p = \lambda^*$ 在一阶近似下成立。能量方程决定沿指定流演化的实际曲率：

$$\tau\frac{d\chi_p}{d\tau} = -2\lambda^*\chi_p, \qquad \chi_p(\tau) = \chi\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2\lambda^*}. \tag{4.10}$$

即使 $\chi = \chi_{\rm req}$ 在初始时成立，演化中的曲率也会产生量级为 $(\lambda^*)^2\ln(\tau/\tau_0)$ 的偏差，并通过方程（4.8）产生动量残差。剪切和磁应力会在 χ_p 的演化中引入额外项，并改变这一幂律。

为得到 C_Φ 的演化方程，我们对方程（2.17）关于 η_s 求两次导数，并在中快度处求值。我们使用 $\tau_\pi = c_\pi(\eta_{\rm sh}/s)/T_p$，$\theta_p = (1+\lambda^*)\cosh(\lambda^*\eta_s)/\tau$，以及 $[\partial_{\eta_s}^2\ln T_p]_0 = -2\chi_p/3$。保留各项中关于 λ^* 和 χ_p 的一阶项，包括与 $\lambda^*\chi_p$成正比的混合项，可得

$$\begin{aligned}&\tau_\pi\partial_\tau C_\Phi + C_\Phi + \frac{2\lambda^*\tau_\pi}{\tau}C_\Phi + \frac{2\chi_p\tau_\pi}{3}\partial_\tau\Phi_p \\ &\qquad = -\frac{8\chi_p(1+\lambda^*)}{3\tau}\eta_{\rm sh} - \frac{4(1+\lambda^*)\tau_\pi}{3\tau}\left(C_\Phi + \frac{2\chi_p}{3}\Phi_p\right).\end{aligned} \tag{4.11}$$

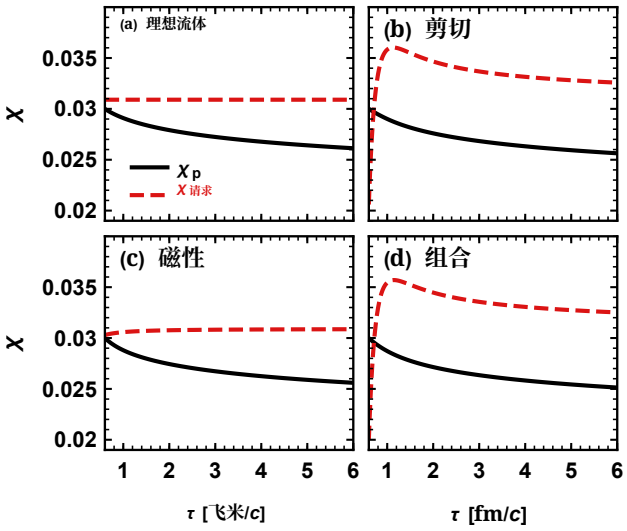

图3. 指定流在 $\lambda^* = \chi_p(\tau_0) = 0.03$ 下的中心温度曲率，其中（a）为理想流体，（b）为仅剪切，（c）为仅磁性，以及（d）为组合应力。实线表示演化后的曲率χ_p，虚线表示 $\chi_{\rm req}$方程（4.9）的 $3\tau\mathcal{R}/(8a_1T_p^4)$。二者的垂直间距等于

图 3 比较了 χ_p 与方程（4.9）所需的曲率，展示了四种应力情况下的结果。根据方程（4.9），$\tau\mathcal{R} = \frac{8}{3}a_1T_p^4(\chi_{\rm req} - \chi_p)$，因此两条曲线之间的差距反映了动量残差。在第一个 fm/c之后，χ_p 在所有四种情况下都低于 $\chi_{\rm req}$，因此指定流持续存在动量残差。有限剪切和磁应力会改变动量平衡所需的曲率，因为它们的梯度与热压强梯度共同起作用。

5 自洽加速流

第 4.4 节中得到的压强分布通常无法维持恒定的快度斜率。现在，我们从相同的初始分布出发，令动量守恒方程使速度随时间演化。理想极限展示了在剪切或磁功影响冷却之前，压力梯度如何改变中心膨胀率。

5.1 理想极限下的压力梯度机制

我们首先考虑不存在磁场的理想共形流体。此时，能量方程和纵向动量方程可化为

$$\begin{aligned} D\ln T + \frac{\theta}{3} &= 0, \\ D\Omega + n^\mu\partial_\mu \ln T &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

纵向压力梯度通过 $D\Omega = -n^\mu\partial_\mu \ln T$驱动流体快度的演化。由此产生的流决定膨胀率 θ，进而决定共动冷却率 $D\ln T = -\theta/3$。因此，我们将两个场都围绕 Bjorken解展开，同时保留其完整的固有时依赖性，从而联立求解 T 和 Ω

背景。在方程 (2.25) 中，初始条件指定了两个独立的扰动：初始流体快度斜率高于比约肯值的部分 λ^*，以及初始温度曲率 χ。在线性阶，这些扰动产生的响应可以相加，因此我们写作

$$\begin{aligned} \ln \frac{T(\tau,\eta_s)}{T(\tau,0)} &= -\frac{\chi\eta_s^2}{3}, \\ \Omega(\tau,\eta_s) &= \kappa_\Omega(\tau)\eta_s. \end{aligned} \tag{5.2}$$

在这一阶，曲率 χ 保持不变，而能量方程使用 $\theta = \kappa_\Omega/\tau$。动量方程的两项为

$$D\Omega = \frac{\eta_s}{\tau}\left[\kappa_\Omega - 1 + \tau\frac{d\kappa_\Omega}{d\tau}\right], \qquad n^\mu\partial_\mu \ln T = -\frac{\eta_s}{3\tau}\left(\kappa_\Omega - 1 + 2\chi\right),$$

其中，第二个关系式右侧的第一项来自相对于米尔恩参考系运动的流体微元所经历的冷却，第二项则来自压力梯度。因此，方程（5.1）给出

$$\begin{aligned} \tau\frac{d}{d\tau}\ln\frac{T(\tau,0)}{T_0(\tau_0/\tau)^{1/3}} &= -\frac{\kappa_\Omega - 1}{3}, \\ \tau\frac{d\kappa_\Omega}{d\tau} + \frac{2}{3}(\kappa_\Omega - 1) &= \frac{2}{3}\chi. \end{aligned} \tag{5.3}$$

将第二个方程乘以 $(\tau/\tau_0)^{2/3}$，并利用 $\kappa_\Omega(\tau_0) = 1 + \lambda^*$，得到

$$\kappa_\Omega(\tau) = 1 + \chi + (\lambda^* - \chi)\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2/3}. \tag{5.4}$$

在这一阶，斜率从初始值 $1 + \lambda^*$ 趋向 $1 + \chi$，即压力梯度所支持的值，而初始速度超额的影响则按 $(\tau_0/\tau)^{2/3}$ 衰减。因此，当 $\lambda^* > \chi$ 时，斜率减小；当 $\lambda^* < \chi$ 时，斜率增大。从 $T(\tau_0,\ 0) = T_0$ 对第一个方程积分，得到

$$\ln\frac{T(\tau,0)}{T_0(\tau_0/\tau)^{1/3}} = -\frac{\chi}{3}\ln\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{\lambda^* - \chi}{2}\left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2/3}\right]. \tag{5.5}$$

在晚期，中心冷却由 χ 而非 λ^* 控制，而指定流相对于比约肯流的冷却规律为 $(\tau_0/\tau)^{\lambda^*/3}$。

图 4 表明，斜率随 $\lambda^* < \chi$ 增大，随 $\lambda^* > \chi$减小。在 $\lambda^* = \chi$ 处，一阶近似下斜率保持不变；非线性解保留了有限振幅修正。解析温度与数值温度之间存在高于所保留阶数的项，即使两者的曲线几乎重合。

5.2 压强梯度与演化中的速度场

对于 $\chi = \lambda^*$，理想快度斜率在一阶近似下保持不变。我们采用这一初始分布，考察剪切和磁应力如何改变斜率。我们先考虑瞬时纳维–斯托克斯剪切，随后以有限弛豫时间演化 Φ。

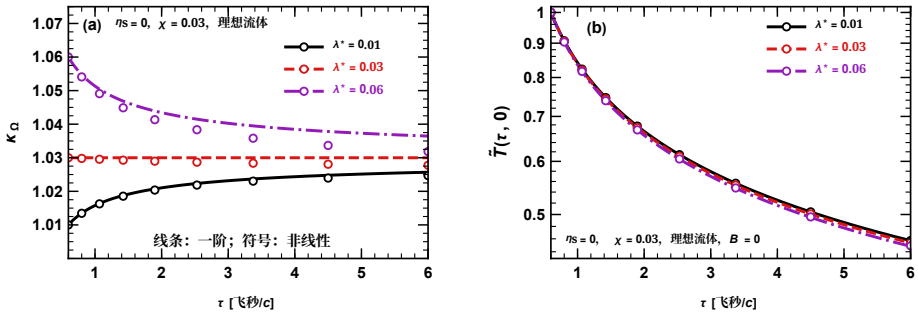

图4. 固定初始曲率下的理想自洽流 $\chi = 0.03$. 左：对于 $\lambda^* = 0.01$, 0．03, 0．06，中心快度斜率。右：中心归一化温度。实线为一阶解析结果，公式（5.4）和（5.5）；空心符号表示选定时刻的非线性理想演化。

在初始梯度展开的每一阶，纳维–斯托克斯系数方程都保留对 $\eta_{\rm sh}/s$ 和 B_0^2的完整依赖。其积分形式明确呈现了压强项和惯性项，并为剪切弛豫计算提供了参考。

在这一参数展开中，上标 (0) 表示在 $\lambda^* = \chi = 0$ 处的纵向推进不变背景，其中 $\eta_{\rm sh}/s$、B_0^2 和 a 固定为选定值。上标 (1) 表示沿 $\chi = \lambda^*$ 对 λ^* 求导，并在 $\lambda^* = 0$ 处取值。附录 A.4 分别处理 χ 和 λ^*，因此对每个初始参数都使用单独的一阶系数。本文采用单参数约定，记作

$$T = T^{(0)} + \lambda^* T^{(1)} + \mathcal{O}((\lambda^*)^2), \tag{5.6}$$

$$\Omega = \eta_s + \lambda^* \Omega^{(1)} + \mathcal{O}((\lambda^*)^2), \tag{5.7}$$

$$\eta_{\rm sh}^{(0)} = 4a_1(\eta_{\rm sh}/s)(T^{(0)})^3. \tag{5.8}$$

因此， $T^{(0)}$ 是纵向推进不变背景的温度，其中已包含剪切黏度和磁应力。系数 $T^{(1)}$ 和 $\Omega^{(1)}$ 分别表示单位 λ^*对应的一阶温度响应和快度响应，因此实际修正项为 $\lambda^* T^{(1)}$ 和λ^* $\Omega^{(1)}$。

温度与动量的耦合演化。零加速度背景满足

$$\tau\partial_\tau T^{(0)} + \frac{T^{(0)}}{3} - \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{9\tau} + \frac{(1-a)B^2}{12a_1(T^{(0)})^3} = 0. \tag{5.9}$$

背景从 $T^{(0)}(\tau_0) = T_0$开始，其剪切系数 $\eta^{(0)}{}_{\rm sh} = 4a_1(\eta_{\rm sh}/s)(T^{(0)})^3$由方程 (2.6给出。分别沿 λ^*对两个守恒方程求一次导数，在坐标 $\chi = \lambda^*$、 τ_0、 T_0、 $\eta_{\rm sh}/s$和 B_0^2固定时，得到 a

$$\begin{aligned}\tau\partial_\tau T^{(1)} &+ \left[\frac{1}{3} + \frac{(a-1)B^2}{4a_1(T^{(0)})^4}\right] T^{(1)} \\ &+ \left[\frac{T^{(0)}}{3} + \frac{B^2}{12a_1(T^{(0)})^3} - \frac{8(\eta_{\rm sh}/s)}{9\tau}\right] \partial_{\eta_s}\Omega^{(1)} = 0.\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\tau\partial_\tau\left\{\tau^2\left[4a_1(T^{(0)})^4+B^2-\frac{16a_1(\eta_{\rm sh}/s)(T^{(0)})^3}{3\tau}\right]\Omega^{(1)}\right\}$$
$$+4a_1\tau^2(T^{(0)})^3\left(1-\frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{\tau T^{(0)}}\right)\partial_{\eta_s}T^{(1)} \tag{5.11}$$
$$-\frac{16}{3}a_1(\eta_{\rm sh}/s)\tau(T^{(0)})^3\partial^2_{\eta_s}\Omega^{(1)}=0.$$

利用方程 (5.9)，动量方程已写成守恒形式。方程 (2.25) 的初始数据与 $\chi=\lambda^*$ 给出

$$T^{(1)}\big|_{\tau_0}=-\frac{T_0}{3}\eta_s^2,\qquad \Omega^{(1)}\big|_{\tau_0}=\eta_s. \tag{5.12}$$

方程（5.10）和（5.11）保留了二次温度修正和线性快度修正，因此有

$$T^{(1)}(\tau,\eta_s)=T^{(1)}(\tau,0)+\frac{\eta_s^2}{2}\,\partial^2_{\eta_s}T^{(1)}\big|_0, \tag{5.13}$$
$$\Omega^{(1)}(\tau,\eta_s)=\eta_s\,\partial_{\eta_s}\Omega^{(1)}\big|_0, \tag{5.14}$$

其中，$|_0$ 表示在每个 τ处对 $\eta_s=0$ 进行求值。η_s 的高次幂在 λ^*的二阶项中才首次出现。因此，问题可归结为三个时间依赖系数：中心温度修正、温度曲率和快度斜率。曲率提供驱动斜率的压力梯度，而斜率又以相同阶数反馈到温度方程中，这就是为什么必须将两个场一同展开。

5.2.1 压强力与温度求积

横向磁场会对纵向惯性产生贡献，并改变背景温度。由于在固定 $\eta_{\rm sh}/s$下 $\eta_{\rm sh}\propto T^3$，这一温度变化也会改变剪切应力。我们首先确定背景，然后确定热曲率、快度斜率，最后确定中心温度修正。

首先，背景方程具有积分因子形式

$$T^{(0)}=\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/3}\left\{T_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right)^{1/3}\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{(a-1)B^2(\tau')}{12a_1[T^{(0)}(\tau')]^3}+\frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{9\tau'}\right]\frac{d\tau'}{\tau'}\right\}. \tag{5.15}$$

由于磁源项取决于 $T^{(0)}$ 自身，方程（5.15）是一个隐式积分方程，等价于一个单一的一阶常微分方程，我们对其进行数值积分。当磁场或黏度为零时，它化为方程（3.3）和（3.5）的闭式解。一旦已知 $T^{(0)}$，曲率、速度斜率和中心温度修正便可依次通过显式求积求得。对方程（5.10）取两次快度导数，得到

$$\left[\tau\partial_\tau+\frac{1}{3}+\frac{(a-1)B^2}{4a_1(T^{(0)})^4}\right]\partial^2_{\eta_s}T^{(1)}\Big|_0=0. \tag{5.16}$$

该线性方程的积分因子在 τ_0处归一化为 1，其表达式为

$$\mathcal{I}_T(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/3} \exp\left[\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(a-1)B^2(\tau')}{4a_1[T^{(0)}(\tau')]^4}\frac{d\tau'}{\tau'}\right]. \tag{5.17}$$

它记录了初始温度曲率累积的稀释效应。初始热曲率决定了

$$\partial_{\eta_s}^2 T^{(1)}\Big|_0 = -\frac{2T_0}{3\mathcal{I}_T(\tau)}. \tag{5.18}$$

纵向动量方程随后确定快度斜率。在方程（5.11）两端对快度求一次导数，可在中心处消去线性多项式部分中的最后一项。所得方程及其积分为

$$\begin{aligned}
&\tau\partial_\tau\left[\tau^2\left(4a_1(T^{(0)})^4 + B^2 - \frac{16a_1(\eta_{\rm sh}/s)(T^{(0)})^3}{3\tau}\right)\partial_{\eta_s}\Omega^{(1)}\Big|_0\right] \\
&\quad = -4a_1\tau^2(T^{(0)})^3\left(1 - \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{\tau T^{(0)}}\right)\partial_{\eta_s}^2 T^{(1)}\Big|_0 .
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
&\tau^2\left[4a_1(T^{(0)})^4 + B^2 - \frac{16a_1(\eta_{\rm sh}/s)(T^{(0)})^3}{3\tau}\right]\partial_{\eta_s}\Omega^{(1)}\Big|_0 \\
&\quad = \tau_0^2\left[4a_1T_0^4 + B_0^2 - \frac{16a_1(\eta_{\rm sh}/s)T_0^3}{3\tau_0}\right] \\
&\qquad - \int_{\tau_0}^{\tau}\tau'^2 4a_1[T^{(0)}(\tau')]^3\left[1 - \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{\tau' T^{(0)}(\tau')}\right] \\
&\qquad\quad \times \partial_{\eta_s}^2 T^{(1)}\Big|_0(\tau')\frac{d\tau'}{\tau'}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

积分常数由 $\Omega^{(1)}$的单位初始斜率确定。斜率前的括号项是背景的有效纵向惯性，即总能量密度加上总纵向压强，$\varepsilon + B^2/2 + (p - \Phi^{(0)} + B^2/2)$，其中 $\Phi^{(0)} = 4\eta^{(0)}{}_{\rm sh}/(3\tau)$。只要 $(\eta_{\rm sh}/s)/(T^{(0)}\tau) < 3/4$，它就保持为正；在我们的取值范围内这一条件始终成立，因为该比值至多为 0.04。由于右侧仅涉及 $T^{(0)}$ 以及上文求得的曲率，因此斜率可直接除以该因子得到。负的温度曲率会使被积函数为负，从而增大斜率。

最后，方程（5.10）服从

$$\begin{aligned}
&\left[\tau\partial_\tau + \frac{1}{3} + \frac{(a-1)B^2}{4a_1(T^{(0)})^4}\right]T^{(1)}(\tau,0) \\
&\quad = -\left[\frac{T^{(0)}}{3} + \frac{B^2}{12a_1(T^{(0)})^3} - \frac{8(\eta_{\rm sh}/s)}{9\tau}\right]\partial_{\eta_s}\Omega^{(1)}\Big|_0 .
\end{aligned} \tag{5.21}$$

它具有相同的积分因子 $\mathcal{I}_T$，且中心初始温度修正为零。将其积分与曲率结合可得

$$\begin{aligned}
T^{(1)}(\tau,\eta_s) = -\frac{1}{\mathcal{I}_T(\tau)}\Bigg\{&\frac{T_0\eta_s^2}{3} + \int_{\tau_0}^{\tau}\mathcal{I}_T(\tau')\left[\frac{T^{(0)}(\tau')}{3} + \frac{B^2(\tau')}{12a_1[T^{(0)}(\tau')]^3} - \frac{8(\eta_{\rm sh}/s)}{9\tau'}\right] \\
&\times \partial_{\eta_s}\Omega^{(1)}\Big|_0(\tau')\frac{d\tau'}{\tau'}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

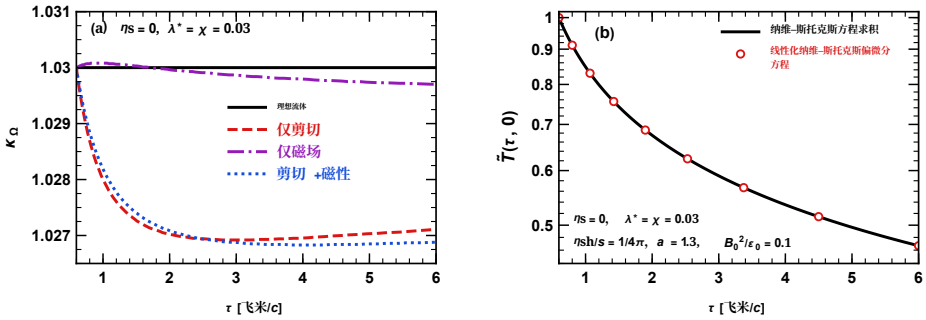

图 5。沿 $\chi = \lambda^* = 0.03$ 的一阶纳维–斯托克斯磁黏性解。左：无应力、仅剪切、仅磁应力以及两种应力同时存在时的中心快度斜率。右：求积解给出的归一化中心温度；空心符号还显示了线性化纳维–斯托克斯偏微分方程的数值演化。有限应力参数取其参考值。

因此，背景温度、热曲率、快度斜率和中心温度构成一个顺序初值问题。一阶温度为

$$T(\tau, \eta_s) = T^{(0)}(\tau) + \lambda^* T^{(1)}(\tau, \eta_s) + \mathcal{O}((\lambda^*)^2). \tag{5.23}$$

方程（5.15）、（5.18）、（5.20）和（5.22）通过求积给出联合解。

在理想无场极限（$\eta_{\rm sh} = B_0 = 0$）下，沿$\chi = \lambda^*$的解化为方程（5.4）。流体快度斜率在一阶近似下仍为 $1 + \lambda^*$，温度则与参考文献 [12]中的共形弱加速结果一致。在快度推进不变极限（$\lambda^* = \chi = 0$）下，温度满足参考文献 [7]所给的、具有给定磁场的比约肯流纳维–斯托克斯方程。

除这些极限情况外，流体快度斜率通常会随固有时演化。为单独考察这种演化对温度的影响，我们将零磁场解与文献 [12]中的黏性给定流解进行比较，并将无黏解与文献 [11]中的磁场给定流解进行比较。在每组比较中，两种流动采用相同的状态方程、磁场历史和初始分布。

图5中的曲线给出了纳维–斯托克斯方程求积解。温度图中的空心符号来自对线性化纳维–斯托克斯方程进行的有限差分演化。

5.2.2 独立的初始加速度与热曲率

上述纳维–斯托克斯求积取 $\chi = \lambda^*$。由于一阶方程是线性的，它们同样适用于独立初始梯度。我们将物理一阶修正写为 δT 和 $\delta\Omega$，其初始数据为 $\delta T = -T_0\chi\eta_s^2/3$ 和 $\delta\Omega = \lambda^*\eta_s$。背景和积分因子保持不变，齐次曲率方程给出

$$\partial_{\eta_s}^2 \delta T\big|_0 = -\frac{2T_0\chi}{3\mathcal{I}_T(\tau)}. \tag{5.24}$$

对于 $\delta\kappa_\Omega = \partial_{\eta_s}\delta\Omega|_0$，动量求积为

$$\begin{aligned}
&\tau^2\left[4a_1(T^{(0)})^4 + B^2 - \frac{16a_1(\eta_{\rm sh}/s)(T^{(0)})^3}{3\tau}\right]\delta\kappa_\Omega(\tau)\\
&= \tau_0^2\left[4a_1T_0^4 + B_0^2 - \frac{16a_1(\eta_{\rm sh}/s)T_0^3}{3\tau_0}\right]\lambda^*\\
&\quad - \int_{\tau_0}^{\tau} 4a_1t^2[T^{(0)}(t)]^3\left[1 - \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{tT^{(0)}(t)}\right]\partial_{\eta_s}^2\delta T\big|_0(t)\frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

积分常数承载初始速度超额 λ^*，而积分承载初始热曲率 χ。随后，中心能量方程给出

$$\begin{aligned}
\delta T(\tau,0) = &-\frac{1}{\mathcal{I}_T(\tau)}\int_{\tau_0}^{\tau}\mathcal{I}_T(t)\times\left[\frac{T^{(0)}(t)}{3} + \frac{B^2(t)}{12a_1[T^{(0)}(t)]^3} - \frac{8(\eta_{\rm sh}/s)}{9t}\right]\times\delta\kappa_\Omega(t)\frac{dt}{t},\\
\delta T(\tau,\eta_s) &= \delta T(\tau,0) - \frac{T_0\chi\eta_s^2}{3\mathcal{I}_T(\tau)}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

设定 $\chi = \lambda^*$ 可恢复第 5.2.1 节中的单参数解。对于磁场和剪切黏度均为零的情况，背景遵循 Bjorken 冷却：$T^{(0)} = T_0(\tau_0/\tau)^{1/3}$，$\mathcal{I}_T = (\tau/\tau_0)^{1/3}$，且惯性因子为 $4a_1(T^{(0)})^4\tau^2 \propto \tau^{2/3}$。方程（5.25）随后给出

$$\delta\kappa_\Omega = \lambda^*\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2/3} + \chi\left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2/3}\right], \tag{5.27}$$

即方程（5.4）。第一项是初始速度超额，其纵向动量$\tau^2(\varepsilon + p)\,\delta\kappa_\Omega$守恒；由于惯性增长为 $\tau^{2/3}$，斜率超额按（τ_0/τ）$^{2/3}$衰减。第二项是由曲率 χ的压力梯度建立起来的速度，该速度在晚期趋近于 χ。将此斜率代入方程（5.26）得到$\delta T(\tau, 0/T^{(0)} = -\frac{1}{3}\int_{\tau_0}^{\tau}\delta\kappa_\Omega\,dt/t$，即方程（5.5）的线性化形式。

5.3 具有剪切弛豫的非线性演化

有限的弛豫时间使压力各向异性滞后于不断变化的膨胀率。在 $\Phi_0 = 0$的基础上，我们现在使用方程（ T、涡量 Ω 和 Φ，通过方程（2.13）、（2.14）和（2.17）同时进行演化。附录 A 介绍了线法及其验证。

在图6中，中心温度在所示的四个固有时之间下降。在右图中，涡量 $\Omega - \eta_s$ 在中快度处的切线斜率为 $\kappa_\Omega - 1$。两个中心膨胀率之差为 $[\kappa_\Omega - (1 + \lambda^*)]/\tau$。

偏离中快度时，平流会对固定 η_s处的温度变化产生影响：

$$\partial_\tau T = \frac{DT}{\cosh(\Omega - \eta_s)} - \frac{\tanh(\Omega - \eta_s)}{\tau}\partial_{\eta_s}T. \tag{5.28}$$

对于相对于米尔恩参考系向外运动、且温度向正快度方向降低的情况，对流项会将更热的物质带向外部。它在反射中心处消失。在理想弱梯度解中，前导乘积同时包含 $\lambda^*\chi$ 和 χ^2，因为初始热曲率本身会产生速度扰动。

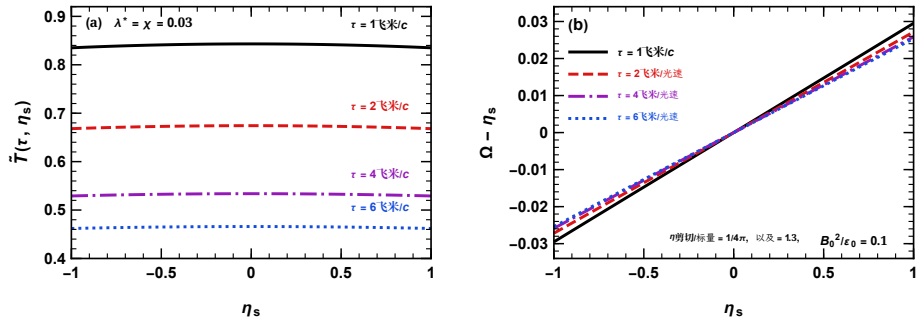

图 6。非线性标量剪切弛豫解的快度分布，见 $\lambda^* = \chi = 0.03$。左：$\tilde{T}(\eta_s)$ 在 $\tau \simeq 1$、2、4 和 6 飞米/c。右：$\Omega - \eta_s$ 在相同时间。参数采用其参考值。

6 规定流与自洽流

纵向动量平衡的不匹配会改变膨胀率，而其热效应取决于由此产生的膨胀变化如何累积。对于具有相同初始温度、快度、剪切应力和磁场分布的自洽演化与指定演化，我们首先评估中心温度差（图 7），然后将其分解为膨胀功、剪切源项和磁源项（图 8），最后确定等温条件如何随固有时、梯度幅度和初始剪切发生偏移（图 9）。

6.1 中心温度差

我们将中心温度差和两个快度斜率记为

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_s - T_p, \\ \kappa_{\Omega,s} &= \partial_{\eta_s}\Omega_s|_0\,, \qquad \kappa_{\Omega,p} = 1 + \lambda^*, \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 s 和 p 分别表示自洽流和规定流的历史轨迹。对于 $\Delta T > 0$，自洽流体在中快度处温度更高。在理想极限下，从方程（$\widetilde{T}_p = x^{-(1+\lambda^*)}$ /3中的一阶温度减去 5.5）得到

$$\frac{\Delta T}{T_0(\tau_0/\tau)^{1/3}} = \frac{\lambda^* - \chi}{3}\left\{\ln\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2/3}\right]\right\} + \mathcal{O}\big((\lambda^*)^2, \lambda^*\chi, \chi^2\big). \tag{6.2}$$

中心温度及其一阶时间导数在初始时相同，这是因为两种流都从相同的膨胀率开始。写成 $\xi = \ln(\tau/\tau_0)$ 后，方程（ξ 6.2）的微小膨胀展开以（$\lambda^* - \chi$）$\xi^2/9$ 开头，这是关于初始梯度的一阶项。因此，斜率的变化先于中心温度的分离。

对于 $\tau > \tau_0$，大括号中的项为正，因此 ΔT 与 $\lambda^* - \chi$同号。当$\lambda^* > \chi$时，流体快度斜率从其指定值开始减小。随后，流体做的纵向膨胀功减少，并且在中快度处的温度高于指定流中的温度。当 $\chi > \lambda^*$时，初始温度曲率产生压力梯度，使快度分布变陡，从而增加膨胀功并增强冷却。

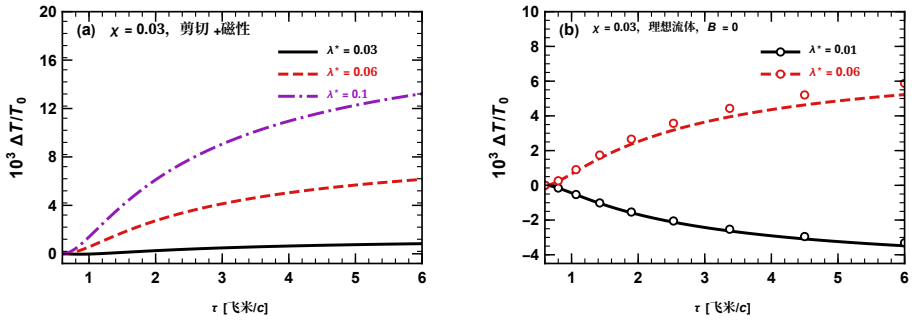

图 7。自洽流与指定流之间的中心温度差。左图：参考磁性应力和剪切应力，固定 $\chi = 0.03$，以及 $\lambda^* = 0.03$，0。06，0。1。右图：在 $\chi = 0.03$ 下的理想零场差异，其中 $\lambda^* = 0.01$，0。06。右图中的曲线为方程（6.2）；空心符号表示非线性计算。

在较晚时刻，一阶理想解给出了相对温度差的对数依赖，

$$\frac{\Delta T}{T_{\rm Bj}} \simeq \frac{\lambda^* - \chi}{3}\left[\ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{3}{2}\right], \qquad \tau \gg \tau_0. \tag{6.3}$$

瞬态衰减后，自洽快度斜率与给定快度斜率之差趋近于 $-(\lambda^* - \chi)$。因此，中快度膨胀率的相应差异按 $1/\tau$缩放。将这一贡献积分到冷却率中，得到方程（6.3）中的对数项。

对于 $\lambda^* = \chi = 0.03$，ΔT 的理想流体一阶贡献消失。非线性理想演化在 $\tau = 6$ fm/c 时给出 $\Delta T/T_0 = 3.64 \times 10^{-4}$，从而在此极限下分离出有限振幅修正。在相同的固有时，$\Delta T/T_0$ 仅有剪切时为 8.28×10^{-4}，仅有磁应力时为 3.79×10^{-4}，同时存在两种应力时为 8.35×10^{-4}。在参考参数下，剪切使理想温度差增加了一倍以上。加入磁应力后，无黏情形下 $\Delta T/T_0$ 增加了 0.15×10^{-4}，有黏情形下增加了 0.07×10^{-4}。因此，磁性对温度差的贡献取决于是否存在剪切。

图7 首先展示了固定初始曲率下的有限应力比较。增大λ^* 会增大相对于指定流的晚期正温度差。右图中的理想流体比较展示了方程（6.2）所预测的两种符号；符号与直线的偏离是有限振幅修正。尽管温度差不断增大，两条历史轨迹中的温度都在降低。

6.2 膨胀功与温度平衡

相同的初始态会形成不同的中心温度，因为两种速度斜率产生了不同的膨胀率 $\theta = \kappa_\Omega/\tau$，从而产生不同的膨胀功。

一个从 $\eta_{s,\,0}$ 出发的流体元以四速度运动，因此其轨迹满足$d\eta_s/d\tau = u^{\eta_s}/u^\tau$：

$$\frac{d\eta_s}{d\tau} = \frac{\tanh(\Omega - \eta_s)}{\tau}, \qquad \eta_s(\tau_0) = \eta_{s,0}. \tag{6.4}$$

由于 D 是相对于该流体元自身固有时的导数，且 $u^\tau = \cosh(\Omega - \eta_s)$，沿轨迹在 Milne 时间中的变化为 $dT/d\tau = DT/u^\tau$。该流体元的静止系体积满足

$$\begin{aligned} DV &= \theta V, \\ \frac{d\ln(V/V_0)}{d\tau} &= \frac{\theta}{\cosh(\Omega - \eta_s)}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

此处 V 表示同一流体元的静止系体积，V_0 表示其初始值；正的θ 会使该流体元膨胀。将方程（6.5）与能量方程结合，可得温度与该体积的关系：

$$D\left[T\left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/3}\right] = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/3}\left(DT + \frac{T\theta}{3}\right). \tag{6.6}$$

右侧的非绝热源项来自温度方程（2.13）。该源项为零时，$TV^{1/3}$ 保持恒定，如理想 Bjorken 流中那样。因此，偏离 $T \propto V^{-1/3}$ 的程度反映了剪切造成的加热，以及与指定场之间的能量交换。

在反射中心，该流体元保持在 $\eta_s = 0$，其中 $u^\tau = 1$，由方程可得 (2.5)

$$\frac{d\ln(V/V_0)}{d\ln\tau} = \tau\theta(\tau, 0) = \partial_{\eta_s}\Omega|_0 = \kappa_\Omega(\tau). \tag{6.7}$$

因此，中心斜率决定了中心流体元的体积增长。其初始值为 $1 + \lambda^*$，而动量平衡决定了它之后的演化。对于指定的磁场历史，局部源项如方程（2.28）所示。当 $a > \kappa_\Omega$ 时，磁功提供能量；当 $a < \kappa_\Omega$时，磁功则提取能量。对于无黏流体，只有当 $B^2(a - \kappa_\Omega) > (\varepsilon + p)\kappa_\Omega$时，温度才会上升。纳维-斯托克斯剪切源项为 $4(\eta_{\rm sh}/s)\kappa_\Omega^2/(9\tau^2)$，而当 $\Phi_0 = 0$时，弛豫源项从零开始。

6.2.1 温度差的源项分解

积分方程（6.7）得

$$\frac{V(\tau)}{V_0} = \exp\left[\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\kappa_{\Omega,s}(t)}{t}\,dt\right]. \tag{6.8}$$

对于理想零场流体，$TV^{1/3}$ 为常数。考虑剪切和磁功后，沿一条历史轨迹对中心温度方程（2.28）积分，得到方程（6.9）；从自洽历史轨迹中减去指定的历史轨迹，得到方程（6.10）：

$$T(\tau) - T_0 = -\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\kappa_\Omega(t)T(t)}{3t}\,dt + \int_{\tau_0}^{\tau}S_\eta(t)\,dt + \int_{\tau_0}^{\tau}S_B(t)\,dt. \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} \Delta T = &-\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\kappa_{\Omega,s}T_s - \kappa_{\Omega,p}T_p}{3t}\,dt \\ &+\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{1}{12a_1 t}\left(\frac{\Phi_s\kappa_{\Omega,s}}{T_s^3} - \frac{\Phi_p\kappa_{\Omega,p}}{T_p^3}\right)dt \\ &+\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{B^2(t)}{12a_1 t}\left(\frac{a - \kappa_{\Omega,s}}{T_s^3} - \frac{a - \kappa_{\Omega,p}}{T_p^3}\right)dt. \end{aligned} \tag{6.10}$$

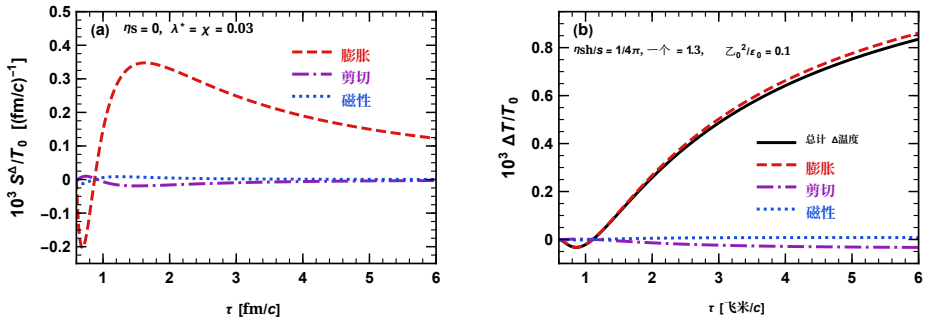

图 8. 在 $\lambda^* = \chi = 0.03$ 处，同一对历史轨迹的温度平衡。左：将共同稀释项移至左侧后，膨胀、剪切和磁源项的源项差异。右：它们的加权积分，以及非线性演化产生的温度差。所有量均以 T_0 归一化。

方程（6.10）中的三个积分分别表示两条历史轨迹之间膨胀冷却、剪切加热和磁功的差异。每个速率都沿其对应的历史轨迹计算，因此，任一应力的变化都会通过改变流动和温度影响全部三个积分。因此，该能量收支仍保留应力之间的动力学耦合。

原始收支的第一项积分结合了斜率差和温度差的影响。通过单独考察 ΔT 本身的稀释，我们将这些贡献分离开来：

$$\begin{aligned} &\kappa_{\Omega,s} T_s - \kappa_{\Omega,p} T_p = \kappa_{\Omega,s} \Delta T + (\kappa_{\Omega,s} - \kappa_{\Omega,p}) T_p, \\ &\frac{d\Delta T}{d\tau} + \frac{\kappa_{\Omega,s}}{3\tau} \Delta T = S^{\Delta}_{\exp} + S^{\Delta}_{\eta} + S^{\Delta}_{B}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

这里，膨胀源 $S^{\Delta}_{\exp} = -(\kappa_{\Omega,\,s} - \kappa_{\Omega,\,p}) T_p/(3\tau)$ 表示完全由斜率差引起的额外冷却，而 S^{Δ}_{η} 和 S^{Δ}_{B} 分别是剪切率和磁率的差异。乘以 $\exp[\int_{\tau_0}^{\tau} \kappa_{\Omega,s}(t)dt/(3t)]$ 并进行积分，即可得到加权收支。这两种收支形式都是对同一温度方程的精确重排；加权形式还额外考虑了后续膨胀对各项贡献的稀释：

$$\begin{aligned} \Delta T_j(\tau) &= \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left[-\int_{t}^{\tau} \frac{\kappa_{\Omega,s}(t')}{3t'} dt' \right] S^{\Delta}_{j}(t) dt, \\ \Delta T &= \Delta T_{\exp} + \Delta T_{\eta} + \Delta T_{B}, \quad j \in \{\exp, \eta, B\}, \end{aligned} \tag{6.12}$$

其中 S^{Δ}_{j}表示上文定义的三个源项差异。

图8 表明，膨胀功主导温度差。在 6 fm/c时，膨胀、剪切和磁场贡献分别为 0。559、-0.0215和 0。00524 兆电子伏，因此 $\Delta T \simeq 0.543$ 兆电子伏。剪切和磁场的直接贡献很小，但这两种应力也会通过改变斜率，进而改变膨胀项，间接影响温度。

动量残差和中心温度差反映了指定流近似的不同方面：残差衡量给定固有时下中快度附近的局部力不平衡。要使较晚时刻的中心温度相等，方程（6.12）中的加权源项差异必须在整个膨胀历史中积分为零。

因此，持续存在的局部动量残差可以与较小的累积温度误差并存。

6.3 初始梯度与移动抵消条件

初始加速度和初始温度曲率以相反的符号影响冷却差异，而二者的竞争决定两个中心温度何时相等。在一阶近似下，它们的贡献线性相加：

$$T_{s,\mathrm{order\,1}} - T_{p,\mathrm{order\,1}} = \lambda^* \left.\frac{\partial(T_s - T_p)}{\partial \lambda^*}\right|_{\lambda^*=\chi=0} + \chi \left.\frac{\partial(T_s - T_p)}{\partial \chi}\right|_{\lambda^*=\chi=0}. \tag{6.13}$$

在 $\tau = 6$ fm/c 以及参考参数下，附录 A.4的系数计算给出

$$\Delta T^{(1)} = [109.36\lambda^* - 98.45\chi]\ \mathrm{MeV}. \tag{6.14}$$

在一阶近似下，两个中心温度在 $\tau = 6$ fm/c 处、满足 $\chi/\lambda^* \simeq 1.11$ 时相等；这是一个终端积分条件，它平衡了整个区间内累积的冷却，同时使两条历史轨迹在中间时刻仍保持不同。

起始条件涉及初始温度差的二次项。两条历史轨迹以相同的温度、斜率和应力开始。因此 $\Delta T(\tau_0) = \Delta T'(\tau_0) = 0$，而初始温度差以 $\frac{1}{2}\Delta T''(\tau_0)(\tau - \tau_0)^2$ 开始。对于零初始剪切，

$$\begin{aligned} \tau_0 \left.\frac{d\kappa_{\Omega,s}}{d\tau}\right|_{\tau_0} = \frac{1}{\frac{4}{3} + B_0^2/(3a_1T_0^4)} \Bigg\{ \frac{8}{9}\chi + \lambda^* \Bigg[\frac{2}{3} a \frac{B_0^2}{3a_1T_0^4} \\ - \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3} + \frac{B_0^2}{3a_1T_0^4}\right)(1+\lambda^*) + \frac{16(1+\lambda^*)}{9c_\pi} \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\left.\frac{d^2\Delta T}{d\tau^2}\right|_{\tau_0} = -\frac{T_0}{4\tau_0}\left(\frac{4}{3} + \frac{B_0^2}{3a_1T_0^4}\right) \left.\frac{d\kappa_{\Omega,s}}{d\tau}\right|_{\tau_0}. \tag{6.16}$$

The 当初始斜率处于稳态时，主导温度差消失，这表明 es

$$\chi = \lambda^* \left[(1+\lambda^*)\left(1 + \frac{B_0^2}{4a_1T_0^4} - \frac{2}{c_\pi}\right) - \frac{aB_0^2}{4a_1T_0^4} \right]. \tag{6.17}$$

该项 $-2/c_\pi$ 源于从 $\Phi_0 = 0$ 开始累积的剪切，并表征有限弛豫初始层。对于参考场和 $b_3 = 0$，无穷小梯度极限下的起始比值约为 0。64，远低于终端值 1。11。因此，抵消条件会随时间演变。初始剪切会改变这种平衡，如图 9 所示。

6.3.1 初始剪切与起始条件

对于 $\Phi_0 = b_3 p_0$ 且 b_3为常数的情况，初始剪切遵循热分布，因此其曲率由 χ决定。初始弛豫时间为$\tau_{\pi,\ 0} = c_\pi(\eta_{\mathrm{sh}}/s)/T_0$ ，单位采用自然单位。在

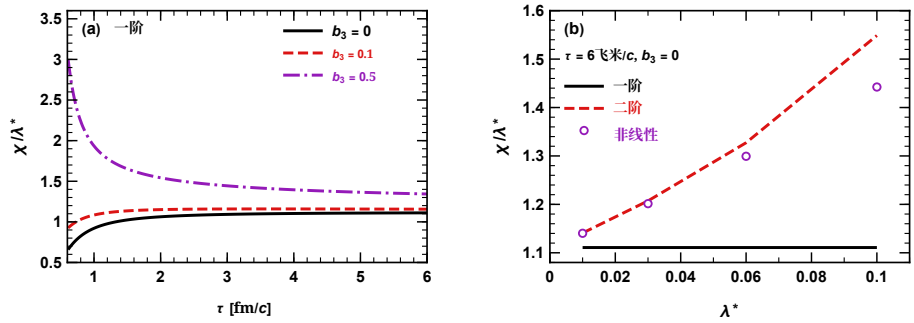

图9。使中心温度差为零的初始梯度比。左：对于 $b_3 = 0$，0。1、0。5，χ/λ^* 随比较时间的变化。所有温度差均消失的共同初始时刻未包含在内。右：四种加速度振幅下的终端比值；实线连接一阶和二阶预测，空心符号表示非线性根。右图使用 $b_3 = 0$。

中心处，$\partial^2_{\eta_s}\varepsilon|_0 = -8\varepsilon_0\chi/3$ 且 $\partial^2_{\eta_s}\Phi|_0 = (b_3/3)\partial^2_{\eta_s}\varepsilon|_0$。对动量方程关于快度求一次导数，并利用温度和剪切的演化方程消去中心时间导数，可得精确的初始化恒等式

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4}{3}+\frac{B_0^2}{\varepsilon_0}-\frac{b_3}{3}\right)\tau_0\left.\frac{d\kappa_{\Omega,s}}{d\tau}\right|_{\tau_0}\\&=\frac{8}{9}(1-b_3)\chi+\lambda^*\Bigg\{\frac{2aB_0^2}{3\varepsilon_0}-\frac{b_3\tau_0}{3\tau_{\pi,0}}\\&\quad-\left[\frac{8}{9}+\frac{2B_0^2}{3\varepsilon_0}+\frac{2b_3}{9}-\frac{16}{9c_\pi}\right](1+\lambda^*)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

由于两条历史轨迹在初始时具有相同的中心温度、斜率和剪切，因此它们的中心温度一阶导数相同。再次对它们的能量方程求导可得

$$\left.\frac{d^2\Delta T}{d\tau^2}\right|_{\tau_0}=-\frac{T_0}{4\tau_0}\left(\frac{4}{3}+\frac{B_0^2}{\varepsilon_0}-\frac{b_3}{3}\right)\left.\frac{d\kappa_{\Omega,s}}{d\tau}\right|_{\tau_0}.\tag{6.19}$$

由于初始纵向惯性为正，领先阶温度差恰好在初始斜率处于驻定状态时消失。对于 $b_3 \neq 1$ 和非零的 λ^*，该条件要求

$$\begin{aligned}\frac{\chi}{\lambda^*}=\frac{1}{1-b_3}\Bigg\{&(1+\lambda^*)\left(1+\frac{3B_0^2}{4\varepsilon_0}+\frac{b_3}{4}-\frac{2}{c_\pi}\right)\\&-\frac{3aB_0^2}{4\varepsilon_0}+\frac{3b_3\tau_0}{8\tau_{\pi,0}}\Bigg\}.\end{aligned}\tag{6.20}$$

当初始剪切为零时，这便化为方程（6.17）。初始剪切通过两种方式影响平衡：因子 $1-b_3$ 会降低纵向压力的初始曲率，而项 $\tau_0/\tau_{\pi,\,0}$ 描述了 τ_0处剪切的弛豫。在无穷小梯度极限下，对于 $b_3 = 0$、0.1 和 0.5，参考起始比值分别约为 0.64、0.92 和 3.09。

Table 2。终端 χ/λ^* 使 6 fm/c 时的中心温度相等。根和相对差异 es were 在舍入前计算。

λ^*	一阶	二阶	非线性
0.01	1.11	1.14	1.14
0.03	1.11	1.21	1.20
0.06	1.11	1.33	1.30
0.1	1.11	1.55	1.44

在 $b_3 = 1$ 时，纵向物质压强的初始曲率为零。方程（6.18）在此极限下仍保持正则，而除以 $1 - b_3$所得的表达式则变为奇异。

图 9 左图展示了一阶抵消比如何随比较时间和 b_3变化，并将参考文献 [7] 中发现的初始剪切敏感性扩展到具有演化流速的冷却情形。右图将有限振幅下的终端抵消与初始梯度预测进行了比较。对于参考参数，二阶结果为

$$\Delta T^{(1+2)} = \left[109.36\lambda^* - 98.45\chi + 14.13(\lambda^*)^2 + 183.56\lambda^*\chi + 55.31\chi^2\right] \text{ MeV}. \tag{6.21}$$

我们通过在基准输运参数和场参数下，将梯度方程演化至 6 fm/c ，得到二次系数。在线性平衡附近，二次项为正，因此要抵消温度差，需要比一阶比值所预测的更大的初始热曲率。

在 $\lambda^* = 0.03$ 处，非线性比为 1.20，而二阶值为 1.21，相对差异为 0.48%。在 0.06 处，差异增至 2.15%。对于更大的振幅，最高至 $\lambda^* = 0.1$，我们以非线性根作为参考。

6.4 初始梯度展开的准确性

弱梯度展开预测两个温度之间的差异。在 $\chi = \lambda^*$ 附近，它们的主导修正大多相互抵消，因此即使每个温度都接近其参考值，高阶项也可能产生影响。表 3 衡量了 ΔT 相对于非线性解的截断误差。附录A.4 给出了系数方程。

在 $\chi \approx \lambda^*$ 附近，一阶差值几乎相互抵消，一阶误差变得与 ΔT 本身相当，例如在 $\lambda^* = \chi = 0.03$ 处达到 0.216 兆电子伏。因此，剪切弛豫模型的初始梯度解能够定量描述对 λ^* 和χ 的各自响应，但在匹配分布 ΔT 附近，需要进行二阶或非线性计算；在所有展示的状态下，二阶计算都将误差降低到 0.1 兆电子伏以下。

6.5 预设流的精度与应力依赖性

我们用最大相对误差来量化指定流近似对中心温度的精度

$$100 \max_{\tau_0 \le \tau \le 6\,\mathrm{fm}/c} \frac{|T_s(\tau,0) - T_p(\tau,0)|}{T_s(\tau,0)}. \tag{6.22}$$

表3. 在 ΔT 的121个对数输出时间上，0.6–6fm/c中的最大绝对预测误差，单位为兆电子伏。所有参数均取自方程（2.26）。

λ^*	χ	一阶	二阶
0.03	0	0.0232	0.00147
0	0.03	0.0494	0.000430
0.03	0.03	0.216	0.0121
0.06	0	0.0901	0.0115
0	0.06	0.196	0.00345
0.06	0.06	0.818	0.0932
0.03	0.06	0.509	0.0330
0.06	0.03	0.387	0.0436

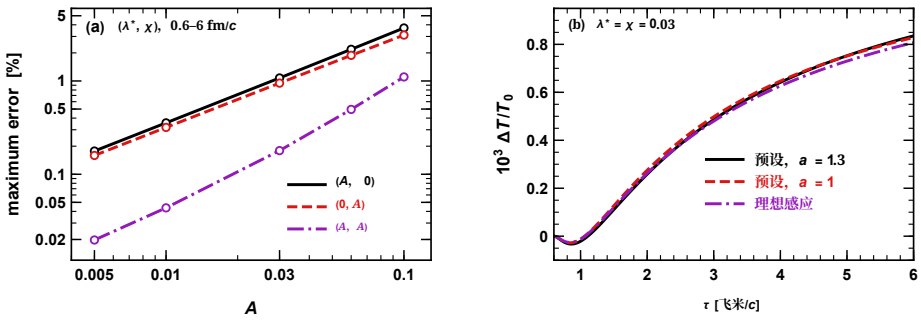

图10。指定流的精度与磁场依赖性。左：在 0.6–6 fm/c 范围内，$(\lambda^*, \chi) = (A,0), (0, A), (A, A)$ 的中心温度最大相对误差。右：在 $\lambda^* = \chi = 0.03$ 处，$a = 1.3$ 和 $a = 1$ 对应的指定场，以及随流演化的理想感应磁场的归一化温差。成对历史轨迹的初始磁场和剪切数据一致。

图 10 表明，误差取决于初始梯度的相对大小和幅值。当幅值为 $A = 0.03$时，仅速度误差和仅曲率误差分别为 1。08% 和 0。95%，而 $\chi = \lambda^* = 0.03$ 则为 0。18%。当 $A = 0.01$时，匹配后的误差降至 0。044%。当 $A = 0.1$时，相应的三种误差分别为 3。70%、3。11% 和 1。11%。因此，与理想一阶剖面匹配可显著提高指定流近似的精度，而上文推导的时变抵消条件则能在存在应力时进一步改善这种平衡。

6.6 应力与参数依赖性

末端温差取决于剪切黏度比、磁场衰减历程和初始剪切。图11在固定$\lambda^* = \chi = 0.03$的条件下比较了每个参数的六个取值。黏度和初始剪切都会改变纵向压力和速度历程。改变 a 会改变规定磁应力所提供的能量、压力梯度力，以及磁场对惯性贡献的持续时间。在图11（b）中，随着 a 增加，末端温差先下降后上升，并在 $a = 1$附近达到最小值；该值是比约肯流的守恒通量指数。改变 a 会改变

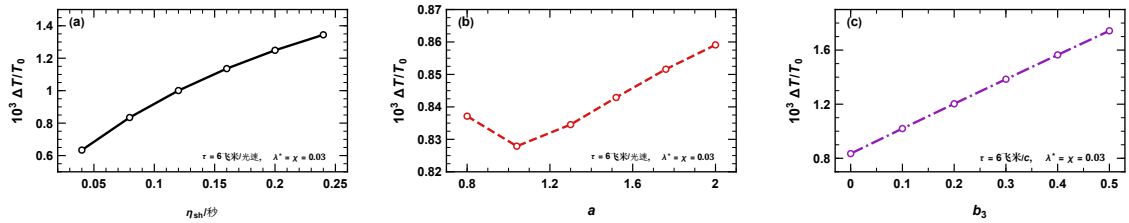

图11。在 $\tau = 6$ fm/c时的末端中心温差为 $\Delta T = T_s - T_p$，其中 $\lambda^* = \chi = 0.03$。面板(a)、(b)和(c)分别改变剪切黏度比 $\eta_{\rm sh}/s$、磁场衰减指数 a和初始剪切参数 b_3。其他参数保持其参考值不变。点表示计算值；线条用于引导视线。

t这种差异的变化幅度远小于其对绝对温度的影响，具体如下所述 w.

6.6.1 磁场衰减与冷却的三个贡献

表4 将磁化演化与从相同初始状态出发的无磁对应演化进行比较，区分磁场对绝对冷却的影响及其对配对温差的影响 $T_s - T_p$。在 $a = 1.30$时，给定的磁应力使最终自洽中心温度升高了1。48 兆电子伏，并使 $T_s - T_p$ 增加了4。59 千电子伏。大部分直接磁功对两种演化都是共同的，因此在温差中相互抵消。较小的净增量由剩余磁功以及磁场引起的压力作用力、快度斜率和膨胀功变化共同构成。衰减率通过三种相互耦合的机制改变冷却。首先，中心接收直接功$B^2(a-\kappa_\Omega)/\tau$，见方程（2.27）。其次，在纳维–斯托克斯极限下，幂律历史贡献$-(a-1)B^2[\frac{2}{3}+\Phi/(\varepsilon+p)](\kappa_\Omega-1)$于相对于守恒通量衰减、控制斜率演化的系数项中。第三， B^2 在整个膨胀过程中改变纵向惯性。在幂律背景下，相对磁应力与热曲率满足 _

$$\frac{d}{d\ln\tau}\ln\frac{B^2}{\varepsilon+p} = \frac{4}{3} - 2a - \frac{4}{3}\,\frac{\Phi+(a-1)B^2}{\varepsilon+p},$$
$$\frac{d}{d\ln\tau}\ln\big(-[\partial_{\eta_s}^2\ln T]_0\big) = -\frac{\Phi+4(a-1)B^2}{3(\varepsilon+p)}. \tag{6.23}$$

正磁功会减弱热曲率，进而减弱其压力作用力。这一变化会与 $a > 1$ 处较弱的显式回复项相抗衡。磁场更快衰减还会使惯性贡献转移到更早的时刻。

在 $a = 2/3$ 处，即使是理想流体背景也有 $B^2/(\varepsilon+p) = (3B_0^2/4\varepsilon_0)/[1-(B_0^2/3\varepsilon_0)\ln x]$。分母中的对数使磁应力相对于物质焓增大。对于 $a > 1$，较短的显著磁惯性持续区间可以与更大的累积能量传递并存。

使用完整的线性传播子，我们将其余依赖场的能量项和曲率项归为交换项，将显式回复项归为回复项，并将 B^2 in$\varepsilon + p + B^2 - \Phi$ 归为惯性。在 $a = 1.30$处，这些对 $T_s - T_p$ 的贡献分别为 43.03、 -31.03 和 -4.17 千电子伏，一阶近似下总计为 7.83 千电子伏，而未展开的演化结果为 4.59 千电子伏，来自

表4。在 $\tau = 6\ \mathrm{fm}/c$ 时，$\lambda^* = \chi = 0.03$、$B_0^2/\varepsilon_0 = 0.10$ 和参考剪切弛豫参数对应的磁场贡献。每个数值表示相对于初始温度、速度、曲率和剪切均相同的无磁场演化所发生的变化。温度单位为 keV。

磁场历史	T_s的变化	$T_s - T_p$的变化	$10^4\kappa_\Omega$的变化
2/3	-6398.52	22.27	5.77
1.00	-261.52	0.21	0.98
1.30	1482.76	4.59	-1.71
2.00	2659.97	20.56	-4.57
理想感应	-13.78	-13.78	0.72

的绝对温度贡献分别为 1.52 兆电子伏、-31.03 千电子伏和 -4.17 千电子伏。对于剪切弛豫，实际背景剪切焓比取代其 NS 值，并将混合项归类，以便在瞬时极限下恢复 NS 表达式；这种归类会影响各项单独的贡献，但不会改变其总和。

磁惯性和剪切会在不同的历史轨迹上影响斜率。累积逆惯性的相等定义为

$$\int_{\tau_0}^{\tau_f} \left[\frac{1}{1 + B^2/(\varepsilon + p) - \Phi/(\varepsilon + p)} - 1 \right] \frac{d\tau}{\tau} = 0, \tag{6.24}$$

其中，各比值均在相应的均匀背景上进行评估。对于参考黏度和 $a = 1.30$，该条件给出 $B_0^2/\varepsilon_0 \simeq 0.11$，接近参考值 0。而齐次斜率扰动的相等衰减则给出 $B_0^2/\varepsilon_0 \simeq 0.14$，因为恢复系数也发生了变化。中心温度相等则要求满足方程（6.12）中的积分热平衡。

6.6.2 磁场与剪切的联合贡献

磁应力和剪切会同时改变温度以及负责膨胀功的流，因此它们的热效应是耦合的。我们使用四条具有相同初始温度、曲率、快度和零剪切的自洽历史来分离它们之间的相互作用。下标 B 和 η 分别表示包含磁场和剪切黏度。交叉贡献为

$$[T_{B,\eta} - T_{0,0}] - [T_{B,0} - T_{0,0}] - [T_{0,\eta} - T_{0,0}] = T_{B,\eta} - T_{B,0} - T_{0,\eta} + T_{0,0}. \tag{6.25}$$

所有增量均以同一个理想参考态为基准进行测量。交叉贡献量化了两种应力如何相互影响，而 $T_s - T_p$ 则比较同一应力规定下的两条速度历史轨迹。将其应用于 $\Delta T/T_0$ 在 6 fm/c时，第6.1 节的数值给出（$8.35 - 8.28 - 3.79 + 3.64$）$\times\, 10^{-4} = -0.08 \times 10^{-4}$：无剪切时，磁性增量为 0.15×10^{-4}，有剪切时为 0.07×10^{-4}。四条历史轨迹的速度斜率将在第6.8 节中进行比较。

6.7 用理想感应替代指定场

三维理想磁流体力学模拟使磁场与等离子体共同演化，并解析磁场和流 [63, 64]的空间依赖性。下面的比较固定初始磁场和物质分布，仅改变场演化定律。这样可以将纵向磁功的作用与磁压力和惯性的作用区分开来。

图 10 的右侧面板比较了两个指定场与通过理想感应演化得到的场。沿每条流线，$D(B^2/2) = -B^2\theta$ 抵消了能量方程中的直接磁功。对于弛豫剪切应力，物质平衡变为

$$DT + \frac{T\theta}{3} = \frac{\Phi\theta}{12a_1T^3}, \qquad \nabla_\mu(su^\mu) = \frac{\Phi\theta}{T}. \tag{6.26}$$

对于瞬时剪切，$\Phi = 4\eta_{\rm sh}\theta/3$ 给出

$$DT + \frac{T\theta}{3} - \frac{4(\eta_{\rm sh}/s)}{9}\theta^2 = 0, \tag{6.27}$$

$$\nabla_\mu(su^\mu) = \frac{4\eta_{\rm sh}}{3T}\theta^2. \tag{6.28}$$

首先考虑具有均匀初始横向场的理想流体。在独立初始梯度的一阶近似下，中心斜率满足

$$(\varepsilon + p + B^2)\frac{d\kappa_\Omega}{d\ln\tau} + \frac{2}{3}(\varepsilon + p)(\kappa_\Omega - 1 - \chi) = 0, \tag{6.29}$$

其中各系数均在Bjorken背景上计算。相对于焓，磁应力按如下形式衰减：

$$B^2/(\varepsilon + p) = (3B_0^2/4\varepsilon_0)\, x^{-2/3}.$$

压力梯度维持斜率 $1 + \chi$，而磁性对惯性的贡献延缓了初始速度超额的消失。积分得到

$$\kappa_\Omega = 1 + \chi + (\lambda^* - \chi)\,\frac{4\varepsilon_0 + 3B_0^2}{4\varepsilon_0 x^{2/3} + 3B_0^2}. \tag{6.30}$$

初始贡献 $\lambda^* - \chi$ 在 $\tau = \tau_0[e + 3(e-1)B_0^2/(4\varepsilon_0)]^{3/2}$处减少了 e 倍，即无场时为 $4.48\,\tau_0$，对于 $B_0^2/\varepsilon_0 = 0.1$则为 $4.80\,\tau_0$。

在这一理想感应比较中，给定的流具有 $T_p = T_0 x^{-(1+\lambda^*)/3}$。因此，温度比为

$$\ln\frac{T_s}{T_p} = \frac{\lambda^* - \chi}{2}\left\{\frac{2}{3}\ln x - \frac{4\varepsilon_0 + 3B_0^2}{3B_0^2}\ln\frac{x^{2/3}(4\varepsilon_0 + 3B_0^2)}{4\varepsilon_0 x^{2/3} + 3B_0^2}\right\} + O\big((\lambda^*)^2, \lambda^*\chi, \chi^2\big). \tag{6.31}$$

其零场极限给出方程 (6.2)。方程 (6.31) 中的参照对象是指定加速流，因此累积的斜率差直接决定了膨胀冷却的差异。

对于瞬时纳维–斯托克斯剪切，同样的投影给出

$$(\varepsilon + p + B^2 - \Phi)\frac{d\kappa_\Omega}{d\ln\tau} + \left[\frac{2}{3}(\varepsilon + p) + \frac{4}{3}\Phi - \frac{\Phi^2}{\varepsilon + p}\right](\kappa_\Omega - 1) = \frac{2}{3}\,(\varepsilon + p - 3\Phi)\,\chi\,\frac{T_0 x^{-1/3}}{T^{(0)}}, \tag{6.32}$$

背景值 $\varepsilon + p = 4a_1(T^{(0)})^4$， $\Phi = 4\eta_{\rm sh}/(3\tau)$，以及 $B^2 = B_0^2 x^{-2}$，其中$T^{(0)}$是方程（3.3）中的纳维–斯托克斯 Bjorken 温度。组合量 $\varepsilon + p + B^2 - \Phi$ 表示纵向惯性：磁场会使其增大，而剪切会使其减小。因子 $\chi T_0 x^{-1/3}/T^{(0)}$表示时刻 τ的热曲率，而 $\eta_{\rm sh} \propto T^3$的空间依赖性会改变压力梯度源项。下文的非线性比较保留剪切弛豫方程和初始条件 $\Phi_0 = 0$。在理想感应下， $D\ln B = -\theta$ 会在梯度展开之前抵消直接磁功。沿着 $\chi = \lambda^*$展开感应方程，可得磁场对纳维–斯托克斯方程求积的修正。对于均匀初始横向场，

$$B^2(\tau) = B_0^2\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2\left[1 - 2\lambda^*\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau'}{\tau'}\,\partial_{\eta_s}\Omega^{(1)}(\tau',\eta_s)\Big|_0\right] + \mathcal{O}((\lambda^*)^2). \tag{6.33}$$

将 $D = \partial_\tau + \lambda^*\Omega^{(1)}\partial_{\eta_s}/\tau + \cdots$ 和 $\tau\theta = 1 + \lambda^*\partial_{\eta_s}\Omega^{(1)} + \cdots$代入 $D\ln B^2 = -2\theta$，并从共同的初始磁场开始积分，即可得到这一结果。一阶修正是均匀的，因为一阶快度斜率是均匀的。到了二阶，磁场会产生一个常数修正和一个二次快度修正，它们与流共同演化：

$$B^2(\tau,\eta_s) = B_0^2(\tau_0/\tau)^2 + \lambda^*(B^2)^{(1)}(\tau) + (\lambda^*)^2(B^2)^{(2)}(\tau,\eta_s) + \mathcal{O}((\lambda^*)^3), \tag{6.34}$$

其中，$(B^2)^{(2)}$ 包含一个常数项和一个 η_s^2 项，两者均按照与均匀场一致的方式初始化。

磁压力和惯性仍然会出现在动量方程中，使磁场能够通过流间接影响温度。给定的 $a = 1$ 历史轨迹与比约肯流中的理想感应相吻合，而纵向加速会使两种磁场历史轨迹产生分歧。每组配对的感应模拟都从相同的磁场出发，按照各自的速度演化磁场，并采用相同的标量剪切弛豫定律，从而单独考察磁通守恒的影响。

磁通守恒还会改变初始和终端温度抵消所需的曲率。初始剪切为零时，理想感应给出

$$\frac{\chi}{\lambda^*} = (1 + \lambda^*)\left(1 - \frac{2}{c_\pi}\right) \tag{6.35}$$

对于平稳的初始斜率， $[d\kappa_\Omega/d\tau]_{\tau_0} = 0$。均匀初始磁场在该比值中相互抵消，但仍存在于决定斜率演化速率的惯性中。表5给出了一级和有限振幅起始条件以及终端根。起始条目采用斜率平稳条件；终端条目涉及 $T_s - T_p$ 在 6 fm/c。

表5。参考剪切和场参数下，起始与终端温度抵消的初始梯度比为 χ/λ^{*} 。有限振幅起始遵循完整初始化方程。

历史	λ^{*}	起始线性	起始有限	终端线性	终端非线性
$a = 1.30$	0.03	0.6442	0.6664	1.1108	1.2014
$a = 1.30$	0.06	0.6442	0.6887	1.1108	1.2993
理想感应	0.03	0.6667	0.6867	1.1070	1.1973
理想感应	0.06	0.6667	0.7067	1.1070	1.2948

6.8 对可观测量的影响

测得的带电介子快度分布和谐波流去关联约束了纵向结构的不同方面 [65–67]。模型通过参与者 [68, 69] 的涨落熵沉积，或通过初始胶子凝聚态场的快度演化 [70]产生纵向涨落。逐事件计算还可区分初始涨落与流体动力学演化过程中产生的涨落所造成的影响 [71]。

两个中心温度几乎相等的流可以在流体快度上以不同方式分配熵。我们首先确定流体元携带的物质熵，然后在恒定-τ 面上将时空快度变换为流体快度。利用 $d\varepsilon = T\,ds$和 $\varepsilon + p = Ts$，我们从能量方程得到局部物质熵平衡。在纳维–斯托克斯极限下，给定磁场给出

$$\nabla_{\mu}(su^{\mu}) = \frac{4\eta_{\mathrm{sh}}}{3T}\theta^{2} + \frac{B^{2}}{T}\left[\frac{a\cosh(\Omega - \eta_{s})}{\tau} - \theta\right]. \tag{6.36}$$

第一项是由剪切黏度 [44]导致的非负熵产生。第二项是单位固有体积的磁功率除以 T。其一般形式 $-B^{2}(D\ln B + \theta)/T$ 在理想感应下消失，此时 $D\ln B = -\theta$。给定场既可以向物质供给能量，也可以从物质中提取能量。当能量提取超过剪切加热时，共动流体元的熵会减少。

利用 $s \propto T^{3}$ 和 $D(sV) = V\nabla_{\mu}(su^{\mu})$，我们得到

$$\frac{DT}{T} = -\frac{\theta}{3} + \frac{D(sV)}{3sV}. \tag{6.37}$$

第一项是在每个单元的熵保持不变时产生的冷却。 sV 会抵消这种冷却，而其减少则会增强冷却；因此，当该单元的熵的相对增长率低于其体积的相对增长率时，该单元便会冷却，$D\ln(sV) < D\ln V = \theta$。因此，温度反映了膨胀稀释、剪切耗散以及与指定场之间的能量交换这几者之间的竞争；第 6.2.1 节中的源项积分对这些贡献进行了量化。

根据弛豫方程，将 $4\eta_{\mathrm{sh}}\theta^{2}/3$替换为 $\Phi\theta$ 后，同一恒等式仍然成立。这里， sV 是该元的平衡熵。在二阶理论中，完整的熵

流还包含一个关于 Φ的二次项。下面估算快度时，我们使用平衡物质熵密度。

在恒定固有时超曲面上，平衡物质熵流的通量为

$$\frac{dS}{d\eta_s} \propto s\tau \cosh(\Omega - \eta_s). \tag{6.38}$$

在中心处，涡量 $\Omega = \eta_s = 0$ 和 $dS/d\eta_s \propto s\tau$。变换到流体快度后会引入逆斜率：

$$\left.\frac{dS}{d\Omega}\right|_0 \propto \frac{s\tau}{\kappa_\Omega}, \qquad \kappa_\Omega = \partial_{\eta_s}\Omega|_0\,, \tag{6.39}$$

$$\frac{(dS/d\Omega)_s}{(dS/d\Omega)_p} = \left(\frac{T_s}{T_p}\right)^3 \frac{\kappa_{\Omega,p}}{\kappa_{\Omega,s}}. \tag{6.40}$$

因此，较小的斜率会将相同的熵集中在更窄的流体快度区间内。对于理想弱梯度解，当 $q = (\tau_0/\tau)^{2/3}$时，温度差与斜率差结合得到

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(dS/d\Omega)}{(dS/d\Omega)_p} &\simeq 3\frac{T_s - T_p}{T_{\rm Bj}} - \frac{\kappa_{\Omega,s} - \kappa_{\Omega,p}}{\kappa_{\Omega,p}} \\ &= (\lambda^* - \chi)\left[\ln\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1-q}{2}\right].\end{aligned} \tag{6.41}$$

温度和斜率的贡献具有相同的符号，使熵的估计比单独使用温度时更加敏感。变量变换要求中心斜率非零。粒子谱需要相空间分布及其穿过粒子化超曲面的通量，如 Cooper–Frye 处方中所示 [72]。黏性粒子化还需规定耗散应力如何进入该分布 [73]。

作为参考，Landau 的宽度估计 $\sigma_\eta^2 = \ln(\sqrt{s_{NN}}/2m_N)$ [74] 在 200 GeV 下给出 $\sigma_\eta \approx 2.2$，在 2.76–5.02 TeV 下给出 2.7–2.8。若将该宽度赋予高斯初始能量密度，$T \propto \exp[-\eta_s^2/(8\sigma_\eta^2)]$ 给出 $\chi = 3/(8\sigma_\eta^2) \approx 0.05$–0.08。该估计促使我们将曲率与初始快度斜率独立地改变。Ref. [25] 的表1报告了 Pb+Pb 在 2.76 和 5.02 TeV 下的0.035 ± 0.003 和 0.032 ± 0.002 。对于 200 GeV 下的 Au+Au，该文报告了 0.062 ± 0.002。Ref. [25] 中拟合得到的加速参数对应于与时间无关的斜率。在当前模型中，我们将其解释为初始斜率。在理想情况下，后续斜率向 $1 + \chi$演化，而剪切和磁应力会进一步对其产生修正。图12展示了四种应力历史轨迹的中心快度斜率和单位流体快度熵。在 6 fm/c处，ΔS_Ω 对于理想流体为 0.46%，同时包含两种应力时为 1.0%。对于 $\lambda^* = \chi$，一阶理想贡献消失，因此理想结果成为有限振幅效应。剪切使该贡献近似翻倍，而参考幂律场增加 0.02 个百分点。理想感应值为 0.96%，反映了不同的速度历程。

在初始加速度相同的情况下，表6 显示，$\chi = 0$ 的晚期熵差大于 $\chi = \lambda^*$。例如，铅+Pb 在 5.02 TeV 下的对应数据分别为 6.17% 和 1.10%。所有系统采用相同的参考热力学参数。相同的

表6。采用参考文献 [25] 表1中的加速参数作为初始值 λ^*。Xe+Xe值根据该参考文献方程（21）中的能量依赖性得出。在 $\tau = 6$ 飞秒/c处，我们展示中心斜率超额 $100(\kappa_\Omega - 1)$ 以及相对熵估计 $100[(dS/d\text{涡量})_s/(dS/d\text{涡量})_p - 1]$ 对应两种初始曲率。其他参数取自方程（2.26）。

系统， $\sqrt{s_{NN}}$ [GeV]	λ^*	$\chi = \lambda^*$		$\chi = 0$	
		$100(\kappa_\Omega - 1)$	ΔS_Ω [%]	$100(\kappa_\Omega - 1)$	ΔS_Ω [%]
金+金，130	0.076	5.69	4.03	1.36	15.54
金+金，200	0.062	4.81	2.93	1.15	12.44
Cu+Cu，200	0.060	4.67	2.79	1.11	12.01
Pb+Pb，2760	0.035	2.91	1.25	0.69	6.78
Pb+Pb，5020	0.032	2.68	1.10	0.63	6.17
Xe+Xe，5440	0.030	2.53	1.00	0.60	5.77

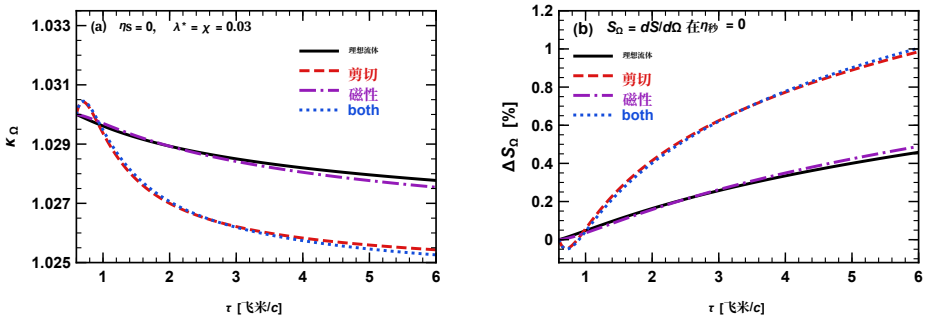

图12。理想流体、仅剪切、仅磁性以及组合应力情况下，随时间的演化： $\lambda^* = \chi = 0.03$。（a）自洽流的中心快度斜率 $\kappa_\Omega = \partial_{\eta_s}\text{涡量}|_0$。（b）单位流体快度中心熵的相对变化， $\Delta S_\Omega = 100[(dS/d\text{涡量})_s/(dS/d\text{涡量})_p - 1]$，见方程（6.40）。

Pb+Pb 的数据项在 $\chi = 0$ 下也将方程（6.40）中的两个因素区分开来。表列斜率给出 $\kappa_{\Omega,\,p}/\kappa_{\Omega,\,s} \simeq 1.032/1.0063 \simeq 1.026$。用表列熵比 1.0617 除以该因子，得到 $(T_s/T_p)^3 \simeq 1.035$，即 $T_s/T_p \simeq 1.012$。这些估算采用相同固有时和初始曲率下的四舍五入数据。因此，在这一相同初始态中，斜率映射和热密度都对熵增强有所贡献。

7 结论

对于给定的快度分布，近中快度动量平衡确定了支撑其斜率所需的温度曲率。在理想弱梯度极限下，自洽斜率从 $1 + \lambda^*$ 演变至 $1 + \chi$，因此匹配分布 $\chi = \lambda^*$ 在一阶近似下恢复了参考文献 [12] 中的恒定理想斜率。即使在理想流体中，有限振幅也会使实际曲率与所需曲率出现差异。零剪切规定极限恢复了参考文献 [11],中的磁加速解，而纵向推动不变纳维–斯托克斯极限则恢复了参考文献 [7]中的黏性磁冷却方程。

对比相同初始状态下的自洽流与规定流可见，持续存在的局部动量残差可以与较小的中心温度误差并存，

因为中心冷却取决于累积的膨胀功。在理想一阶解中， $\Delta T/T_{\mathrm{Bj}}$ 会出现一个与 $\lambda^* - \chi$成正比的晚时对数项。对于参考剪切和指定磁应力，在$\chi = \lambda^* = 0.03$ 时最大中心温度误差为 0.18%；在相同加速度下，当 $\chi = 0$时为 1.08%。在 $\tau = 6$ fm/c 时，中心温度相等的情况一阶近似出现在 $\chi/\lambda^* \simeq 1.11$ ，而在$\lambda^* = 0.03$时，非线性演化中这一数值接近 1.20，初始剪切会使这一平衡进一步偏移。在 $a = 1.30$时，指定场使最终自洽温度升高 1.48 兆电子伏，并使 $T_s - T_p$ 增加 4.59 千电子伏，这是因为成对历史轨迹中的大部分直接磁功相互抵消。将指定场替换为理想感应后，直接磁功消失，但纵向动量方程中仍保留磁压力和惯性。

由于单位流体快度熵还包含一个额外因子 $1/\kappa_\Omega$，因此它反映了速度映射的变化，而不仅仅是中心温度的变化。将拟合得到的加速参数用作初始斜率，并采用平坦的初始温度分布，会使该熵估算值相差 6–16%。

展望。 耗散自旋流体力学描述了自旋密度的弛豫 [75]，且已有适用于 Bjorken膨胀的解析解 [76]。本文得到的自洽温度、速度和磁场演化，为利用相对论自旋磁流体力学将这一比较扩展到有限梯度情形提供了纵向背景 [77, 78]。若在给定流与自洽流中施加相同的微小自旋扰动，便可直接评估它们的膨胀率、冷却历史和场闭合关系如何影响自旋输运。

致谢

我们使用了 AI 辅助工具（ChatGPT、Claude 和 Gemini）修改英文语法、改善稿件的逻辑流畅性，并协助检查用于计算的 Mathematica 代码。作者对最终稿件及其结果负责。

A 数值方法与验证

非线性计算演化（T/T_0）^{4}, 涡量 $-\eta_s$，以及 Φ/ε_0，并在 $|\eta_s| \le 3$ 上采用四阶空间差分和 RK4 时间步进，使用 $\xi = \ln(\tau/\tau_0)$。外边界采用五点单边导数封闭，物理比较仅限于 $|\eta_s| \le 1$。参考网格间距为 0.05，最大对数时间步长为 0.002。在理想感应条件下，B^2/ε_0 作为第四个场进行演化。系数预测采用多项式运算，将初始梯度展开至二阶，并保留该阶的能量到温度的重构。

A.1 线法与奇偶性条件

在快度方向离散化后，非线性演化可化简为关于 $\xi = \ln(\tau/\tau_0)$ 的耦合常微分方程组，其中 $\partial_\tau = \tau^{-1}\partial_\xi$。状态向量包含

物质能量、流体快度和剪切应力；在理想感应计算中， B^2 也作为一个额外变量纳入。温度重构为 $T = (\varepsilon/3a_1)^{1/4}$，并在每个积分阶段对预先设定的磁场历史进行求值。

下面的空间公式是通过多项式插值得到的有限差分权重的均匀网格情形 [79]。

在内部网格点，快度的一阶导数用四阶中心模板近似

$$(D_1 f)_i = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h}, \tag{A.1}$$

二阶导数则采用

$$(D_2 f)_i = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{12h^2}. \tag{A.2}$$

外边界采用单边五点公式。反射对称性使温度和剪切为偶函数、$\Omega - \eta_s$ 为奇函数，因此在中心处有 $\partial_{\eta_s} T = \partial_{\eta_s} \Phi = 0$ 和 $\Omega - \eta_s = 0$；网格包含中心点，因此无需在此处插值。

在每个龙格–库塔阶段，我们都使用同一组中间场计算膨胀标量和剪切源项。指定流运行采用相同的能量方程和剪切方程，其中 $\Omega_p = (1 + \lambda^*)\eta_s$ 进入运动学系数，因此两次运行的区别仅在于动量约束。

A.2 守恒形式与独立检验

为检验守恒关系，Milne分量表示为温度、磁场和纵向剪切的函数：

$$T^{\tau\tau} = (4a_1 T^4 + B^2 - \Phi)\cosh^2(\Omega - \eta_s) - a_1 T^4 - B^2/2 + \Phi, \tag{A.3}$$

$$\tau T^{\tau\eta_s} = (4a_1 T^4 + B^2 - \Phi) \times \cosh(\Omega - \eta_s)\sinh(\Omega - \eta_s), \tag{A.4}$$

$$\tau^2 T^{\eta_s\eta_s} = (4a_1 T^4 + B^2 - \Phi)\sinh^2(\Omega - \eta_s) + a_1 T^4 + B^2/2 - \Phi. \tag{A.5}$$

这些分量分别代表米尔恩坐标中的能量密度、纵向动量密度和纵向应力。协变守恒关系给出

$$\begin{aligned} &\partial_\tau(\tau T^{\tau\tau}) + \partial_{\eta_s}(\tau T^{\tau\eta_s}) + \tau^2 T^{\eta_s\eta_s} = 0, \\ &\partial_\tau(\tau^3 T^{\tau\eta_s}) + \partial_{\eta_s}(\tau^3 T^{\eta_s\eta_s}) = 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

为检验非零动量收支，我们对 $0 \le \eta_s \le 1$ 积分：

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^1 \tau T^{\tau\tau}\, d\eta_s = -\tau[T^{\tau\eta_s}]_0^1 - \int_0^1 \tau^2 T^{\eta_s\eta_s}\, d\eta_s, \tag{A.7}$$

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^1 \tau^3 T^{\tau\eta_s}\, d\eta_s = -\tau^3[T^{\eta_s\eta_s}]_0^1. \tag{A.8}$$

方括号表示外侧通量与中心通量之差。我们采用半区间，是因为反射对称性使得对称区间上的总动量为零，同时保留几何能量源和所有边界通量。这些关系独立于演化模板定义了守恒收支；表7报告了参考参数下相应的残差。

A.3 收敛诊断与系数比较

演化采用四阶空间差分。我们使用中心二阶差分计算守恒残差。将 h 和 $\Delta\xi$ 同时减半，可使两个残差均约降低四倍（表7）。

快度域延伸至物理比较所用区间之外，使报告的中心区域与外边界保持分离。各次运行均在相同的物理区间和相同的采样时刻进行比较。改变边界位置可量化对有限区域的敏感性，改变时间步长可测量时间收敛性，而表7 中的空间加密序列则用于测量空间收敛性。

我们分别积分梯度方程和非线性偏微分方程。两者在 ΔT 上的差异即为表3中报告的截断误差。

表7 给出了参考态下各分辨率对应的能量残差和动量残差。残差按局部 $4a_1T^4 + B^2$归一化，计算中心残差范数时排除了时间端点。

对于给定磁场，流体静止系中纵向扰动的平方局部特征速度可由方程（2.13）、（2.14）和（2.17）的主部得到：

$$v_{\mathrm{char}}^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\eta_{\mathrm{sh}}/(3\tau_\pi) - 4\Phi/3}{\varepsilon + p + B^2 - \Phi}. \tag{A.9}$$

在参考匹配运行中，$T > 0.300\,\mathrm{GeV}$，纵向惯性 $\varepsilon + p + B^2 - \Phi$ 保持为正，且 $0.502 < v_{\mathrm{char}}^2 < 0.541$。因此，在所采样的演化过程中，纵向特征始终为实数且亚光速，满足该次运行的纵向因果性。

在理想感应下，方程 (6.28) 给出了局部流体静止系中的纵向主部。令 z 表示局部纵向坐标，v_z 表示纵向速度，则包含扰动导数的项为

$$\begin{aligned}
\partial_t \delta\varepsilon + (\varepsilon + p - \Phi)\partial_z \delta v_z &= 0,\\
(\varepsilon + p + B^2 - \Phi)\partial_t \delta v_z + \partial_z(\delta\varepsilon/3 + \delta B^2/2 - \delta\Phi) &= 0,\\
\partial_t \delta\Phi - \left(\frac{4\eta_{\mathrm{sh}}}{3\tau_\pi} - \frac{4}{3}\Phi\right)\partial_z \delta v_z &= 0,\\
\partial_t \delta B^2 + 2B^2 \partial_z \delta v_z &= 0.
\end{aligned}$$

这里，δB^2 表示 B^2的扰动。对于速度非零的模态，第一、第三和第四个方程将应力扰动表示为 δv_z 的函数。代入纵向动量方程可得

$$v_{\mathrm{char}}^2\big|_{\mathrm{ind}} = \frac{1}{3} + \frac{4\eta_{\mathrm{sh}}/(3\tau_\pi) - 4\Phi/3 + 2B^2/3}{\varepsilon + p + B^2 - \Phi}.$$

在此参考系中，其余两个特征速度为零。对于在 $|\eta_s| \le 1$ 和 $0.6 \le \tau \le 6$ 飞米/c条件下的自洽参考感应运行（$\lambda^* = \chi = 0.03$），采样惯性的最小值为 $0.0596\,\varepsilon_0$，采样速度平方介于 0.5341 和 0.5877 之间。

表 7。参考匹配态下的分辨率与独立守恒检验。 N_ξ 为诊断输出时刻数； $\Delta\xi$ 为最大演化步长。残差是在$|\eta_s| \le 1$ 及内部输出时刻上的最大值。

$\Delta\eta_s$	$\Delta\xi$	N_ξ	能量	动量
0.10	0.0040	241	7.00×10^{-5}	5.54×10^{-6}
0.050	0.0020	481	1.76×10^{-5}	1.41×10^{-6}
0.025	0.0010	961	4.42×10^{-6}	3.55×10^{-7}

表 8。在 $\tau = 6$ fm/c 处，对成对温差中的中心磁场增量和非线性中心等温比进行联合细化。该增量采用 $\chi = \lambda^* = 0.03$，并相对于采用 $B_0 = 0$的同一组结果进行测量。求根采用 $\lambda^* = 0.03$ 和参考指定场。 $\Delta\xi$ 为实际均匀步长。

$\Delta\eta_s$	$\Delta\xi$	$(T_s - T_p)_B - (T_s - T_p)_{B=0}$ [千电子伏]	χ/λ^* 在 $T_s = T_p$
0.100	0.00383764	4.589678	1.20144757
0.050	0.00191882	4.589693	1.20144736
0.025	0.00095941	4.589694	1.20144735

仅将演化时间步长减半，会使末端温度差改变3.3×10^{-12} 兆电子伏，而将边界扩展至 $|\eta_s| = 3.5$ 则会使其改变 2.4×10^{-11} 兆电子伏。使用 481 个输出时刻进行数值求积后，热预算的闭合误差为 3.8×10^{-6} 兆电子伏。这些数值误差远小于表 3 中报告的初始梯度展开截断误差，代表另一项独立的不确定性来源。

正文中的若干解析恒等式也经过了数值检验。沿着相同的指定流轨迹，并在两个表达式中均采用非线性剪切曲率 C_Φ ，方程（4.5）和（4.8）所得的 $\tau\mathcal{R}$ 数值之差至多为 3.4×10^{-11}，单位为 $\frac{8}{3} a_1 T_p^4 \lambda^*$，适用于全部四种应力情形。有限振幅初始化恒等式，方程（6.18），与未展开的初始化方程相符；在 $\lambda^* = \chi = 0.03$ 处，对 $b_3 = 0$、0。1 和 0。5，其无量纲斜率导数的差异不超过 1.7×10^{-12} 。纳维–斯托克斯求积与线性化纳维–斯托克斯方程的独立有限差分演化结果相符，归一化中心温度的差异不超过 1.7×10^{-8} ；而方程（6.12）的源项分解重现非线性温度差，误差在 3.8×10^{-6} 兆电子伏以内。

对于参考参数，表8 报告了第6节中所用两个终端量的联合细化结果。我们通过以 $\chi/\lambda^* = 1.1$ 和 1.3 为初值的割线迭代定位非线性根，并在 $|\Delta T(6\,\mathrm{fm}/c)| < 10^{-8}$ 兆电子伏时停止。

A.4 含剪切弛豫的初始梯度展开

我们将能量、动量和剪切方程按初始梯度展开至二阶，并采用有限的输运系数。为追踪共同振幅，我们将（λ^*， χ）替换为（$\rho\lambda^*$， $\rho\chi$），保留所需的 ρ 次幂，并在最后设定 $\rho = 1$ 。场

展开为

$$
\begin{aligned}
T &= T^{(0)} + \rho T^{(1)} + \rho^2 T^{(2)} + O(\rho^3),\\
\Omega &= \eta_s + \rho \Omega^{(1)} + \rho^2 \Omega^{(2)} + O(\rho^3),\\
\Phi &= \Phi^{(0)} + \rho \Phi^{(1)} + \rho^2 \Phi^{(2)} + O(\rho^3).
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

背景与快度无关。一阶时，温度和剪切是关于 η_s^2 的偶次多项式，而快度是线性的。二阶时，温度和剪切包含最高至 η_s^4 的偶次幂，而快度包含最高至 η_s^3 的奇次幂。对于指定的初始数据，这些幂在每个保留阶次上构成一个封闭的多项式扇区。

背景是第 3 节中的磁黏性 Bjorken 解，采用展开记号表示。其温度和剪切应力满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{dT^{(0)}}{d\tau} + \frac{T^{(0)}}{3\tau} - \frac{\Phi^{(0)} + (a-1)B^2}{12 a_1 \tau [T^{(0)}]^3} = 0,\\
&\frac{d\Phi^{(0)}}{d\tau} + \frac{T^{(0)}\Phi^{(0)}}{c_\pi(\eta_{\rm sh}/s)} + \frac{4\Phi^{(0)}}{3\tau} - \frac{16 a_1 [T^{(0)}]^4}{3 c_\pi \tau} = 0.
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

一阶时，方程将温度分布的变化与压强驱动流及其伴随的额外膨胀功联系起来。能量方程为

$$
\begin{aligned}
&\partial_\tau T^{(1)} + \frac{T^{(1)}}{3\tau} + \frac{T^{(0)} \partial_{\eta_s} \Omega^{(1)}}{3\tau}\\
&- \frac{\Phi^{(1)} + \Phi^{(0)} \partial_{\eta_s} \Omega^{(1)} - 3\Phi^{(0)} T^{(1)}/T^{(0)}}{12 a_1 \tau [T^{(0)}]^3}\\
&+ \frac{B^2}{12 a_1 \tau [T^{(0)}]^3} \left[\partial_{\eta_s} \Omega^{(1)} + 3(a-1) \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} \right] = 0.
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

一阶动量方程为

$$
\begin{aligned}
&[4 a_1 (T^{(0)})^4 + B^2 - \Phi^{(0)}] \partial_\tau \Omega^{(1)}\\
&+ \left[\frac{4 a_1 (T^{(0)})^4 + (1-a) B^2 - \Phi^{(0)}}{\tau} + 4 a_1 (T^{(0)})^3 \frac{dT^{(0)}}{d\tau} - \frac{d\Phi^{(0)}}{d\tau} \right] \Omega^{(1)}\\
&+ \frac{4 a_1 (T^{(0)})^3 \partial_{\eta_s} T^{(1)} - \partial_{\eta_s} \Phi^{(1)}}{\tau} = 0.
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

一阶剪切方程为

$$
\begin{aligned}
&\partial_\tau \Phi^{(1)} + \frac{T^{(0)} \Phi^{(1)} + \Phi^{(0)} T^{(1)}}{c_\pi(\eta_{\rm sh}/s)}\\
&+ \frac{4\Phi^{(1)}}{3\tau} - \frac{64 a_1 (T^{(0)})^3 T^{(1)}}{3 c_\pi \tau}\\
&+ \left[\frac{4\Phi^{(0)}}{3} - \frac{16 a_1 (T^{(0)})^4}{3 c_\pi} \right] \frac{\partial_{\eta_s} \Omega^{(1)}}{\tau} = 0.
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

比较独立快度幂次的系数，可得到五个耦合的一阶常微分方程。对于参考初始化 $b_3 = 0$，初始条件为

$$\begin{aligned} T^{(0)}(\tau_0) &= T_0, & \Phi^{(0)}(\tau_0) &= 0, \\ T^{(1)}(\tau_0, \eta_s) &= -T_0 \chi \eta_s^2/3, & \Omega^{(1)}(\tau_0, \eta_s) &= \lambda^* \eta_s, \\ \Phi^{(1)}(\tau_0, \eta_s) &= 0. \end{aligned} \tag{A.15}$$

A.4.1 二次源项和初始值

在二阶情况下，将方程（A.10）代入方程（2.13）–（2.17），并收集 $\rho^2 \eta_s^j$ 的系数，即得到二次方程。具体而言，

$$\begin{aligned} \cosh(\Omega - \eta_s) &= 1 + \tfrac{1}{2}\rho^2 (\Omega^{(1)})^2 + O(\rho^3), \\ \sinh(\Omega - \eta_s) &= \rho \Omega^{(1)} + \rho^2 \Omega^{(2)} + O(\rho^3), \\ T^{-3} &= [T^{(0)}]^{-3} \left[1 - 3\rho \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \rho^2 \left(6 \frac{[T^{(1)}]^2}{[T^{(0)}]^2} - 3 \frac{T^{(2)}}{T^{(0)}} \right) \right] + O(\rho^3). \end{aligned} \tag{A.16}$$

这些二次乘积产生了表 2 中所报告的抵消条件的有限振幅偏移。这八个二阶系数方程由先前计算得到的低阶场驱动。对于多项式温度初始条件和零初始剪切，所有二阶初始系数均为零。当用$3a_1 T^4$表示时，二次能量系数不为零，而温度的重构要求将四次方根展开到相同阶数。这给出了计算中所使用的等价二次能量系数。因此，自洽预测涉及 $2 + 5 + 8 = 15$ 个常微分方程。对于指定流预测，我们令 $\Omega^{(1)} = \lambda^* \eta_s$ 和 $\Omega^{(2)} = 0$，省略动量投影，并使用相同的初始温度和剪切求解其余的 $2 + 4 + 6 = 12$ 个常微分方程。在一致重构后，将温度相减。在理想感应下， B^2 也进行展开。其背景、均匀的一阶项以及二阶常数项和 η_s^2 项引入了另外四个方程，从而得到十九个自洽常微分方程和十六个指定流常微分方程。关系式 $DB^2 = -2B^2\theta$随后替代能量方程和动量方程中的指定场历史。该层级保留了决定中心冷却的压力–运动耦合。

表 3 给出了相对于非线性偏微分方程解的 ΔT 一阶和二阶误差。对于所有展示的状态，二阶近似都降低了绝对误差；在振幅较大时，则以非线性解作为参照。同样的方法也适用于等曲率高斯分布或不同的弛豫时间，只需使用相应的初始系数和剪切定律。

A.5 高阶梯度结构与温度重构

反射对称性使温度和剪切在 η_s 中为偶函数、快度为奇函数，因此在局部有

$$\Omega(\tau, \eta_s) = \partial_{\eta_s} \Omega|_0 \, \eta_s + \frac{1}{6} \, \partial_{\eta_s}^3 \Omega|_0 \, \eta_s^3 + O(\eta_s^5). \tag{A.17}$$

三次系数初始时为零，但会由温度梯度和快度修正的非线性乘积产生。在初始梯度的二阶项中，

温度和剪切包含直到 η_s^4 的偶次幂，而快度则包含直到 η_s^3 的奇次幂。三阶将这些展开分别延伸至 η_s^6和 η_s^5。 η_s 的幂刻画局部快度分布，而上标表示两个初始梯度的总次数。

我们通过加入 $\rho^3 T^{(3)}$， ρ^3涡量$^{(3)}$以及 $\rho^3\Phi^{(3)}$来扩展方程（A.10）。对于多项式初始温度和线性初始快度，二阶和三阶温度系数及快度系数的初值均为零。然而，由于能量密度对温度的非线性依赖关系，其高阶初始系数不为零:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(0)} &= 3a_1 (T^{(0)})^4, \\
\varepsilon^{(1)} &= 12a_1 (T^{(0)})^3 T^{(1)}, \\
\varepsilon^{(2)} &= 12a_1 (T^{(0)})^3 T^{(2)} + 18a_1 (T^{(0)})^2 (T^{(1)})^2, \\
\varepsilon^{(3)} &= 12a_1 (T^{(0)})^3 T^{(3)} + 36a_1 (T^{(0)})^2 T^{(1)} T^{(2)} \\
&\quad + 12a_1 T^{(0)} (T^{(1)})^3.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

上标遵循共同振幅下的泰勒约定：在 $\rho = 0$处， $T^{(2)}$等于二阶导数的一半，而 $T^{(3)}$ 等于三阶导数的六分之一。温度分布的一阶项相乘会产生高阶能量系数。四次方根重构以及 T^3、T^{-3}和双曲速度因子的展开均截断在相同阶数。逆重构为

$$\begin{aligned}
T^{(2)} &= \frac{\varepsilon^{(2)}}{12a_1 (T^{(0)})^3} - \frac{3[T^{(1)}]^2}{2T^{(0)}}, \\
T^{(3)} &= \frac{\varepsilon^{(3)}}{12a_1 (T^{(0)})^3} - \frac{3T^{(1)} T^{(2)}}{T^{(0)}} - \frac{[T^{(1)}]^3}{(T^{(0)})^2}.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

除上述二次项外，三次系数方程还包含

$$\begin{aligned}
\cosh(\Omega - \eta_s) &= 1 + \frac{\rho^2}{2}[\Omega^{(1)}]^2 + \rho^3 \Omega^{(1)} \Omega^{(2)} + O(\rho^4), \\
\sinh(\Omega - \eta_s) &= \rho\Omega^{(1)} + \rho^2 \Omega^{(2)} + \rho^3 \left(\Omega^{(3)} + \frac{[\Omega^{(1)}]^3}{6} \right) + O(\rho^4).
\end{aligned} \tag{A.20}$$

特别地，逆温度源项为

$$\begin{aligned}
\frac{(T^{(0)})^3}{T^3} &= 1 - 3\rho \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \rho^2 \left(6\frac{[T^{(1)}]^2}{(T^{(0)})^2} - 3\frac{T^{(2)}}{T^{(0)}} \right) \\
&\quad + \rho^3 \left[-3\frac{T^{(3)}}{T^{(0)}} + 12\frac{T^{(1)} T^{(2)}}{(T^{(0)})^2} - 10\frac{[T^{(1)}]^3}{(T^{(0)})^3} \right] + O(\rho^4).
\end{aligned} \tag{A.21}$$

将这些乘积代入能量方程、动量方程和剪切方程，并令每个 $\rho^3 \eta_s^j$ 项的系数相等，即可确定三次源项。

对于纳维–斯托克斯剪切，宇称扇区在二次阶包含六个能量密度系数和三个快度系数。三次阶则增加四个能量密度系数和三个快度系数，

表 9。参考弛豫参数及 $\chi=\lambda^{*}$ 下，121 个对数输出时间点上的中心冷却差异最大绝对误差，单位为兆电子伏。

λ^{*}	二阶	三阶
0.03	0.0121	0.000430
0.06	0.0932	0.00671

从而形成包含九个方程和十六个方程的NS层级。由于瞬时纳维–斯托克斯应力取决于速度梯度，动量投影中会出现低阶快度系数的高阶时间导数。我们通过微扰阶数约化消去这些导数，即对先前求解的低阶方程求导。膨胀阶数按初始梯度的幂次计数，而剪切本构关系仍为一阶NS。

三阶数值测试保留了标量剪切弛豫定律。三阶部分在二次层级中增加了四个温度系数、四个剪切系数和三个快度系数，使自洽流对应 $2{+}5{+}8{+}11=26$ 个方程，指定流对应 $2{+}4{+}6{+}8=20$ 个方程。在低阶解中取源项，三阶系数则线性进入方程。在 $\rho=1$ 时，

$$T_{\mathrm{order}\,2}=T^{(0)}+T^{(1)}+T^{(2)},\qquad T_{\mathrm{order}\,3}=T_{\mathrm{order}\,2}+T^{(3)}. \tag{A.22}$$

三阶使误差降低了 ΔT 约 28 倍（当 $\lambda^{*}=0.03$ 时），而在 0。06 时降低了 14 倍（表 9）。由二次和三次积分得到的低阶系数，在中心冷却差异上的结果相差不超过 2.3×10^{-13} 兆电子伏。振幅加倍时，三阶截断误差增大约 15。7 倍，与 2^{4} 主导四阶余项的标度关系一致。

参考文献

[1] *D. E. Kharzeev*、*L. D. McLerran* 和 *H. J. Warringa*，《重离子碰撞中拓扑荷变化的影响：“逐事件*P*和*CP*破坏”》，《核物理*A*》*803 (2008*年*) 227*–253, [*arXiv:0711.*0950].[2] *W.-T. Deng* 和 *X.-G. Huang*，《重离子碰撞中电磁场的逐事件产生》，《物理评论 *C* 》 *85 (2012* 年 *)* 044907, [*arXiv:1201.*5108].[3] *J. Jing*、*D. She* 和 *Z.-F. Jiang*，《磁化与磁场诱导修正：对磁流体动力学中夸克胶子等离子体热光子产生的影响》，《物理评论*D*》*114 (2026*年*)* 056002, [*arXiv:2608.*13364].[4] *J. D. Bjorken*，《高相对论性核-核碰撞：中心快度区》，《物理评论*D*》*27 (1983*年*) 140–151*。公开全文。[5] *V. Roy*、*S. Pu*、*L. Rezzolla* 和 *D. H. Rischke*，《一维相对论磁流体动力学中的解析比约肯流》，《物理快报*B*》*750 (2015*年*) 45*–52, [*arXiv:1506.*06620].[6] *S. Pu*、*V. Roy*、*L. Rezzolla* 和 *D. H. Rischke*，《具有磁化的一维相对论磁流体动力学中的比约肯流》，《物理评论*D*》*93 (2016*年*) 074022*，[*arXiv:1602.*04953]。

[7] *Z.-F. Jiang*、*S.-Y. Liu*、*T.-Y. Hu*、*H.-J. Zheng* 和 *D. She*， *1+1* 维具有纵向推进不变性的相对论黏性非电阻磁流体动力学，《中国物理*C*》*49 (2025*年*)* 114104, [*arXiv:2411.*11398].[8] *T. Cs¨org˝o*、*M. I. Nagy* 和 *M. Csan´ad*，《相对论性理想流体流体动力学的一族新型简单解》，《物理快报*B*》*663 (2008*年*) 306*–311, [*nucl-th/*0605070].[9] *M. I.Nagy*、*T.Cs¨org˝o* 和 *M. Csan´ad*，《相对论性理想流体流体动力学中加速简单解的详细描述》，《物理评论*C*》*77 (2008*年*)* 024908, [*arXiv:0709.*3677].[10] *T. Cs¨org˝o*、*G. Kasza*、*M. Csan´ad* 和 *Z.-F. Jiang*，《纵向膨胀火球的相对论流体动力学新精确解》，《宇宙》*4 (2018*年*) 69*，[*arXiv:1805.*01427].[11] *D. She*、*Z.-F. Jiang*、*D. Hou* 和 *C. B. Yang*， *1+1* 维具有纵向加速度的相对论磁流体动力学，《物理评论*D*》*100 (2019*年*) 116014*，[*arXiv:1907.*01250].[12] *Z.-F. Jiang*、*D. She*、*C. B. Yang* 和 *D. Hou*，《纵向膨胀火球的相对论黏性流体动力学微扰解》，《中国物理*C*》*44 (2020*年*) 084107*，[*arXiv:2001.*09416].[13] *H. Song* 和 *U. Heinz*，《用于相对论性重离子碰撞的 *2 + 1* 维因果黏性流体动力学》，《物理评论*C*》*77 (2008*年*)*，第 6 064901, [期 *arXiv:0712.*3715].[14] *C. Shen*、*Z. Qiu*、*H. Song*、*J. Bernhard*、*S. Bass* 和 *U. Heinz*，《用于相对论性重离子碰撞的 *iEBE-VISHNU*代码包》，《计算物理通讯》*199 (2016*年*) 61–85*，[*arXiv:1409.*8164].[15] *B. Schenke*、*S. Jeon* 和 *C. Gale*，《相对论性重离子碰撞的*(3+1)*维流体动力学模拟》，《物理评论*C*》*82 (2010*年*)*，第 1 014903, [期 *arXiv:1004.*1408].[16] *B. Schenke*、*S. Jeon* 和 *C. Gale*，《来自*(3+1)*维逐事件黏性流的高阶流谐波

s

流体动力学，《物理评论*C*》*85*（*2012*年），第 2 024901, [期，*arXiv:1109.*6289].[17] *I. Karpenko*、*P. Huovinen*和*M. Bleicher*，《一种用于相对论重离子碰撞的 *3 + 1* 维黏性流体动力学代码》，《计算物理通讯》*185*（*2014*年），第*11*期，*3016–3027*，*arXiv:1312.*4160].[18] *L. Del Zanna*、*V. Chandra*、*G. Inghirami*、*V. Rolando*、*A. Beraudo*、*A. De Pace*、*G. Pagliara*、*A. Drago*和*F. Becattini*，《使用*ECHO-QGP*进行重离子碰撞的相对论黏性流体动力学》，《欧洲物理学杂志*C*》*73*（*2013*年），第 8 2524, [期，*arXiv:1305.*7052].[19] *P. Bo˙zek*，《*(3 + 1)* 维黏性流体动力学中的流与干涉测量》，《物理评论

.

C **85** (2012年)，第 3 034901, [arXiv:1110.6742]。[20] L.-G. Pang、H. Petersen 和 X.-N. Wang，采用开放计算语言实现的 *CLVisc*流体动力学中的赝快度分布与各向异性流退关联，《物理评论*C*》 **97**(2018年)，第 6 064918, [arXiv:1802.04449]。[21] H. Song、S. A. Bass、U. Heinz、T. Hirano 和 C. Shen，*200 A GeV* 金 + 金碰撞服务

e

一个近乎完美的夸克-胶子液体，《物理评论快报》**106** (2011年)，第 19 期，192301，[arXiv:1011.2783]。[22] J. E. Bernhard、J.S. Moreland、S. A. Bass、J. Liu 和 U. Heinz，应用贝叶斯参数

r

相对论性重离子碰撞的估算：初始状态的同步表征

e

和夸克-胶子等离子体介质，《物理评论*C*》**94**（2016年），第 2 024907, [arXiv:1605.03954]

.

[23] *D. Everett* 等，《*QCD*物质输运系数的多系统贝叶斯约束》，《物理评论*C*》*103*（*2021*年），第 5 054904, [*arXiv:2011.01430*].[24] *W. Florkowski*、*R. Ryblewski*、*M. Strickland* 和 *L. Tinti*，《非纵向洛伦兹不变耗散流体动力学》，《物理评论*C*》*94*（*2016*年），第 6 064903, [*arXiv:1609.06293*].[25] *Z.-F. Jiang*、*C. B. Yang*、*C. Ding* 和 *X.-Y. Wu*，《来自重离子碰撞黏性流体动力学微扰解的赝快度分布》，《中国物理*C*》*42*（*2018*年） 123103, [*arXiv:1808.10287*].[26] *Y. Hatta*、*J. Noronha* 和 *B.-W. Xiao*，《二阶共形流体动力学的精确解析解》，《物理评论*D*》*89*（*2014*年） 051702, [*arXiv:1401.6248*].[27] *S. Shi*、*S. Jeon* 和 *C. Gale*，《纵向膨胀理想流体的一族新精确解》，《物理评论*C*》*105*（*2022*年）*L*021902, [*arXiv:2201.06670*].[28] *S. Chen* 和 *S. Shi*，《纵向膨胀系统中玻尔兹曼方程的精确解》，《物理评论*C*》*109*（*2024*年）*L*051901, [*arXiv:2311.09575*].[29] *S. Chen* 和 *S. Shi*，《具有非纵向洛伦兹不变膨胀的各向异性流体力学》，《物理评论*D*》*111*（*2025*年） 014001, [*arXiv:2409.19897*].[30] *S. Chen* 和 *S. Shi*，《具有一般快度分布的 *1+1*维黏性流体动力学吸引子》，《物理评论*C*》*111*（*2025*年）*L*021902, [*arXiv:2407.15209*].[31] *B. Kurgyis* 和 *M. Csan´ad*，《相对论流体动力学的微扰加速解》，《宇宙》*3*（*2017*年），第 4 84, [*arXiv:1711.05446*].[32] *M. Haddadi Moghaddam*、*W. M. Alberico*、*D. She*、*A. F. Kord* 和 *B. Azadegan*，《重离子碰撞中电阻相对论磁流体动力学的加速纵向膨胀》，《物理评论*D*》*102*（*2020*年） 014017, [*arXiv:2002.09752*].[33] *A. F. Kord*、*A. Ghaani* 和 *M. Haddadi Moghaddam*，《重离子碰撞中具有*Bjorken*膨胀加速效应的磁流体动力学解析解》，《欧洲物理学杂志增刊》*137*（*2022*年） 53, [*arXiv:1911.05455*].[34] *K. Nakamura*、*T. Miyoshi*、*C. Nonaka* 和 *H. R. Takahashi*，《用于高能重离子碰撞的相对论电阻磁流体动力学代码》，《欧洲物理学杂志*C*》*83*（*2023*年）229, [*arXiv:2211.02310*].[35] *A. Bazavov* 等，《*QCD* 相变的手征与禁闭解除方面》，《物理评论*D*》*85*（*2012*年） 054503, [*arXiv:1111.1710*].[36] *HotQCD*合作组、*A. Bazavov* 等，《（*2+1*）味*QCD*的状态方程》，《物理评论*D*》*90*（*2014*年） 094503, [*arXiv:1407.6387*].[37] *V. V. SKOKOV*、*A. Y. ILLARIONOV* 和 *V. D. TONEEV*，《重离子碰撞中的磁场强度估计》，《国际现代物理学杂志*A*》*24*（*2009*年），第*31*期，*5925–5932*，[*arXiv:0907.1396*].[38] *K. Tuchin*，《相对论性重离子碰撞中电磁场的时空依赖性》，《物理评论*C*》*88*（*2013*年），第 2 024911, [*arXiv:1305.5806*].[39] *L. McLerran* 和 *V. Skokov*，《关于重离子碰撞中电磁场的评论》，《核物理*A*》*929*（*2014*年）*184*–190, [*arXiv:1305.0774*].[40] *G. Aarts*、*C. Allton*、*A. Amato*、*P. Giudice*、*S. Hands* 和 *J.-I. Skullerud*，《来自格点热*QCD*的电导率与电荷扩散》，高能物理学杂志*2015*（*2015*年），第*2*期186, [*arXiv:1412.6411*].

[41] S. Pu 和 D.-L. Yang，*Bjorken*膨胀中由非均匀磁场诱导的横向流，《物理评论*D*》**93**(2016年)，第 5 054042, [arXiv:1602.04954]。[42] J. Hernandez 和 P. Kovtun，相对论磁流体动力学，高能物理学杂志**2017** (2017年)，第 5 期 1

，

[arXiv:1703.08757]。[43] W. Israel 和 J. Stewart，瞬态相对论热力学与动力学理论，《物理年鉴》

.

118 (1979年)，第 2 期，341–372。出版商记录。[44] P. Romatschke，相对论黏性流体动力学的新进展，*Int. J. Mod. Phys. E***19** (2010年) 1, [arXiv:0902.3663]。[45] G. S. Denicol、H. Niemi、E. Moln´ar、和D. H. Rischke，从玻尔兹曼方程推导瞬态相对论流体动力学，《物理评论*D*》**85** (2012年) 114047, [arXiv:1202.4551]。[46] B. Betz、D. Henkel 和 D. H. Rischke，从动力学理论到耗散流体动力学，*Prog*

.

《粒子与原子核物理进展》*62*（*2009*）*556*–558, [*arXiv:0812.*1440].[47] *R. Baier*、*P. Romatschke*、*D. T. Son*、*A. O. Starinets* 和 *M. A. Stephanov*，《相对论黏性流体动力学、共形不变性与全息》，高能物理学杂志 *2008*（*2008*），第 *04* 期，*100*–100, [*arXiv:0712.*2451].[48] *A. Jaiswal*，《基于弛豫时间近似的动力学理论相对论耗散流体动力学》，《物理评论*C*》*87*（*2013*），第 5 051901, [期，6311]*arXiv:1302.*[49] *C. Shen* 和 *B. Schenke*，《相对论性重离子碰撞的动力学初态模型》，《物理评论*C*》*97*（*2018*），第 2 024907, [期，00881] *arXiv:1710.*[50] *C. Shen* 和 *B. Schenke*，《相对论性重离子碰撞的动力学初始化与流体动力学建模》，《核物理*A*》*982*（*2019*）*411*–414, [*arXiv:1807.*05141].[51] *C. Shen* 和 *S. Alzhrani*，《相对论性重离子碰撞的基于碰撞几何的三维初始条件》，《物理评论*C*》*102*（*2020*），第 1 014909, [期，05852]*arXiv:2003.*[52] *P. Bo˙zek* 和 *I. Wyskiel*，《超相对论重离子碰撞中的定向流》，《物理评论*C*》*8*（*2010*），第 5 054902, [期，4999]*arXiv:1002.*[53] *L. Pang*、*Q. Wang* 和 *X.-N. Wang*，《初始流速涨落对逐事件的影响

1

t

*(3+1)*维流体动力学，《物理评论*C*》**86** (2012年)，第 2 024911, [arXiv:1205.5019]。[54] P. Kovtun、D. T. Son 和 A. O. Starinets，黑洞物理中的强相互作用量子场论的黏度，《物理评论快报》**94** (2005年) 111601, [hep-th/0405231]。[55] G.S. Denicol、X.-G. Huang、E. Moln´ar、G. M. Monteiro、H. Niemi、J. Noronha、D. H. Rischke

，

以及*Q. Wang*，*14*矩近似下由玻尔兹曼方程导出的无电阻耗散磁流体动力学，《物理评论*D*》*98*（*2018*） 076009, [*arXiv:1804.*05210].[56] *C. Loizides*、*J. Nagle*和*P. Steinberg*，改进版 *PHOBOS Glauber*蒙特卡罗，*SoftwareX 1–2*（*2015*）*13*–18, [*arXiv:1408.*2549].[57] *A. Muronga*，核碰撞中耗散相对论流体动力学的因果理论，《物理评论*C*》*69*（*2004*） 034903, [*nucl-th/*0309055].[58] *W. Florkowski*、*R. Ryblewski*和*M. Strickland*，在一个可精确求解的情形下检验黏性流体动力学和各向异性流体动力学，《物理评论*C*》*88*（*2013*），第*2*期 *024903*，[*arXiv:1305.*7234].[59] *W. Florkowski*、*R. Ryblewski*和*M. Strickland*，快速膨胀系统的各向异性流体动力学，《核物理*A*》*916*（*2013*）*249*–259, [*arXiv:1304.*0665]。

[60] *M. P. Heller*和*M. Spalinski*，梯度展开之外的流体动力学：重现与重求和，《物理评论快报》*115*（*2015*），第 7 072501, [期 *arXiv:1503.*07514].[61] *S. S. Gubser*，比约肯流推广形式的对称性约束，《物理评论*D*》*82*（*2010*），第 8 085027, [期 *arXiv:1006.*0006].[62] *G. Denicol*、*U. Heinz*、*M. Martinez*、*J. Noronha*和*M. Strickland*，利用玻尔兹曼方程的一个新精确解研究相对论流体动力学的有效性，《物理评论*D*》*90*（*2014*），第 12 125026, [期 *arXiv:1408.*7048].[63] *G. Inghirami*、*L. Del Zanna*、*A. Beraudo*、*M. H. Moghaddam*、*F. Becattini*和*M. Bleicher*，用于相对论性核碰撞的数值磁流体动力学，《欧洲物理学杂志*C*》*76*（*2016*），第 12 659, [期 *arXiv:1609.*03042].[64] *M. Mayer*、*A. Dash*、*G. Inghirami*、*H. Elfner*、*L. Rezzolla*和*D. H. Rischke*，采用改编用于夸克-胶子等离子体（*BHAC-QGP*）的黑洞吸积代码，对相对论性重离子碰撞进行三维磁流体力学模拟。*I.* 方法与测试，《物理评论*C*》*111*（*2025*），第 4 044907, [期 *arXiv:2403.*08668].[65] *I. G. Bearden*等，*Au*+*Au*碰撞中带电介子的快度分布，碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 200$ *GeV*，《物理评论快报》*94*（*2005*），第 16 162301, [期 *nucl-ex/*0403050].[66] *CMS* 合作组，在铅铅和质子铅碰撞中发现横动量和赝快度相关的事件平面涨落证据，《物理评论*C*》*92*（*2015*）*034911*，[*arXiv:1503.*01692].[67] *ATLAS* 合作组，利用*ATLAS* 探测器测量碰撞能量为$\sqrt{s_{\rm NN}} = 2.76$ 和*5.02 TeV*的铅+铅碰撞中的纵向流退相关，《欧洲物理学杂志*C*》*78*（*2018*）*142*，[*arXiv:1709.*02301].[68] *P. Bo˙zek*和*W. Broniowski*，超相对论性核碰撞中扭矩效应与快度方向熵沉积的涨落，《物理快报*B*》*752*（*2016*）*206–211*，[*arXiv:1506.*02817].[69] *W. Broniowski*和*P. Bo˙zek*，超相对论重离子碰撞初始态快度涨落的简单模型，《物理评论*C*》*93*（*2016*），第*6*期 *064910*，[*arXiv:1512.*01945].[70] *B. Schenke*和*S. Schlichting*，基于小 *x* 演化的三维胶子凝聚态初始态，《核物理*A*》*967*（*2017*）*285*–288, [*arXiv:1704.*03018].[71] *A. Sakai*、*K. Murase*和*T. Hirano*，流体动力学涨落和初始纵向涨落对集体流快度退相关的影响，《物理快报*B*》*829*（*2022*）*137053*，[*arXiv:2111.*08963].[72] *F. Cooper*和*G. Frye*，流体动力学模型和多粒子产生统计热力学模型中的单粒子分布，《物理评论*D*》*10*（*1974*），第*1*期 *186–189*。出版商记录。[73] *M. McNelis*和*U. Heinz*，*Cooper–Frye* 粒子化的修正平衡分布，《物理评论*C*》*103*（*2021*） 064903, [*arXiv:2103.*03401].[74] *P. Steinberg*，朗道流体动力学与相对论重离子对撞机现象，*Acta Phys. Hung. A 24*（*2005*）*51*–57, [*nucl-ex/*0405022].[75] *K. Hattori*、*M. Hongo*、*X.-G. Huang*、*M. Matsuo*和*H. Taya*，相对论流体中自旋极化的命运：熵流分析，《物理快报*B*》*795*（*2019*）*100–106*，[*arXiv:1901.*06615]。

[76] D.-L. Wang、S.Fang 和 S. Pu，具有 *Bjorken*膨胀的相对论耗散自旋流体力学解析解，《物理评论*D*104（2021年），第11期，114043，[arXiv:2107.11726]。[77] S. Bhadury、W. Florkowski、A. Jaiswal、A. Kumar 和 R. Ryblewski，相对论自旋磁流体力学，《物理评论快报**129**（2022年），第 19 192301, [arXiv:2204.01357]。[78] Z. Fang、K.Hattori 和 J. Hu，自旋磁流体力学中的各向异性线性波与动量展开失效，《物理评论*D*112（2025年），第7期，076016，[arXiv:2409.07096]。[79] B. Fornberg，任意间距网格上有限差分公式的生成，《《数学计算》

51（1988年），第184期，第699–706页。 公开全文。