一种用于曲率驱动流的几何不变能量二次化方法

Harald Garcke[a]、Yifei Li[b]、Robert Nürnberg[c]、Quan Zhao[d]

[a]雷根斯堡大学数学系，德国雷根斯堡 *93040*[b]图宾根大学数学研究所，莫根施泰勒街 *10* 号，德国图宾根 *72076*[c]特伦托大学数学系，意大利特伦托 *38123*[d]中国科学技术大学数学科学学院，中国安徽省合肥市 *230026*

arXiv:2611.30832v1 [math.NA] 23 Nov 2026

摘要

我们针对一类闭超曲面的依赖曲率的能量所对应的 L^2-梯度流，提出一种几何不变能量二次化（IEQ）表述，其中能量密度依赖于平均曲率和单位法向量。引入平方根辅助变量，可将几何能量转化为二次泛函。将其演化方程与曲面输运的反对称处理相结合，得到一种弱形式，其能量律仅取决于法向速度，因此与所选的切向运动无关。我们通过将通用的不变能量二次化离散与两种几何形式之一耦合，构造整体非线性参数有限元方法，以适配 Barrett-Garcke-Nürnberg（BGN）切向速度或最小变形率（MDR）切向速度。这两种全离散近似均满足离散二次能量的无条件衰减估计。我们进一步将该构造推广至各向异性 Willmore流以及 H^{-1}-梯度流。最后，我们通过多种数值实验展示所提出方法的稳健性和精度。

关键词： 不变能量二次化，参数有限元，曲率流，能量稳定性，切向运动，各向异性 Willmore流*2020*年数学学科分类： 65M60, 65M15, 65M12, 35R01

1. 引言

由包含曲率量的法向速度定律驱动的界面运动，是微分几何中的基本问题，也出现在图像处理、材料科学和生物膜模型中。两个典型例子是平均曲率流，即 L^2表面积的梯度流 [30], ，以及Willmore流，即 L^2平均曲率平方曲面积分的梯度流 [39]。对于这两个典型例子， L^2梯度流结构给出了定量的耗散律：驱动能量对时间的导数等于负的平方

L^2法向速度的范数。这一耗散律正是数值近似应当继承的精确几何结构。同一变分原理还允许两种自然推广：将各向同性能量替换为取向依赖能量，可得到各向异性平均曲率流或 Willmore 流 [28, 35], ；而将 L^2度量替换为H^{-1}度量，则可得到体积守恒几何演化，曲面扩散就是一个经典例子 [34, 14]。此前已有多篇研究考察了 Willmore 能量的 H^{-1}梯度流 [26, 27, 13, 38]。本文将这一流称为“H^{-1}Willmore 流”。所得演化方程的阶数从二阶到六阶不等，且其刚性以及几何与曲率之间的强耦合，使构造稳健的能量稳定离散成为一项核心数值挑战。

电子邮箱地址： harald.garcke@ur.de (Harald Garcke), yifei.li@mnf.uni-tuebingen.de (Yifei Li), robert.nurnberg@unitn.it (Robert Nürnberg), quanzhao@ustc.edu.cn (Quan Zhao)

参数有限元方法（PFEM）在近似曲率驱动的界面演化方面历史悠久，参见 [18, 2, 9, 12, 32, 29, 5, 3, 22]。Dziuk 提出了平均曲率流的一种奠基性参数近似方法 [18]。BGN方法提供了一个变分框架，可自然推广到一大类几何流 [6, 9, 11, 10, 12]。该方法依赖于弱曲率方程，能够诱导有益的切向运动，从而使三维空间中的曲线渐近等分布，并使多面体曲面渐近保角。这些性质凸显了合适的切向速度对于维持网格质量的重要性。其他处理方法包括基于最小变形率（MDR）原理的公式 [29, 22], ，这类方法能够控制网格变形并缓解 BGN 格式中的小时间步长网格不稳定性；此外还有调和映射/DeTurck重参数化和一致化策略 [20, 17]。

另一个挑战是在离散层面保留梯度流结构。变分型 BGN 公式可为一系列二阶和四阶几何流 [7, 6, 9]导出离散能量耗散；对于曲面扩散，保结构变体还可保持包围体积 [31, 5]。此外，人们也为各向异性几何流 [8, 3, 11]开发了其他构造。对于 Willmore流，早期研究 [19, 10] 提出了具有半离散能量稳定性的参数化方法；近期， [45] 则采用了经过放宽的 MDR切向速度。更近期，Bao 和 Li [4]通过引入平均曲率演化方程，为闭合平面曲线开发了一种无条件能量稳定的全离散参数有限元方法。 [24] 中的格式将这一机制与 BGN切向运动相结合。 [23] 提出的法向–切向速度分裂技术，将承载梯度流耗散的曲率驱动法向速度与可自由选取的切向速度分离，从而为具有任意切向运动的曲线和曲面 Willmore流构造出能量稳定的全离散方法。这一进展引出了一个自然的问题：对于更一般的曲面能量梯度流，能否系统地实现能量耗散与网格运动的同样分离?

这些针对 Willmore流 的能量稳定方法 [4, 24, 23] 具有两个共同特征。首先，它们依赖于一个关于平均曲率的演化方程。其次，能量稳定性针对的是修正能量，其中平均曲率由该演化方程确定，而不是由离散曲面确定。这两个特征正是经典耗散系统中不变能量二次化（IEQ）方法论的标志 [40, 43], ：在该方法中，辅助变量随时间演化，能量稳定性针对的是由该辅助变量给出的修正能量。在固定域上，对于一个有下界的非线性能量密度 F ，IEQ方法引入了形如 $r = \sqrt{F(u)} + C$ 的辅助变量。能量关于r变为二次形式，同时链式法则演化方程将 r 与原始相变量耦合起来。显式计算非线性系数，但在两个耦合方程中使用相同的系数，即可产生所需的抵消，从而构造线性且无条件能量稳定的时间离散化方法。该方法已广泛应用于相场及其他耗散系统 [41, 44, 25, 33]，并得到进一步发展。

为清晰地说明这种对应关系，我们写作 $g(u) = \sqrt{2F(u) + C}$。我们在表 1 中比较了Willmore流和 IEQ方法。在这两种情况下，能量关于辅助变量 λ 均为二次形式，即Willmore流中的 $\lambda = \varkappa$ 和 IEQ中的 $\lambda = g(u)$。区别在于， $g(u)$ 始终非负，而 $\varkappa$ 可以改变符号。此外， λ 的演化方程关于状态变量变化率呈线性形式，即 Willmore流中 Γ 的法向速度 $\mathscr{V}$，以及 IEQ中的 $\partial_t u$ 。数值方法耗散的不是原始能量 E ，而是 Willmore流中的修正能量 $\frac{1}{2}\int_\Gamma \lambda^2$ 和 IEQ中的 $\frac{1}{2}\int \lambda^2$ 。其本质区别在于,-IEQ中的修正能量是在固定域上积分的，而对于 Willmore流，则是在演化曲面上积分的。

受这一联系的启发，我们旨在将 IEQ 原理从固定区域的耗散系统推广到具有一般曲面能量的演化曲面上的曲率驱动几何梯度流。我们主要关注一类由平均曲率 L^2确定的曲面能量的 L^2梯度流

表 1：Willmore流与IEQ方法之间的对应关系。其中， Γ 是演化曲面， $\vec{\mathscr{V}}$ 是 Γ的全速度， $\vec{\nu}$ 和 $\varkappa$ 分别是 Γ的单位法向量和平均曲率， $\mathscr{V} = \vec{\mathscr{V}} \cdot \vec{\nu}$ 是法向速度， Δ_s 是曲面拉普拉斯算子， $\partial_t^{\square}$是法向时间导数。

	Willmore流	IEQ
状态变量	Γ	u
能量泛函	$E(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \varkappa^2$	$E(u) = \frac{1}{2}\int g^2(u)$
状态变量的演化	$\vec{\mathscr{V}},\ \mathscr{V} = \vec{\mathscr{V}} \cdot \vec{\nu}$	$\partial_t u$
辅助变量	$\lambda = \varkappa$	$\lambda = g(u)$
演化方程	$\partial_t^{\square}\lambda = (\Delta_s + \lvert\nabla_s \vec{\nu}\rvert^2)\,\mathscr{V}$	$\partial_t \lambda = (g'(u))\,\partial_t u$

，其中涉及单位法向量 $\vec{\nu}$。我们建立了几何 IEQ 公式及相应的能量稳定参数有限元近似，其耗散结构不受切向重参数化的影响。随后，我们从两个方向拓展这一框架。首先，我们考虑依赖于更一般几何量的能量，例如各向异性平均曲率$\varkappa_\gamma$，并以各向异性 Willmore 流作为代表性示例。其次，我们研究 H^{-1}梯度流，包括表面扩散型演化；所得格式既能耗散能量，也能保持包围体积不变。在整个过程中，理想情况下，方法应能适应任意切向运动，以确保 Γ具有良好的网格质量。

本文的主要贡献如下。

- 我们针对一类能量密度依赖于 $\varkappa$ 和 $\vec{\nu}$的曲面能量，引入了 L^2-梯度流的几何 IEQ 公式。该公式采用能量密度的平方根作为辅助变量，并将耗散性的法向运动与切向重参数化分离。

- 我们对几何–IEQ 公式进行离散，构造了采用 BGN 或 MDR 切向速度的非线性整体几何–IEQ 参数有限元近似，并可为这两种格式建立无条件离散能量衰减估计。

- 我们将该框架扩展到不仅依赖于 $\varkappa$ 和 $\vec{\nu}$的能量。对于各向异性Willmore流，我们允许其依赖于各向异性平均曲率$\varkappa_\gamma$；对于 H^{-1}-梯度流，所得格式能够耗散能量并精确守恒包围体积。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们介绍几何记号，并推导形式为 L^2-梯度流的几何–IEQ 公式，其能量形式为 $\frac{1}{2}\int_\Gamma f(\varkappa, \vec{\nu})$。第 3 节介绍全离散参数有限元方法及其能量稳定性估计。第4节将该方法扩展至各向异性Willmore流，随后在第 H^{-1}节讨论5中的梯度流。第6节给出数值结果，包括收敛性测试、对能量耗散和质量守恒的验证，以及闭曲线和曲面的形态演化。

2. 用于 L^2-梯度流的几何–IEQ 公式

2.1. 几何设置

令 $T > 0$，并设 $\{\Gamma(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一族光滑、闭合且定向的超曲面， $d \in \{2,3\}$。我们假设

$$\vec{x} : \Upsilon \times [0,T] \to \mathbb{R}^d \tag{2.1}$$

是在固定参考流形 Υ 上的光滑参数化，并记

$$\vec{\mathscr{V}}(\vec{x}(\vec{\rho},t),t)=\partial_t\vec{x}(\vec{\rho},t)\quad(\vec{\rho},t)\in\Upsilon\times[0,T] \tag{2.2}$$

对于参数化下的诱导全速度。若 $\vec{\nu}$ 是选定的单位法向量，则法向速度为

$$\mathscr{V}=\vec{\mathscr{V}}\cdot\vec{\nu}\qquad\text{on}\quad\Gamma(t). \tag{2.3}$$

对于演化曲面上的标量函数 g ，我们通过以下方式定义 $\Gamma(t)$上的物质时间导数和法向时间导数

$$(\partial_t^\circ g)(\vec{x}(\vec{\rho},t),t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(\vec{x}(\vec{\rho},t),t)\quad(\vec{\rho},t)\in\Upsilon\times[0,T],\qquad\partial_t^\square g=\partial_t^\circ g-\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s g, \tag{2.4}$$

参见 [12, 定义 28]。我们有曲率恒等式

$$\varkappa\vec{\nu}=\Delta_s\vec{\mathrm{id}}\qquad\text{on }\Gamma(t), \tag{2.5}$$

其中，$\vec{\mathrm{id}}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的恒等函数。我们采用如下符号约定：半径为 r 的球面在具有外法向量时，其平均曲率为 $-\frac{d-1}{r}$。

我们回顾以下标准恒等式；例如，参见 [12, 引理 37、38、39].

引理 2.1。对于光滑的演化超曲面，

$$\partial_t^\square\vec{\nu}=-\nabla_s\mathscr{V}\qquad on\quad\Gamma(t), \tag{2.6a}$$

$$\partial_t^\square\varkappa=\Delta_s\mathscr{V}+\mathscr{V}|\nabla_s\vec{\nu}|^2\qquad on\quad\Gamma(t). \tag{2.6b}$$

此外，

$$\partial_t^\circ\vec{\nu}=-(\nabla_s\vec{\mathscr{V}})^T\vec{\nu}\qquad on\quad\Gamma(t), \tag{2.7a}$$

$$\partial_t^\circ\varkappa=\Delta_s\mathscr{V}+\mathscr{V}|\nabla_s\vec{\nu}|^2+\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\varkappa\qquad on\quad\Gamma(t). \tag{2.7b}$$

为便于后续使用，若 $\vec{a}$ 是闭超曲面上的向量场，则曲面散度定理为

$$\int_\Gamma\nabla_s\cdot\vec{a}+\varkappa\vec{a}\cdot\vec{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma=0. \tag{2.8}$$

闭超曲面上的分部积分公式为

$$\int_\Gamma\vec{a}\cdot\nabla_s g\,\mathrm{d}\Gamma=-\int_\Gamma g\left(\nabla_s\cdot\vec{a}+\varkappa\vec{a}\cdot\vec{\nu}\right)\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{2.9}$$

曲面输运定理为 [12, 定理 32]

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Gamma(t)}g\,\mathrm{d}\Gamma&=\int_{\Gamma(t)}\left(\partial_t^\circ g+g\,\nabla_s\cdot\vec{\mathscr{V}}\right)\,\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma(t)}\left(\partial_t^\circ g+g\nabla_s\vec{\mathrm{id}}:\nabla_s\vec{\mathscr{V}}\right)\,\mathrm{d}\Gamma\\&=\int_{\Gamma(t)}\left(\partial_t^\square g-g\varkappa\mathscr{V}\right)\,\mathrm{d}\Gamma,\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中我们使用了恒等式 $\nabla_s\cdot\mathscr{V}=\nabla_s\vec{\mathrm{id}}:\nabla_s\vec{\mathscr{V}}$。

2.2. 能量的几何–*IEQ*重构

我们考虑几何能量

$$E(\Gamma)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma} f(\varkappa,\vec{\nu})\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{2.11}$$

其中 $f:\ \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^d\setminus\{\vec{0}\})\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是光滑的，并且对每个固定的 $\varkappa$，关于其为一次正齐次:

$$f(\varkappa,\alpha\vec{p})=\alpha f(\varkappa,\vec{p})\qquad \forall\alpha>0,\quad \vec{p}\in\mathbb{R}^d\setminus\{\vec{0}\}. \tag{2.12}$$

假设存在一个光滑且可带符号的因子 q，使得

$$q(\varkappa,\vec{p})^2=f(\varkappa,\vec{p}),\qquad q(\varkappa,\alpha\vec{p})=\alpha^{1/2}q(\varkappa,\vec{p}),\quad \alpha>0, \tag{2.13}$$

并定义

$$\lambda=q(\varkappa,\vec{\nu}). \tag{2.14}$$

Then

$$E(\Gamma)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\lambda^2\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{2.15}$$

我们将 q的导数记为 $\partial_{\varkappa}q(\cdot,\ \cdot)$和 $\nabla_{\vec{p}}q(\cdot,\ \cdot)$。由 (2.13中的二分之一次齐性，欧拉恒等式给出

$$\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{p})\cdot\vec{p}=\frac{1}{2}q(\varkappa,\vec{p}).$$

利用 (2.10)、(2.6) 和 (2.8)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\Gamma(t))&=\int_{\Gamma(t)}\left(\lambda\partial_t^{\square}q-\frac{1}{2}\lambda^2\varkappa\mathscr{V}\right)\,\mathrm{d}\Gamma\\&=\int_{\Gamma(t)}\lambda\left[q_{\varkappa}(\varkappa,\vec{\nu})\left(\Delta_s\mathscr{V}+\mathscr{V}|\nabla_s\vec{\nu}|^2\right)-\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu})\cdot\nabla_s\mathscr{V}\right]\,\mathrm{d}\Gamma-\frac{1}{2}\int_{\Gamma(t)}\lambda^2\varkappa\mathscr{V}\,\mathrm{d}\Gamma\\&=\int_{\Gamma(t)}\mathscr{V}\left[\Delta_s(\lambda\partial_{\varkappa}q(\varkappa,\vec{\nu}))+\lambda\partial_{\varkappa}q(\varkappa,\vec{\nu})|\nabla_s\vec{\nu}|^2+\nabla_s\cdot(\lambda\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu}))\right]\,\mathrm{d}\Gamma,\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中在第二个等式中，我们使用链式法则进行计算

$$\begin{aligned}\partial_t^{\square}q&=q_{\varkappa}(\varkappa,\vec{\nu})\partial_t^{\square}\varkappa+\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu})\cdot\partial_t^{\square}\vec{\nu}\\&=q_{\varkappa}(\varkappa,\vec{\nu})\left(\Delta_s\mathscr{V}+\mathscr{V}|\nabla_s\vec{\nu}|^2\right)-\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu})\cdot\nabla_s\mathscr{V}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

注意到（2.16），能量的加权 L^2梯度流为

$$\mathscr{V}=-\beta(\vec{\nu})\left[\Delta_s(\lambda\partial_{\varkappa}q(\varkappa,\vec{\nu}))+\lambda\partial_{\varkappa}q(\varkappa,\vec{\nu})|\nabla_s\vec{\nu}|^2+\nabla_s\cdot(\lambda\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu}))\right]\quad\text{on}\quad\Gamma(t), \tag{2.18}$$

其中，$\beta(\vec{\nu})$ 是取向相关迁移率。我们假设 $\beta\in C^2(\mathbb{R}^d\setminus\{\vec{0}\})\cap C(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}_{\geq 0})$，且 $\beta>0$ 在 $\mathbb{R}^d\setminus\{\vec{0}\}$ 上。对于 $\beta\equiv 1$，我们得到 $E(\Gamma(t))$ 的标准 L^2梯度流。

2.3. 几何–*IEQ* 弱形式

由（2.4）和（2.17）可得

$$\begin{aligned}\partial_t^{\circ}\lambda&=\partial_t^{\square}\lambda+\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\lambda=\partial_t^{\square}q+\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\lambda\\&=\partial_{\varkappa}q(\varkappa,\vec{\nu})\left(\Delta_s\mathscr{V}+\mathscr{V}|\nabla_s\vec{\nu}|^2\right)-\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu})\cdot\nabla_s\mathscr{V}+\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\lambda,\end{aligned} \tag{2.19}$$

我们将结合式（2.18）来近似梯度流。接下来，我们为其推导几何–IEQ 弱形式。记 $(\cdot,\ \cdot)_{\Gamma}$ 为 L^2 上的内积，其中 $\Gamma(t)$。利用分部积分，不难得到

$$(\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\lambda,\ \chi)_{\Gamma}+\frac{1}{2}(\nabla_s\vec{\mathrm{id}}:\nabla_s\vec{\mathscr{V}},\ \lambda\chi)_{\Gamma}=\frac{1}{2}\mathscr{A}_{\Gamma}(\vec{\mathscr{V}},\lambda,\chi)-\frac{1}{2}(\mathscr{V},\varkappa\lambda\chi)_{\Gamma} \tag{2.20}$$

其中我们引入了反对称形式

$$\mathscr{A}_\Gamma(\vec{\mathscr{V}},\eta,\chi)=(\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\eta,\chi)_\Gamma-(\vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\chi,\eta)_\Gamma\qquad\forall\eta,\chi\in H^1(\Gamma(t)),\tag{2.21}$$

$\vec{\mathscr{V}}$满足 $\mathscr{A}_\Gamma(\mathscr{V},\eta,\eta)=0$。

现在给出几何–IEQ 弱形式如下。给定 $\Gamma(0)$ 和 $\lambda(\cdot,0)$，对每个$t\in(0,T]$，求

$$\big(\mathscr{V}(\cdot,t),\lambda(\cdot,t)\big)\in H^1(\Gamma(t))\times H^1(\Gamma(t))$$

使得

$$\big([\beta(\vec{\nu})]^{-1}\mathscr{V},\ \varphi\big)_\Gamma=\big(\nabla_s(\lambda\partial_\varkappa q(\varkappa,\vec{\nu})),\ \nabla_s\varphi\big)_\Gamma-\big(\lambda\,\partial_\varkappa q(\varkappa,\vec{\nu})|\nabla_s\vec{\nu}|^2,\ \varphi\big)_\Gamma$$
$$+\frac{1}{2}\big(\lambda^2\varkappa,\ \varphi\big)_\Gamma+\big(\lambda\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu}),\ \nabla_s\varphi\big)_\Gamma\qquad\forall\varphi\in H^1(\Gamma(t));\tag{2.22a}$$

$$\big(\partial_t^\circ\lambda,\ \chi\big)_\Gamma+\frac{1}{2}\big(\nabla_s\vec{\mathrm{id}}:\nabla_s\vec{\mathscr{V}},\ \lambda\chi\big)_\Gamma=-\big(\nabla_s(\partial_\varkappa q(\varkappa,\vec{\nu})\,\chi),\ \nabla_s\mathscr{V}\big)_\Gamma+\big(\partial_\varkappa q(\varkappa,\vec{\nu})\,\chi\mathscr{V},|\nabla_s\vec{\nu}|^2\big)_\Gamma$$
$$-\frac{1}{2}\big(\mathscr{V},\ \varkappa\lambda\chi\big)_\Gamma-\big(\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu})\cdot\nabla_s\mathscr{V},\ \chi\big)_\Gamma+\frac{1}{2}\mathscr{A}_\Gamma(\vec{\mathscr{V}},\lambda,\chi)\qquad\forall\chi\in H^1(\Gamma(t)).\tag{2.22b}$$

系统（2.22）在给定完整的 $\mathscr{V}$速度 λ 和平均曲率$\vec{\varkappa}$后，确定法向速度 $\mathscr{V}$ 以及辅助变量 $\varkappa$。为得到完整的耦合形式，我们将这些几何–IEQ方程与法向速度约束以及一个根据参数化恢复曲率的几何方程结合起来。

注 2.2. 当能量密度仅依赖于曲率时，即 $f(\varkappa,\vec{\nu})=\mathcal{F}(\varkappa)$，齐次性 (2.12) 给出 $f(\varkappa,\vec{p})=\mathcal{F}(\varkappa)|\vec{p}|$; 而由 (2.13) 的构造可得

$$q(\varkappa,\vec{p})=h(\varkappa)\sqrt{|\vec{p}|},\qquad h(\varkappa)^2=\mathcal{F}(\varkappa).$$

因此 $\partial_\varkappa q(\varkappa,\vec{\nu})=h'(\varkappa)$，且 $\nabla_{\vec{p}}q(\varkappa,\vec{\nu})=\frac{1}{2}h(\varkappa)\vec{\nu}$。由于 $\vec{\nu}\cdot\nabla_s\varphi=0$对任意标量 φ均成立，*(2.22a)* 和 *(2.22b)* 中涉及 $\nabla_{\vec{p}}q$ 的项均消失，因而 *(2.22)* 简化为

$$\big([\beta(\vec{\nu})]^{-1}\mathscr{V},\ \varphi\big)_\Gamma=\big(\nabla_s(\lambda h'(\varkappa)),\ \nabla_s\varphi\big)_\Gamma-\big(\lambda h'(\varkappa)|\nabla_s\vec{\nu}|^2,\ \varphi\big)_\Gamma+\frac{1}{2}\big(\lambda^2\varkappa,\ \varphi\big)_\Gamma,\tag{2.23a}$$

$$\big(\partial_t^\circ\lambda,\ \chi\big)_\Gamma+\frac{1}{2}\big(\nabla_s\vec{\mathrm{id}}:\nabla_s\vec{\mathscr{V}},\ \lambda\chi\big)_\Gamma=-\big(\nabla_s(h'(\varkappa)\chi),\ \nabla_s\mathscr{V}\big)_\Gamma+\big(h'(\varkappa)\chi\mathscr{V},\ |\nabla_s\vec{\nu}|^2\big)_\Gamma$$
$$-\frac{1}{2}\big(\mathscr{V},\ \varkappa\lambda\chi\big)_\Gamma+\frac{1}{2}\mathscr{A}_\Gamma(\vec{\mathscr{V}},\lambda,\chi).\tag{2.23b}$$

例如，对于广义 *Willmore* 能量 $\frac{1}{2}\int_\Gamma(\varkappa-\bar{\varkappa})^2$,，其中 $\bar{\varkappa}\in\mathbb{R}$ 为自发曲率，我们有 $\mathcal{F}(\varkappa)=(\varkappa-\bar{\varkappa})^2$,，因此 $h(\varkappa)=\varkappa-\bar{\varkappa}$，$h'(\varkappa)=1$，且 $\bar{\lambda}=q(\varkappa,\vec{\nu})=(\varkappa-\bar{\varkappa})$。于是，*(2.23)* 化为文献 *[23]*中所考虑的弱形式。

2.4. 几何形式与切向无关的能量律

$\vec{\text{几何–IEQ}}$ 系统（2.22）需要与以下变量的方程耦合：$\mathscr{V}$ 和 $\varkappa$。我们考虑两种可能性。第一种选择是**BGN 几何形式** [12]: 求

$$(\vec{\mathscr{V}},\varkappa)\in[H^1(\Gamma(t))]^d\times H^1(\Gamma(t))$$

使得

$$\big(\vec{\mathscr{V}}\cdot\vec{\nu},\ \xi\big)_\Gamma-\big(\mathscr{V},\ \xi\big)_\Gamma=0\qquad\forall\xi\in H^1(\Gamma(t));\tag{2.24a}$$

$$\big(\varkappa\vec{\nu},\ \vec{\eta}\big)_{\Gamma(t)}+\big(\nabla_s\vec{\mathrm{id}},\ \nabla_s\vec{\eta}\big)_\Gamma=0\qquad\forall\vec{\eta}\in[H^1(\Gamma(t))]^d.\tag{2.24b}$$

或者，我们通过求解**MDR 几何形式** [29]，使其满足

$$(\vec{\mathscr{V}},\varkappa,\mu)\in[H^1(\Gamma(t))]^d\times H^1(\Gamma(t))\times L^2(\Gamma(t))$$

使得

$$\left(\vec{\mathscr{V}}\cdot\vec{\nu},\ \xi\right)_\Gamma-\left(\mathscr{V},\ \xi\right)_\Gamma=0\qquad\forall\xi\in H^1(\Gamma(t));\tag{2.25a}$$

$$\left(\varkappa,\ g\right)_\Gamma+\left(\nabla_s\vec{\mathrm{id}},\nabla_s(g\,\vec{\nu})\right)_\Gamma=0\qquad\forall g\in H^1(\Gamma(t));\tag{2.25b}$$

$$\left(\mu\,\vec{\nu},\ \vec{\eta}\right)_\Gamma+\left(\nabla_s\vec{\mathscr{V}},\ \nabla_s\vec{\eta}\right)_\Gamma=0\qquad\forall\vec{\eta}\in[H^1(\Gamma(t))]^d.\tag{2.25c}$$

通过用一个标量函数测试曲率恒等式（2.25），可得到第二个方程（2.5）。最后一个方程是使

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma(t)}|\nabla_s\vec{\mathscr{V}}|^2\,\mathrm{d}\Gamma\tag{2.26}$$

在法向速度约束（2.25a）下极小化，并令 μ充当拉格朗日乘子。在连续层面上，（2.24）没有确定 $\mathscr{V}$的切向分量；其参数有限元离散则选取了特征性的 BGN 切向重分布。相比之下，MDR 方程通过极小化原理（2.26）确定切向速度。因此，（2.22）与（2.24）共同定义了**gIEQ–BGN**系统，而（2.22）与（2.25）共同定义了**gIEQ–MDR**系统。

定理 2.3（连续能量律）。设$(\Gamma(t)\ \lambda,\mathscr{V},\mathscr{V},\varkappa)$是**gIEQ–BGN** 系统的一个充分光滑解，或者设$(\Gamma(t)\ \lambda,\mathscr{V},\mathscr{V},\varkappa,\mu)$是**gIEQ–MDR**系统的一个充分光滑解。那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|\lambda\|^2_{L^2(\Gamma(t))}\right)=-\|[\beta(\vec{\nu})]^{-\frac{1}{2}}\mathscr{V}\|^2_{L^2(\Gamma(t))}\le 0.\tag{2.27}$$

证明。取 $\varphi=\mathscr{V}$于 (2.22a) 中，并取 $\chi=\lambda$ 于 (2.22b) 中。所有几何耦合项均相互抵消，且 $\mathscr{A}_\Gamma(\mathscr{V},\lambda,\lambda)=0$。因此

$$\|[\beta(\vec{\nu})]^{-\frac{1}{2}}\mathscr{V}\|^2_{L^2(\Gamma(t))}+(\partial_t^\circ\lambda,\lambda)_{\Gamma(t)}+\frac{1}{2}(\nabla_s\vec{\mathrm{id}}:\nabla_s\vec{\mathscr{V}},\lambda^2)_{\Gamma(t)}=0.$$

最后两项等于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\Gamma(t)}\lambda^2\,\mathrm{d}\Gamma$，由 (2.10) 可得。因此，两种几何形式均满足能量律。

□

注 2.4。值得注意的是，(2.27)中的稳定性估计仅依赖于 (2.22)；其推导既未用到(2.24)，也未用到 (2.25)。因此，切向运动可以独立选取，而不影响其底层的几何梯度流。

3. L^2梯度流的参数有限元近似

现在，我们对第 2 节中的几何–IEQ 公式进行离散化。gIEQ–BGN 和 gIEQ– MDR 格式对法向速度和辅助变量采用相同的离散方程。下面给出它们共同的能量稳定性证明。

3.1. 离散曲面与几何量

设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_M=T$为时间步长为 τ的均匀划分。在时间 t_m，设 $\Gamma^m=\bigcup_{j=1}^J\overline{\sigma}_j^m$为一个带标记顶点 $\{\vec{q}_k^m\}_{k=1}^N$ 和网格$\mathcal{T}^m=\{\sigma_j^m\}_{j=1}^J$的闭多面体超曲面，其中 σ_j^m是 $\mathbb{R}^d$中两两不相交的 $(d-1)$-单纯形。我们定义

$$\mathbb{V}^h(\Gamma^m)=\{\chi\in C(\Gamma^m):\chi|_\sigma\text{ is affine for every simplex }\sigma\in\mathcal{T}^m\}.\tag{3.1}$$

我们在当前多面体曲面 Γ^m 上引入 L^2-内积和质量集总内积，其定义如下：

$$(f,\ g)_{\Gamma^m} := \sum_{j=1}^{J} \int_{\sigma_j^m} f\, g\ \mathrm{d}\Gamma, \tag{3.2a}$$

$$(f,\ g)^h_{\Gamma^m} := \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{J} |\sigma_j^m| \sum_{k=0}^{d-1} \lim_{\sigma_j^m \ni \vec{x} \to \vec{q}_{j_k}^m} f(\vec{x})\, g(\vec{x}), \tag{3.2b}$$

对于分片连续函数 f，g 其在 σ_j^m 的边上可能存在跳跃，其中 $\{\vec{q}_{j_k}^m\}_{k=0}^{d-1}$ 是 σ_j^m的顶点，且 $|\sigma_j^m|$ 是其表面积。(3.2) 中的两个内积可自然推广到向量值函数和张量值函数。

给定 Γ^m，记 $\vec{\nu}^m$ 为 Γ^m 的单元单位法向量，而新参数化在旧曲面上表示为

$$\vec{X}^{m+1} = \mathrm{i}\vec{\mathrm{d}} + \tau \vec{\mathscr{V}}^{m+1}, \qquad \Gamma^{m+1} = \vec{X}^{m+1}(\Gamma^m). \tag{3.3}$$

在 $\mathcal{T}^m$ 的每个单元上，令

$$\vec{F}^{m+1} = \nabla_s \vec{X}^{m+1} + \vec{\nu}^m \otimes \vec{\nu}^m, \qquad \vec{N}^{m+1} = \mathrm{cof}(\vec{F}^{m+1})\, \vec{\nu}^m, \qquad \mathcal{J}^{m+1} = |\vec{N}^{m+1}|. \tag{3.4}$$

这里，$\mathrm{cof}(\vec{F}^{m+1})$ 表示余子式矩阵，而 $\mathcal{J}^{m+1} = |\vec{N}^{m+1}| = \frac{|\sigma_j^{m+1}|}{|\sigma_j^m|}$ 是 σ_j^{m+1}与 σ_j^m的测度之比（逐单元计算）。

我们将顶点法向量 $\vec{v}^m$，$\hat{}\vec{v}^{m+1} \in [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d$ 定义为 Γ^m 和 Γ^{m+1} 上的

$$(\vec{\omega}^m, \vec{\psi}^h)^h_{\Gamma^m} = (\vec{\nu}^m, \vec{\psi}^h)_{\Gamma^m}, \quad \forall \vec{\psi}^h \in [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d, \quad \vec{v}^m = I_h^m \left(\frac{\vec{\omega}^m}{|\vec{\omega}^m|} \right), \tag{3.5}$$

$$(\mathcal{J}^{m+1}\vec{\omega}^{m+1}, \vec{\psi}^h)^h_{\Gamma^m} - (\vec{N}^{m+1}, \vec{\psi}^h)_{\Gamma^m} = 0, \quad \forall \vec{\psi}^h \in [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d, \quad \hat{\vec{v}}^{m+1} = I_h^m \left(\frac{\vec{\omega}^{m+1}}{|\vec{\omega}^{m+1}|} \right). \tag{3.6}$$

其中 I_h^m 是映射到 $\mathbb{V}^h(\Gamma^m)$ 上的节点插值算子。

我们对 $\partial_{\varkappa} q$ 的曲率参数进行隐式求值，同时保留已知曲面的归一化顶点法向量：

$$\widehat{Q}_{\varkappa}^{m+1} = I_h^m \partial_{\varkappa} q(\varkappa^{m+1}, \vec{v}^m), \qquad \mathcal{W}^m = |\nabla_s \vec{v}^m|^2 \approx |\nabla_s \vec{\nu}|^2. \tag{3.7}$$

因此，仅将法向量参数和曲率反应系数 $\mathcal{W}^m$ 冻结。插值函数 $\widehat{Q}_{\varkappa}^{m+1} \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m)$ 可通过额外的标量有限元未知量表示，其定义方程为

$$(\widehat{Q}_{\varkappa}^{m+1}, \zeta^h)^h_{\Gamma^m} = (\partial_{\varkappa} q(\varkappa^{m+1}, \vec{v}^m), \zeta^h)^h_{\Gamma^m} \qquad \forall \zeta^h \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m). \tag{3.8}$$

特别地，$\nabla_s \widehat{Q}_{\varkappa}^{m+1}$ 是该节点插值函数的梯度，而不是经过不同插值处理的系数的导数。在几何–IEQ方程中均使用同一个未知量。

我们还对 $\nabla_{\vec{p}} q$ 进行隐式处理，此时同时使用新的曲率和新的顶点法向量$\hat{}\vec{v}^{m+1}$（3.6）：

$$\widehat{\vec{Q}}_{\vec{p}}^{m+1} = I_h^m \nabla_{\vec{p}} q\big(\varkappa^{m+1}, \hat{\vec{v}}^{m+1}\big). \tag{3.9}$$

尽管 $\vec{Q}_{\vec{p}}^{m+1}$ 依赖于新几何且呈非线性，但两个几何–IEQ方程中使用的是同一个系数。这种成对使用是实现离散能量抵消所需的唯一性质。

3.2. 几何–*IEQ*格式

BGN 和 MDR 两种变体的几何–IEQ方程完全相同。对于每个$m \geq 0$，我们首先求

$$(\mathscr{V}^{m+1}, \lambda^{m+1}) \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m) \times \mathbb{V}^h(\Gamma^m)$$

使得

$$\begin{aligned}
&(\beta(\vec{\nu}^m)^{-1}\mathscr{V}^{m+1}, \varphi^h)^h_{\Gamma^m} - (\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}\nabla_s\lambda^{m+1} + \lambda^{m+1}\nabla_s\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}, \nabla_s\varphi^h)_{\Gamma^m} \\
&\quad + (\lambda^{m+1}\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}, \mathcal{W}^m\varphi^h)_{\Gamma^m} - \frac{1}{2}((\lambda^{m+1})^2, \varkappa^{m+1}\varphi^h)^h_{\Gamma^m} \\
&\quad - (\lambda^{m+1}\widehat{\vec{Q}}^{m+1}_{\vec{p}}, \nabla_s\varphi^h)_{\Gamma^m} = 0, \qquad (3.10a) \\
&\left(\frac{\lambda^{m+1}-\lambda^m}{\tau}, \chi^h\right)_{\Gamma^m} + \frac{1}{2}\left(\nabla_s\vec{X}^{m+1} : \nabla_s\vec{\mathscr{V}}^{m+1}, \lambda^{m+1}\chi^h\right)_{\Gamma^m} \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathscr{A}_{\Gamma^m}(\vec{\mathscr{V}}^{m+1}, \lambda^{m+1}, \chi^h) \\
&\quad + (\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}\nabla_s\chi^h + \chi^h\nabla_s\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}, \nabla_s\mathscr{V}^{m+1})_{\Gamma^m} - (\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}\chi^h, \mathcal{W}^m\mathscr{V}^{m+1})_{\Gamma^m} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mathscr{V}^{m+1}, \lambda^{m+1}\varkappa^{m+1}\chi^h)^h_{\Gamma^m} + (\widehat{\vec{Q}}^{m+1}_{\vec{p}}, \nabla_s\mathscr{V}^{m+1}\chi^h)_{\Gamma^m} = 0, \qquad (3.10b)
\end{aligned}$$

对每个$(\varphi^h, \chi^h) \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m)^2$。方程（3.10a）近似法向速度方程。在（3.10b）中，我们按照 [23, (4.22)] 近似前两项，而反对称形式使用新的参数化速度。

系数 $\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}$通过（3.8）耦合，其法向量参数显式给出，而$\widehat{\vec{Q}}^{m+1}_{\vec{p}}$ 则通过（3.9）使用隐式顶点法向量。每一对相消项均采用相同的系数和求积规则。特别是，两个曲率反应项都采用质量集中。涉及 λ^{m+1}、 $\varkappa^{m+1}$ 和 $\vec{\mathscr{V}}^{m+1}$ 的乘积使（3.10）成为一个真正的非线性系统。

注 3.1。对于注*2.2*中所述的依赖曲率的能量，当使用由（涉及 $\nabla_{\vec{p}}q$ 的离散项(3.10) 通常不会消失，其中 $\vec{Q}^{m+1}_{\vec{p}}$ 由(3.9) 定义。若在（ $\vec{\nu}^m$ 中使用显式单元法向量(3.9)，则可保留连续层面上的正交性。不过，为了保持格式统一，我们仍采用隐式近似。

接下来， $\vec{\mathscr{V}}^{m+1}$ 和 $\varkappa^{m+1}$ 分别由以下方程确定，其中采用 BGN 切向速度或 MDR 切向速度。对于 gIEQ–BGN，公共方程（3.10）与向量曲率方程耦合。我们寻求

$$(\vec{\mathscr{V}}^{m+1}, \varkappa^{m+1}) \in [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d \times \mathbb{V}^h(\Gamma^m)$$

使得对于每个 $(\xi^h, \vec{\eta}^h) \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m) \times [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d$,

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathscr{V}}^{m+1} \cdot \vec{\nu}^m, \xi^h)^h_{\Gamma^m} - (\mathscr{V}^{m+1}, \xi^h)^h_{\Gamma^m} = 0, \qquad (3.11a) \\
(\varkappa^{m+1}\vec{\nu}^m, \vec{\eta}^h)^h_{\Gamma^m} + (\nabla_s\vec{X}^{m+1}, \nabla_s\vec{\eta}^h)_{\Gamma^m} = 0. \qquad (3.11b)
\end{aligned}$$

第一个方程将标量法向速度与参数化速度的法向分量对应起来。第二个方程是在新参数化上的 $\varkappa\vec{\nu} = \Delta_s\mathrm{id}$ 的 PFEM 离散。它同时恢复 $\varkappa^{m+1}$ 并生成具有特征性的 BGN 切向重分布。法向约束的两处均采用相同的质量集中配对。

对于 gIEQ–MDR，我们引入一个乘子 $\mu^{m+1} \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m)$，并寻求

$$(\varkappa^{m+1}, \vec{\mathscr{V}}^{m+1}, \mu^{m+1}) \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m) \times [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d \times \mathbb{V}^h(\Gamma^m)$$

使得，对于每个 $(\xi^h,\ g^h,\ \vec{\eta}^h)\ \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m)\times\mathbb{V}^h(\Gamma^m)\times[\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d$,

$$(\vec{\mathscr{V}}^{m+1}\cdot\vec{\nu}^m,\xi^h)_{\Gamma^m}-(\mathscr{V}^{m+1},\xi^h)_{\Gamma^m}=0, \tag{3.12a}$$

$$(\varkappa^{m+1},g^h)^h_{\Gamma^m}+(\nabla_s\vec{X}^{m+1},\nabla_s(g^h\vec{\nu}^m))_{\Gamma^m}=0, \tag{3.12b}$$

$$(\nabla_s\vec{\mathscr{V}}^{m+1},\nabla_s\vec{\eta}^h)_{\Gamma^m}+(\mu^{m+1}\vec{\nu}^m,\vec{\eta}^h)_{\Gamma^m}=0. \tag{3.12c}$$

注意，施加法向速度约束的乘子 μ^{m+1} 与离散曲率 $\varkappa^{m+1}$ 不同。

完整的 gIEQ–BGN 格式为 (3.10) 和 (3.11)，而完整的 gIEQ–MDR 格式为 (3.10) 和 (3.12)。求解其中一个整体非线性系统后，将下一时间步所需的场推送到新曲面上，方法如下：

$$\lambda^{m+1}_{\Gamma^{m+1}}=\lambda^{m+1}\circ(\vec{X}^{m+1})^{-1}, \tag{3.13}$$

由于不会造成混淆，我们仍将这个推前量记为 λ^{m+1} .

由 (3.10)、(3.11) 以及 (3.10)、(3.12) 分别得到的非线性系统，均借助牛顿迭代法求解，并以时刻 t_m 的解作为初值。

3.3. 能量稳定性

利用式 (3.13) 中的输运场，我们定义

$$E_h^m=\frac{1}{2}\|\lambda^m\|^2_{L^2(\Gamma^m)},\qquad E_h^{m+1}=\frac{1}{2}\|\lambda^{m+1}_{\Gamma^{m+1}}\|^2_{L^2(\Gamma^{m+1})}. \tag{3.14}$$

于是，我们得到以下无条件稳定性结果，其采用了[24, 23]中提出的思想。

定理 *3.2*（离散能量稳定性）。假设对于所有 $\sigma\in\mathcal{T}^m$ 均有 $|\sigma|>0$，且 *(3.5)* 和 *(3.6)* 中的顶点法向均有定义。令 $(\mathscr{V}^{m+1},\lambda^{m+1},\vec{\mathscr{V}}^{m+1},\varkappa^{m+1})$ 为 *(3.10)* 和 *(3.11)* 中的 *gIEQ–BGN* 格式或 *(3.10)* 和 *(3.12)* 中的 *gIEQ–MDR*格式的一个解，则有

$$E_h^{m+1}+\tau\left(\beta(\vec{\nu}^m)^{-1}\mathscr{V}^{m+1},\mathscr{V}^{m+1}\right)^h_{\Gamma^m}+\frac{1}{2}\|\lambda^{m+1}-\lambda^m\|^2_{L^2(\Gamma^m)}\le E_h^m. \tag{3.15}$$

证明。令 $\varphi^h=\tau\mathscr{V}^{m+1}$ 在（3.10a）中，并令 $\chi^h=\tau\lambda^{m+1}$ 在（3.10b）中，然后将所得等式相加。$\backsim$梯度项、$\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}$项、曲率反应项以及 $\mathcal{W}^m$ 项成对抵消。输运项因 $\vec{Q}^{m+1}_{\vec{p}}$ 而消失，其中 $\mathscr{A}_{\Gamma^m}(\vec{\mathscr{V}}^{m+1},\ \lambda^{m+1},\ \lambda^{m+1})=0$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\tau\left(\beta(\vec{\nu}^m)^{-1}\mathscr{V}^{m+1},\mathscr{V}^{m+1}\right)^h_{\Gamma^m}+(\lambda^{m+1}-\lambda^m,\lambda^{m+1})_{\Gamma^m}\\+\frac{1}{2}\left(\nabla_s\vec{X}^{m+1}:\nabla_s[\vec{X}^{m+1}-\mathrm{i}\vec{\mathrm{d}}],(\lambda^{m+1})^2\right)_{\Gamma^m}=0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

[23, (4.26)] 中的几何估计给出

$$\left(\nabla_s\vec{X}^{m+1}:\nabla_s[\vec{X}^{m+1}-\mathrm{i}\vec{\mathrm{d}}],(\lambda^{m+1})^2\right)_{\Gamma^m}\ge\|\lambda^{m+1}_{\Gamma^{m+1}}\|^2_{L^2(\Gamma^{m+1})}-\|\lambda^{m+1}\|^2_{L^2(\Gamma^m)}. \tag{3.17}$$

对于曲线，这可由 $\frac{1}{2}(a^2-1)-\ge a-1$得到；而对于 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，则可由局部面积比有上界 $\frac{1}{2}|\nabla_s\vec{X}^{m+1}|^2$ 这一事实得到。这两种情况下还会用到A： $(A-B)\ge\frac{1}{2}(|A|^2-|B|^2)$ 以及 $|\nabla_s\vec{\ }$恒等$|^2=d-1$。将 (3.17) 与恒等式结合

$$(a-b)a=\frac{1}{2}(a^2-b^2)+\frac{1}{2}(a-b)^2,$$

(3.16) 中最后两项的下界为

$$E_h^{m+1} - E_h^m + \frac{1}{2}\|\lambda^{m+1} - \lambda^m\|^2_{L^2(\Gamma^m)}.$$

这证明了（3.15）。该论证仅使用共同几何–IEQ方程。BGN 和 MDR 方程确定曲率和切向运动，但两种几何表述均未参与消去过程。

□

注 3.3。 据我们所知，所提出的 *gIEQ–MDR*格式是首个针对具有*MDR*切向速度的各向异性曲率流的能量稳定近似。通过适当选取，几何–*IEQ*框架也适用于 p-*Willmore*能量 *[1]*

$$E_p(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_\Gamma |\varkappa|^p \,\mathrm{d}\Gamma, \qquad p \geq 2 \quad \textit{and } p \textit{ is even},$$

令 $f(\varkappa, \vec{p}) = |\vec{p}|\,\varkappa^p$，并取 $q(\varkappa, \vec{p}) = |\vec{p}|^{1/2}\varkappa^{p/2}$。该框架也适用于采用*Willmore*正则化的强各向异性曲面能量，

$$E_\varepsilon(\Gamma) = \int_\Gamma \left[\gamma(\vec{\nu}) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varkappa^2\right] \mathrm{d}\Gamma, \qquad \varepsilon > 0,$$

其中取

$$f(\varkappa, \vec{p}) = 2\gamma(\vec{p}) + \varepsilon^2|\vec{p}|\varkappa^2, \qquad q(\varkappa, \vec{p}) = \sqrt{f(\varkappa, \vec{p})}.$$

4. 向各向异性Willmore流的推广

以各向异性Willmore流为例，我们将几何–IEQ方法推广至能量依赖于更一般几何量的 L^2-梯度流。特别地，我们令能量依赖于各向异性平均曲率$\varkappa_\gamma$。利用$\varkappa_\gamma$的演化方程，我们推导出相应的几何–IEQ公式。随后给出全离散格式，并证明其能量稳定性。推广的关键在于相关几何量的演化方程。

4.1. 几何–*IEQ* 公式

设 $\gamma\colon \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}_{>0}$ 光滑且正一齐次。在曲面 $\Gamma(t)$ 上，它诱导出 Cahn–Hoffman向量 $\gamma'(\vec{\nu})$，并将各向异性平均曲率定义为

$$\varkappa_\gamma = -\nabla_s \cdot \gamma'(\vec{\nu}). \tag{4.1}$$

设 $\alpha\colon \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}_{>0}$ 光滑且正一齐次。我们考虑修正的各向异性 Willmore 能量 [15, 36]

$$W_\gamma(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \varkappa_\gamma^2\alpha(\vec{\nu}) \,\mathrm{d}\Gamma. \tag{4.2}$$

该密度与式（2.11）具有相同的齐次性，其中 $\varkappa$ 替换为 $\varkappa_\gamma$。我们设

$$f(\varkappa_\gamma, \vec{p}) = \varkappa_\gamma^2\alpha(\vec{p}), \quad q(\varkappa_\gamma, \vec{p}) = \varkappa_\gamma\sqrt{\alpha(\vec{p})}, \quad \partial_{\varkappa_\gamma} q = \sqrt{\alpha(\vec{p})}, \quad \nabla_{\vec{p}} q = \frac{\varkappa_\gamma\,\alpha'(\vec{p})}{2\sqrt{\alpha(\vec{p})}} = \frac{q\,\alpha'(\vec{p})}{2\alpha(\vec{p})}, \tag{4.3}$$

因此，辅助变量（2.14）为 $\lambda = \varkappa_\gamma\sqrt{\alpha(\vec{\nu})}$，且 $W_\gamma(\Gamma) = \frac{1}{2}\|\lambda\|^2_{L^2(\Gamma)}$。

由 [16,引理 2.2（2.18b）],中各向异性曲率的法向演化可知

$$\partial_t^\square \varkappa_\gamma = \nabla_s \cdot \left(\gamma''(\vec{\nu})\nabla_s \mathscr{V}\right) + \mathscr{V}\,|A|^2_{\gamma''}, \qquad |A|^2_{\gamma''} := \nabla_s\vec{\nu} : \gamma''(\vec{\nu})\nabla_s\vec{\nu}. \tag{4.4}$$

Usin利用事实 $\partial_t^{\square}\varkappa_\gamma = \partial_t^{\circ}\varkappa_\gamma - \vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s\varkappa_\gamma$，我们知道几何 IEQ 变量 λ 满足

$$\partial_t^{\circ}\lambda = \partial_{\varkappa_\gamma} q\,\left(\nabla_s\cdot\left(\gamma''(\vec{\nu})\nabla_s\mathscr{V}\right) + \mathscr{V}|A|^2_{\gamma''}\right) - \nabla_{\vec{p}}q\cdot\nabla_s\mathscr{V} + \vec{\mathscr{V}}\cdot\nabla_s q. \tag{4.5}$$

加权 L^2-梯度流（4.2）的法向速度为

$$\mathscr{V} = -\beta(\vec{\nu})\left[\nabla_s\cdot\left(\gamma''(\vec{\nu})\nabla_s(\lambda\partial_{\varkappa_\gamma}q)\right) + \lambda\partial_{\varkappa_\gamma}q\,|A|^2_{\gamma''} + \nabla_s\cdot(\lambda\,\nabla_{\vec{p}}q)\right]. \tag{4.6}$$

测试（4.5）和（4.6），并按照（2.20）处理输运，得到

$$\begin{aligned}
&\left([\beta(\vec{\nu})]^{-1}\mathscr{V},\ \varphi\right)_\Gamma = \left(\gamma''(\vec{\nu})\nabla_s(\lambda\partial_{\varkappa_\gamma}q),\ \nabla_s\varphi\right)_\Gamma - \left(\lambda\partial_{\varkappa_\gamma}q\,|A|^2_{\gamma''},\ \varphi\right)_\Gamma \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\lambda^2\varkappa,\ \varphi\right)_\Gamma + \left(\lambda\,\nabla_{\vec{p}}q,\ \nabla_s\varphi\right)_\Gamma \qquad \forall\varphi\in H^1(\Gamma(t)); \qquad (4.7a)\\
&\left(\partial_t^{\circ}\lambda,\ \chi\right)_\Gamma + \frac{1}{2}\left(\nabla_s\cdot\vec{\mathscr{V}},\ \lambda\chi\right)_\Gamma = -\left(\gamma''(\vec{\nu})\nabla_s\mathscr{V},\ \nabla_s(\partial_{\varkappa_\gamma}q\,\chi)\right)_\Gamma + \left(\partial_{\varkappa_\gamma}q\,\chi\mathscr{V},\ |A|^2_{\gamma''}\right)_\Gamma \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\mathscr{V},\ \varkappa\lambda\chi\right)_\Gamma - \left(\nabla_{\vec{p}}q\cdot\nabla_s\mathscr{V},\ \chi\right)_\Gamma + \frac{1}{2}\mathscr{A}_\Gamma(\vec{\mathscr{V}},\lambda,\chi) \qquad \forall\chi\in H^1(\Gamma(t)). \qquad (4.7b)
\end{aligned}$$

注意，$\varkappa$ 在 $\frac{1}{2}\left(\lambda^2\varkappa,\ \varphi\right)_\Gamma$ 和 $\frac{1}{2}\left(\mathscr{V},\ \varkappa\lambda\chi\right)_\Gamma$ 来自散度定理。因此，$\varkappa$ 表示普通平均曲率，而不是各向异性平均曲率$\varkappa_\gamma$。BGN和MDR公式不仅给出了切向速度，还给出了平均曲率 $\varkappa$，这有助于封闭该系统。

取 $\lambda(\cdot,0) = q(\varkappa_\gamma(\cdot,0)\ \vec{\nu}(\cdot,0))$，选择 $(\varphi,\ \chi) = (\mathscr{V},\ \lambda)$，如定理2.3所示，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_\gamma(\Gamma(t)) = -\|[\beta(\vec{\nu})]^{-\frac{1}{2}}\mathscr{V}\|^2_{L^2(\Gamma(t))} \le 0. \tag{4.8}$$

注 4.1。取 $\alpha(\vec{p}) = |\vec{p}|$ 可得到*Clarenz*的各向异性*Willmore*能量 *[15,* (6) *]*。选择 $\alpha = \gamma$ 得到*Pozzi*所考虑的能量 *[36,* (2.10) *]*；当 $\beta(\vec{\nu}) = \gamma(\vec{\nu})$ 时，流（4.6）与*Pozzi*的各向异性*Willmore*流 *[36,* (3.7) – (3.8) *]*具有相同的法向演化。

对于这两种选择，相应的修正的各向异性 *Willmore* 能量在 $\mathbb{R}^3$ 中的闭曲面上于 *Wulff* 形状处达到其全局最小值；分别参见 *[15,* 定理 *4.1]* 和 *[36,* 定理 *2.4],* 。

4.2. 全离散几何 *IEQ* 与能量稳定性

我们采用与第 3 节相同的新曲率、旧法向约定。对于带符号因子$q(\varkappa_\gamma,\vec{p})=\varkappa_\gamma\sqrt{\alpha(\vec{p})}$，曲率导数与 $\varkappa_\gamma$ 无关，因此

$$\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa_\gamma} = I_h^m\sqrt{\alpha(\vec{\nu}^m)}, \qquad \mathcal{W}^m_{\gamma''} = \nabla_s\vec{v}^m : \gamma''(\vec{\nu}^m)\nabla_s\vec{v}^m. \tag{4.9}$$

海森矩阵 γ'' 同样在已知曲面上求值，而 $\nabla_{\vec{p}}q$ 则利用 (3.6) 隐式处理:

$$\widehat{\vec{Q}}^{m+1}_{\vec{p}} = \frac{\lambda^{m+1}}{2}I_h^m\left(\frac{\alpha'(\hat{\vec{\nu}}^{m+1})}{\alpha(\hat{\vec{\nu}}^{m+1})}\right). \tag{4.10}$$

该 fu 离散的 gIEQ–BGN 格式如下。给定 Γ^m 和 $\lambda^m\in\mathbb{V}^h(\Gamma^m)$，我们有 k

$$(\mathscr{V}^{m+1},\lambda^{m+1},\varkappa^{m+1},\vec{\mathscr{V}}^{m+1})\in[\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^3\times[\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d$$

使得，对于每个 $(\varphi^h,\ \chi^h,\ \xi^h) \in [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^3$ 和 $\vec{\eta}^h \in [\mathbb{V}^h(\Gamma^m)]^d$，

$$
\begin{aligned}
&([\beta(\vec{\nu}^m)]^{-1}\mathscr{V}^{m+1},\varphi^h)^h_{\Gamma^m} - (\gamma''(\vec{\nu}^m)[\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa_\gamma}\nabla_s\lambda^{m+1} + \lambda^{m+1}\nabla_s\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa_\gamma}],\nabla_s\varphi^h)_{\Gamma^m}\\
&\quad + (\lambda^{m+1}\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa_\gamma},\mathcal{W}^m_{\gamma''}\varphi^h)_{\Gamma^m} - \frac{1}{2}((\lambda^{m+1})^2,\varkappa^{m+1}\varphi^h)^h_{\Gamma^m}\\
&\quad - (\lambda^{m+1}\widehat{\vec{Q}}^{m+1}_{\vec{p}},\nabla_s\varphi^h)_{\Gamma^m} = 0, \qquad (4.11a)\\
&\left(\frac{\lambda^{m+1}-\lambda^m}{\tau},\chi^h\right)_{\Gamma^m} + \frac{1}{2}\left(\nabla_s\vec{X}^{m+1} : \nabla_s\vec{\mathscr{V}}^{m+1},\lambda^{m+1}\chi^h\right)_{\Gamma^m}\\
&\quad - \frac{1}{2}\mathscr{A}_{\Gamma^m}(\vec{\mathscr{V}}^{m+1},\lambda^{m+1},\chi^h)\\
&\quad + (\gamma''(\vec{\nu}^m)\nabla_s\mathscr{V}^{m+1},\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa_\gamma}\nabla_s\chi^h + \chi^h\nabla_s\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa_\gamma})_{\Gamma^m} - (\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa_\gamma}\chi^h,\mathcal{W}^m_{\gamma''}\mathscr{V}^{m+1})_{\Gamma^m}\\
&\quad + \frac{1}{2}(\mathscr{V}^{m+1},\lambda^{m+1}\varkappa^{m+1}\chi^h)^h_{\Gamma^m} + (\widehat{\vec{Q}}^{m+1}_{\vec{p}},\nabla_s\mathscr{V}^{m+1}\chi^h)_{\Gamma^m} = 0, \qquad (4.11b)\\
&(\vec{\mathscr{V}}^{m+1}\cdot\vec{\nu}^m,\xi^h)^h_{\Gamma^m} - (\mathscr{V}^{m+1},\xi^h)^h_{\Gamma^m} = 0, \qquad (4.11c)\\
&(\varkappa^{m+1}\vec{\nu}^m,\vec{\eta}^h)^h_{\Gamma^m} + (\nabla_s\vec{X}^{m+1},\nabla_s\vec{\eta}^h)_{\Gamma^m} = 0. \qquad (4.11d)
\end{aligned}
$$

平均曲率 $\varkappa^{m+1}$ 由 BGN 曲率方程（4.11d）确定。对于 gIEQ–MDR 变体，（4.11c）和（4.11d）由（3.12）替代。

在定理 3.2 的假设下，分别用 $\tau\mathscr{V}^{m+1}$ 和 $\tau\lambda^{m+1}$ 测试（4.11a）和（4.11b），可得到相同的抵消结果。$\gamma''(\vec{\nu}^m)$ 的对称性使各向异性梯度项两两配对，其余项则像之前一样抵消。因此，对于 BGN 和 MDR 变体，（3.15）均成立，其中 $E^m_h = \frac{1}{2}\|\lambda^m\|^2_{L^2(\Gamma^m)}$。

5. 几何–IEQ 公式：H^{-1}-梯度流

到目前为止，我们讨论了用于 L^2-梯度流的几何–IEQ 方法。现在，我们将这一方法扩展到 H^{-1}-梯度流，这类梯度流在许多应用中都有出现。曲面扩散就是一个典型例子。与 L^2-梯度流相比，H^{-1}-梯度流不仅会耗散能量，还会守恒包围质量。我们构造了用于 H^{-1}-梯度流的几何 IEQ 保结构有限元方法，同时保持这两种几何性质。

5.1. 弱形式与守恒律

为简便起见，我们考虑第 2 节中的能量 (2.11)。辅助变量的方程保持不变；只有法向速度有所修改。因此，我们仅介绍差异部分，共同部分请参见第 2 节和第 3 节。引入 w，采用 (2.18) 中的符号约定，加权 H^{-1}-梯度流写作

$$
\mathscr{V} = -\nabla_s\cdot\big(\beta(\vec{\nu})\,\nabla_s w\big), \qquad w = -\Delta_s(\lambda\partial_\varkappa q) - \lambda\partial_\varkappa q|\nabla_s\vec{\nu}|^2 - \nabla_s\cdot(\lambda\,\nabla_{\vec{p}}q) \quad \text{on} \quad \Gamma(t). \qquad (5.1)
$$

当 (2.11) 中的密度在 $f(\varkappa,\vec{\nu}) = 2|\vec{\nu}| = 2$ 上仅为 Γ 时，(5.1) 在 $\beta(\vec{\nu}) = 1$ 就化为曲面扩散，其中 $w = \varkappa$，这是众所周知的表面积 H^{-1}-梯度流。

我们将 (2.22a) 替换为：求 $(\mathscr{V},w) \in H^1(\Gamma(t)) \times H^1(\Gamma(t))$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathscr{V},\ \varpi\big)_\Gamma - \big(\beta(\vec{\nu})\,\nabla_s w,\ \nabla_s\varpi\big)_\Gamma = 0 \qquad \forall\varpi \in H^1(\Gamma(t)); \qquad (5.2a)\\
&\big(w,\ \varphi\big)_\Gamma = \big(\nabla_s(\lambda\partial_\varkappa q),\ \nabla_s\varphi\big)_\Gamma - \big(\lambda\partial_\varkappa q|\nabla_s\vec{\nu}|^2,\ \varphi\big)_\Gamma\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\big(\lambda^2\varkappa,\ \varphi\big)_\Gamma + \big(\lambda\nabla_{\vec{p}}q,\ \nabla_s\varphi\big)_\Gamma \qquad \forall\varphi \in H^1(\Gamma(t)). \qquad (5.2b)
\end{aligned}
$$

这些方程与（2.22b）以及（2.24）或（2.25）联立。以 $(\varpi,\varphi,\chi) = (w,\mathscr{V},\lambda)$ 作为测试函数可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|\lambda\|^2_{L^2(\Gamma(t))}\right) = -\|[\beta(\vec{\nu})]^{\frac{1}{2}}\nabla_s w\|^2_{L^2(\Gamma(t))} \le 0. \qquad (5.3)
$$

此外，取 $\varpi = 1$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{vol}(\Gamma(t)) = \int_{\Gamma(t)} \mathscr{V}\ \mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{5.4}$$

其中，$\mathrm{vol}(\Gamma(t))$ 表示由 $\Gamma(t)$ 围成的体积。

5.2. 保结构几何 *IEQ*

除了第 3.2 节中的未知量外，我们还要求 $w^{m+1} \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m)$。离散几何–IEQ 方程由（3.10 b）以及对每个 $(\varpi^h, \varphi^h) \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m)^2$,

$$(\mathscr{V}^{m+1}, \varpi^h)^h_{\Gamma^m} - (\beta(\vec{\nu}^m)\nabla_s w^{m+1}, \nabla_s \varpi^h)_{\Gamma^m} = 0, \tag{5.5a}$$

$$\begin{aligned}&(w^{m+1}, \varphi^h)^h_{\Gamma^m} - (\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}\nabla_s\lambda^{m+1} + \lambda^{m+1}\nabla_s\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}, \nabla_s\varphi^h)_{\Gamma^m}\\ &\quad + (\lambda^{m+1}\widehat{Q}^{m+1}_{\varkappa}, \mathcal{W}^m\varphi^h)_{\Gamma^m} - \frac{1}{2}((\lambda^{m+1})^2, \varkappa^{m+1}\varphi^h)^h_{\Gamma^m}\\ &\quad - (\lambda^{m+1}\widehat{\vec{Q}}^{m+1}_{\vec{p}}, \nabla_s\varphi^h)_{\Gamma^m} = 0.\end{aligned} \tag{5.5b}$$

因此，（3.10a）唯一的变化是将 $[\beta(\vec{\nu}^m)]^{-1}\mathscr{V}^{m+1}$ 替换为 w^{m+1}，并增加方程（5.5a）。

为保持包围质量，我们采用 $\vec{\nu}^{m+\frac{1}{2}}$ 的时间平均法向 [5]。对于 gIEQ–BGN，我们保留（3.11b），并将（3.11a）替换为

$$(\vec{\mathscr{V}}^{m+1}\cdot\vec{\nu}^{m+\frac{1}{2}}, \xi^h)^h_{\Gamma^m} - (\mathscr{V}^{m+1}, \xi^h)^h_{\Gamma^m} = 0 \qquad \forall \xi^h \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m), \tag{5.6}$$

其中，$\vec{\nu}^{m\pm\frac{1}{2}}$ 满足

$$\mathrm{vol}(\Gamma^{m+1}) - \mathrm{vol}(\Gamma^m) = \tau(\vec{\mathscr{V}}^{m+1}\cdot\vec{\nu}^{m+\frac{1}{2}}, 1)^h_{\Gamma^m}. \tag{5.7}$$

对于 gIEQ–MDR，我们保留（3.12b）和（3.12c），并将（3.12a）替换为（5.6）。曲面更新与（3.3）和（3.13）相同。

定理 *5.1*（能量稳定性和质量守恒）。假设对所有 $\sigma \in \mathcal{T}^m$，$|\sigma| > 0$，且 *(3.5)* 和 *(3.6)* 中的顶点法向量均有定义。设 $(\mathscr{V}^{m+1}, \lambda^{m+1}, w^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \varkappa^{m+1})$ 是 *(5.5)*、*(3.10b)*、*(5.6)* 和 *(3.11b)* 中 *gIEQ–BGN* 格式的解，或是 *(5.5)*、*(3.10b)*、*(5.6)*、*(3.12b)* 和 *(3.12c)* 中 *gIEQ–MDR*格式的解，则离散解满足

$$E_h^{m+1} + \tau\|[\beta(\vec{\nu}^m)]^{\frac{1}{2}}\nabla_s w^{m+1}\|^2_{L^2(\Gamma^m)} + \frac{1}{2}\|\lambda^{m+1} - \lambda^m\|^2_{L^2(\Gamma^m)} \le E_h^m, \tag{5.8}$$

and

$$\mathrm{vol}(\Gamma^{m+1}) = \mathrm{vol}(\Gamma^m) \tag{5.9}$$

其中 E_h^m 定义于 (3.14)，且$\mathrm{vol}(\Gamma^m)$是离散曲面 Γ^m所围成的体积。

证明。取 $\varphi^h = \tau\mathscr{V}^{m+1}$ 在 (5.5b) 中，并取 $\chi^h = \tau\lambda^{m+1}$ 在 (3.10b) 中。定理 3.2 中的抵消关系保持不变，只需将耗散项替换为 $\tau(w^{m+1}, \mathscr{V}^{m+1})^h_{\Gamma^m}$。用 5.5a) 测试 $\varpi^h = w^{m+1}$，可将该项识别为 $\tau(\beta(\vec{\nu}^m)\nabla_s w^{m+1}, \nabla_s w^{m+1})_{\Gamma^m}$。随后由估计式 (3.17) 得到 (5.8。

取 $\xi^h = 1$ 于 (5.6)，$\varpi^h = 1$ 于 (5.5a，并结合 (5.7，即可得到精确的质量守恒。

□

6. 数值结果

本节通过数值实验展示所提出的 gIEQ–BGN 和 gIEQ–MDR 方法的性能，包括收敛性测试、对数值能量稳定性和质量守恒的考察，以及形态演化。

我们采用均匀时间步长 τ。对于多边形曲线和多面体曲面，我们用 h 表示 Γ^0的最大边长。我们通过 NGSolve，采用分片线性参数有限元实现 gIEQ–BGN 和 gIEQ–MDR 格式 [37]。非线性系统采用牛顿法求解，容差为 10^{-10}。对于曲线，我们采用 gIEQ–BGN 格式，因为 BGN公式可使网格点渐近均匀分布 [7], ；除非另有说明，对于曲面则采用 gIEQ–MDR 格式。

对于具有给定各向异性能量的光滑初始曲面 $\Gamma(0)$，初始几何量 $\varkappa$、$\vec{\nu}$ 和 $\varkappa_\gamma$ 可以解析计算，初始辅助变量为节点插值 $\lambda^0 = I_h^0\, q(\varkappa(\cdot,\ 0)\ \vec{\nu}(\cdot,\ 0))$。这里，各向异性 Willmore 能量的情形下，$\varkappa$ 由 $\varkappa_\gamma$ 替代。

大多数示例采用 BGN 型各向异性 [8, 11]

$$\gamma(\vec{p}) = \sum_{\ell=1}^{L} \sqrt{\vec{p}^{\,T} G_\ell\, \vec{p}}, \tag{6.1}$$

其中 $G_\ell \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\ell = 1$、.....、L 均为对称正定矩阵。在 $L = 1$ 的情况下，Wulff形状 $\mathcal{W} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : \vec{x}^{\,T} G_1^{-1} \vec{x} \le 1\}$ 是一个椭圆（$d = 2$）或椭球（$d = 3$）。更具体地，对于 $\Gamma(t) = R\,\partial\mathcal{W}$，各向异性平均曲率为 $\varkappa_\gamma = -(d-1)/R$。

6.1. 收敛性测试

我们首先借助精确自相似解，测试空间和时间方向上的收敛阶。取 $L = 1$ 于（6.1）中，其中 $G_1 = \mathrm{diag}(1,\ 4)$ 对应 $d = 2$，而 $G_1 = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 4)$ 对应$d = 3$，因此 Wulff形状 $\mathcal{W}$ 是一个 1×2 椭圆或一个 $1 \times 1 \times 2$ 椭球。我们考虑以下两种流：

- 各向异性平均曲率流（MCF），即 L^2-梯度流（2.18），其中 $f = \gamma$，$q = \sqrt{\gamma}$ 且 $\beta = \gamma$。其精确解为 $\Gamma(t) = R(t)\,\partial\mathcal{W}$，其中 $R(t) = \sqrt{1 - (d-1)t}$;
- Pozzi 型各向异性Willmore流 [36, 例 3。1] 对于曲线，即（4.6），其中$\alpha = \beta = \gamma$。其精确解为 $\Gamma(t) = R(t)\,\partial\mathcal{W}$，其中 $R(t) = (1 + 2t)^{1/4}$。

对于各向异性平均曲率流，我们考虑能量 $\frac{1}{2}\int_\Gamma \gamma(\vec{\nu})\,\mathrm{d}\Gamma$。因此，所得梯度流的演化速度是标准各向异性平均曲率流的一半。

对于曲线，初始多边形为 $\vec{X}^0(\rho_j) = (\cos\ \theta_j,\ 2\sin\ \theta_j)^T$, $\theta_j = 2\pi j/N$，其中 $N = 2^k$, $k = 4$，.....，10。对于曲面，初始网格通过在边中点处对二十面体 r 次细化、将顶点投影到单位球面上，并通过$\vec{x} \mapsto \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 2)\,\vec{x}$ 映射得到，其中 $r = 1$，.....，5。时间步长为 $\tau = 2^{-k}$，其中曲线取 $k = 6$，.....，14，曲面取 $k = 4$，.....，14。

令 $M = T/\tau$满足 $T = 0.125$，令 π为到 $\Gamma(T)$ 的最近点投影，并令 $\varkappa_\gamma(\cdot,\ T)$ $\vec{\nu}(\cdot,\ T)$ 为 $\Gamma(T)$ 上的精确几何量。我们在 Γ^M 上定义误差为

$$e_x(\vec{x}) = |\vec{x} - \pi(\vec{x})|, \qquad e_\lambda(\vec{x}) = \lambda^M(\vec{x}) - q(\varkappa_\gamma(\pi(\vec{x}),T), \vec{\nu}(\pi(\vec{x}),T)), \qquad {}^{\vec{x}\in\Gamma^M,} \tag{6.2}$$

并考虑 $L^2(\Gamma^M)$-范数，为简洁起见记作 $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma(T))}$。

在图 1 中，我们报告了 $T = 0.125$ 处一系列网格和一系列时间步对应的误差。观察关于 h 的图，可以看到两个区域：一个区域中空间离散误差占主导，与 $\mathcal{O}(h^2)$ 收敛阶一致；另一个区域中，网格尺寸较小，时间离散误差占主导。关于 τ 的图也呈现相同的情况，其 $\mathcal{O}(\tau)$ 收敛阶亦如此。

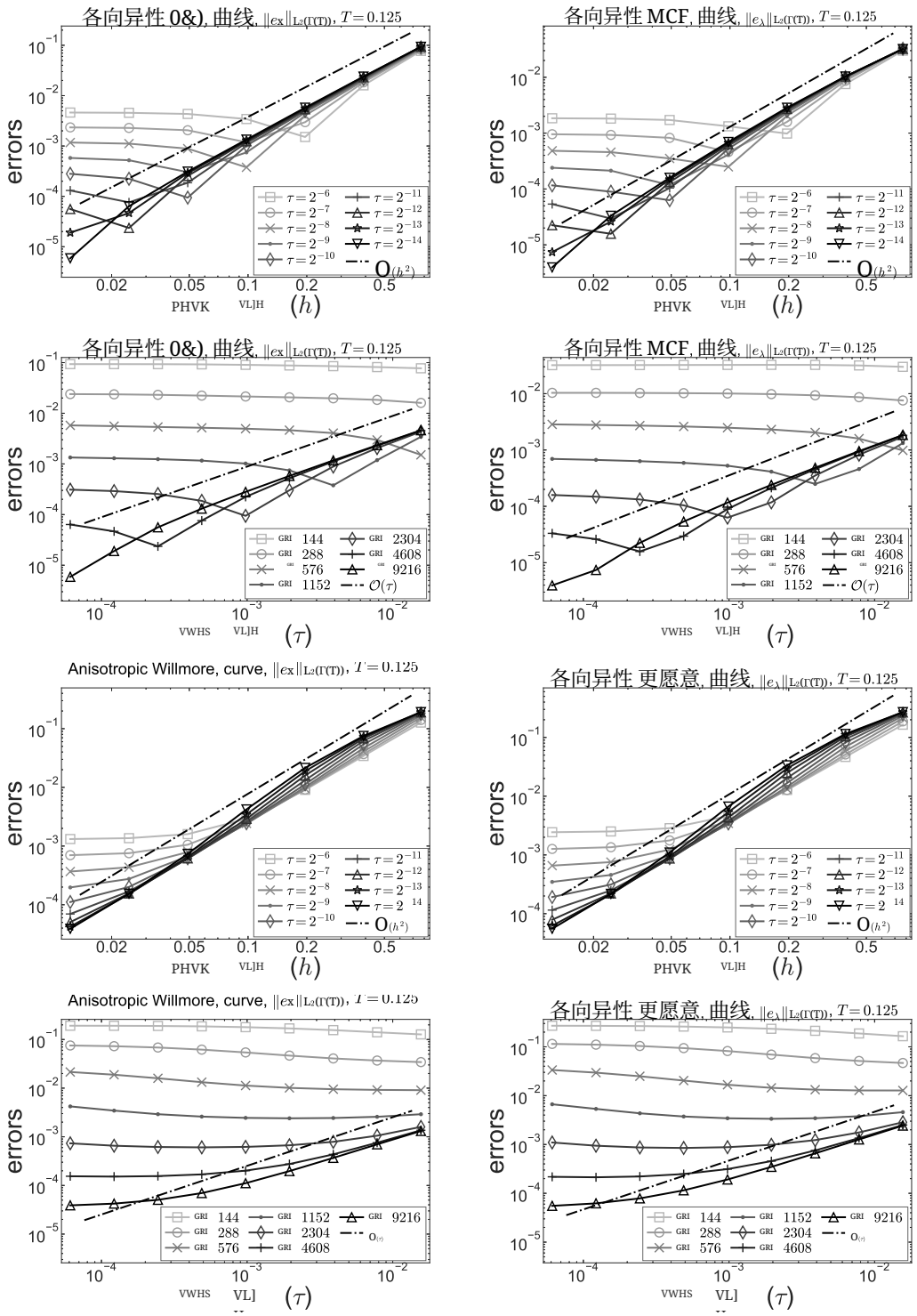


图 1： $T = 0.125$处曲线的 gIEQ–BGN 格式的数值误差。前四个对应各向异性平均曲率流，后四个对应 Pozzi 的各向异性 Willmore流。在每种情况下，上排显示固定 τ时$\|e_x\|$ （左）和 $\|e_\lambda\|$ （右）相对于 h 的结果，下排显示固定网格时它们相对于 τ 的结果。

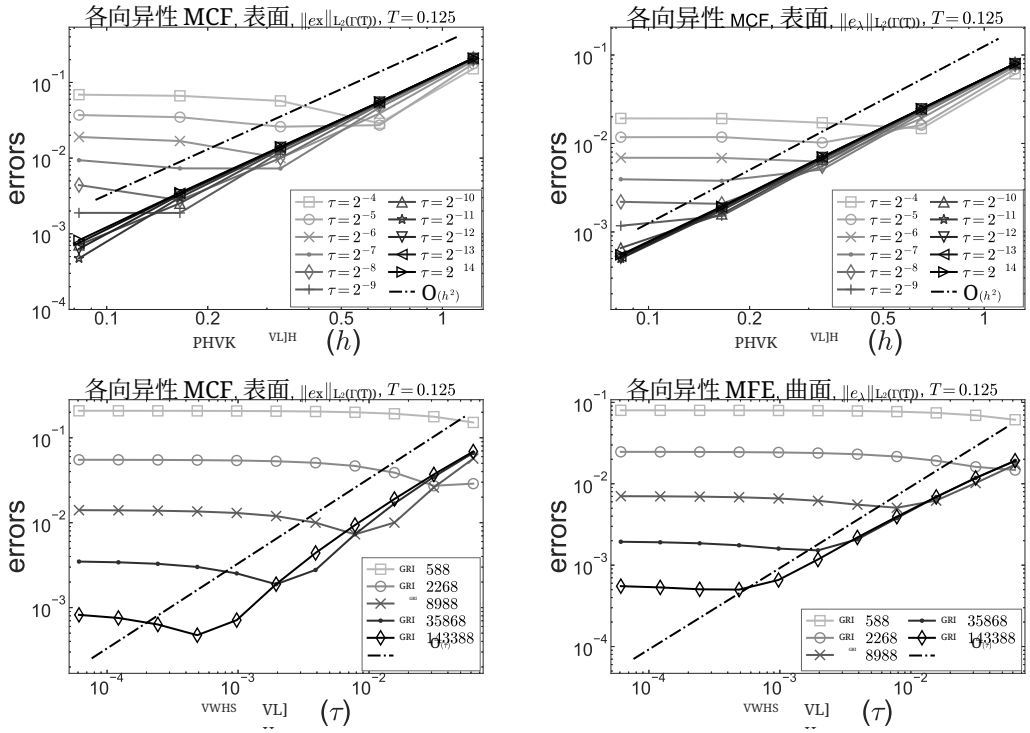


图2：在 $T = 0.125$ 时，gIEQ–MDR格式用于曲面的各向异性平均曲率流时的数值误差。上排显示固定 τ 时 $\|e_x\|$（左）和 $\|e_\lambda\|$（右）随 h 的变化，下排显示固定网格时它们随 τ 的变化。

在图2中，我们报告了曲面对应的误差，情况相同。我们观察到所有情形下两种误差在空间上的收敛阶为 $\mathcal{O}(h^2)$，在时间上的收敛阶为 $\mathcal{O}(\tau)$。因此，在以下示例中，我们选择 $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ 以平衡空间和时间离散误差。

6.2. 能量稳定性与质量守恒

接下来，我们检验能量稳定性和质量守恒。此外，我们还给出牛顿迭代次数，以及 IEQ变量 λ 与几何能量变量 q之间的 IEQ缺陷。为此，我们引入以下指标：归一化IEQ能量E_h^m/E_h^0，其中 E_h^m由（3.14）给出；定义在 E（Γ^m）$/E$（Γ^0）上的归一化几何能量 Γ^m；曲线的包围面积 A^m 或曲面的包围体积 V^m；每个时间步的牛顿迭代次数；以及 IEQ缺陷

$$\|\lambda^m - q_h^m\|_{L^2(\Gamma^m)}, \qquad q_h^m = I_h^m\, q(\varkappa_h^m, \vec{\nu}^m), \tag{6.3}$$

即辅助变量 λ 与其对应的几何量 q之间的差异。这里，$\vec{\nu}^m$ 为顶点法向量（3.5）。对于各向异性Willmore能量，$\varkappa_h$ 替换为各向异性平均曲率$\varkappa_{\gamma,\,h}^m \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m)$，其定义为

$$\big(\varkappa_{\gamma,h}^m,\ \xi^h\big)_{\Gamma^m}^h = -\big(\gamma''(\vec{\nu}^m) : \nabla_s \vec{\nu}^m,\ \xi^h\big)_{\Gamma^m} \qquad \forall \xi^h \in \mathbb{V}^h(\Gamma^m). \tag{6.4}$$

我们同时展示曲线和曲面。

曲线。初始曲线为花形曲线 $\vec{X}^0(\rho_j) = r(\theta_j)(\cos\theta_j, \sin\theta_j)^T$，其中 $r(\theta) = 1 + 0.2\cos(5\theta)$ 且 $\theta_j = 2\pi j/N$，其中 $N = 128$ 且 $N = 256$。在（6.1）中取 $L = 1$ 和 $G_1 = \mathrm{diag}(1, 4)$，并令 $\beta = \gamma$，通过第 3 节和第 5 节的 gIEQ–BGN 格式，考虑 $E(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \gamma(\vec{\nu})\, \mathrm{d}\Gamma$ 的各向异性平均曲率流和各向异性曲面扩散（SD）。时间步长为 $\tau = h^2/10$。

曲面。初始曲面为单位球面，采用第6.1 节的二十面体网格进行离散， $N = 2562$ 且 $N = 10242$。我们考虑 H^{-1}Clarenz 的各向异性 Willmore 能量（4.2）的 -梯度流，其中 $\alpha(\vec{p}) = |\vec{p}|$， $\beta = 1$， $L = 1$，以及 $G_1 = \mathrm{diag}(1, 1/4, 1/4)$ 在（6.1）中。我们采用第5 节的 gIEQ–BGN 格式，取 $\tau = h^2/2$，分别得到 $13N = 33306$和133146个自由度。

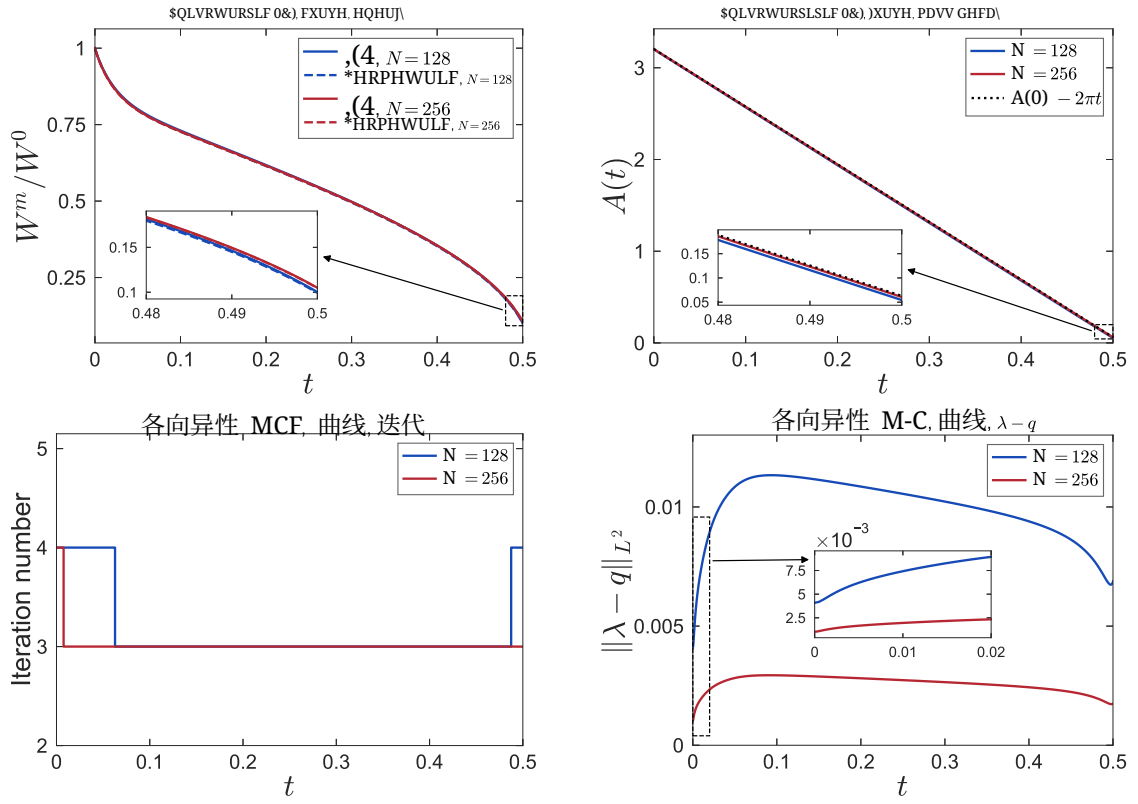


图 3：花形曲线的各向异性平均曲率流。上排：归一化 IEQ 和几何能量（左）以及包围面积 A^m，其中虚线表示 $A(0) - 2\pi t$ （右）。下排：牛顿迭代次数（左）以及 IEQ缺陷（6.3）（右）。

四个指标分别如图3 所示，对应于 L^2-梯度流；如图4 所示，对应于 H^{-1}-梯度流，其中 $0 \le t \le 0.5$。由这些图可以得出：

（i）在所有情况下，IEQ能量均单调递减，这与定理3.2 和5.1中的无条件能量稳定性一致。两种能量之间的最大相对差异，在较粗网格和较细网格上，对于各向异性平均曲率流分别为 0.92% 和0.24%，对于各向异性 SD 分别为3.4% 和1.3%，对于各向异性Willmore流分别为 4.9% 和2.6%。随着自由度增加，IEQ能量逐渐接近几何能量。此外，对于 L^2 梯度流，IEQ能量对几何能量的逼近效果更好。

（ii）各向异性 SD 和各向异性 Willmore H^{-1}-梯度流的归一化面积损失处于 10^{-16}的量级，即处于机器误差的量级。这证实了定理5.1中的精确质量守恒。对于各向异性平均曲率流，演化中的简单闭曲线所围成的面积以速率 2π线性减小，从而保持面积衰减率。事实上，对于 $d = 2$、 $L = 1$ 和 $\beta = \gamma$ 在（6.1）中，有 [21]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma(t)} \gamma(\vec{\nu})\varkappa_\gamma \,\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2}(-2\mathrm{vol}(\partial\mathcal{W})) = -\pi\sqrt{\det(G_1)} = -2\pi,$$

对于每一条简单闭曲线。

（iii）尽管这些格式是全隐式的，但大多数时间步只需进行三次牛顿迭代，所有测试中最多需要五次迭代。因此，我们的数值方法属于弱非线性方法，且计算高效。

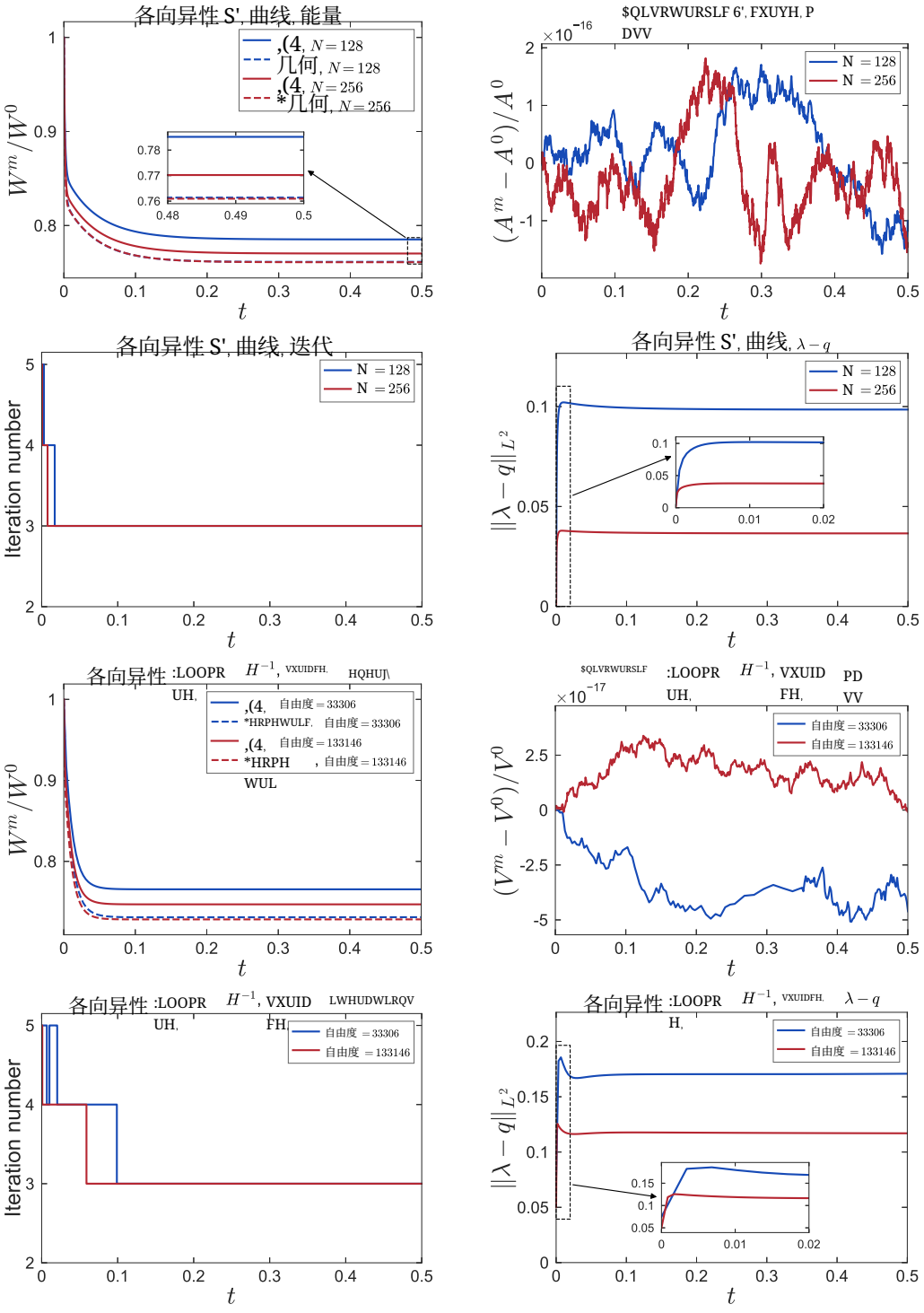


图 4：前四幅对应花形曲线的各向异性 SD，后四幅对应 Clarenz 的 H^{-1} 各向异性Willmore流。每种情况下，上排显示归一化 IEQ 和几何能量（左），以及归一化面积变化$(A^m-A^0)/A^0$或体积变化$(V^m-V^0)/V^0$（右）；下排显示牛顿迭代次数（左）和 IEQ缺陷（6.3）（右）。

(iv) IEQ缺陷（6.3）在整个演化过程中保持有界，并随着网格加密而减小；对于 L^2-梯度流，观察到的缺陷更小。

6.3. 形态演化

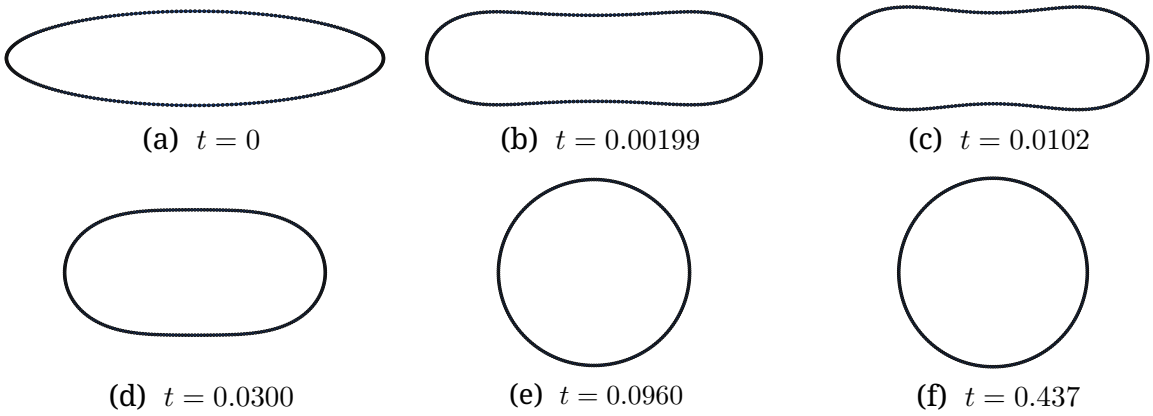
最后，我们考察闭曲线和曲面的形态演化。首先展示Willmore能量的 H^{-1}-梯度流

$$E(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_\Gamma (\varkappa - \overline{\varkappa})^2 \,\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2}\int_\Gamma |\vec{\nu}|(\varkappa - \overline{\varkappa})^2 \,\mathrm{d}\Gamma,$$

w在自发曲率 $\varkappa = -2$ 下，该流守恒总包围面积/体积。

对于曲线和曲面，我们均采用时间步 $\tau = 10^{-5}$。

H^{-1} Willmore流：曲线。初始曲线是一个 2×0.5 椭圆，具有 $N = 256$ 个顶点。图5 显示，凹部首先沿曲率较小的平坦侧面形成。随后曲线逐渐变圆，并趋近于一个圆。

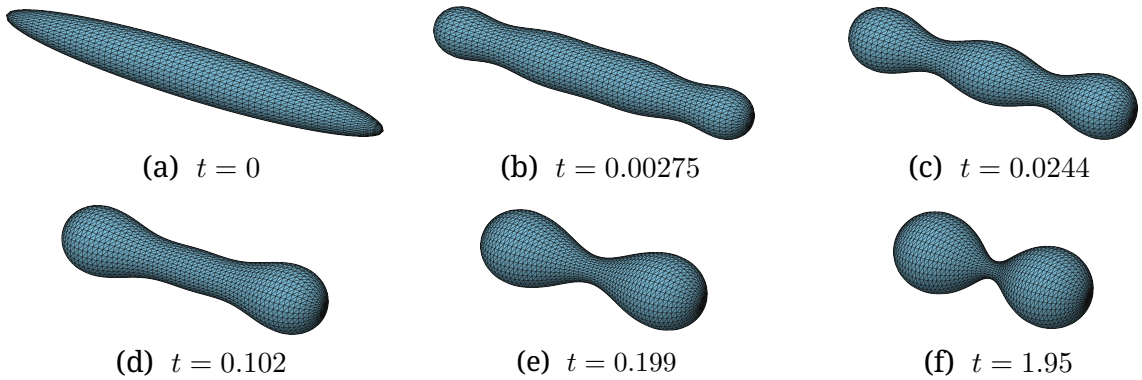


(a) $t = 0$　(b) $t = 0.00199$　(c) $t = 0.0102$

(d) $t = 0.0300$　(e) $t = 0.0960$　(f) $t = 0.437$

图5：椭圆在具有自发曲率$\varkappa = -2$的 H^{-1}-梯度流下的形态演化，$\tau = 10^{-5}$。

H^{-1} Willmore流：曲面。初始曲面是一个 $4 \times 0.5 \times 0.5$ 具有 $N = 2018$个顶点的椭球。如图6所示，它首先沿平坦侧面形成两个凹部。随后，两个凹部合并成一个颈部，并逐渐趋近于一种非球形驻定形状：两个球体由一条细颈连接。



(a) $t = 0$　(b) $t = 0.00275$　(c) $t = 0.0244$

(d) $t = 0.102$　(e) $t = 0.199$　(f) $t = 1.95$

图6：在自发曲率 $\varkappa = -2$ 下，椭球 $4 \times 0.5 \times 0.5$ 经历 H^{-1}-梯度流至 $t = 1.95$，其中 $\tau = 10^{-5}$。

为展示我们数值格式的理想表现，下面给出曲面的两个具有挑战性的情形：一种是强各向异性能量，其能量密度并不凸，并通过平均曲率项进行正则化；另一种是具有近似晶体

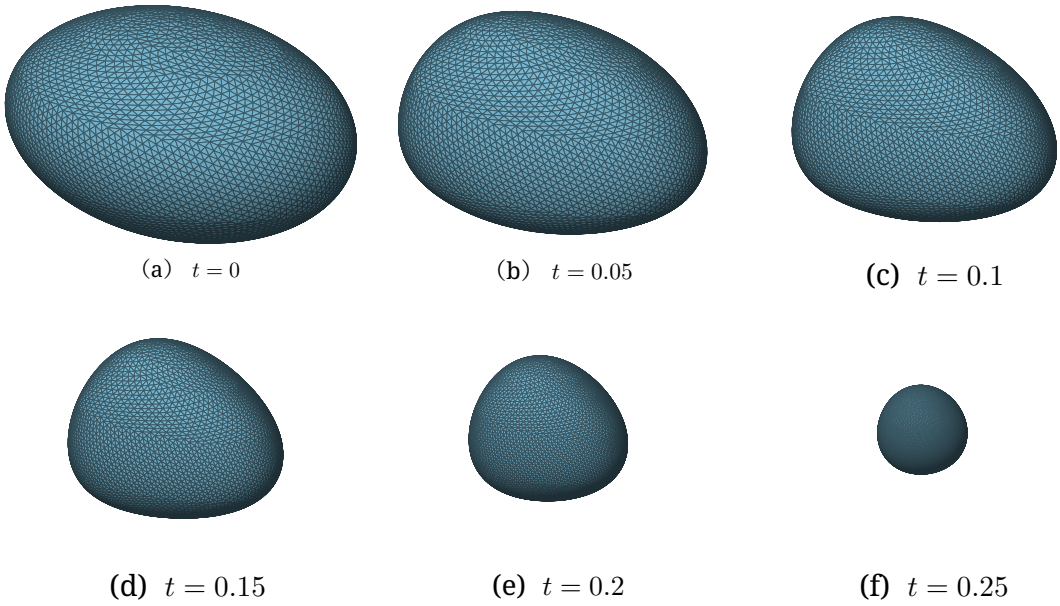
BGN 各向同性。在这两个例子中，初始曲面采用第 6.1 节中的二十面体网格进行离散， $N = 2562$ 并使用 gIEQ–MDR 格式。

强各向异性与正则化。下面 [42], 考虑能量

$$E(\Gamma) = \int_\Gamma \left[\gamma_c(\vec{\nu}) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varkappa^2\right] \mathrm{d}\Gamma, \qquad \gamma_c(\vec{p}) = |\vec{p}|\Big(1 + a\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{p_i}{|\vec{p}|}\Big)^3\Big), \tag{6.5}$$

其中有 $a = \frac{1}{2}$ 和 $\varepsilon^2 = 0.05$。立方各向异性 γ_c 当且仅当 $|a| \le \sqrt{6}/8 \approx 0.306$时是凸的。因此， $a = \frac{1}{2}$ 是强各向异性的，并通过平均曲率进行正则化。这里有$f(\varkappa, \vec{p}) = 2\gamma_c(\vec{p}) + \varepsilon^2|\vec{p}|\varkappa^2$ 以及 $q = \sqrt{f}$。

我们考虑带有 $\beta = 1$的 L^2-梯度流和 H^{-1}-梯度流，即分别为强各向异性平均曲率流和表面扩散。初始曲面是一个 $1.4 \times 1 \times 0.8$ 椭球 [42], , 满足$\tau = 3.81 \times 10^{-5}$。



(a) $t = 0$ (b) $t = 0.05$ (c) $t = 0.1$

(d) $t = 0.15$ (e) $t = 0.2$ (f) $t = 0.25$

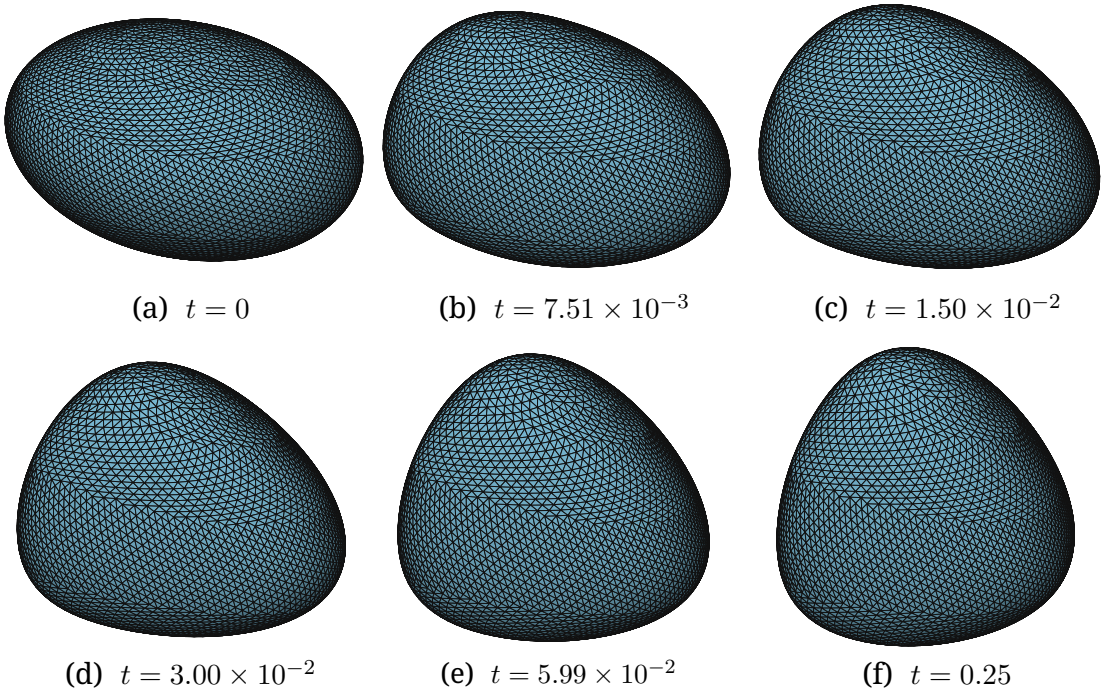
图 7: 在强各向异性平均曲率流作用下， $1.4 \times 1 \times 0.8$ 椭球的形态演化， $\tau = 3.81 \times 10^{-5}$ 。

形态演化如图 7 和 8所示。我们观察到，演化过程关于原点并不对称，因为各向异性本身并不对称，即 $\gamma_c(-\vec{p}) \neq \gamma_c(\vec{p})$。对于强各向异性平均曲率流，曲面收缩为类四面体形状，但随着式（6.5）中的平均曲率项占据主导地位，曲面会变得更加圆润。对于强各向异性 SD，当各向异性能量占据主导地位时，曲面在平衡态演化为类四面体形状。两种模拟中的网格点均表现良好，无需进行网格正则化。

晶体型 BGN 各向异性。我们考虑具有近晶体型 BGN 各向异性（6.1）的各向异性Willmore流，其中 $L = 3$ 且 $G_\ell = \epsilon^2 I + (1 - \epsilon^2)\,\vec{e}_\ell \otimes \vec{e}_\ell$ [11]，其中 I 是单位矩阵， $\vec{e}_\ell$ 是第 ℓ 个单位向量，即 [12]

$$\gamma_\epsilon(\vec{p}) = \sum_{\ell=1}^{3} \sqrt{\epsilon^2|\vec{p}|^2 + (1 - \epsilon^2)p_\ell^2}, \qquad \epsilon = 0.1, \tag{6.6}$$

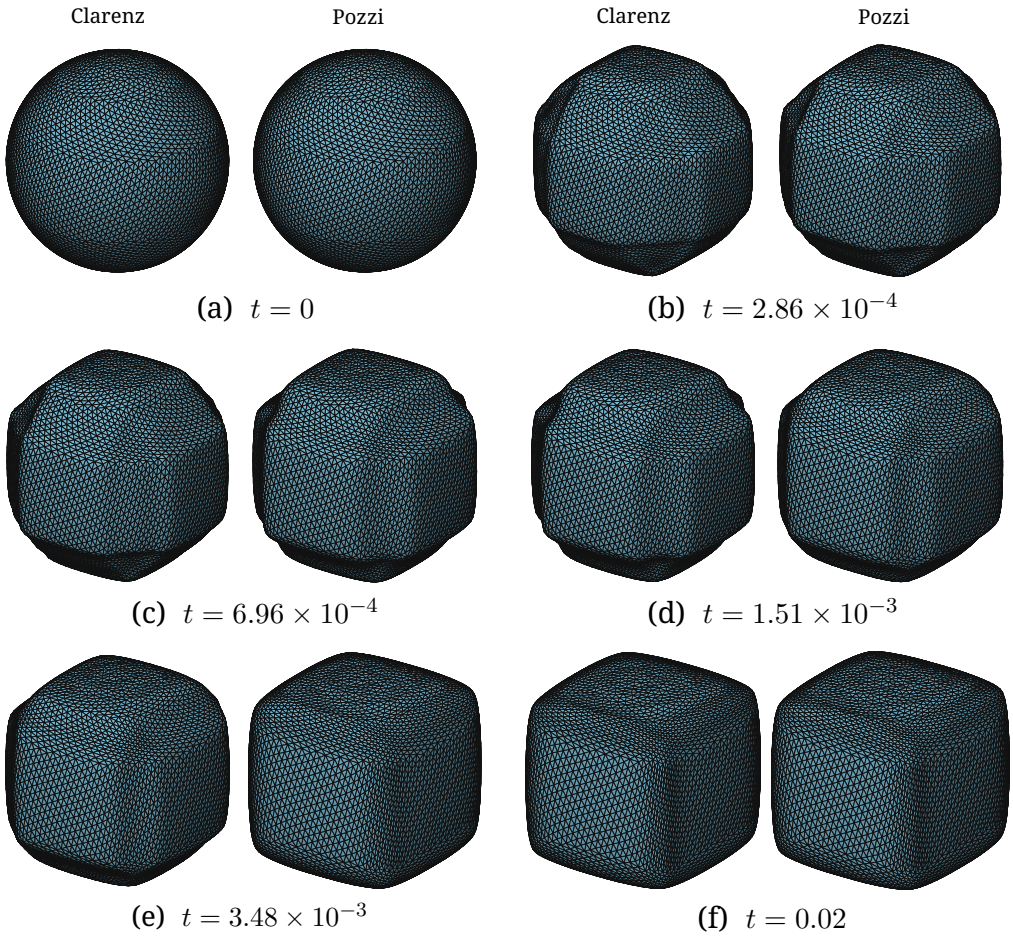
它是 $|p_1| + |p_2| + |p_3|$的光滑近似。其 Wulff形状是一个棱角经过圆滑处理的立方体。我们比较 Clarenz 的能量， $\alpha(\vec{p}) = |\vec{p}|$ 和 $\beta = 1$，以及 Pozzi 的能量，$\alpha = \beta = \gamma_\epsilon$，在（4.2）和（4.6）中。初始曲面是单位球面，其中 $\tau = 9.53 \times 10^{-6}$。



(a) $t = 0$ (b) $t = 7.51 \times 10^{-3}$ (c) $t = 1.50 \times 10^{-2}$

(d) $t = 3.00 \times 10^{-2}$ (e) $t = 5.99 \times 10^{-2}$ (f) $t = 0.25$

图8： $1.4{\times}1{\times}0.8$ 椭球在强各向异性表面扩散作用下的形态演化，其中 $\tau = 3.81{\times}10^{-5}$。



(a) $t = 0$ (b) $t = 2.86 \times 10^{-4}$

(c) $t = 6.96 \times 10^{-4}$ (d) $t = 1.51 \times 10^{-3}$

(e) $t = 3.48 \times 10^{-3}$ (f) $t = 0.02$

图9：Clarenz 和 Pozzi 的各向异性 Willmore 流作用下单位球面的形态演化，其中 γ_ϵ 在（6.6）中， $\epsilon = 0.1$，以及 $\tau = 9.53 \times 10^{-6}$。每对图展示了同一时刻的两种流。

图9 比较了两种演化在相同时间的情况。在两种情形下，演化过程中球面上都会出现平面和尖角，两种流最终都演化到相同的平衡形状（参见图9(f)），这与理论结果一致：两种能量都在Wulff形状处达到全局最小值 [15, 定理4。1], [36, 定理2。4]。不过，两种流的演化速度不同。Pozzi的各向异性Willmore流速度更快，在图9 (e)中已达到平衡，而Clarenz的流尚未达到。此外，两种流的平衡形状都是稳定的。与之前一样，网格点表现良好，无需进行网格正则化。

7. 结论

我们为一类闭曲线和曲面的依赖曲率的能量的加权 L^2-梯度流建立了一个几何IEQ框架。该框架将法向上的能量耗散与切向网格运动分离。将其与BGN或MDR公式相结合，可得到参数有限元格式，并保证离散二次IEQ能量无条件衰减。该框架还可推广到各向异性Willmore流和体积守恒的 H^{-1}-梯度流；对于后者，可精确守恒面积或体积。

数值实验支持了理论结果，并展示了所提出方法在捕捉复杂几何演化的同时保持良好网格质量的有效性。

致谢

本工作得到国家自然科学基金委员会（编号：12401572，Q.Z.）的部分资助。

参考文献

[1] E. Aulisa, A. Gruber, M. Toda, H. Tran，曲面的 p-Willmore 能量的新进展，载于：第二十一届几何、可积性与量子化国际会议论文集，第21卷，保加利亚科学院、核研究与核能研究所，Avangard Prima，索非亚，2020年，第57–65页。[2] E. Bänsch, P. Morin, R.H. Nochetto，曲面扩散的有限元方法：参数情形，《计算物理学杂志》203（2005）321–343。[3] W. Bao, Y. Li，三维各向异性曲面扩散的对称化参数有限元方法，SIAM科学计算杂志45（2023）A1438–A1461。[4] W. Bao, Y. Li，平面Willmore流的能量稳定参数有限元方法，《SIAM数值分析杂志》63（2025）103–121。[5] W. Bao, Q. Zhao，曲面扩散的保结构参数有限元方法，《SIAM数值分析杂志》59（2021）2775–2799。[6] J.W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg，二阶与四阶几何演化方程组合的变分逼近，《SIAM科学计算杂志》29（2007）1006–1041。[7] J.W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg，四阶几何演化方程的参数有限元方法，《计算物理学杂志》222（2007）441–467。[8] J.W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg，平面各向异性几何演化方程的数值逼近，IMA数值分析杂志28（2008）292–330。

[9] J.W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg，演化超曲面的参数有限元逼近， $\mathbb{R}^3$《计算物理学杂志》227（2008）4281–4307。[10] J.W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg, Willmore流及相关几何演化方程的参数逼近，SIAM科学计算杂志31（2008）225–253。[11] J.W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg，高维各向异性几何演化方程的变分形式，数值数学109（2008）1–44。[12] J.W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg，曲率驱动界面演化的参数有限元近似，载于《数值分析手册》（Andrea Bonito 和 Ricardo H. Nochetto 编）第21卷（2020）275–423。[13] M. Burger, F. Haußer, C. Stöcker, A. Voigt，采用水平集方法处理带曲率正则化的各向异性流，《计算物理学杂志》225（2007）183–205。[14] J.W. Cahn, J.E. Taylor，综述第113篇：通过曲面扩散实现曲面运动，《金属与材料学报》42（1994）1045–1063。[15] U. Clarenz，Wulff形状使各向异性Willmore泛函达到最小，《界面与自由边界》6（2004）351–359。[16] K. Deckelnick, H. Garcke, B. Kovács，各向异性平均曲率流曲面有限元方法的误差估计，arXiv预印本 arXiv:2508.01078（2025）。[17] B. Duan, B. Li，用于曲面演化参数有限元逼近的新型人工切向运动，SIAM科学计算杂志46（2024）A587–A608。[18] G. Dziuk，演化曲面的算法，数值数学58（1990）603–611。[19] G. Dziuk，计算参数Willmore流，数值数学111（2008）55–80。[20] C.M. Elliott, H. Fritz，基于DeTurck技巧的曲线缩短流与平均曲率流逼近，IMA数值分析杂志37（2017）543–603。[21] M.E. Gage，在相对几何中通过曲率演化平面曲线，杜克数学杂志72（1993）441–466。[22] G. Gao, B. Li, R. Tang，几何曲率流的对偶形式及其离散化，arXiv: 2604.18288，2026。[23] H. Garcke, R. Nürnberg, Q. Zhao，采用法向–切向速度分裂的Willmore流能量稳定参数有限元方法，SIAM科学计算杂志48（2026）A1235–A1259。[24] H. Garcke, R. Nürnberg, Q. Zhao，采用BGN切向运动的平面曲线Willmore流稳定全离散有限元方法，《科学计算杂志》105（2025）45。[25] Y. Gong, J. Zhao, Q. Wang，热力学一致梯度流模型的任意高阶无条件能量稳定格式，SIAM科学计算杂志42（2020）B135–B156。[26]M.E. Gurtin, M.E. Jabbour，具有曲率依赖能量和曲面扩散的三维界面演化：界面控制的演化、相变、外延生长与弹性薄膜，《理性力学与分析档案》163（2002）171–208。[27] F. Haußer, A. Voigt，正则化各向异性曲面扩散的离散格式：六阶几何演化方程，《界面与自由边界》7（2005）353–370。

[28] D.W. Hoffman, J.W. Cahn，各向异性曲面的矢量热力学：I. 基础及其在平面曲面交界中的应用，《表面科学》31（1972）368–388。[29] J. Hu, B. Li，采用人工切向速度的平均曲率流和Willmore流演化有限元方法，《数值数学》152（2022）127–181。[30] G. Huisken，凸曲面通过平均曲率流演化为球面，《微分几何杂志》20（1984）237–266。[31] W. Jiang, B. Li，曲线曲面扩散流的周长递减与面积守恒算法，《计算物理学杂志》443（2021）110531。[32] B. Kovács, B. Li, C. Lubich，闭曲面Willmore流的收敛演化有限元算法，《数值数学》149（2021）595–643。[33] Z. Liu, X. Li，梯度流不变能量二次化方法的高效修正技术，《应用数学快报》98（2019）206–214。[34] W.W. Mullins，热沟槽理论，《应用物理学杂志》28（1957）333–339。[35]R. Perl, P. Pozzi, M. Rumpf，参数化各向异性Willmore流的嵌套变分时间离散，载于：《数学模型中的奇异现象与标度》，Springer国际出版，Cham，2014，第221–241页。[36] P. Pozzi，计算各向异性Willmore流，《界面与自由边界》17（2015）189–232。[37] J. Schöberl，NGSolve中有限元的C++11 实现，技术报告ASC Report 30/2014，分析与科学计算研究所，维也纳技术大学，2014。[38] S. Torabi, J. Lowengrub, A. Voigt, S. Wise，强各向异性系统的新相场模型，《伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》465（2009）1337–1359。[39] T.J. Willmore，黎曼几何，牛津大学出版社，1993。[40] X. Yang，均聚物共混物相场模型的线性、一阶和二阶无条件能量稳定数值格式，《计算物理学杂志》327（2016）294–316。[41] X. Yang, J. Zhao, Q. Wang, J. Shen，基于不变能量二次化方法的三组分Cahn–Hilliard相场模型数值近似，《数学模型与方法及其应用》27（2017）1993–2030。[42] Y. Zhang，具有耦合取向与曲率依赖的几何流统一保结构框架，2026。arXiv预印本arXiv:2609.36419。[43] J. Zhao, Q. Wang, X. Yang，基于不变能量二次化方法的相场枝晶生长模型数值近似，《国际数值方法工程杂志》110（2017）279–300。[44] J. Zhao, X. Yang, Y. Gong, X. Zhao, X. Yang, J. Li, Q. Wang，非平衡模型数值近似的一般策略——第一部分：热力学系统，《国际数值分析与建模杂志》15（2018）884–918。[45] Q. Zhao，Willmore流与Helfrich流参数化近似的受约束Onsager变分框架，2026。arXiv预印本arXiv:2608.07244。