arXiv:2611.30833v1 [math.CV] 23 Nov 2026

圆盘泛函与有理曲线

Yinji Li、Haoyuan Sun、Zhiwei Wang 和 Xiangyu Zhou

摘要。我们利用圆盘泛函证明了紧致 Kähler 流形上存在有理曲线的一个判据。作为应用，我们得到 Miyaoka–Mori 定理的超越版本，并给出最优次数界；此外，我们还为紧致 Kähler 流形单有理覆盖性的刻画提供了一种新证明。

目录

1. 引言 1
2. 有限面积全纯圆盘的紧致性 5
3. 泛函的极小化子$J_{t,\beta}$ 7
4. 上同调类为 $W^{1,p}$ 的全纯圆盘族及其变分 14
5. 边界酉切向标架 19
6. 定理 1.1 的证明 25
7. 圆盘泛函、伪有效性与紧致 Kähler 流形的单有理覆盖性 32
8. 典范丛非 nef 的紧致 Kähler 流形上的有理曲线 36
附录 A. 紧致性定理的证明 39
附录 B. 圆盘泛函与伪有效阈值 42
参考文献 43

1. 引言

我们的目标是从多复变的视角，在典范丛非数值有效的紧致 Kähler 流形上构造有理曲线。在代数几何和解析几何中，构造有理曲线是一项重要问题：负典范次数的有理曲线生成待收缩的极端射线，参见例如 [KM98、BCHM10、HP16、HP24、HLX26、HX26]。Mori 在证明 Hartshorne关于丰切丛的猜想时引入了弯曲与断裂技术 [Mor79]，后来又用它来研究极端射线 [Mor82]。该方法结合了变形理论、约化到正特征以及 Frobenius态射。利用弯曲与断裂技术，Miyaoka 和 Mori[MM86] 证明，若曲线 C 在光滑射影 n维簇上满足 $K_X\cdot C<0$，则对任意丰除子 H及任意 $x\in C$，都存在一条经过 x的有理曲线 R，满足 $H\cdot R\le 2n(H\cdot C)/(-K_X\cdot C)$；当 H 为半正实除子时，另见 [Kol96]。最近，Jovinelly、Lehmann 和 Riedl [JLR26] 通过同时在多个标记点处折断出有理分量，将系数改进至最优值 $n+1$，并将这一方法称为弯曲与粉碎。

在解析方面，Siu 和 Yau [SY80] 在证明 Frankel猜想时，从调和球面构造了有理曲线。Siu 后来提出使用乘子理想和复 Monge–Ampère 方程，在 Fano 流形上构造有理曲线 [Siu09]。如果 X 是一个射影流形，Boucksom、Demailly、Păun 和 Peternell [BDPP13]证明了单有理判据： X 是单有理的，当且仅当 K_X 不是伪有效的。他们结合锥对偶定理与 Mori 向正特征的约化，得出了这一刻画。

2020 数学主题分类。 32Q15；32U35。关键词和短语。 圆盘泛函、有理曲线、Kähler 流形。

Ou [Ou25] 利用叶丛理论和最优 X 延拓的几何性质，在 L^2 为紧致 Kähler 时，证明了这一刻画在完全一般的情形下成立。[GZ15a，GZ15b，GZ17，ZZ16]。

1.1. **紧致 Kähler 流形上存在有理曲线的圆盘泛函与判据。** 圆盘泛函在多复变中发挥着重要作用，例如参见[Pol91、Pol93、Ros03、DDF12]。关于一篇精彩的综述，读者可参见 [Kis00，第 16] 节。通过取下确界构造拟亚纯次调和函数，将圆盘包络函数与极小原理联系起来。扩展未来管猜想的证明见 [Zhou98], ，其通过揭示该猜想与 Kiselman–Loeb 极小原理之间的深刻联系而得以证明，详见 [Zhou02，第 4]节。

设 $(X,\ \omega)$ 是一个连通紧 Kähler 流形，且 $\theta := \mathrm{Ric}(\omega)$，因此 $[-\theta] = 2\pi c_1(K_X)$。对于全纯圆盘 $f : \mathbb{D} \to X$，其面积泛函和加权面积泛函定义如下。

$$A(f) := \int_{\mathbb{D}} f^*\omega, \qquad W(f) := \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)\, f^*\omega.$$

设 ρ 是 X上的光滑闭实 (1,1)-形式，我们定义圆盘泛函 Q_ρ b y

$$Q_\rho(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) f^*\rho\,.$$

在给定点 $x \in X$处，我们设

$$\mathcal{A}(X,x) := \Big\{ f : \overline{\mathbb{D}} \to X \text{ holomorphic with } f(0) = x \Big\}.$$

利用圆盘泛函 Q，我们得到一个关于紧致 Kähler 流形上有理曲线存在性的判据。

T定理 1.1. 设 $\delta > 0$。若对某些 $c > 0$和 $q(f) := Q_{\theta-\delta\omega}(f) - cW(f)$有

$$\sup_{f\in\mathcal{A}(X,x)} q(f) = +\infty, \tag{1.1}$$

则存在一条经过 x 的有理曲线 $R \subset X$，满足

$$[\omega]\cdot R \le \frac{2\pi(n+1)}{\delta}.$$

一方面，对数项 $\log(1/|z|)$ 出现在圆盘泛函 Q 中，会在 $z = 0$处“挤出”一条有理曲线，正如第 1.3节所述。另一方面，圆盘泛函 Q_ρ 在研究 (1，*1)*-上同调类 $[\rho]$的正性时自然地出现。

定理 1.2。 设 X 为连通复流形， ρ 为光滑闭实 (1,1)-形式。圆盘包络函数

$$x \longrightarrow \inf_{f\in\mathcal{A}(X,x)} Q_\rho(f)$$

要么是 ρ-拟亚纯次调和函数，要么恒等于 $-\infty$。

类似的结果可参见 Magnússon 的论文 [Mag12]。我们在第 7 节中给出定理 1.2 的完整且详细的证明。

现在假设 X 是紧致 Kähler，且 K_X 不是伪有效的。由于伪有效锥是闭的，对于某个 $t > 0$，上同调类 $[-\theta + 2\pi t\omega] = 2\pi[K_X + t\omega]$ 仍然不是伪有效的，即 $\mathrm{PSH}(X, -\theta + 2\pi t\omega) = \emptyset$。定理 1.2 给出

$$\inf_{f\in\mathcal{A}(X,x)} Q_{-\theta+2\pi t\omega}(f) = -\infty \qquad \text{for every } x \in X.$$

$2\log(1/|z|) \ge 1 - |z|^2$给出 $4\pi Q_\omega(f) \ge W(f)$。对于任意 $0 < \delta < 2\pi t$，我们令 $c = (2\pi t - \delta)/(4\pi)$，并得到

$$Q_{\theta-\delta\omega}(f) - cW(f) \ge Q_{\theta-2\pi t\omega}(f).$$

因此（1.1）对每个 $x \in X$ 都成立，而定理 1.1 给出了经过 X中每一点的一条有理曲线。这恢复了 Ou 对单有理覆盖的紧致 Kähler 流形的刻画中从非伪有效性到单有理覆盖性的蕴含 [Ou25]。

定理 1.3。 设 X 是紧致 *Kähler* 流形，则 K_X 不是伪有效的，当且仅当 X 是单有理的。在此情形下，如果对某个 $t>0$， $[K_X + t\omega]$ 不是伪有效的，那么对每个$x \in X$，都存在一条有理曲线 R，使得

$$[\omega] \cdot R \leq \frac{n+1}{t}.$$

我们称 $t_* :=$ 下确界$\{t>0 : [K_X + t\omega]$ 是伪有效的$\}$ 为 K_X 的伪有效阈值。在附录 B 中，我们构造了一个紧致 Kähler 流形 (X, ω) 满足

$$\sup_{f \in \mathcal{A}(X,x)} Q_{\theta - \delta\omega}(f) = \begin{cases} +\infty, & 0 < \delta < 2\pi t_*, \\ 0, & \delta \geq 2\pi t_*. \end{cases} \qquad \forall\, x \in X.$$

1.2. **典范丛非数值有效的紧致 Kähler 流形上的有理曲线**。定理 1.1 在 K_X 非数值有效时也能产生有理曲线。

一个 $\mathbb{R}$-Cartier 除子 H 在射影簇 X 上是数值有效的，当且仅当 $H \cdot C \geq 0$ 对每条不可约曲线 $C \subset X$均成立。在任意特征的代数闭域上，Jovinelly、Lehmann 和 Riedl[JLR26]最近以最优次数界证明了 Miyaoka–Mori 定理:

定理 1.4。 [JLR26，定理 1。1] 设 X 为一个射影簇，且 H 为 $\mathbb{R}$上的 *nef* 卡蒂尔除子。假设存在一条不可约曲线 X包含于 $C \subset X$ 的光滑轨迹中，且 X 满足 $K_X \cdot C < 0$，那么对每个闭点 $x \in C$，都存在一条有理曲线 R包含 x，使得

$$H \cdot R \leq \frac{(n+1) H \cdot C}{-K_X \cdot C}.$$

最近，Du–Guo–Xie [DGX26]提出了一种在 Fano 流形上构造有理曲线的解析方法，而 Guo–Xie [GX26]通过 jet 技术，在零特征下于典范丛非 nef 的射影流形上获得了有理曲线。

在解析情形中，紧致 Kähler 流形上的 (1，1)-上同调类 γ 若属于凯勒锥的闭包，则称为数值有效。Demailly 和 Păun [DP04] 将 Kleiman–Nakai–Moishezon 判据 [Nak63、Moi64、Kle66] 推广到了 Kähler 情形，并在 [DP04的定理 4.3(iii)]中证明了 $\gamma \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 数值有效当且仅当

$$\int_Y \gamma \wedge [\omega]^{\dim Y - 1} \geq 0$$

对每个正维不可约解析子簇 $Y \subset X$ 以及 X上的每个 Kähler 形式 ω都成立。这自然启发我们在 Miyaoka–Mori 定理中，用 K_X-负子簇 Y取代 K_X-负曲线。我们称这样的 Y K_X中的非 nef 子簇。

定理 1.5 (=定理 8.2)。 设 $Y \subset X$ 是 K_X中的非 *nef* 子簇， $d =$维数为 Y，并设ω_1、……、ω_{d-1} 是 (1，1)上同调类 X。令

$$L_Y(\gamma) := \int_Y \gamma \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{d-1}, \qquad \gamma \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}).$$

若 $L_Y(K_X) < 0$，那么对于每个数值有效的(1、1)上同调类 α 以及每个 $x \in Y$，都存在一条经过 x 的有理曲线 $R \subset X$，使得

$$\alpha \cdot R \leq (n+1) \frac{L_Y(\alpha)}{-L_Y(K_X)}. \tag{1.2}$$

定理1.3 和 1.5 共同表明， K_X 的非伪有效性意味着经过 X中每一点都有有理曲线，而非丰性意味着经过 K_X的每个非 nef 子簇中每一点都有有理曲线。

对于 X 上的丰的 (1, 1)-类 α ，其零空间 Null(α) 是所有满足 $\int_Y \alpha^{\dim Y} = 0$ 的正维不可约解析子簇 $Y \subset X$ 的并集。若 $\int_X \alpha^n > 0$，Collins 和 Tosatti [CT15，定理 1.1] 证明了，Null(α) 与非 Kähler 轨迹 $E_{\mathrm{nK}}(\alpha)$ 重合，因此是 X 的真解析子集。若 $\int_X \alpha^n = 0$，则 Null(α) $= X$。在 Kähler 极小模型纲领中，构造 K_X-负有理曲线至关重要。借助紧致 Kähler 流形上的 Ou 的单有理性判据 [Ou25], 、Hacon–Păun [HP24，定理 0.5] 以及 Hacon–Li–Xie [HLX26，推论 3.6] 在凯勒情形下建立了带有次数界 $2n$ 的锥定理。我们的定理 1.5 具有如下推论。

推论 1.6 (=推论 8.3)。 假设 K_X 不是数值有效的。取一个 *Kähler* 形式 ω 并令

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : [K_X + t\omega] \text{ is nef}\}, \qquad \alpha := [K_X + \tau\omega].$$

那么零空间(α) 是 X 的一个非空解析子集，并且每个点 $x \in$ 零空间(α) 都位于一条有理曲线 $R \subset X$ 上，且该曲线满足

$$\alpha \cdot R = 0, \qquad 0 < -K_X \cdot R = \tau \int_R \omega \leq n + 1.$$

1.3. 定理 1.1 的证明策略。步骤 1. 利用 Gromov 紧性挤出一条有理曲线。假设存在全纯圆盘 $f_j\colon \mathbb{D} \to X$ ，满足 $f_j(0) = x$ ，且 $\sup_j A(f_j) < \infty$。由于面积一致有界，紧致性定理 [Gro85, IS99, IS00]表明 $f_j\colon \mathbb{D} \to X$ 收敛到一条稳定曲线 $F\colon C \to X$。若进一步有 $q(f_j) \to +\infty$，则圆盘泛函 q 中的对数项 $\log(1/|z|)$ 会在 $z = 0$处“挤出”一个气泡，并产生一条经过 x 的有理曲线 R ，满足

$$\int_R \omega \leq \liminf_j A(f_j).$$

详见推论 2.4 。因此，我们的任务是找到全纯圆盘 f_j 使得 $q(f_j)$发散，而它们的面积 $A(f_j)$ 一致有界。

步骤 2。泛函 $J_{t,\beta}$ 的极小化子。 我们通过极小化以下泛函来构造所需的圆盘。对于 $t, \beta > 0$，定义

$$J_{t,\beta}(f) := A(f) + te^{-q(f)} - \beta\Psi(f), \qquad f \in \mathcal{A}(X, x).$$

我们不对 Ψ 作出精确定义，这里只简单指出， Ψ保证极小化序列收敛到一个实际的全纯圆盘 $f_{t,\beta}\colon \mathbb{D} \to X$而非一般的带气泡稳定曲线，见命题 3.10。

步骤 3。全纯圆盘族及其变分。我们构造全纯映射$F\colon D_\varepsilon \times \mathbb{D} \to X$，使得中心纤维 $F(0, \cdot) = f_{t,\beta}$，并称 $\{f_\tau = F(\tau, \cdot)\}$ 为全纯圆盘族。由于 $f_{t,\beta}$ 是泛函 $J_{t,\beta}$ 的极小化子，我们得到 $\Delta_\tau J_{t,\beta}(f_\tau)|_{\tau=0} \geq 0$。通过适当选择全纯族（将在下一步讨论），这个变分不等式给出 $f_{t,\beta}$ 面积的一致界，以及 $q(f_{t,\beta})$ 的发散，分别见命题 6.3 和命题 6.4。

步骤 4。Berndtsson–Rosay 边界酉标架与 Forstnerič 图定理。命题 3.10 证明极小化子 $f = f_{t,\beta}$ 是 $W^{1,p}$, $2 < p < 4$。Sobolev嵌入$W^{1,p}(\mathbb{D}) \to C^{0,1-\frac{2}{p}}(\mathbb{D})$ 意味着 f 连续延拓到 $\mathbb{D}$。我们构造一个 $W^{1,p}$ 全纯标架 $e_1, \ldots, e_n$， 它属于 $f^*T^{1,0}_X$，并且在 $\partial\mathbb{D}$ 上满足 $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$；其中 h 是由 ω 诱导的厄米度量。构造遵循 Berndtsson–Rosay [BR03, 命题 6.1]，参见定理 5.5。引理 6.2 中的一个简单计算给出 $f^*T^{1,0}_X$的切向量场 $\xi_1, \ldots, \xi_n$， 它们在$\partial\mathbb{D}$上仍保持正交归一，但在 0 处消失。利用 Forstnerič 的基本图定理 [For07, 定理 1.2], 在

引理 5.3我们将切向量场 ξ_j实现为全纯族的导数 f_τ^j，即 $f_0^j = f$，$f_\tau^j(0) = x$且 $\partial_\tau f_\tau^j|_{\tau=0} = \xi_j$。

将 $J_{t,\beta}$在各族 f^1、$\cdots$ f^n上求和时，二阶变分的表达式似乎非常简洁。命题 6.1 给出了 $J_{t,\beta}$导数的精确公式。如步骤 3 所示，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_\tau J_{t,\beta}(f_\tau^j)\Big|_{\tau=0} \geq 0.$$

该和的上界给出了 $W(f_{t,\beta})$ 的一个上界；当 β 足够小时，此上界与 t 无关。于是，命题 6.4 允许我们选取 $t_j \to \infty$ 和 $\beta_j \downarrow 0$，使相应的极小化子满足 $q(f_{t_j,\beta_j}) \to +\infty$，同时 $\sup_j A(f_{t_j,\beta_j}) < \infty$。定理 1.1 中的最优常数 $2\pi(n+1)$ 完全来自面积泛函的二阶变分，其他变分项均无贡献。证明至此完成。

约定与结构。我们记 $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$，$D_r(b) = \{z : |z-b| < r\}$，$S^1 = \partial\mathbb{D}$。我们用 h 表示 ω 的厄米度量，并采用以下约定

$$d^c = i(\bar\partial - \partial), \qquad dd^c = 2i\partial\bar\partial, \qquad dA = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar z, \qquad \Delta_z = 4\partial_z\partial_{\bar z}.$$

第2 节陈述了我们所使用的紧致性定理，并在附录A中予以证明。第3–6节确立了圆盘泛函判据定理1.1。第7节证明定理1.2和单有理判据定理1.3。第8节证明 Kähler Miyaoka–Mori 定理1.5。

致谢。本研究得到中国国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1002600 和 2021YFA1003100）的资助。Z. WANG 和 X. ZHOU 分别获得国家自然科学基金（NSFC）（项目编号：12571085 和 12288201）的部分资助。Z. WANG 还获得中央高校基本科研业务费的资助。

在构建变分论证时，我们使用人工智能探索了泛函的不同选取方式。人工智能建议了术语 $te^{-q(f)}$。

2. 有限面积全纯圆盘的紧致性

设 $f_j : \mathbb{D} \to X$ 是一个面积一致有界的全纯圆盘序列 $\int_{\mathbb{D}} f_j^*\omega$，稳定曲线空间是描述 f_j极限的适当模空间。紧致性定理源于 [Gro85]，我们采用 [IS99、IS00]中发展起来的稳定曲线语言。本节中我们固定 $x \in X$。

定义 2.1。设 Y 为一个复流形，一个 C 上的稳定曲线由 Y 组成 f

(1) 一个连通结点曲线 C：C 上的点要么是光滑点，要么是结点：局部双全纯同构于 $\{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : uv = 0\}$。此外，$C$ 按以下方式获得：从主分支 $C_0 \simeq \mathbb{D}$开始，选取其上的点 a_1、.....、a_N，并将一个 $\mathbb{P}^1$ 的副本粘接到每个 a_i 上，使 a_i 成为结点曲线。然后，在每个分量 $C_i \simeq \mathbb{P}^1$上选取 $C_i \setminus a_i$ 中的有限个点，并在这些点处分别粘接 $\mathbb{P}^1$.....。如此有限次构造便得到结点曲线 C。我们称 a_1、$\cdots$ a_N为附着于主分支 C_0的树 $\mathbb{P}^1$ 的根。(2) 一个全纯映射 $F : C \to Y$，使得每个 F 为常数的球面分量都至少具有三个结点。$f := F|_{C_0}$ 称为主映射。

定义 2.1（1）意味着 C 可以参数化为 $\mathbb{D}$ 其含义是 [IS00，定义 2。2],参见定义 A.2 以及附录A中的图。

定义 2.1(2) 等价于 $F : C \to X$ 按照 [IS00，定义 2.4] 的意义下稳定。$F : C \to X$ 的稳定性确保每个 $\mathbb{P}^1$ 树都 C 包含一个 F-非恒定球面叶子，因为末端分支只有一个结点，所以 F 在此处是非恒定的。

我们将圆盘曲线 C 的面积定义为

$$A_*(U) := \int_C F^*\omega.$$

以下是所谓的 ε-正则性；例如可参阅 [IS00，引理 1。1], [Zing17，命题 4。1]为方便读者，我们给出一个简单的证明。

引理 2.2。 存在常数 e_0、$C_{\mathrm{reg}} > 0$，它们仅依赖于 $(X、\omega)$，使得每个全纯映射 $v:\ D_{2r}(b) \to X$ 都满足

$$\int_{D_{2r}(b)} v^*\omega < e_0 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{D_r(b)} |dv|^2 \le C_{\mathrm{reg}} r^{-2} \int_{D_{2r}(b)} v^*\omega. \tag{2.1}$$

证明。 通过重新缩放（取 $u(z) := v(b + rz)$），不妨设 $b = 0$且 $r = 1$。由于 X 是紧的，显然存在一个正数 $\rho > 0$，使得每个球 $B_\omega(x, \rho)$ 都包含于有限个全纯坐标图中的某一个内。

设 $a \in \overline{D_{3/2}}$是 $(3/2 - |z|)\ |dv(z)|$ 在 $D_{3/2}$中的极大点。令 $\overline{d = 3/2 - |a|}$ 和$M = |dv(a)|$。不妨设 $d,\ M > 0$，经过简单计算可得 $|dv| \le 2M$ 在$D_{d/2}(a)$上。取 $s =$最小值 $\left\{\frac{d}{2},\ \frac{\rho}{2M}\right\}$，容易看出，像 $v(D_s(a))$ 包含于$\overline{B_\omega(v(a)\ \rho)}$ 中。记 V为 v 在 $D_s(a)$ 上的坐标表示。对 $|V'|^2$应用次平均值不等式可得

$$M^2 s^2 \le C \int_{D_s(a)} |V'|^2\, dA \le C' \int_{D_2} v^*\omega. \tag{2.2}$$

选择 $e_0 > 0$ 使得 $C' e_0 < \rho^2/4$。若 $\int_{D_2} v^*\omega < e_0$，则由（2.2）可推出 $s \ne \rho/$（$2M$），因此 $s = d/2$ 并且 $d^2 M^2 \le 4C' \int_{D_2} v^*\omega$。对于 $z \in D_1$，根据 a 的定义可得

$$|dv(z)|^2 \le \frac{d^2 M^2}{(3/2 - |z|)^2} \le 16 C' \int_{D_2} v^*\omega,$$

由此完成证明。 □

下面的命题2.3 由 [IS00定理 1], 得出，我们在附录A中给出详细证明。

命题 2.3。 设 $M > 0$和 $f_j:\ \mathbb{D} \to X$是满足 $\int_{\mathbb{D}} f_j^*\omega \le M$和$f_j(0) = x$的全纯圆盘。取一个子列后，存在稳定圆盘曲线（$g, F$）：$C \to \mathbb{C} \times X$，具有以下性质：

(1) $g|_{C_0}:\ C_0 \to \mathbb{D}$ 是双全纯映射，且 g（C_i）、$i \ge 1$是 $\mathbb{D}$上的单点。它们由g（C的根）组成；*(2)* f_j 在 $\mathbb{D}\backslash g$（C的根）的每个紧子集上光滑收敛到 F。$(g|_{C_0})^{-1}$；*(3)* 存在 $p \in C$，使得 g（p）$= 0$ 且 F（p）$= x$；*(4)* 对每个定义在 X上的光滑闭实(1,1)形式 ρ，

$$\int_{\mathbb{D}} \chi\, f_j^*\rho \longrightarrow \int_C g^*\chi\, F^*\rho \qquad \forall\, \chi \in C_c(\mathbb{D}); \tag{2.3}$$

(5) $A_*(U) \le$下极限$_j\, A(f_j)$.

下面的推论说明：如果我们能够构造出 f_j 处的全纯圆盘 x，其面积有一致界 $A(f_j)$，且 $q(f_j) \to +\infty$，那么 R 处就存在有理曲线 x，并且 R 的次数不超过 $\liminf_j A(f_j)$。

推论 2.4。 固定 $\delta, c > 0$。设 $f_j:\ \mathbb{D} \to X$ 为全纯圆盘，满足 $f_j(0) = x$ 且上确界$_j\, A(f_j) < \infty$。若 $q(f_j) \to +\infty$，则存在一条经过 x 的有理曲线 R，使得

$$[\omega] \cdot R := \int_R \omega \le \liminf_{j\to\infty} A(f_j). \tag{2.4}$$

证明。令 $(g,F)\colon C\to\mathbb{C}\times X$ 为命题 2.3所给出的稳定圆盘曲线。如果 p 不位于任何 $\mathbb{P}^1$ 树上，即 $p\in C_0\backslash\{$的根 $C\}$，那么对某个充分小的 $r>0$， f_j 在 D_r上光滑收敛，特别是 上确界$_j$ 上确界$_{D_r}|df_j|<\infty$。由于 X 是紧的， $\theta-\delta\omega\le C_0\omega$ 对某个 $C_0>0$。我们看到

$$q(f_j)\le|Q_\sigma(f_j)|\le\frac{C_0}{2\pi}\int_{\mathbb{D}\backslash D_r}(\log\frac{1}{a})f_j^*\omega+\frac{C_0\sup_{D_r}|df_j|^2}{2\pi}\int_{D_a}\log\frac{1}{|z|}\,dA,$$

第一项由 $\sup_j A(f_j)<+\infty$ 界定，第二项由 $\sup_j\sup_{D_r}|df_j|^2<+\infty$界定。这与 $q(f_j)\to+\infty$矛盾。

因此， p 位于某棵 $\mathbb{P}^1$ 树上。如果 p 属于一个 F 非恒定的分量，那么我们已经得到一条有理曲线。如果 p 属于一个常值分支，那么我们可以沿着这些常值分支走到一个非恒定分支 $C_i\simeq\mathbb{P}^1$；正如前面所解释的，该分支存在，因为 C 是稳定的。由于 $F(p)=x$，我们得到 F 也将 C_i 的连接节点映射到 x。因此， $R=F(C_i)$是一条经过 x的有理曲线。最后，命题 2.3 中的下半连续性给出 $\int_R\omega\le\int_{C_i}F^*\omega\le F_*(C)\le\liminf_{j\to\infty}A(f_j)$。第一个不等式用到了 $\deg(C_i\xrightarrow{F}R)\cdot\int_R\omega=\int_{C_i}F^*\omega$。证明完毕。□

3. 泛函 $J_{t,\beta}$ 的极小化子

我们将 $\mathcal{A}(X,x)$ 简记为 $\mathcal{A}_x$。假设 (1.1)： $\sup_{f\in\mathcal{A}_x}q(f)=+\infty$，推论 2.4 将定理 1.1 归结为寻找特殊的 $f_j\in\mathcal{A}_x$，使得 $\lim q(f_j)=+\infty$ 且 $\sup A(f_j)<+\infty$。事实证明，这类全纯圆盘来自下文引入的泛函 $J_{t,\beta}$ 的极小化子。

对于 $t>0$，令 $J_t(f):=A(f)+te^{-q(f)}$, $f\in\mathrm{A}_x$ 且 $j_t:=\inf_{f\in\mathcal{A}_x}J_t(f)$。对于 J_t 的极小化序列 f_j，其面积 $A(f_j)$ 一致有界。然而，极限可能是带有气泡的稳定圆盘。我们必须引入泛函 Ψ，使得对于 $\beta>0$，泛函 $J_{t,\beta}:=A+te^{-q}-\beta\Psi$ 的极小化子确实是全纯圆盘，参见命题 3.9。

Set

$$G(z,w):=\log\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|^2,\qquad(z,w)\in\mathbb{D}^2.\tag{3.1}$$

在 $\mathbb{D}^2\setminus\mathbb{D}^2$ 上，我们定义 $G:=0$。显然， G 在 $\mathbb{D}^2$上是非正的、对称的且上半连续。固定 $w\in\mathbb{D}$， $G(\cdot\ w)$ 是 $\mathbb{D}_z$ 上以w为极点的 Green函数：

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}G(z,w)=\pi\delta_w,\qquad G(\cdot,w)|_{\partial\mathbb{D}}=0.\tag{3.2}$$

定义 3.1。对于 $\mathbb{D}$上的正拉东测度 ν，我们定义

$$\Psi(\nu):=\int_{\overline{\mathbb{D}}^2}G(z,w)\,d\nu(z)\,d\nu(w)\in[-\infty,0].$$

对于具有有限面积 $A(f)=\int_{\mathbb{D}}f^*\omega<\infty$的全纯圆盘 $f\colon\mathbb{D}\to X$，测度 $f^*\omega$可平凡地延拓到 $\mathbb{D}$，并令 $\Psi(f):=\Psi(f^*\omega)$。我们将使用的测度 ν仅为 $f^*\omega$及其极限。

令 $\mathcal{B}_x$ 为满足以下条件的全纯圆盘 $f:\mathbb{D}\to X$ 的集合：

$$f(0)=x,\qquad A(f)<\infty,\qquad\Psi(f)>-\infty.$$

注意，如果 $f\in\mathcal{A}_x$，则 $f^*\omega$在 $\mathbb{D}$的某个邻域内是光滑的，因此 $A(f)$ $\Psi(f)$ 均为有限值。因此 $\mathcal{A}_x\subset\mathcal{B}_x$。

对于 $t,\beta>0$ 定义

$$J_{t,\beta}(f):=A(f)+te^{-q(f)}-\beta\Psi(f),\qquad f\in\mathcal{B}_x,\tag{3.3}$$

and

$$j_{t,\beta} := \inf_{f\in\mathcal{A}_x} J_{t,\beta}(f). \tag{3.4}$$

本截面的目标是构造 $f_{t,\beta}\in\mathcal{B}_x$，使其达到 $J_{t,\beta}$ 的下确界。

3.1. 径向逼近。在本节中，我们证明对于 $f\in\mathcal{B}_x$, $A(f)$ $W(f)$ $Q(f)$ $\Psi(f)$，可以用其径向缩放 f_r 进行逼近。对于全纯圆盘 $f\colon \mathbb{D}\to X$ 和 $0<r<1$，记

$$f_r(\zeta) := f(r\zeta).$$

于是 f_r 在 $\mathbb{D}$ 的一个邻域内有定义。作变量代换可得

$$A(f_r) = \int_{D_r} f^*\omega, \tag{3.5}$$

$$W(f_r) = \int_{D_r} (1-|z|^2/r^2)\, f^*\omega, \tag{3.6}$$

$$Q_\rho(f_r) = \frac{1}{2\pi}\int_{D_r} \log(r/|z|)\, f^*\rho \tag{3.7}$$

对于 X 上的任意光滑闭实 (1,1)-形式 ρ。令

$$\kappa_r := \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\min\{\log(1/|z|),\log(1/r)\}}{1-|z|^2} < \infty,$$

并且，对于 $M\geq 0$，令

$$D_M(r) := M\left\{\frac{C_\sigma}{2\pi}\log\frac{1}{r} + c(1-r^2)\right\},$$

其中 $\sigma := \theta - \delta\omega$，且 $C_\sigma > 0$，使得 $-C_\sigma\omega \leq \sigma \leq C_\sigma\omega$ 在 X 上成立。

引理 3.2。设 $f\colon \mathbb{D}\to X$ 是一个具有有限面积的全纯圆盘。

(1) 当 $r\uparrow 1$时，有

$$A(f_r)\to A(f), \qquad W(f_r)\to W(f), \qquad Q_\rho(f_r)\to Q_\rho(f)$$

对于 X 上的每个光滑闭实 $(1,1)$-形式 ρ。若 $A(f)\leq M$，则

$$|q(f)-q(f_r)| \leq D_M(r). \tag{3.8}$$

(2) 对于每个 $0<r<1$，有

$$A(f_r) \leq \frac{W(f)}{1-r^2}, \tag{3.9}$$

$$|q(f)-q(f_r)| \leq \left(\frac{C_\sigma\kappa_r}{2\pi} + c\right) W(f). \tag{3.10}$$

证明。由 W 的定义可得

$$0 \leq W(f) - W(f_r) \leq \min\{A(f)(1-r^2), W(f)\}. \tag{3.11}$$

同样，式（3.7）给出

$$Q_\rho(f) - Q_\rho(f_r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \min\{\log(1/|z|),\log(1/r)\} f^*\rho.$$

回想一下，C_ρ 是满足 $-C_\rho\omega\leq\rho\leq C_\rho\omega$ 在 X上的常数，因此我们得到

$$|Q_\rho(f) - Q_\rho(f_r)| \leq \frac{C_\rho A(f)}{2\pi}\log(1/r). \tag{3.12}$$

这些估计连同显然的单调收敛$\lim_{r\uparrow 1} A(f_r) = A(f)$，证明了 **(1)** 中的收敛。取 $\rho = \sigma$ 并使用 $q := Q_\sigma - cW$ 得到 (3.8)。

对于 (2),

$$(1-r^2)A(f_r) \le \int_{D_r} (1-|z|^2) f^*\omega \le W(f),$$

由此得到 (3.9)。

$$|Q_\sigma(f) - Q_\sigma(f_r)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \min\{\log(1/|z|), \log(1/r)\} f^*\sigma\right| \le \frac{C_\sigma \kappa_r}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2) f^*\omega = \frac{C_\sigma \kappa_r}{\pi} W(f).$$

结合 (3.11)，可证得 (3.10)。

□

引理 3.3。设 $f\colon \mathbb{D} \to X$ 是全纯的，且 $A(f) < \infty$。那么

$$\Psi(f_r) > -\infty, \qquad \Psi(f_r) \downarrow \Psi(f) \quad (r \uparrow 1). \tag{3.13}$$

$\Psi(f)$ 可以是 $-\infty$。

证明。对于 $0 < r \le 1$，我们在 $\mathbb{D}^2$ 上定义缩放格林函数

$$G_r(z,w) := \begin{cases} \log\left|\frac{r(z-w)}{r^2 - z\bar{w}}\right|^2, & z, w \in D_r,\ z \ne w, \\ -\infty, & z = w \in D_r, \\ 0, & (z,w) \notin D_r^2. \end{cases}$$

那么，对于 $(z,w) \in D_r^2$，$G_r(z,w) = G(r^{-1}z, r^{-1}w)$。通过 $z = r\zeta$ 和 $w = r\eta$ 作变量替换，得到

$$\Psi(f_r) = \int_{\mathbb{D}^2} G_r(z,w)\, d\mu(z) d\mu(w). \tag{3.14}$$

由于 $\mu = f^*\omega$ 在 $\mathbb{D}$ 上光滑，我们得到 $\Psi(f_r) > -\infty$。

固定 $z \ne w$ 和 $r > \max(|z|, |w|)$，我们计算得

$$\frac{\partial G_r(z,w)}{\partial r} = -\frac{2}{r}\,\frac{r^4 - |z\bar{w}|^2}{|r^2 - z\bar{w}|^2} < 0.$$

因此，若 $0 < r < s < 1$，则 $G_r \ge G_s$ 在 D_r^2 上。在 D_r^2 之外，显然有 $G_r = 0 \ge G_s$。于是

$$0 \ge G_r \ge G_s \ge G \qquad (0 < r < s < 1). \tag{3.15}$$

由于 $G_r \downarrow G$ 在 $\mathbb{D}^2$ 上逐点成立。由单调收敛定理可得

$$\Psi(f_r) = \int_{\mathbb{D}^2} G_r\, d(\mu\otimes\mu) \downarrow \int_{\mathbb{D}^2} G\, d(\mu\otimes\mu) = \Psi(f).$$

证明完毕。 □

推论 3.4. 对于每个 $f \in \mathcal{B}_x$，圆盘 $f_r \in \mathcal{A}_x$ *and* 满足

$$J_{t,\beta}(f_r) \longrightarrow J_{t,\beta}(f) \qquad (r \uparrow 1).$$

特别是

$$j_{t,\beta} = \inf_{f\in\mathcal{B}_x} J_{t,\beta}(f). \tag{3.16}$$

若(1.1) 成立，则对每个固定的 $\beta > 0$,

$$\frac{j_{t,\beta}}{t} \longrightarrow 0 \qquad (t \to \infty). \tag{3.17}$$

证明。映射 f_r 在 $D_{1/r}$ 上全纯，且以 x为中心。将引理3.2和引理3.3应用于（3.3）中的每一项，得到$J_{t,\ \beta}(f_r) \to J_{t,\ \beta}(f)$。（3.16）由此近似以及$\mathcal{A}_x \subset \mathcal{B}_x$。

对于任意固定的 $g \in \mathcal{A}_x$，$\Psi(g) > -\infty$ 以及

$$0 \le \frac{j_{t,\beta}}{t} \le \frac{A(g) - \beta\Psi(g)}{t} + e^{-q(g)}.$$

首先令 $t \to \infty$然后利用（1.1）选取 g 使 q（g）任意大，证明完成。 □

引理 3.5。固定 t、$\beta > 0$、$M < \infty$ 和 $\eta \ge 0$。假设 $f \in B_x$ 满足

$$A(f) \le M, \qquad J_{t,\beta}(f) \le j_{t,\beta} + \eta.$$

令 D_M（r）由（3.8）定义，则有

$$\int_{\mathbb{D}\setminus D_r} f^*\omega = A(f) - A(f_r) \le \eta + te^{-q(f)}\left(e^{D_M(r)} - 1\right) \qquad (0 < r < 1). \tag{3.18}$$

证明。引理 3.2给出 $|q(f) - q(f_r)| \le D_M(r)$。由推论 3.4，$J_{t,\ \beta}(f_r) \ge j_{t,\ \beta}$。结合 $J_{t,\ \beta}(f) \le j_{t,\ \beta} + \eta$，可得

$$\begin{aligned} A(f) - A(f_r) + \beta(\Psi(f_r) - \Psi(f)) &\le \eta + te^{-q(f_r)} - te^{-q(f)} \\ &= \eta + te^{-q(f)}\left(e^{q(f)-q(f_r)} - 1\right) \\ &\le \eta + te^{-q(f)}\left(e^{D_M(r)} - 1\right). \end{aligned}$$

引理 3.3 使我们可以舍去左侧的非负差值 $\Psi(f_r) - \Psi(f)$。这就证明了 (3.18)。 □

3.2. **求得 $J_{t,\beta}$ 的极小化子**。极小化子的全纯圆盘结果为 $W^{1,p}, 2 < p < 4$。下面给出精确定义。

定义 3.6。全纯圆盘 $f\colon \mathbb{D} \to X$称为 $W^{1,p}$，若 $\int_{\mathbb{D}} |df|_h^p dA_z < \infty$，我们称之为 $f \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$。

令 g 为 h 所诱导的黎曼度量，并令 $\iota : X \to \mathbb{R}^N$ 为 (X, g) 的等距嵌入。那么 $\iota \circ f$对应于光滑函数 $f^1, \cdots\ f^N$，且 $|df|_h^2$与$\sum_{i=1}^N |\frac{\partial f^i}{\partial z}|^2 + |\frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}}|^2$一致。因此，$f \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$ 等价于 $f^i \in W^{1,p}(\mathbb{D}), i = 1, \cdots\ N$。

定义 3.7. 设 $f : \mathbb{D} \to X$ 是一个 $W^{1,p}$ 全纯圆盘，ξ 是 $f^*T^{1,0}X$ 的全纯截面。利用 $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}, \to T\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N}$。$\xi$ 对应于光滑函数 $f^1, \cdots\ f^N, \xi^1, \cdots\ \xi^{2N}$。若每个 $\xi^i \in W^{1,p}(\mathbb{D})$ 都满足条件，则称 ξ 为 $W^{1,p}$，并记作 $\xi \in W^{1,p}(\mathbb{D}, f^*T^{1,0}X)$。

我们注意到，若用有限个坐标图 $U_\alpha \subset\subset V_\alpha$ 覆盖 X，则 $f \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$ 当且仅当对每个 α, i，都有 $f_\alpha^i := f^* z_\alpha^i \in W^{1,p}(f^{-1}(U_\alpha))$，其中 z_α^i 是 V_α 上的坐标。切丛 $T^{1,0}V_\alpha \cong V_\alpha \times \mathbb{C}^n$，且 $\xi \in W^{1,p}(\mathbb{D}, f^*T^{1,0}X)$ 当且仅当对每个 α, j，都有 $\xi_\alpha^j := \xi^* v_\alpha^j \in W^{1,p}(f^{-1}(U_\alpha))$，其中 v_α^j 是纤维 $\mathbb{C}^n$ 的坐标。

引理 3.8。以下陈述成立。

(1) 如果 $f \in W^{1,\ p}(\mathbb{D}, X)$ 是全纯的，且 $p > 2$，则 $\Psi(f) > -\infty$。*(2)* 设 ν 是 $\mathbb{D}$ 上的正拉东测度，若 ν 在 $\mathbb{D}$ 中某点处具有正原子，则 $\Psi(\nu) = -\infty$。*(3)* 若 $\nu_j \rightharpoonup \nu$ 在 $\mathbb{D}$ 上作为正拉东测度弱收敛，则 上极限 $_j\ \Psi(\nu_j) \le \underline{\Psi}(\nu)$。

证明。显然，

$$0 \le -G(z, w) \le \log \frac{4}{|z - w|^2}.$$

令 $q := p/2 > 1$ 和 $q' := q/(q-1)$。记作 $f^*\omega = |df|^2\,dA$，则有 $|df|^2 \in L^q(\mathbb{D})$。对于任意 $w \in \mathbb{D}$，由 Hölder不等式可得，

$$\int_{\mathbb{D}} -G(z,w)\, e_f(z)\, dA_z \le \|G(\cdot,w)\|_{L^{q'}} \|e_f\|_{L^q} \le C_q \|e_f\|_{L^q},$$

其中我们使用不等式

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |G(z,w)|^{q'}\, dA_z \le 2\pi \int_0^2 \left(\log \frac{4}{t^2}\right)^{q'} t\, dt < \infty.$$

对 $|df|^2(w)\, dA_w$ 积分，得到

$$0 \le -\Psi(f) \le C_q \|e_f\|_{L^q} \|e_f\|_{L^1} \le C_q' \|e_f\|_{L^q}^2 < \infty.$$

若 $\nu(\{a\}) = m > 0$，则 $\nu \otimes \nu$ 在 (a,a) 处有质量 m^2。$G(a,a) = -\infty$ 给出 $\Psi(\nu) = -\infty$。

对于最后一个结论，乘积测度 $\nu_j \otimes \nu_j$ 在 $\mathbb{D}^2$ 上弱收敛到 $\nu \otimes \nu$。由于 G 在 $\mathbb{D}^2$ 上是上半连续的，众所周知，

$$\limsup_j \int_{\overline{\mathbb{D}}^2} G\, d(\nu_j \otimes \nu_j) \le \int_{\overline{\mathbb{D}}^2} G\, d(\nu \otimes \nu).$$

这证明了 $\limsup_j \Psi(\nu_j) \le \Psi(\nu)$。 □

命题 3.9。固定 M、$L < \infty$。令 $f_j : \mathbb{D} \to X$ 为全纯映射，满足 $f_j(0) = x$，并设

$$A(f_j) \le M, \qquad \Psi(f_j) \ge -L.$$

f_j 存在一个子列（仍记为 f_j）、一个全纯映射 $f : \mathbb{D} \to X$，满足 $f(0) = x$，以及一个有限正测度 ν_∂，其支集包含于 S^1，使得：

(1) $f_j \to f$ 在 $\mathbb{D}$ 的每个紧子集上按每个 C^k 范数收敛；

(2) $f_j^*\omega \rightharpoonup f^*\omega + \nu_\partial$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上；***(3)*** $A(f) \le$ 下极限$_j\, A(f_j)$ 以及 $\Psi(f) \ge$ 上极限$_j\, \Psi(f_j) \ge -L$；***(4)*** 对于 X 上的每个光滑闭实 $(1,1)$-形式 ρ，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) f_j^*\rho \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) f^*\rho, \qquad \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2) f_j^*\rho \longrightarrow \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2) f^*\rho.$$

In particular $W(f_j) \to W(f)$ *and* $q(f_j) \to q(f)$.

证明。写作 $\nu_j := f_j^*\omega$，则 $\nu_j(\mathbb{D}) \le M$。取一个子列后，存在 $\mathbb{D}$ 上的有限正测度 ν，使得

$$\nu_j \rightharpoonup \nu, \qquad \nu(\overline{\mathbb{D}}) = \lim_j \nu_j(\overline{\mathbb{D}}) \le M. \tag{3.19}$$

根据引理3.8(3)，

$$0 \ge \Psi(\nu) \ge \limsup_j \Psi(\nu_j) \ge -L.$$

引理3.8(2) 因此得出

$$\nu(\{a\}) = 0, \qquad \forall a \in \mathbb{D}. \tag{3.20}$$

存在 $r = r(a) > 0$ 使得

$$\overline{D_{4r}(a)} \subset \mathbb{D}, \qquad \nu\big(\overline{D_{4r}(a)}\big) < e_0/2,$$

其中 e_0 是 ε正则性引理 2.2中的常数。弱收敛 $\nu_j \rightharpoonup \nu$ 对于 j充分大的 $\int_{D_{2r}(a)} f_j^*\omega < e_0/2$，由引理 2.2 可得

$$\sup_{D_r(a)} |df_j|^2 \le C_{\mathrm{reg}} r^{-2} \int_{D_{2r}(a)} f_j^*\omega \le C_{\mathrm{reg}} r^{-2} e_0. \tag{3.21}$$

由于 X 是紧的，经过对角子列，由蒙特尔定理

$$f_j \longrightarrow f \quad \text{in every } C^k \text{ norm on compact subsets of } \mathbb{D}$$

对于全纯映射 $f\colon \mathbb{D} \to X$。由于 $f_j(0) = x$，可得 $f(0) = x$。

对于每个 $\chi \in C_c(\mathbb{D})$，陈述（1）和（3.19）意味着

$$\int_{D_r} f^*\omega = \lim_j \int_{D_r} f_j^*\omega \le \liminf_j A(f_j) \le M, \qquad \int \chi \, d\nu = \lim_j \int_{\mathbb{D}} \chi f_j^*\omega = \int_{\mathbb{D}} \chi f^*\omega.$$

令 $r \uparrow 1$得到 $A(f) = \int_{\mathbb{D}} f^*\omega \le$下极限$_j\, A(f_j) \le M$。设 $\nu_\partial := \nu|_{S^1}$我们得到 $\nu = f^*\omega + \nu_\partial$，这就是陈述（2）。根据定义（3.1），$G = 0$ 在 $(S^1 \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{D} \times S^1)$。写出 $\mu = f^*\omega$ 并使用 $\nu = \mu + \nu_\partial$，我们得到

$$\begin{aligned} \Psi(\nu) &= \int_{\overline{\mathbb{D}}^2} G \, d((\mu + \nu_\partial) \otimes (\mu + \nu_\partial)) \\ &= \int_{\overline{\mathbb{D}}^2} G \, d(\mu \otimes \mu) = \Psi(f). \end{aligned}$$

因此，引理3.8(3)给出

$$\Psi(f) = \Psi(\nu) \ge \limsup_j \Psi(f_j) \ge -L, \tag{3.22}$$

这就证明了陈述（3）。

最后，固定 X 上的一个光滑闭实 (1,1)-形式 ρ。由收敛性 $f_j \to f$ 和 $\rho \le C_\rho$ ω

$$\limsup_j \left| \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)(f_j^*\rho - f^*\rho) \right| \le 2C_\rho M(1 - r^2), \qquad \forall\, r < 1.$$

为处理 $\log(1/|z|)$，我们选取 $\varepsilon > 0$。在 $\{\varepsilon \le |z| < 1\}$ 上，利用收敛性 $f_j \to f$，我们得 et

$$\limsup_j \left| \int_{\{\varepsilon \le |z| < 1\}} \log(1/|z|)(f_j^*\rho - f^*\rho) \right| \le 2C_\rho M \log(1/r) \longrightarrow 0$$

如前所述。在小球 $\{|z| < \varepsilon\}$ 上，对于某个一致的 $C > 0$，有 $|f_j^*\rho| + |f^*\rho| \le C\, dA$。因此，由控制收敛定理即可完成证明。□

现在我们证明本节的主要结果。

命题 3.10。对于每个 t、$\beta > 0$，都存在 $f_{t,\beta} \in B_x$，使得 $J_{t,\beta}(f_{t,\beta}) = j_{t,\beta}$。每个这样的极小化子都满足

$$I(f_{t,\beta}) \ge \delta A(f_{t,\beta}), \qquad I_w(f_{t,\beta}) \ge \delta W(f_{t,\beta}), \tag{3.23}$$

其中 $I(f) := \int_{\mathbb{D}} f^*\theta$，以及 $I_w(f) := \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2) f^*\theta$。我们还有

$$q(f_{t,\beta}) \ge q((f_{t,\beta})_r), \qquad Q_\sigma(f_{t,\beta}) \ge Q_\sigma((f_{t,\beta})_r) \quad (0 < r \le 1). \tag{3.24}$$

映射 $f_{t,\beta}$属于 $W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$，对每个 $2 < p < 4$ 都成立。

证明。考虑常值圆盘 $f(z) = x$，我们有 $J_{t,\beta}(f) = t$因此 $j_{t,\beta} \le t$。取一个序列 $f_j \in \mathcal{A}_x$，使得 $J_{t,\beta}(f_j) \to j_{t,\beta}$。不妨假设$J_{t,\beta}(f_j) \le t + 1$，并得到

$$A(f_j) \le t + 1, \qquad 0 \le -\beta\Psi(f_j) \le t + 1.$$

得益于　命题 3.9，经过取子列后，存在一个全纯映射 $f:\ \mathbb{D}\to X$ 满足

$$f(0)=x,\qquad A(f)\le \liminf_j A(f_j)\le t+1,$$
$$\Psi(f)\ge \limsup_j \Psi(f_j)\ge -(t+1)/\beta,\qquad q(f_j)\longrightarrow q(f).$$

特别地，$f\in\mathcal{B}_x$。现在，我们可以写成

$$\begin{aligned}J_{t,\beta}(f)&=A(f)-\beta\Psi(f)+te^{-q(f)}\\&\le \liminf_j A(f_j)+\liminf_j\bigl(-\beta\Psi(f_j)\bigr)+te^{-q(f)}\\&\le \liminf_j\bigl(A(f_j)-\beta\Psi(f_j)\bigr)+te^{-q(f)}\\&=\liminf_j J_{t,\beta}(f_j)=j_{t,\beta}.\end{aligned}$$

由推论3.4，我们得到$J_{t,\ \beta}(f)=j_{t,\ \beta}$。

接下来证明（3.24）。由推论3.4，我们可以选取 $f\in\mathcal{B}_x$ 的一个极小化子。对于$J_{t,\ \beta}$。给定 $0<r\le 1$，令 $f_r(z):=f(rz)$，并令 $\mu:=te^{-q(f)}$。显然有$J_{t,\ \beta}(f_r)\ge J_{t,\ \beta}(f)$，因此

$$t\bigl(e^{-q(f_r)}-e^{-q(f)}\bigr)\ge A(f)-A(f_r)+\beta\bigl(\Psi(f_r)-\Psi(f)\bigr).\tag{3.25}$$

由引理 3.2 和引理 3.3，右端非负，因此 $q(f)\ge q(f_r)$。此外$W(f_r)\le W(f)$由（3.6）可得。因此，

$$Q_\sigma(f)-Q_\sigma(f_r)=q(f)-q(f_r)+c\bigl(W(f)-W(f_r)\bigr)\ge 0.\tag{3.26}$$

这就证明了（3.24）。

接下来证明（3.23）。令 $\nu:=f^*\sigma=f^*\theta-\delta f^*\omega$，只需证明

$$\nu(\mathbb{D})\ge 0,\qquad \int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)\,d\nu\ge 0.$$

容易看出，$\log(r/|z|)$ 关于 $|\nu|$可积。接着，我们结合富比尼定理和（3.7）可得

$$Q_\sigma(f_r)=\frac{1}{2\pi}\int_{D_r}\int_{|z|}^{r}\frac{ds}{s}\,d\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^r\frac{\nu(D_s)}{s}\,ds.\tag{3.27}$$

由于 ν 具有有限全变差，当 $s\uparrow 1$时，$\nu(D_s)/s\to\nu(\mathbb{D})$。因此，

$$\nu(\mathbb{D})=\lim_{r\uparrow1}\frac{1}{1-r}\int_r^1\frac{\nu(D_s)}{s}\,ds=2\pi\lim_{r\uparrow1}\frac{Q_\sigma(f)-Q_\sigma(f_r)}{1-r}\ge 0.$$

同样，再次利用富比尼定理，并注意到 $w(z)=\int_{|z|}^1 2s\,ds$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} w\,d\nu&=\int_{\mathbb{D}}\left(\int_{|z|}^1 2s\,ds\right)d\nu(z)\\&=2\int_0^1 s\,\nu(D_s)\,ds\\&=4\int_0^1 r\left(\int_r^1\frac{\nu(D_s)}{s}\,ds\right)dr\\&=8\pi\int_0^1 r\bigl(Q_\sigma(f)-Q_\sigma(f_r)\bigr)\,dr\ge 0.\end{aligned}$$

这就证明了（3.23）。

最后我们证明 $f \in W^{1,\,p}(\mathbb{D},\ X)$ 对于 $2 < p < 4$。若 $\frac{1}{2} \le r < 1$，（3.18）给出

$$\int_{\mathbb{D}\setminus D_r} f^*\omega = A(f) - A(f_r) \le te^{-q(f)}\left(e^{D_M(r)} - 1\right) \le C(1-r)$$

其中常数 C 与 r无关。若 $|z| \ge \frac{1}{3}$，则 $D_{(1-|z|)/2}(z) \subset \mathbb{D} \setminus D_{(3|z|-1)/2}$。因此，对于 $|z| \ge r_0 := 1 - \frac{2e_0}{3C}$，有

$$\int_{D_{(1-|z|)/2}(z)} f^*\omega \le \int_{\mathbb{D}\setminus D_{(3|z|-1)/2}} f^*\omega \le \frac{3C}{2}(1-|z|) \le e_0$$

其中 e_0 是引理2.2中的常数，由此可得

$$|df(z)|^2 \le \frac{16C_{\mathrm{reg}}}{(1-|z|)^2}\int_{D_{(1-|z|)/2}(z)} f^*\omega \le \frac{C'}{1-|z|}.$$

对于充分大的整数 k，令

$$E_k := \{z : 2^{-k-1} < 1 - |z| \le 2^{-k}\}.$$

的导数估计和（3.18）分别给出

$$\sup_{E_k}|df| \le \sup_{E_k}\sqrt{\frac{C'}{1-|z|}} = C'^{\frac{1}{2}}2^{\frac{k+1}{2}}, \qquad \int_{E_k} f^*\omega \le \int_{\mathbb{D}\setminus D_{1-2^{-k-1}}} f^*\omega \le C2^{-k-1}.$$

对于 $2 < p < 4$，可得

$$\begin{aligned}\int_{E_k}|df|^p\,dA &\le \left(\sup_{E_k}|df|\right)^{p-2}\int_{E_k}|df|^2 dA \\ &\le C''2^{\frac{k(p-2)}{2}}2^{-k} = C2^{-k(2-\frac{p}{2})}.\end{aligned}$$

当 $p < 4$ 时，该级数可求和。这证明了 $f \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$。 □

4. 上同调类为 $W^{1,p}$ 的全纯圆盘族及其变分

设 $F(\tau, z) : D_\varepsilon \times \mathbb{D} \to X$ 是一个全纯映射，则称 $\{f_\tau := F(\tau,\cdot)\}_{\tau\in D_\varepsilon}$ 为全纯圆盘族。

微分 dF 是 $T^{*1,0}(D_\varepsilon \times \mathbb{D}) \otimes F^*T^{1,0}X$ 的全纯截面，而 $\partial_\tau F := dF(\frac{\partial}{\partial\tau})$ $\partial_z F := dF(\frac{\partial}{\partial z})$ 是 $F^*T^{1,0}X$ 的全纯截面。以下交换性非常有用。

引理 4.1. 设 h 是由 *Kähler* 形式 ω 诱导的厄米度量，则有

$$\begin{aligned}&\partial_\tau h(\partial_z F, \partial_z F) = \partial_z h(\partial_\tau F, \partial_z F), \qquad \partial_{\bar\tau} h(\partial_\tau F, \partial_z F) = \partial_{\bar z} h(\partial_\tau F, \partial_\tau F),\\ &\partial_\tau\partial_{\bar\tau} h(\partial_z F, \partial_z F) = \partial_z\partial_{\bar z} h(\partial_\tau F, \partial_\tau F).\end{aligned} \tag{4.1}$$

更一般地，设 h^ρ 是由 X 上的闭实 *(1,1)*-形式 ρ 诱导的厄米形式，则同一等式成立：

$$\partial_\tau h^\rho(\partial_z F, \partial_z F) = \partial_z h^\rho(\partial_\tau F, \partial_z F), \qquad \partial_\tau\partial_{\bar\tau} h^\rho(\partial_z F, \partial_z F) = \partial_z\partial_{\bar z} h^\rho(\partial_\tau F, \partial_\tau F). \tag{4.2}$$

证明。这些恒等式基本上由 $d\omega = 0$ 得出：在局部坐标中写作 $\omega = \frac{i}{2}(g_{i\bar j}dz^i \wedge d\bar z^j)$，然后 $\partial_k g_{i\bar j} = \partial_i g_{k\bar j}$、$\partial_{\bar k} g_{i\bar j} = \partial_{\bar j} g_{i\bar k}$ 和 $\partial_k\partial_{\bar l} g_{i\bar j} = \partial_i\partial_{\bar j} g_{k\bar l}$。

直接计算表明

$$\begin{aligned}F^*\omega = \frac{i}{2}\big(&h(\partial_z F, \partial_z F)\,dz\wedge d\bar z + h(\partial_\tau F, \partial_z F)\,d\tau\wedge d\bar z\\ &+ \overline{h(\partial_\tau F, \partial_z F)}\,dz\wedge d\bar\tau + h(\partial_\tau F, \partial_\tau F)\,d\tau\wedge d\bar\tau\big).\end{aligned}$$

由于 $d\omega = 0$，我们有 $\partial(F^*\omega) = 0$，从而得到

$$0 = \frac{i}{2}\, d\tau \wedge dz \wedge \big[(\partial_\tau h(\partial_z F, \partial_z F) - \partial_z h(\partial_\tau F, \partial_z F))\, d\bar{z} + (\partial_\tau \overline{h(\partial_\tau F, \partial_z F)} - \partial_z h(\partial_\tau F, \partial_\tau F))\, d\bar{\tau}\big].$$

于是我们推得 $\partial_\tau\partial_{\bar\tau} h(\partial_z F,\ \partial_z F) = \partial_\tau\partial_{\bar z} h(\partial_z F,\ \partial_\tau F) = \partial_z\partial_{\bar z} h(\partial_\tau F,\ \partial_\tau F)$。证明完毕。□

定义 4.2。设 $p > 2, F\colon\ D_\varepsilon \times \mathbb{D} \to X$ 是一个全纯映射，$\iota\colon\ X \to \mathbb{R}^N$ 是一个嵌入。F对应于 $D_\varepsilon \times \mathbb{D}$ 上的光滑函数 F^i、$\cdots$ F^N。如果 $F \in C^2(D_\varepsilon,\ W^{1,\ p}(\mathbb{D},\ X))$，则称其满足定义，其中 $F^i \in C^2(D_\varepsilon,\ W^{1,\ p}(\mathbb{D}))$，$i = 1$、$\cdots$ N。

由于 $p > 2$，Sobolev嵌入 $W^{1,p}(\mathbb{D}) \to C^{0,1-\frac{2}{p}}(\mathbb{D})$ 以及乘法映射 $W^{1,p}(\mathbb{D}) \times W^{1,p}(\mathbb{D}) \to W^{1,p}(\mathbb{D})$ 是连续的。对于另一个嵌入 $\iota'\colon\ X \to \mathbb{R}^{N'}$，存在一个光滑映射 $\Phi\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N'}$，使得 $\Phi \circ \iota = \iota'$。利用链式法则可以验证，$F^i \in C^2(D_\varepsilon;\ W^{1,p}(\mathbb{D}))$，$i = 1$、$\cdots$ N意味着 $(F')^j \in C^2(D_\varepsilon;\ W^{1,p}(\mathbb{D}))$，$j = 1$、$\cdots$ N'。因此，$F \in C^2(D_\varepsilon;\ W^{1,p}(\mathbb{D}, X))$ 与嵌入的选择无关。

注记 4.3。 $F^i \in C^2(D_\varepsilon,\ W^{1,\ p}(\mathbb{D}))$ 且 F^i在 $D_\varepsilon \times \mathbb{D}$上光滑，这意味着记 $\tau = x + iy$，我们有 $\partial_x F^i,\ \partial_y F^i \in C(D_\varepsilon,\ W^{1,\ p}(\mathbb{D}))$，并且

$$(|x| + |y|)^{-1} \| F^i(\tau + x + iy,\ \cdot) - F^i(\tau,\ \cdot) - (x\partial_x F^i(\tau,\ \cdot) + y\partial_y F^i(\tau,\ \cdot)) \|_{W^{1,\ p}(\mathbb{D})} \to 0, \qquad (x,\ y) \to 0$$

类似的可微性性对于 $\partial_x F^i$（以及 $\partial_y F^i$）成立：$\partial_x\partial_x F^i,\ \partial_y\partial_x F^i \in C(D_\varepsilon,\ W^{1,\ p}(\mathbb{D}))$，因此

$$(|x|+|y|)^{-1} \| \partial_x F^i(\tau+x+iy,\cdot) - \partial_x F^i(\tau,\cdot) - (x\partial_x\partial_x F^i(\tau,\cdot) + y\partial_y\partial_x F^i(\tau,\cdot)) \|_{W^{1,p}(\mathbb{D})} \to 0, \qquad (x,\ y) \to 0.$$

若 $\iota\colon\ X \to \mathbb{R}^N$ 是 (X, h) 的等距嵌入，则 F 的微分范数与 $\iota \circ F$ 的微分范数相同，因此我们有

$$|d_z F|_h^2 := h(\partial_z F, \partial_z F) = \sum_{i=1}^{N} \big(\big|\frac{\partial F^i}{\partial z}\big|^2 + \big|\frac{\partial F^i}{\partial \bar z}\big|^2\big). \tag{4.3}$$

由于 $F \in C^2(D_\varepsilon, W^{1,p}(\mathbb{D}, X))$，$\xi := \partial_\tau F(0, \cdot)$ 是 $f_0^* T^{1,0} X$ 的一个 $W^{1,p}$ 上同调类中的全纯截面。由 Sobolev嵌入 $W^{1,p}(\mathbb{D}) \to C^{0,1-\frac{2}{p}}(\mathbb{D})$，可得 ξ 连续延拓到 $\overline{\mathbb{D}}$。

4.1. **二阶变分 $\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau)|_{\tau=0}$ 的下界**。

命题 4.4. 假设

$$F : D_\varepsilon \times \mathbb{D} \to X$$

是全纯的。假设以下任一条件成立：

(1) F 全纯地延拓到 $D_\varepsilon \times D_R$，其中 $R > 1$；*(2)* $F(\tau, \cdot) \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$，其中 $p > 2$，并且

$$\tau \longmapsto F(\tau, \cdot) \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$$

位于 C^2 上 D_ε。

Let $f_\tau\colon = F(\tau,\ \cdot)$ 且 $\xi(z)\colon = \partial_\tau F(0,\ z) \in T^{1,\ f_0^{\ 0}(z)} X$为 f_0 的变分向量场，则

$$\tau \mapsto \Psi(f_\tau) := \int_{\mathbb{D}^2} G(z_1, z_2) h(\partial_{z_1} F, \partial_{z_1} F)(\tau, z_1) h(\partial_{z_2} F, \partial_{z_2} F)(\tau, z_2) dA_{z_1} dA_{z_2}$$

是一个 C^2 函数，并且

$$\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau)|_{\tau=0} \geq -2\pi A(f_0) \max_{z \in \partial\mathbb{D}} h(\xi, \xi)(z). \tag{4.4}$$

我们先从一个简单的陈述开始。

引理 4.5。 对于每个 $q > 1$，该积分

$$B(a,b) := \int_{\mathbb{D}^2} G(z_1,z_2)a(z_1)b(z_2)\,dA_{z_1}\,dA_{z_2} \tag{4.5}$$

关于 a、$b \in L^q(\mathbb{D})$ 绝对收敛，并定义了一个满足以下条件的对称双线性型

$$|B(a,b)| \le C_q\|a\|_{L^q}\|b\|_{L^q}.$$

证明。 令 $q' := q/(q-1)$。界 $0 \le -G(z_1, z_2) \le \log(4/|z_1 - z_2|^2)$ 给出

$$\sup_{z_2\in\mathbb{D}} \|G(\cdot,z_2)\|_{L^{q'}} \le C_q.$$

因此，由 Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}^2} |G(z_1,z_2)a(z_1)b(z_2)| &\le C_q\|a\|_{L^q}\|b\|_{L^1}\\ &\le C_q'\|a\|_{L^q}\|b\|_{L^q}.\end{aligned}$$

双线性显然成立，而对称性由 $G(z_1, z_2) = G(z_2, z_1)$ 得出。 □

命题 4.4 的证明。 **情况 1. 延伸至边界的全纯圆盘族**。利用 G 具有对称性，我们计算得

$$\begin{aligned}\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau) =&\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\int_{\mathbb{D}^2} G(z_1,z_2)h(\partial_{z_1}F,\partial_{z_1}F)(\tau,z_1)h(\partial_{z_2}F,\partial_{z_2}F)(\tau,z_2)\\ =&2\int_{\mathbb{D}^2} G(z_1,z_2)\partial_\tau\partial_{\bar\tau}h(\partial_{z_1}F,\partial_{z_1}F)(\tau,z_1)h(\partial_{z_2}F,\partial_{z_2}F)(\tau,z_2)\\ &+2\int_{\mathbb{D}^2} G(z_1,z_2)\partial_\tau h(\partial_{z_1}F,\partial_{z_1}F)(\tau,z_1)\partial_{\bar\tau}h(\partial_{z_2}F,\partial_{z_2}F)(\tau,z_2).\end{aligned} \tag{4.6}$$

由交换性引理 4.1 并令 $\tau = 0$ 可得

$$\begin{aligned}\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau)|_{\tau=0} =&2\int_{\mathbb{D}^2} G(z_1,z_2)\partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}h(\xi,\xi)(z_1)h(\partial_{z_2}f_0,\partial_{z_2}f_0)(z_2)\\ &+2\int_{\mathbb{D}^2} G(z_1,z_2)\partial_{z_1}h(\xi,\partial_{z_1}f_0)(z_1)\partial_{\bar z_2}h(\partial_{z_2}f_0,\xi)(z_2).\end{aligned}$$

记 $S := h(\xi,\xi)$，它是在 $\mathbb{D}$ 的邻域内定义的光滑函数，并令 $T \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ 满足 $T|_{S^1} = 0$ 和 $\partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}T = \partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}S$。固定 $z_2 \in \mathbb{D}$，利用 $\partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}G(z_1,z_2) = \pi\delta_{z_2}$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} G(z_1,z_2)\,\partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}S(z_1)\,dA_{z_1} &= \int_{\mathbb{D}} G(z_1,z_2)\partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}T(z_1)\,dA_{z_1}\\ &= \int_{\mathbb{D}} T(z_1)\partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}G(z_1,z_2)\,dA_{z_1} = \pi T(z_2),\end{aligned}$$

其中，分部积分利用了以下事实： T, G 在边界上均光滑，且$T|_{\partial\mathbb{D}} = G|_{\partial\mathbb{D}} = 0$。因此，第一项变为

$$\int_{\mathbb{D}^2} G(z_1,z_2)\partial_{z_1}\partial_{\bar z_1}h(\xi,\xi)(z_1)h(\partial_{z_2}f_0,\partial_{z_2}f_0)(z_2) = \pi\int_{\mathbb{D}} T(z_2)h(\partial_{z_2}f_0,\partial_{z_2}f_0)(z_2)\,dA_{z_2}. \tag{4.7}$$

对于第二项，写作 $g(z) := \partial_z h(\xi,\ \partial_z f_0)(z)$，它是在 $\mathbb{D}$ 的一个邻域内的光滑函数，并且

$$u(z_2) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} G(z_1,z_2)g(z_1)dA_{z_1}.$$

是光滑的 直至边界，满足 $u|_{\partial\mathbb{D}}=0$ 和 $\partial_{z_2}\partial_{\bar{z}_2}u=g$ 在 $\mathbb{D}$ 上。第二项变为 es

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}^2}G(z_1,z_2)g(z_1)\overline{g(z_2)}dA_{z_1}dA_{z_2}&=\pi\int_{\mathbb{D}}u(z_2)\overline{g(z_2)}dA_{z_2}\\&=\pi\int_{\mathbb{D}}u(z_2)\overline{\partial_{z_2}\partial_{\bar{z}_2}u(z_2)}dA_{z_2}\\&=-\pi\int_{\mathbb{D}}|\partial_{\bar{z}_2}u|^2dA_{z_2},\end{aligned}\tag{4.8}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}|\partial_{\bar{z}}u|^2dA&=-\int_{\mathbb{D}}u\bar{g}dA\\&=-\int_{\mathbb{D}}u\overline{\partial_z h(\xi,\partial_z f_0)}dA=\int_{\mathbb{D}}(\partial_{\bar{z}}u)\overline{h(\xi,\partial_z f_0)}dA\le\|\partial_{\bar{z}}u\|_{L^2}\|h(\xi,\partial_z f_0)\|_{L^2},\end{aligned}\tag{4.9}$$

whe 我们使用积分 $\int_{\mathbb{D}}(\partial_{\bar{z}}u)h(\xi,\ \partial_z f_0)dA$ 取实值这一事实。因此

$$\int_{\mathbb{D}^2}G(z_1,z_2)g(z_1)\overline{g(z_2)}dA_{z_1}dA_{z_2}\ge-\pi\int_{\mathbb{D}}|h(\xi,\partial_z f_0)|^2(z)dA_z.$$

由于 $|h(\xi,\ \partial_z f_0)|^2\le h(\xi,\ \xi)h(\partial_z f_0,\ \partial_z f_0)$ 逐点成立，我们推得

$$\begin{aligned}\partial_\tau\partial_{\bar{\tau}}\Psi(f_\tau)\Big|_{\tau=0}&\ge2\pi\int_{\mathbb{D}}\Big(h(\xi,\xi)h(\partial_z f_0,\partial_z f_0)-|h(\xi,\partial_z f_0)|^2\Big)dA-2\pi\int_{\mathbb{D}}(h(\xi,\xi)-T)h(\partial_z f_0,\partial_z f_0)dA\\&\ge-2\pi\int_{\mathbb{D}}(h(\xi,\xi)-T)h(\partial_z f_0,\partial_z f_0)dA.\end{aligned}$$

由于 $h(\xi,\ \xi)-T$ 在 $\mathbb{D}$ 上是调和的，并且 $(h(\xi,\ \xi)-T)|_{\partial\mathbb{D}}=h(\xi,\ \xi)|_{\partial\mathbb{D}}$，我们得知 w

$$\partial_\tau\partial_{\bar{\tau}}\Psi(f_\tau)\Big|_{\tau=0}\ge-2\pi A(f_0)\sup_{\partial\mathbb{D}}h(\xi,\xi).$$

证明完成。

情形 2. $W^{1,\ p}$ **全纯圆盘族。**

我们使用等距嵌入 $\iota:\ \ X\ \to\ \mathbb{R}^N,\ \ \iota\circ F$ 对应于 $F^1,\ \cdots\ F^N\ \in C^2(D_\varepsilon,\ W^{1,\ p}(\mathbb{D}))$。由等式（4.3）可得

$$\Psi(f_\tau)=\int_{\mathbb{D}^2}G(z_1,z_2)\sum_{i=1}^N\Big(|\frac{\partial F^i}{\partial z_1}|^2+|\frac{\partial F^i}{\partial\bar{z}_1}|^2\Big)(\tau,z_1)\sum_{i=1}^N\Big(|\frac{\partial F^i}{\partial z_2}|^2+|\frac{\partial F^i}{\partial\bar{z}_2}|^2\Big)(\tau,z_2)\tag{4.10}$$

$F^i\in C^2(D_\varepsilon,\ W^{1,\ p}(\mathbb{D}))$ 意味着 $\tau\mapsto\sum_{i=1}^N\Big(|\frac{\partial F^i}{\partial z}|^2+|\frac{\partial F^i}{\partial\bar{z}}|^2\Big)(\tau,\ z)$ 属于 $C^2(D_\varepsilon,\ L^p_{\frac{}{2}}(\mathbb{D}))$。特别地，这表明 $\Psi(f_\tau)$ 是一个 C^2 函数，且等式（4.6）在此情形下仍然成立：

$$\begin{aligned}\partial_\tau\partial_{\bar{\tau}}\Psi(f_\tau)=&2\int_{\mathbb{D}^2}G(z_1,z_2)\partial_\tau\partial_{\bar{\tau}}h(\partial_{z_1}F,\partial_{z_1}F)(\tau,z_1)h(\partial_{z_2}F,\partial_{z_2}F)(\tau,z_2)\\&+2\int_{\mathbb{D}^2}G(z_1,z_2)\partial_\tau h(\partial_{z_1}F,\partial_{z_1}F)(\tau,z_1)\partial_{\bar{\tau}}h(\partial_{z_2}F,\partial_{z_2}F)(\tau,z_2).\end{aligned}$$

对于 $0<r<1$，设

$$F^{(r)}(\tau,z):=F(\tau,rz),$$

其在 $D_\varepsilon\times D_{1/r}$ 上是全纯的，因此情况 1 可能适用。由于 $\partial_z F^{(r)}(\tau,\ z)=r\partial_z F(\tau,\ rz)$，我们得到 $h(\partial_z F^{(r)}\,\partial_z F^{(r)})(\tau,\ z)=r^2h(\partial_z F,\ \partial_z F)(\tau,\ rz)$。由此可知，当 τ 固定时，在 $L^q(\mathbb{D}_z)$ 中有

$$\begin{aligned}\lim_{r\uparrow1}h(\partial_z F^{(r)},\partial_z F^{(r)})(\tau,\cdot)&=h(\partial_z F,\partial_z F)(\tau,\cdot),\\\lim_{r\uparrow1}\partial_\tau h(\partial_z F^{(r)},\partial_z F^{(r)})(\tau,\cdot)&=\partial_\tau h(\partial_z F,\partial_z F)(\tau,\cdot),\end{aligned}$$

$$\lim_{r\uparrow 1}\partial_\tau\partial_{\bar\tau}h(\partial_z F^{(r)},\partial_z F^{(r)})(\tau,\cdot)=\partial_\tau\partial_{\bar\tau}h(\partial_z F,\partial_z F)(\tau,\cdot).$$

引理4.5 则意味着

$$\lim_{r\to 0}\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau^{(r)})=\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau).$$

在 $\tau=0$，情况 1. 给出

$$\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau^{(r)})\Big|_{\tau=0}\geq -2\pi A(f_0^{(r)})\sup_{z\in\partial\mathbb{D}}h(\partial_\tau F^{(r)},\partial_\tau F^{(r)})(0,z)=-2\pi A(f_0^{(r)})\sup_{z\in\partial\mathbb{D}}h(\xi,\xi)(rz)$$

在注记 4.3中已证明，$\xi\in W^{1,p}(\mathbb{D},f_0^*T_X)$ 可连续延拓至 $\bar{\mathbb{D}}$。因此得到

$$\sup_{z\in\partial\mathbb{D}}h(\xi,\xi)(rz)\longrightarrow\sup_{z\in\partial\mathbb{D}}h(\xi,\xi)(z).$$

收敛性 $A(f_0^{(r)})=\int_{D_r}f_0^*\omega\longrightarrow A(f_0)$，显然成立。令 $r\uparrow 1$，证明完成。□

注记 4.6。我们讨论（4.4）的一个等号情形。考虑族 $f_\tau:\ \mathbb{D}\to\mathbb{P}^{k},\ z\mapsto[\tau z:\ 1]$。可得 $\Psi(f_\tau)=-\frac{\pi^2}{2}|\tau|^4$，$\partial_\tau\partial_{\bar\tau}\Psi(f_\tau)=-2\pi^2|\tau|^2$，$A(f_\tau)=\pi|\tau|^2$ 以及 上确界$_{\partial\mathbb{D}}|\partial_\tau f_\tau|^2=1$。

4.2. **关于** $A(f_\tau)$ $W(f_\tau)$ $Q_\sigma(f_\tau)$ $J_{t,\beta}(f_\tau)$。给定一个上同调类为 W^1 的全纯圆盘 $f:\mathbb{D}\to X,^p$，我们考虑全纯圆盘族 $F:\ D_\varepsilon\times\mathbb{D}\to X$，满足 $F(0,\cdot)=f,\partial_\tau F|_{\tau=0}=\xi$，并计算泛函 A，W，Q_σ，$J_{t,\beta}$ 在 $\tau=0$ 处的变分。

引理 *4.7.* 对于任意光滑闭实 *(1, 1)*-形式 ρ 和全纯 $F:\ D_\varepsilon\times\mathbb{D}\to X$，满足 $F\in C^2(D_\varepsilon;W^{1,p}(\mathbb{D},X))$，函数 $A(f_\tau)$、$W(f_\tau)$、$Q_\rho(f_\tau)$ 和 $J_{t,\beta}(f_\tau)$ 在 D_ε 上是光滑的。此外，这些函数在 $\tau=0$ 处的二阶变分仅取决于 $f=F(0,\cdot)$ 和 $\xi=\partial_\tau F|_{\tau=0}$。

证明。我们证明 $Q_\rho(f_\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)f_\tau^*\rho$ 是 C^2，而关于 $A(f_\tau)$ $W(f_\tau)$ J_{t}的证明$_\beta(f_\tau)$ 类似。由线性性，我们可以将 $\rho=\omega_1-\omega_2$ 写成若干个 Kähler 形式 ω_1，ω_2的形式，并可假设 ρ是 Kähler 形式。令 $\iota_\rho:\ X\to\mathbb{R}^M$ 为 $(X,\ \rho)$ 的等距嵌入，并令 F^i 为$\iota_\rho\circ F$的分量，则

$$|d_zF|^2=h^\rho(\partial_zF,\partial_zF)=\sum_{i=1}^M|\frac{\partial F^i}{\partial z}|^2+|\frac{\partial F^i}{\partial\bar z}|^2$$

因此

$$Q_\rho(f_\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)|d_zF|^2=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)\sum_{i=1}^M\Big(|\frac{\partial F^i}{\partial z}|^2+|\frac{\partial F^i}{\partial\bar z}|^2\Big)(\tau,z)$$

$F^i\in C^2(D_\varepsilon;\ W^{1,p}(\mathbb{D}))$意味着 $\tau\longrightarrow|\frac{\partial F^i}{\partial z}|^2\pm|\frac{\partial F^i}{\partial\bar z}|^2\in C^2(D_\varepsilon;\ L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{D}))$并且 $\log|z|\in L^q(\mathbb{D})$对于任意$q>1$，我们可以推断 $Q_\rho(f_\tau)$ 在 C^2 上 D_ε，根据方程（4.2），

$$\begin{aligned}\partial_\tau\partial_{\bar\tau}Q_\rho(f_\tau)\Big|_{\tau=0}&=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)\Big(\partial_\tau\partial_{\bar\tau}h^\rho(\partial_zF,\partial_zF)\Big)(0,z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)\Big(\partial_z\partial_{\bar z}h^\rho(\partial_\tau F,\partial_\tau F)\Big)(0,z)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)\partial_z\partial_{\bar z}h^\rho(\xi,\xi)(z).\end{aligned}$$

证明完毕。

□

回顾一下

$$\sigma:=\theta-\delta\omega,\qquad q(f):=Q_\sigma(f)-cW(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)\,f^*\sigma-c\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)\,f^*\omega.$$

我们将 $q(f_\tau)$ 的一阶变分记为

$$\ell_f(\xi) := \partial_\tau q(f_\tau)|_{\tau=0}\,.$$

引理 4.8。 假设 $\xi(0)=0$。一阶变分 ℓ_f 满足

$$\ell_f(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{h^\sigma(\xi,\partial_z f)}{z}\,dA - c\int_{\mathbb{D}} \bar{z}\,h(\xi,\partial_z f)\,dA. \tag{4.11}$$

特别地， $\ell_f(\xi)$ 仅取决于 $f=F(0,\cdot)$ 和 $\xi=\partial_\tau F|_{\tau=0}$。

证明。 由于 $q(f_\tau)$ 是 C^2，等式（4.2）于是给出

$$\begin{aligned}\ell_f(\xi)=\partial_\tau q(f_\tau)|_{\tau=0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|)\partial_\tau h^\sigma(\partial_z F,\partial_z F)(0,z)\,dA_z - c\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)\partial_\tau h(\partial_z F,\partial_z F)(0,z)\,dA_z\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|)\partial_z h^\sigma(\xi,\partial_z f)(z)\,dA_z - c\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)\partial_z h(\xi,\partial_z f)(z)\,dA_z.\end{aligned}$$

假设 $\xi(0)=0$ 使得 $\log(1/|z|)h^\sigma(\xi,\partial_z f)$ 在 0 附近光滑，因此

$$\log(1/|z|)h^\sigma(\xi,\partial_z f),(1-|z|^2)h(\xi,\partial_z f)\in W_0^{1,p}(\mathbb{D}).$$

分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|)\,\partial_z h^\sigma(\xi,\partial_z f)\,dA &= -\int_{\mathbb{D}}(\partial_z\log(1/|z|))h^\sigma(\xi,\partial_z f)\,dA = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}\frac{h^\sigma(\xi,\partial_z f)}{z}\,dA,\\ \int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)\,\partial_z h(\xi,\partial_z f)\,dA &= -\int_{\mathbb{D}}(\partial_z(1-|z|^2))h(\xi,\partial_z f)\,dA = \int_{\mathbb{D}}\bar{z}\,h(\xi,\partial_z f)\,dA.\end{aligned}$$

□

5. 边界酉切向标架

5.1. 图的坐标与变分场的实现。 设 $f:\ \mathbb{D}\to X$ 是一个 W^1类的全纯圆盘，^{p}， $p>2$ 以及 ξ 是 f^*T^1的 W^1类全纯截面，^0X，^{p}。我们旨在构造一个 W^1类的全纯族 $F:\ D_\varepsilon\times\mathbb{D}\to X$，使得 $\partial_\tau F(\tau,\ \cdot)=\xi$。

我们需要 Forstnerič 在 [For07中的基本图定理，即定理 1。2]。

定理 5.1。 设 $h:\ Y\to S$ 是从复流形 Y到 *Stein* 流形 S 的全纯浸没， $D\Subset S$ 是 S 中具有 C^2 边界的强伪凸域，并且$f:\ D\to Y$ 是 h 的连续截面，且在 D 中全纯。

存在一个开集 $U\subset S$ 上的全纯向量丛 $\pi:\ E\to U$，其中该开集包含D；对于每个包含 $f(D)$ 的开集 $\Omega_0\subset Y$，存在 Y 中的 *Stein* 开集 Ω，使得 $f(D)\subset\Omega\subset\Omega_0$，以及一个双全纯映射 $\Theta:\ \Omega\to\Theta(\Omega)\subset E$，它将纤维 $\Omega_z=h^{-1}(z)\cap\Omega$ 映射到任意点 $z\in h(\Omega)\subset U$ 上方的纤维中的开凸集 $\Theta(\Omega_z)$，并且该映射是双全纯的。

我们使用 Forstnerič 定理，为给定的全纯圆盘的图构造（全局）坐标。

引理 5.2。 设 $f:\ \mathbb{D}\to X$ 连续且在 $\mathbb{D}$ 上全纯。存在 $\varepsilon>0$、一个 *Stein* 邻域 $\Omega_f\subset D_{1+\varepsilon}\times X$，其包含

$$G_f := \{(z,f(z)) : z\in\overline{\mathbb{D}}\},$$

以及一个保纤维双全纯映射

$$\Theta_f:\Omega_f\longrightarrow\Omega_f'\subset D_{1+\epsilon}\times\mathbb{C}^n.$$

证明。 将 Forstnerič 定理应用于投影 $\mathbb{C}\times X\to\mathbb{C}$ 和截面 $z\mapsto(z,\ f(z))$（定义在 $\mathbb{D}$上）。由此得到一个全纯向量丛 $E\to U$，其中 U 是 $\mathbb{D}$的一个开邻域，

并且我们可以选择 $\varepsilon > 0$，使得 $\overline{D_{1+\varepsilon}} \subset U$。在 $D_{1+\varepsilon}$ 上存在一个包含G_f 的 Stein 邻域 Ω^f，以及一个保纤全纯双射 Θ_f，使得 $\Omega_f \xrightarrow{\Theta_f} \Omega'_f := \Theta_f(\Omega f) \subset E$。

由于 $D_{1+\varepsilon}$ 是可缩的，限制丛 $E|_{D_{1+\varepsilon}}$ 在拓扑上是平凡的。根据冈–格劳特原理 [Gra58] 该丛是全纯平凡的。显然，秩 $E =$ 维数 $X = n$。证明完毕。□

引理 5.3. 设 $f : \mathbb{D} \to X$ 是全纯的，且属于上同调类 $W^{1,p}$，$p > 2$，并设$\xi \in W^{1,p}(\mathbb{D}, f^*T^{1,0}X)$ 是一个全纯截面，其中 $\xi(0) = 0$。存在 $\varepsilon > 0$ 以及一个全纯映射

$$F : D_\varepsilon \times \mathbb{D} \to X$$

使得

$$F(0,\cdot) = f, \qquad \partial_\tau F(\tau, z)|_{\tau=0} = \xi(z), \qquad F(\tau, 0) = f(0),$$

and

$$\tau \longmapsto F(\tau,\cdot) \in C^2(D_\varepsilon; W^{1,p}(\mathbb{D}, X)).$$

注 5.4. 我们将经常用到以下事实：

- $W^{1,p}(\mathbb{D}) \to C^{0,1-\frac{2}{p}}(\mathbb{D})$，以及乘法 $W^{1,p}(\mathbb{D}) \times W^{1,p}(\mathbb{D}) \to W^{1,p}(\mathbb{D})$ 是连续的，
- 设 $f^1, \cdots f^N \in W^{1,p}(\mathbb{D})$，则 $f = (f^1, \cdots f^N) : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^N$连续延拓到 $\mathbb{D}$。若 G是在 $f(\mathbb{D})$ 的某个邻域上定义的光滑映射，则 $G \circ f \in W^{1,p}(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^N)$。

证明。引理 5.2 给出一个双全纯映射

$$\Theta : \Omega \longrightarrow \Omega',$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{C} \times X$ 是图 $G_f := \{(z, f(z)) : z \in \mathbb{D}\}$ 的一个邻域，$\Omega' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$。此外，$\Theta$ 将纤维 Ω_z 双全纯地映到 Ω'_z, $\forall z \in D_{1+\varepsilon_0}$。因此我们可以写成

$$\Theta(z, x) = (z, \mathcal{G}(z, x)), \qquad \Theta^{-1}(z, v) = (z, \mathcal{K}(z, v)).$$

定义

$$a(z) := \mathcal{G}(z, f(z)), \qquad b(z) := d_x\mathcal{G}(z, x)\big|_{x=f(z)}\xi(z).$$

注意，$d_x\mathcal{G}(z, x) : T^{1,0}X \to T^{1,0}\mathbb{C}^n$ 是沿 x-方向的微分，而 $\xi(z) \in T^{1,0}_{f(z)}X$，因此 a, b 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的全纯 $\mathbb{C}^n$-值函数。由于 $\mathcal{G}$ 定义在 $\{(z, f(z)) : z \in \mathbb{D}\}$ 的某个邻域内，由 $f \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$、$\xi \in W^{1,p}(\mathbb{D}, f^*T^{1,0}X)$ 以及注 5.4 可知

$$a, b \in W^{1,p}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}^n).$$

由于$\{(z, a(z)) : z \in \overline{\mathbb{D}}\} = \Theta(G_f)$ 是 Ω' 的紧子集，且 b 在 $\mathbb{D}$ 上连续，我们可以选择 $\varepsilon > 0$ 使得

$$(z, a(z) + \tau b(z)) \in \Omega' \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}},\ \tau \in \overline{D_\varepsilon}).$$

Set

$$F(\tau, z) := \mathcal{K}(z, a(z) + \tau b(z)).$$

注意到 $d_v\mathcal{K}(z, v)|_{v=a(z)}$ 是 $d_x\mathcal{G}(z, x)|_{x=f(z)}$的逆映射，我们得到

$$F(0, z) = f(z), \qquad \partial_\tau F(0, z) = d_v\mathcal{K}(z, v)\big|_{v=a(z)} b(z) = \xi(z).$$

此外，$\xi(0) = 0$ 意味着 $b(0) = 0$，因此 $F(\tau, 0) = f(0)$。

最后，$\mathcal{K}$ 在 $\{(z, a(z) + \tau b(z)) : (\tau, z) \in D_\varepsilon \times \mathbb{D}\}$附近有定义，注记 5.4随后推出

$$\tau \longmapsto F(\tau,\cdot) \in C^2(D_\varepsilon; W^{1,p}(\mathbb{D}, X)).$$

事实上，设 $\iota\colon X \to \mathbb{R}^N$是一个嵌入，$(\iota \circ F)(z, a(z) + \tau b(z))$ 对应于 N函数$f^i(z, a(z)+\tau b(z))$，其中 f^i是在 $\{(z, a(z)+\tau b(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n : (\tau, z) \in D_\varepsilon \times \mathbb{D}\}$的邻域内定义的光滑函数。直接计算可得 $f^i \in C^\infty(D_\varepsilon; W^{1,p}(\mathbb{D}))$。因此$\tau \mapsto F(\tau, \cdot) \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$ 实际上属于 C^∞。证明完毕。□

5.2. **构造上同调类 $W^{1,p}$的边界酉切向标架。** 令 $f\colon \mathbb{D} \to X$ 是一个属于上同调类 $W^{1,p}$的全纯圆盘，其中 $p > 2$。$f^*T^{1,0}_X$的全纯标架 $e = (e_1, \ldots, e_n)$ 由全纯截面组成，并且这些截面在每一点构成一组基。显然，在向量丛同构 $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^n \to f^*T^{1,0}_X$下，$\mathbb{C}^n$的标准基（$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$）对应于一个标架 $e = (e_1, \cdots e_n)$

在每个 $z \in \mathbb{D}$ 处，z 上方纤维上的拉回度量 f^*h 为 $h_{f(z)}$。我们在 $\mathbb{C}^n$ 上得到厄米形式 $(u, v) \mapsto h_{f(z)}(e(z)u, e(z)v)$。相应的格拉姆矩阵 $G_e(z)$ 定义为

$$h_{f(z)}(e(z)u, e(z)v) = v^* G_e(z) u, \qquad (G_e)_{ij}(z) = h_{f(z)}(e_j(z), e_i(z)),$$

其中 *表示共轭转置。我们称 $e \in W^{1,p}$为 ^{p}若每个 $e_j \in W^{1,p}(\mathbb{D}, f^*T^{1,0}X)$，而若其中每个元素都属于 $W^{1,p}(\mathbb{D})$，则称 $G_e \in W^{1,p}$为 ^{p}。

定理 5.5. 设 $f\colon \mathbb{D} \to X$ 为全纯且属于上同调类 $W^{1,p}$, $p > 2$。存在 $f^*T^{1,0}_X$的全纯标架 e，使得

$$e \in W^{1,p},$$

格拉姆矩阵及其逆映射 $G_e, G_e^{-1} \in W^{1,p}$ 以及 $G_e|_{S^1} = I_n$。这样的标架称为边界酉。

证明。若 $f : \mathbb{D} \to X$ 光滑地延拓至 $\mathbb{D}$，那么所需结果可由 Wiener–Masani 的一个结果推出 [WM57]，参见 [BR03，第 2]。若 f 仅为 $W^{1,p}$，情况则相当微妙；我们给出详细证明，主要沿用 [BR03，第 6] 的论证。

步骤 1. 根据 Forstnerič 定理获得一个 $W^{1,p}$ 全纯标架。

对 $G_f = \{(z, f(z)) : z \in \mathbb{D}\}$ 使用 Forstnerič 图定理，如引理 5.3所示，我们得到同构

$$\Theta(z, x) = (z, \mathcal{G}(z, x)), \qquad \Theta^{-1}(z, v) = (z, \mathcal{K}(z, v)).$$

在某个邻域 $\Omega \subset \mathbb{C} \times X$（$G_f$的）与 $\Omega' \subset D_{1+\varepsilon} \times \mathbb{C}^n$之间。令

$$\begin{aligned} a(z) &:= \mathcal{G}(z, f(z)), \\ T(z) &:= d_v \mathcal{K}(z, v)\big|_{v=a(z)} : T_{a(z)}\mathbb{C}^n \longrightarrow T_{f(z)}X. \end{aligned}$$

$T(z)$ 对每个 z 都是同构，因此 $T(e_j)$ 构成 $f^*T^{1,0}_X$ 的标架。此外，由于 G H分别定义在邻域 $\{(z, f(z)) : z \in \mathbb{D}\}$、$\{(z, a(z)) : z \in \mathbb{D}\}$ 中，注 5.4 蕴含

$$a \in W^{1,p} \cap C^0(\overline{\mathbb{D}}), \qquad T(\mathbf{e}_j) \in W^{1,p} \cap C^0(\overline{\mathbb{D}}).$$

我们用 $G := G_T$ 表示 $T(e_j)$ 的格拉姆矩阵，则 G 连续至边界。设 $(t_1, \cdots t_n)$ 为全纯标架 T 的相应截面，则有

$$\partial_z G_{ij} := \partial_z(h(t_j, t_i)) = (\partial_z h)(t_j, t_i) + h(\partial_z t_j, t_i), \qquad \partial_{\bar z} G_{ij} := \partial_{\bar z}(h(t_j, t_i)) = (\partial_{\bar z} h)(t_j, t_i) + h(t_j, \partial_z t_i),$$

其中，我们将记号 $h_{f(z)}$ 简写为 h。每一项都含有一个 L^p 因子和两个有界因子。因此

$$G \in W^{1,p}(\mathbb{D}, \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})).$$

由于 $a \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$且 H 在 $\{(z, a(z)) : z \in \mathbb{D}\}$ 的一个邻域内有定义，因此存在常数$0 < m \le M < \infty$ 使得

$$m I_n \le G(z) \le M I_n \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

记作 $G_b := G|_{S^1}$，它在 S^1 上连续。

以下策略利用 Hardy 空间构造全纯矩阵 E，$E^{-1} \in W^{1,\,p}(\mathbb{D})$ 使得 $E^*GE = I_n$ 在 S^1上，遵循 [BR03命题 6 中的方法。1]。

步骤 2. 由 G_b诱导内积的 Hardy 空间。

我们考虑 Hardy 空间：

$$\mathcal{H} := H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n) := \left\{ u(z) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} z^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^k \end{pmatrix}, z \in \mathbb{D}, \qquad \|u\|_{\mathcal{H}}^2 := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty \right\}.$$

取 $a_k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$，我们可以写成 $u = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ 和 $u_b(e^{i\theta}) := \sum_{k\geq 0} a_k e^{ik\theta} \in L^2(S^1,$ $\mathbb{C}^n)$ 称为 u的边界值。一个有用的性质是

$$u(re^{i\theta}) \to u_b(e^{i\theta}) \qquad \text{in } L^2(S^1, \mathbb{C}^n). \tag{5.1}$$

由于 u 的每个分量在 $\mathbb{D}$上都是全纯的，这一逼近性质表明泊松公式对 $u \in \mathcal{H}$ 逐分量成立：

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} u_b(e^{i\theta})\, d\theta. \tag{5.2}$$

此外，若 w 是定义在 $\mathbb{D}$上的有界全纯函数，则 $w \in H^2(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ 和 w_b 也有界。对于每个 $u \in\mathcal{H}$，$wu \in \mathcal{H}$ 和 $(wu)_b = w_b u_b$。

在$\mathcal{H}$ 上赋予内积

$$\langle u, v\rangle_G := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_b(e^{i\theta})^* G_b(e^{i\theta}) v_b(e^{i\theta})\, d\theta.$$

容易看出

$$\langle u, v\rangle_G = \langle zu, zv\rangle_G, \qquad u, v \in \mathcal{H}.$$

由于 $mI_n \leq G_b \leq MI_n$，

$$m\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|u\|_G^2 \leq M\|u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

因此 $(\mathcal{H}\ G)$ 是一个希尔伯特空间。

子空间 $z\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{H} : u(0) = 0\}$ 显然是闭的，且余维为 n。考察它在 $(\mathcal{H}\ G)$ 中的正交补

$$\mathcal{W} := (z\mathcal{H})^{\perp_G}, \qquad \mathcal{H} = \mathcal{W} \oplus_G z\mathcal{H}.$$

于是 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W} = n$；我们可以选取 -正交归一基 $u_1, \ldots, u_n$，它属于$\mathcal{W}$。我们证明$\{z^k u_j : k \geq 0,$ $j = 1, \cdots\ n\}$ 是$\mathcal{H}$的一组完备的 -正交归一基。

设 $u \in\mathcal{H}$，则存在唯一的正交分解

$$u = (c_{0,1}u_1 + \cdots + c_{0,n}u_n) + zr_1, \qquad c_i \in \mathbb{C}, r_1 \in \mathcal{H},$$
$$\|u\|_G^2 = \|c_{0,1}u_1 + \cdots + c_{0,n}u_n\|_G^2 + \|zr_1\|_G^2.$$

通过归纳构造可得

$$u = (c_{0,1}u_1 + \cdots + c_{0,n}u_n) + \cdots + z^{k-1}(c_{k-1,1}u_1 + \cdots + c_{k-1,n}u_n) + z^k r_k,$$
$$\|u\|_G^2 = \|c_{0,1}u_1 + \cdots + c_{0,n}u_n\|_G^2 + \cdots + \|z^{k-1}(c_{k-1,1}u_1 + \cdots + c_{k-1,n}u_n)\|_G^2 + \|z^k r_k\|_G^2$$

且右侧的各项彼此正交。这种正交性使得 $z^k r_k$ a 成为 $\mathcal{H}$ 中的柯西序列。因此令 $r := \lim z^k r_k$，可得

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (c_{k,1}u_1 + \cdots + c_{k,n}u_n) + r$$

然而，$z^{k_0}\mathcal{H} = \{u = \sum_{k\geq k_0} a_k z^k \in \mathcal{H}\}$ 在$\mathcal{H}$中是闭的，因此我们看到，对于每个 k_0都有 $r \in z^{k_0}\mathcal{H}$。这证明了 $r = 0$。因此

$$\{z^k u_j : k \geq 0,\ 1 \leq j \leq n\}$$

是$\mathcal{H}$的完备 G-正交归一基。

步骤 3。构造边界酉标架。

Set

$$E(z) := (u_1(z), \ldots, u_n(z)), \qquad Q := E_b^* G_b E_b,$$

其中 $E_b := (u_{1,\,b},\ \cdots u_{n,\,b})$。$Q$ 的每个分量都属于 $L^1(S^1)$，因为 E_b的各分量属于 $L^2(S^1)$，且 G_b 在 S^1 上有界。根据定义，$Q_{ij}(e^{i\theta}) = u_{i,\,b}(e^{i\theta})^* G_b(e^{i\theta}) u_{j,\,b}(e^{i\theta})$。对于每个$k$，$\ell \geq 0$，$z^k u_i \{z^k u_i\}$ 的正交性给出

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)\theta} Q_{ij}(e^{i\theta})\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)\theta} u_{i,b}(e^{i\theta})^* G_b(e^{i\theta}) u_{j,b}(e^{i\theta})\, d\theta \\
&== \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z^k u_{i,b})(e^{i\theta})^* G_b(e^{i\theta})(z^l u_{j,b})(e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \langle z^k u_i, z^\ell u_j\rangle_G \\
&= \delta_{k\ell}\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

由于 $\ell - k$ 遍历所有整数，这些恒等式表明，Q_{ij} 和δ_{ij} 的傅里叶系数完全相同。$L^1(S^1)$中傅里叶系数的唯一性推出

$$E_b^* G_b E_b = I_n \quad \text{in } L^1(S^1).$$

结合 $G_b \geq mI_n$，我们得到每个对角元

$$1 = u_{j,b}^* G_b u_{j,b} \geq m|u_{j,b}|^2 \qquad \text{a.e. on } S^1.$$

Poisson 表示（5.2）随后给出

$$\begin{aligned}
|u_j(z)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}|u_{j,b}(e^{i\theta})|\, d\theta \\
&\leq m^{-1/2}, \qquad z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

因此，E 的每个元素都有界，并且我们得到

$$E_b^* G_b E_b = I_n \qquad \text{in } L^\infty(S^1).$$

步骤 4。证明 $E^{-1} \in \mathcal{H}$ 和 E^{-1} 有界。

由于全纯矩阵 E 的元素有界，乘以 E 会将 $\mathcal{H}$ 映射到自身，并且$E_b^* G_b E_b = I_n$ 给出

$$\|Eu\|_G^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_b(e^{i\theta})^* E_b(e^{i\theta})^* G_b(e^{i\theta}) E_b(e^{i\theta}) u_b(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_b(e^{i\theta})^* u_b(e^{i\theta})\, d\theta = \|u\|_{H^2}^2.$$

E 的值域：$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 因此是闭的。由于 $E(z^k \mathbf{e}j) = z^k u_j$，其中 $\mathbf{e}j$ 是标准基，该值域包含步骤 2 中构造的完整基，因此等于$\mathcal{H}$。

对于每个$\mathbf{e}j$，存在 $a_j \in \mathcal{H}$ 使得 $Ea_j = \mathbf{e}j$。令 $A := (a_1, \ldots, a_n)$，我们得到

$$EA = I_n \quad \text{on } \mathbb{D}.$$

因此， E 是全纯可逆的，并且 $A = E^{-1}$。

由于 E, A 中的条目属于 Hardy 空间，因此 E 中的条目是有界的。取边界值可得 $E_b A_b = I_n$ 属于 $L^2(S^1)$。将步骤 3 中 $L^\infty(S^1)$ 内的边界恒等式 $E_b^* G_b E_b = I_n$ 乘以 A_b^*, A_b 得到

$$G_b = A_b^* A_b, \qquad \text{in } L^1(S^1)$$

因此由 $G_b \le M I_n$ 在 S^1上， 对角线条目满足

$$\sum_{i=1}^{n} |A_{ij,b}|^2 = (G_b)_{jj} \le M$$

因此 $|A_{ij,b}| \le M^{1/2}$ 在 S^1上几乎处处成立。按照步骤 3 应用 Poisson 表示（5.2）可得

$$|A_{ij}(z)| \le M^{1/2} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

因此 $E^{-1} = A$ 是有界的。

到目前为止，利用 $G_b \in L^\infty(S^1, \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}))$及 $mI_n \le G \le MI_n$，我们构造了 $E \in H^2(\mathbb{D}, \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}))$，使得 $|E_{i,j}| \le m^{-\frac{1}{2}}$、 $|E_{ij}^{-1}| \le M^{\frac{1}{2}}$和 $E_b^* G_b E_b = I_n$ 在 S^1上成立。

步骤 5。利用 E， $E^{-1} \in W^{1,\,p}$证明 $G \in W^{1,\,p}$。

在 $A_+ := \{1 < |z| < 2\}$ 上，考虑 G 的反射

$$G_{\mathrm{ref}}(z) := G(1/\bar z), \qquad E_+(z) := G_{\mathrm{ref}}(z)^{-1}[E(1/\bar z)^*]^{-1}.$$

$E(1/\bar z)^*$ 及其逆映射显然是全纯的。由于 G_{ref} 在 A^+ 上光滑，我们有 $\bar\partial G_{\mathrm{ref}}^{-1} = -G_{\mathrm{ref}}^{-1}\bar\partial G_{\mathrm{ref}} G_{\mathrm{ref}}^{-1}$。此外， $G_{\mathrm{ref}} \in W^{1,\,p}(A^+)$ 给出

$$\bar\partial E_+ = -G_{\mathrm{ref}}^{-1}(\bar\partial G_{\mathrm{ref}})G_{\mathrm{ref}}^{-1}[E(1/\bar z)^*]^{-1} = -G_{\mathrm{ref}}^{-1}(\bar\partial G_{\mathrm{ref}})E_+ =: Q \in L^p(A_+).$$

恒等式 $E_b^* G_b E_b = I_n$ 给出 $G_b^{-1}(E_b^{-1})^* = E_b$。由于 G 在边界上连续，且 5.1 式的 E, E^{-1} 边界收敛因此推出

$$\begin{aligned} &E(re^{i\theta}) \longrightarrow E_b(e^{i\theta}), \\ &E_+(r^{-1}e^{i\theta}) = G(re^{i\theta})^{-1}[E^{-1}(re^{i\theta})]^* \longrightarrow G_b(e^{i\theta})^{-1}(E_b^{-1}(e^{i\theta}))^* = E_b(e^{i\theta}) \end{aligned} \tag{5.3}$$

当 $r \uparrow 1$时，在 $L^2(S^1)$ 中。

在 $A := \{1/2 < |z| < 2\}$ 上，令

$$\widetilde E(z) := \begin{cases} E(z), & |z| < 1, \\ E_+(z), & |z| > 1. \end{cases}$$

对于光滑函数 $\varphi \in C_c^\infty(A)$ 和 $3/4 < r < 1$，令

$$A_r^- := \{1/2 < |z| < r\}, \qquad A_r^+ := \{r^{-1} < |z| < 2\}.$$

由斯托克斯公式可得

$$\begin{aligned} &\int_{A_r^-} E\,\partial_{\bar z}\varphi\,dA + \int_{A_r^+} E_+\,\partial_{\bar z}\varphi\,dA \\ &\qquad = -\int_{A_r^+} Q\varphi\,dA + \frac{1}{2i}\left(\int_{S_r} E\varphi\,dz - \int_{S_{r^{-1}}} E_+\varphi\,dz\right). \end{aligned}$$

由（5.3），两个边界积分均收敛到 $\int_{S^1} E_b\varphi\,dz$，因此相互抵消。令 $r \uparrow 1$，我们得到

$$\int_A \widetilde E\,\partial_{\bar z}\varphi\,dA = -\int_{A_+} Q\varphi\,dA, \qquad \text{which means} \qquad \bar\partial\widetilde E = \mathbf{1}_{A_+} Q \quad \text{in distributions on } A.$$

¯在 $\mathbb{C}$ 上的标准内部 ∂ 估计表明，对于 $A' = \{3/4 < |z| < 3/2\} \subset\subset A$,

$$\|\widetilde{E}\|_{W^{1,p}(A')} \leq C_p \left(\|\widetilde{E}\|_{L^p(A)} + \|Q\|_{L^p(A_+)} \right) < \infty.$$

因此，我们控制了 $W^{1,\,p}$-范数在 E附近的大小， $\partial\mathbb{D}$ $E \in W^{1,\,p}(\mathbb{D})$ 显然成立，因为 E在 $\mathbb{D}$上是全纯的。由于 E^{-1} 在 $\mathbb{D}$上同样是全纯的，我们有

$$\partial_j(E^{-1}) = -E^{-1}(\partial_j E)E^{-1} \in L^p(\mathbb{D}), \qquad j = x, y,$$

因此 $E^{-1} \in W^{1,\,p}(\mathbb{D})$ 也成立。

¯显然，如果 G 具有更高的正则性，则 ∂-算子的估计将赋予 E, E^{-1}更高的正则性，但我们在此不再讨论这一问题。

我们完成证明。定义 f^*T^1的全纯标架 $e_{,\,X}{}^0$如下:

$$e := TE : \mathbb{D} \times \mathbb{C}^n \to f^*T^{1,0}_X.$$

$W^{1,\,p}$在乘法下封闭，因此 e属于 $W^{1,\,p}$上同调类。此外，根据构造， $G_e = E^*GE$和 $G_e^{-1} = E^{-1}G^{-1}(E^{-1})^*$ 属于 $W^{1,\,p}$上同调类，此外

$$G_e|_{S^1} = E_b^* G_b E_b = I_n.$$

证明至此完成。 □

6. Proof of Theorem 1.1

设 $f_{t,\beta}$ 是 $J_{t,\beta}$ 的极小化子。证明定理 1.1 的关键在于给出加权面积 $W(f_{t,\beta})$ 关于 t, β 的一致界。

设 $e_1, \cdots e_n \in W^{1,p}(\mathbb{D}, f^*T_X)$ 为全纯标架，使得格拉姆矩阵及其逆映射 $G_e, G_e^{-1} \in W^{1,p}$ 和 $G_e|_{S^1} = I_n$。对于 $b \in \mathbb{D}$，考虑

$$B_b(z) := \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

它在 $\mathbb{D}$ 附近全纯，在 S^1 上模长为一。我们将使用以下两类对角矩阵:

$$\Phi(z) := zI_n, \qquad \text{or} \qquad \Phi(z) := \operatorname{diag}(zB_b(z), z, \ldots, z).$$

全纯截面 $\xi := e\Phi$ 具有如下形式

$$(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (ze_1, \cdots, ze_n), \qquad \text{or} \qquad (\xi_1, \cdots, \xi_n) = (zB_b(z)e_1, ze_2, \cdots, ze_n)$$

那么 $\xi_j(0) = 0$ 及其格拉姆矩阵 $\Phi^*G_e\Phi =: H$ 仍具有边界值 I_n。设 f 为一个上同调类 $W^{1,\,p}$ 且 f^j, $j = 1, \cdots n$为与 ξ_j 相关、由引理5.3产生的全纯圆盘族。我们推导出$\sum_{j=1}^n J_{t,\,\beta}(f_\tau^j)$ 的二阶变分的显式表达式，它是 [DGX26，命题 34]的推广。

命题 6.1。集合

$$\begin{aligned} H := \Phi^*G_e\Phi, \qquad S := \operatorname{tr} H = \sum_j h(\xi_j, \xi_j), \qquad I := \int_{\mathbb{D}} f^*\theta, \quad I_w := \int_{\mathbb{D}} wf^*\theta, \\ d_\Phi := \deg(\det \Phi), \qquad D_\Phi := \sum_{b \in \mathbb{D},\, \det \Phi(b) = 0} (1 - |b|^2), \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中零点按重数计数。于是

$$\tau_A := \sum_j \Delta_\tau A(f_\tau^j)|_{\tau=0} = 4\pi d_\Phi - 2I,$$

$$\tau_W := \sum_j \Delta_\tau W(f_\tau^j)|_{\tau=0} = 4\pi n - 4\int_{\mathbb{D}} S\, dA,$$

$$\tau_{Q_\sigma} := \sum_j \Delta_\tau Q_\sigma(f_\tau^j)|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} \mathrm{tr}_\omega\, \sigma(f)\, ds,$$

$$\int_{\mathbb{D}} S\, dA \geq \pi(n - D_\Phi) + \frac{1}{2} I_w.$$

这里 $\Delta_\tau := 4\partial_\tau\partial_{\bar\tau}$ 且 迹$_\omega\,\sigma$ 表示 h^σ 关于 h的迹。令 $\mu := te^{-q(f)}$，则有

$$\sum_j \Delta_\tau J_{t,\beta}(f_\tau^j)|_{\tau=0} = \tau_A + \mu(c\tau_W - \tau_{Q_\sigma}) + 4\mu\sum_j |\ell_f(\xi_j)|^2 - \beta\sum_j \Delta_\tau \Psi(f_\tau^j)|_{\tau=0}. \tag{6.2}$$

证明。令 $G := G_e$, $g := \log\det G$, $h_j^\sigma := h^\sigma(\xi_j,\ \xi_j)$，我们首先证明 G，g，$S \in W^{2,\frac{p}{2}}(\mathbb{D})$ 以及$\Delta h_j^\sigma \in L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{D})$。

We c检验 ΔG，$\Delta h_j^\sigma \in L^{p/2}(\mathbb{D})$。令 G_{ij} 为格拉姆矩阵 G的元素，则有

$$G_{ij}(z) = h(f(z))(e_j, e_i).$$

在 X的局部坐标图中，h 表示为一个 Hermitian 矩阵，并令 $h_f := h\circ f$。由于 e_i，e_j 是全纯的，

$$\begin{aligned}\partial_z\partial_{\bar z} G_{ij} = {} & (\partial_z\partial_{\bar z} h_f)(e_j, e_i) + (\partial_{\bar z} h_f)(\partial_z e_j, e_i) \\ & + (\partial_z h_f)(e_j, \partial_z e_i) + h_f(\partial_z e_j, \partial_z e_i).\end{aligned} \tag{6.3}$$

由于 h 在 X 上光滑，且 f 是全纯的，与（6.3）类似的计算表明，存在一个常数 $C > 0$ 使得在 $\mathbb{D}$ 上，

$$|\partial_z h_f| \leq C|df|, \qquad |\partial_z\partial_{\bar z} h_f| \leq C|df|^2. \tag{6.4}$$

由于 e_i，e_j 连续延拓至边界，故（6.3）、（6.4）给出

$$|\Delta G| \leq C'\left(|De|^2 + |De|\,|df| + |df|^2\right).$$

由于 $|De|$，$|df| \in L^p(\mathbb{D})$，我们得到 $\Delta G \in L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{D})$。

由于 ξ_j是全纯的且属于上同调类 $W^{1,\,p}$，相同的计算表明 $\Delta h_j^\sigma \in L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{D})$.

由于 e是 S^1 上 f^*TX 和 $G = I_n$ 的全纯标架，根据 θ 的定义：$= \bar{}\mathrm{Ric}(\omega) = -i\partial\partial\log\det(\omega^n)$，我们得到

$$\Delta g\, dA = 2i\partial\bar\partial \log\det G = -2f^*\theta, \qquad g|_{S^1} = 0.$$

因此 $|\Delta g| \leq C|df|^2$ 和 $\Delta g \in L^{p/2}(\mathbb{D})$。

由于 $G - I_n$，$g \in W^{1,\,p}_{\,0}(\mathbb{D})$，且 $p/2 > 1$，椭圆算子的标准正则性理论 [GT01，定理 9.15] 得出

$$G, g \in W^{2,p/2}(\mathbb{D}).$$

由于 $\Phi \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$，可得

$$S = \mathrm{tr}(\Phi^* G\Phi) \in W^{2,p/2}(\mathbb{D}).$$

A 的二阶变分。对 $g = \log\det G$ 求导可得

$$\partial_j g = \mathrm{tr}(G^{-1}\partial_j G), \qquad j = x, y.$$

这些导数属于 $W^{1,\,p/2}(\mathbb{D})$，因此外法向导数 $\partial_\nu g$，$\partial_\nu S \in L^{p/2}(S^1)$ 在 Sobolev迹的意义下是良定义的。

On S^1，我们有 $G=\Phi\Phi^*=I_n$。因此，利用 $S:=\operatorname{tr}(\Phi^*G\Phi)=\operatorname{tr}(G\Phi\Phi^*)$，得到

$$\begin{aligned}\partial_\nu g&=\operatorname{tr}(G^{-1}\partial_\nu G)=\operatorname{tr}(\partial_\nu G),\\ \partial_\nu S&=\operatorname{tr}\left((\partial_\nu G)\Phi\Phi^*+G\partial_\nu(\Phi\Phi^*)\right)\\ &=\partial_\nu g+\partial_\nu\operatorname{tr}(\Phi\Phi^*).\end{aligned}$$

将此与分部积分结合，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}\Delta S\,dA&=\int_{S^1}\partial_\nu S\,ds\\ &=\int_{S^1}\partial_\nu\, g\,ds+\int_{S^1}\partial_\nu\operatorname{tr}(\Phi\Phi^*)\,ds\\ &=\int_{\mathbb{D}}\Delta g\,dA+\int_{\mathbb{D}}\Delta\operatorname{tr}(\Phi\Phi^*)\,dA.\end{aligned}$$

全纯 函数 Φ_{jj} 在边界上光滑，且 $|\Phi_{jj}|=1$ 在 S^1上，因此我们有

$$\int_{\mathbb{D}}\Delta|\Phi_{jj}|^2\,dA=4\pi\deg\Phi_{jj}.$$

Since $\xi_j=(e\Phi)_j$，我们有 $S=\sum_{j=1}^n|\xi_j|_h^2$。（4.2）并且 $\Delta g\,dA=-2f^*\theta$， $I=\int_{\mathbb{D}}f^*\theta$给出

$$\begin{aligned}\tau_A:=\sum_{j=1}^n 4\partial_\tau\partial_{\bar\tau}|_{\tau=0}\Big(\int_{\mathbb{D}}h(\partial_z f^j,\partial_z f^j)\,dA_z\Big)&=\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{D}}4\partial_z\partial_{\bar z}h(\xi_j,\xi_j)\,dA_z\\ &=\int_{\mathbb{D}}\Delta S\,dA\\ &=\int_{\mathbb{D}}\Delta g\,dA+\int_{\mathbb{D}}\Delta\operatorname{tr}(\Phi\Phi^*)\,dA\\ &=-2I+\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{D}}\Delta|\Phi_{jj}|^2\,dA\\ &=-2I+4\pi\sum_{j=1}^n\deg\Phi_{jj}=4\pi d_\Phi-2I.\end{aligned}$$

这里 $\det\Phi=\prod_{j=1}^n\Phi_{jj}$，因此 $d_\Phi=\sum_{j=1}^n\deg\ \Phi_{jj}$。

W的二阶变分以及 $\int_{\mathbb{D}}S\,dA$的下界。

我们需要分部积分公式

$$\int_{\mathbb{D}}w\Delta v\,dA=-4\int_{\mathbb{D}}v\,dA+2\int_{S^1}v\,ds,\qquad w(z)=1-|z|^2,\quad v\in W^{2,\frac{p}{2}}(\mathbb{D}).\tag{6.5}$$

事实上， $C^\infty(\mathbb{D})$在 $W^{2,\frac{p}{2}}(\mathbb{D})$且迹映射 $W^{1,\frac{p}{2}}(\mathbb{D})\to L^p(S^1)$是连续的，因此将（6.5）归结为 v 在边界上光滑的情形。此时可应用经典格林公式。

由于 S和 g属于 $W^{2,\frac{p}{2}}(\mathbb{D})$且它们的边界迹分别为 n和0。由交换性（4.2）和分部积分（6.5）可得

$$\begin{aligned}\tau_W:&=\sum_{j=1}^n 4\partial_\tau\partial_{\bar\tau}|_{\tau=0}\Big(\int_{\mathbb{D}}wh(\partial_z f^j,\partial_z f^j)\,dA\Big)=\int_{\mathbb{D}}w\Delta S=4\pi n-4\int_{\mathbb{D}}S\,dA,\\ I_w:&=\int_{\mathbb{D}}wf^*\theta=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}w\Delta g\,dA=2\int_{\mathbb{D}}g\,dA.\end{aligned}$$

通过对角化 H，我们得到 $S=\operatorname{tr}\ H\geq n+\log\det\ H$。$\log\det H=\log\det(\Phi^*G\Phi)=g+\log\det(\Phi^*\Phi)=g+\log\ |\det\Phi|^2$。因此得到

$$\int_{\mathbb{D}}S\,dA\geq\pi n+\int_{\mathbb{D}}g\,dA+\int_{\mathbb{D}}\log|\det\Phi|^2\,dA$$

$$= \pi n + \frac{1}{2} I_w + \int_{\mathbb{D}} \log |\det \Phi|^2 \, dA.$$

如果 $\Phi = zI_n$，那么 $\int_{\mathbb{D}} \log |\det \Phi|^2 \, dA = -n\pi$。如果 $\phi = \operatorname{diag}(zB_b(z)\ z,\ \cdots\ z)$，那么利用 $\int_{\mathbb{D}} \log |\det \Phi|^2 \, dA = -\pi(n+1-|b|^2)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \log |B_b(z)|^2 \, dA &= 4\pi \int_0^1 r \log \max\{r, |b|\} \, dr \\ &= -\pi(1-|b|^2). \end{aligned}$$

在这两种情况下，取 $D_\Phi = \sum_{b\in\mathbb{D},\ \text{行列式}\,\Phi(b)=0} (1-|b|^2)$，我们得到

$$\int_{\mathbb{D}} S \, dA \geq \pi(n - D_\Phi) + \frac{1}{2} I_w.$$

Q_σ 的二阶变分。

设 $v \in W^{1,\,p} \cap C^\infty(\mathbb{D})$，使得 $\Delta v \in L^p_2(\mathbb{D})$。我们断言，以下分部积分成立：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) \Delta v \, dA = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} v \, ds - v(0). \tag{6.6}$$

设 $\lambda_\varepsilon(z) := -\max_\varepsilon\{\log |z|,\ \log \varepsilon\}$，其中 $\max_\varepsilon$ 是标准的正则化最大函数。则 λ_ε 在 $\mathbb{D}$ 上光滑，并且 $\lambda_\varepsilon = 0$，$\partial_\nu \lambda_\varepsilon = -1$ 在 S^1 上。设 χ_r 为截断函数，它在 D_{1-2r} 上等于 1，并且在 $|z| \geq 1-r$ 时为零，$|D\chi_r| \leq \frac{C}{r}$。

$$\int_{\mathbb{D}} \chi_r \lambda_\varepsilon \Delta v \, dA = -\int_{\mathbb{D}} \chi_r D\lambda_\varepsilon \cdot Dv \, dA - \int_{\mathbb{D}} \lambda_\varepsilon D\chi_r \cdot Dv \, dA.$$

利用 $Dv \in L^p(\mathbb{D})$，当 $|z| \geq 1-2r$ 时有 $\lambda_\varepsilon |D\chi_r| \leq C$，我们看到 $\lim_{r\to 0} \left| \int_{\mathbb{D}} \lambda_\varepsilon D\chi_r \cdot Dv \, dA \right| \leq \lim_{r\to 0} C \int_{\{1-2r\leq|z|<1\}} |Dv| \, dA = 0$。因此令 $r \downarrow 0$，得到

$$\int_{\mathbb{D}} \lambda_\varepsilon \Delta v \, dA = -\int_{\mathbb{D}} D\lambda_\varepsilon \cdot Dv \, dA.$$

由于 $v \in W^{1,\,p}(\mathbb{D})$，利用 $W^{1,\,p}(\mathbb{D})$ 中 $C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ 的稠密性，我们得到

$$-\int_{\mathbb{D}} D\lambda_\varepsilon \cdot Dv \, dA = \int_{\mathbb{D}} v\Delta\lambda_\varepsilon \, dA - \int_{S^1} v\partial_\nu \lambda_\varepsilon \, ds = \int_{\mathbb{D}} v\Delta\lambda_\varepsilon \, dA + \int_{S^1} v \, ds.$$

最后，利用 v 是光滑的，且 $\Delta\lambda_\varepsilon$ 支撑在 $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ 中并弱收敛到 $\Delta\lambda = -2\pi\delta_0$，我们得到所需的公式（6.6）。

注意，$h^\sigma(\xi_j,\ \xi_j)$ 满足这些假设。结合交换性（4.2），该分部积分公式给出

$$\begin{aligned} \tau_{Q_\sigma} := \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n 4\partial_\tau \partial_{\bar\tau}|_{\tau=0} \Big(\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) h^\sigma(\partial_z f^j, \partial_z f^j) \, dA \Big) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) \Delta_z \Big(\sum_{j=1}^n h^\sigma(\xi_j, \xi_j) \Big) \, dA \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} h^\sigma(\xi_j, \xi_j) \, ds - h^\sigma(\xi_j, \xi_j)(0). \end{aligned}$$

由于 $\xi_j(0) = 0$ 且 ξ_j 是边界酉的，我们得到

$$\tau_{Q_\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \operatorname{tr}_\omega \sigma(f) \, ds.$$

、的二阶变分$J_{t,\ \beta}$。链式法则给出，对于 $\mu := te^{-q(f)}$，$\ell_f(\xi_j) := \partial_\tau q(f^j_\tau)|_{\tau=0}$，

$$\Delta_\tau (te^{-q(f^j_\tau)})\Big|_{\tau=0} = -\mu \Delta_\tau q(f^j_\tau)\Big|_{\tau=0} + 4\mu |\ell_f(\xi_j)|^2.$$

由于 $q = Q_\sigma - cW$，式（6.2）由前面的计算可得。 □

我们证明，可以选择变分场 $\xi=(\xi_1,\ \cdots\ \xi_n)$，使得 $\ell_f(\xi_j)=0$.

引理 6.2。设 $f\in W^{1,\ p}(\mathbb{D},\ X)$ 在某个 $p>2$上是全纯的，并设 $e=(e_1,\ .....,\ e_n)$ 是引理 5.5中的边界酉标架。存在一个酉矩阵 $U\in U(n)$ 以及一个全纯矩阵 Φ，其形式为

$$\Phi(z)=zI_n\quad or\quad \Phi(z)=\mathrm{diag}(zB_b(z),z,\dots,z),\qquad b\in\mathbb{D},$$

因此，记 $\xi:=(\xi_1、\ \cdots\ \xi_n):=eU\Phi$，有

$$\xi_j\in W^{1,p}(\mathbb{D},f^*T^{1,0}X),\qquad \xi_j(0)=0,\qquad \ell_f(\xi_j)=0\quad (1\le j\le n),$$

and

$$h(\xi_j,\xi_k)|_{S^1}=\delta_{jk}\quad (1\le j,k\le n).$$

证明。设 $\xi\in W^{1,\ p}(\mathbb{D},\ f^*T_X)$ 是一个在 0 处消失的全纯截面，令 $F:\ D_\varepsilon\times\mathbb{D}\to X$为引理 5.3 得到的全纯映射，则其满足 $F(0,\ \cdot)=f,\ \partial_\tau F|_{\tau=0}=\xi$。引理 4.8 随后表明

$$\ell_f(\xi):=\partial_\tau q(f_\tau)|_{\tau=0}=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{h^\sigma(\xi,\partial_z f)}{z}-c\int_D zh(\xi,\partial_z f).\tag{6.7}$$

这尤其表明，$\ell_f(\xi)$ 关于 ξ 是线性的。

Put

$$a_j:=\ell_f(ze_j),\qquad a:=(a_1,\dots,a_n),\qquad |a|:=\left(\sum_{j=1}^n|a_j|^2\right)^{1/2},$$

若 $a=0$，那么取 $U=I_n$、$e'=e$ 和 $\Phi=zI_n$ 即可。假设 $a\neq 0$。将单位向量 $|a|^{-1}(\bar a_1,\ ...,\ \bar a_n)^T$补充为酉矩阵 U 的列向量。于是

$$aU=(|a|,0,\dots,0).$$

令 $e':=eU$，则有

$$\ell_f(ze_j')=\sum_{k=1}^n U_{kj}\ell_f(ze_k)=\sum_{k=1}^n U_{kj}a_k=\begin{cases}|a|, & j=1,\\ 0, & 2\le j\le n.\end{cases}\tag{6.8}$$

我们只需选择 $B_b(z)$ 对某个 $b\in\mathbb{D}$ 使得 $\ell_f(zB_b(z)e_1')=0$。由于 B_b 在 $\mathbb{D}$的某个邻域上是全纯的，$zB_b(z)\overline{e_1'}\in W^{1,\ p}(\mathbb{D},\ f^*TX)$并且在0处为零。(6.7) 于是得到

$$\ell_f(zB_b(z)e_1')=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{D}}B_b(z)\,h^\sigma(e_1',\partial_z f)\,dA-c\int_{\mathbb{D}}|z|^2B_b(z)\,h(e_1',\partial_z f)\,dA.\tag{6.9}$$

我们定义 $\Gamma:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}$ 为

$$\Gamma(b):=\begin{cases}\ell_f(zB_be_1'), & |b|<1,\\ -b|a|, & |b|=1.\end{cases}$$

我们验证 Γ在 $\mathbb{D}$ 上连续。利用 f 和 e_1' 属于 $W^{1,\ p}$在 $\mathbb{D}$ 上，我们得到 $h^\sigma(e_1',\ \partial_z f)\ h(e_1',\ \partial_z f)\in L^p(\mathbb{D})$。显然，$|B_b(z)|\le 1$，$\forall z,\ b\in\mathbb{D}$。若序列 $b_\nu\to b\in\mathbb{D}$，则对每个 $z\in\mathbb{D}$，都有 $B_{b_\nu}(z)\to B_b(z)$。控制收敛定理证明 $\lim\Gamma(b_\nu)=\Gamma(b)$。若序列 $b_\nu\to b\in S^1$，则

$$B_{b_\nu}(z)\longrightarrow\frac{z-b}{1-\bar bz}=-b,\qquad z\in\mathbb{D}.$$

于是，由控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}\lim\Gamma(b_\nu)&=\lim\Big(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{D}}B_{b_\nu}(z)\,h^\sigma(e_1',\partial_z f)\,dA-c\int_{\mathbb{D}}|z|^2B_{b_\nu}(z)\,h(e_1',\partial_z f)\,dA\Big)\\&=(-b)\Big(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{D}}h^\sigma(e_1',\partial_z f)\,dA-c\int_{\mathbb{D}}|z|^2B_b(z)\,h(e_1',\partial_z f)\,dA\Big)=-b|a|.\end{aligned}$$

连续函数 $\frac{\Gamma}{-|a|}$ 在 S^1上是恒等映射，不动点定理证明 Γ 在 $\mathbb{D}$上有零点：存在 $b \in \mathbb{D}$ 使得

$$\Gamma(b) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} B_b(z)\, h^\sigma(e_1', \partial_z f)\, dA - c\int_{\mathbb{D}} |z|^2 B_b(z)\, h(e_1', \partial_z f)\, dA = 0.$$

Take

$$\Phi = \operatorname{diag}(zB_b, z, \dots, z),$$

$\xi := (eU\Phi)$ 正是我们所需要的。

□

我们结合命题 6.1 与命题 4.4中关于 $\Psi(f_\tau)$ 二阶变分的估计，得到 $J_{t,\beta}$ 的极小化子的加权面积的一致界。

命题 6.3。 假设 $f \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$ 是全纯的， $p > 2$，并且

$$I(f) := \int_{\mathbb{D}} f^*\theta \geq \delta A(f), \qquad I_w(f) := \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2) f^*\theta \geq \delta W(f).$$

固定 $0 < \beta \leq \delta/(8\pi n)$ 并令 $\mu := te^{-q(f)}$，设

$$S_0 := \max_X(-\operatorname{tr}_\omega \sigma)_+, \qquad C_0 := 4\pi(n+1), \qquad C_1 := 4\pi c(n+1) + S_0.$$

对于引理 $\xi = (\xi_j)$ 中得到的场 *6.2*,

$$\Delta_\tau \sum_{j=1}^n J_{t,\beta}(f_\tau^j)|_{\tau=0} \leq C_0 - (2\delta - 8\pi n\beta)A(f) + \mu(C_1 - 2c\delta W(f)) \tag{6.10}$$

$$\leq C_0 - \delta A(f) + \mu(C_1 - 2c\delta W(f)) \tag{6.11}$$

$$\leq C_0 + C_1\mu - \delta(1 + 2c\mu)W(f). \tag{6.12}$$

因此，每个全局极小值 $f_{t,\ \beta}$ 由命题 *3.10* 满足

$$W(f_{t,\beta}) \leq W_{\max} := \frac{1}{\delta}\max\{C_0, C_1/(2c)\}. \tag{6.13}$$

证明。 由于 $\ell_f(\xi_j) = 0, \quad \forall j = 1, \quad \cdots \quad n$，命题 6.1 给出

$$\Delta_\tau \sum_{j=1}^n J_{t,\beta}(f_\tau^j)|_{\tau=0} = \tau_A + \mu(c\tau_W - \tau_{Q_\sigma}) - \beta\Delta_\tau\Big(\sum_{j=1}^n \Psi(f_\tau^j)\Big)|_{\tau=0}.$$

我们有

$$\tau_A = 4\pi d_\Phi - 2I(f) \leq 4\pi(n+1) - 2I(f).$$

$\int_{\mathbb{D}} S\, dA$ 的下界给出

$$\tau_W = 4\pi n - 4\int_{\mathbb{D}} S\, dA \leq 4\pi D_\Phi - 2I_w(f) \leq 4\pi(n+1) - 2I_w(f).$$

公式 $\tau_{Q_\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} \operatorname{tr}_{\underline{\omega}} \sigma$ 给出 $-\tau_{Q_\sigma} \leq S_0$。 命题 4.4 给出估计

$$\Delta_\tau \Psi(f_\tau^j)|_{\tau=0} \geq -8\pi A(f)\max_{S^1} h(\xi_j, \xi_j) = -8\pi A(f),$$

等式利用了 ξ_j 是边界酉这一事实。因此，结合假设的两个不等式$I(f) \geq \delta A(f)$ $I_w(f) \geq \delta W(f)$，可得

$$\Delta_\tau \sum_{j=1}^n J_{t,\beta}(f_\tau^j)|_{\tau=0} \leq C_0 - (2\delta - 8\pi\beta n)A(f) + \mu(C_1 - 2c\delta W(f)).$$

这就是（6.10）。关于 β 的界等价于 $2\delta - 8\pi\beta n \geq \delta$，由此证明了（6.11）。由于$A \geq W$，这也证明了（6.12）。

设 $f_{t,\beta}$ 是命题 3.10 中得到的一个极小化子，则对每个 $2 < p < 4$，$f_{t,\beta} \in W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$，并且自动满足

$$I(f_{t,\beta}) \geq \delta A(f_{t,\beta}), \qquad I_w(f_{t,\beta}) \geq \delta W(f_{t,\beta}).$$

将引理 6.2 中得到的场记为 $\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n$。对每个 j，全纯族 $f_\tau^{(j)}$满足

$$f_0^{(j)} = f_{t,\beta}, \qquad \partial_\tau f_\tau^{(j)}\Big|_{\tau=0} = \xi_j, \qquad f_\tau^{(j)}(0) = x.$$

每个 $f_{(j)\tau}$ 都属于 $W^{1,p}(\mathbb{D}, X)$，因此由引理 3.8(1) 可知，它是 $\inf_{f\in\mathcal{B}_x} J_{t,\beta}(f)$ 的一个竞争函数。因此

$$J_{t,\beta}(f_\tau^{(j)}) \geq J_{t,\beta}(f_0^{(j)}).$$

因此 $\Delta_\tau\varphi_j(0) \geq 0$。（6.12）给出

$$0 \leq \Delta_\tau \sum_{j=1}^{n} J_{t,\beta}(f_\tau^j)|_{\tau=0} \leq C_0 + C_1\mu - \delta(1+2c\mu)W(f_{t,\beta})$$

这表明

$$W(f_{t,\beta}) \leq \frac{C_0 + C_1\mu}{\delta(1+2c\mu)} \leq \frac{1}{\delta}\max\{C_0, C_1/(2c)\},$$

并完成证明。 □

我们将选择适当的 t_j，β_j 使得 $\mu_j = t_j e^{-q(f)}$，$\beta_j \to 0$因此我们看到，只有面积泛函的二阶变分会对最优常数 $2\pi(n+1)$ 作出贡献，该常数出现在定理1.1中。

现在假设（1.1）。径向缩放首先将加权面积的一致界 $W(f)$转化为面积的一致界 $A(f)$，其中 $q \to +\infty$。然后我们选取满足 te^{-q} 和$-\beta\Psi$ 趋于零的极小化子，从而（6.10）保留其尖锐的面积系数 $4\pi(n+1)$。

命题 6.4。假设(1.1)。存在 $t_j \to \infty$、$\beta_j \downarrow 0$ 以及全局极小值 $f_j = f_{t_j,\beta_j} \in \mathcal{B}_x$，使得当 $\mu_j := t_j e^{-q(f_j)}$时，

$$\mu_j \to 0, \qquad -\beta_j\Psi(f_j) \to 0, \qquad q(f_j) \to +\infty, \qquad A(f_j) \to L, \tag{6.14}$$

其中

$$0 \leq L \leq \frac{2\pi(n+1)}{\delta}. \tag{6.15}$$

证明。我们首先固定 $\beta_* := \delta/(16\pi n)$，并取 f_{t,β_*} 的极小化子，它们由命题3.10得到。根据命题6.3，我们有 $W(f_{t,\beta_*}) \leq W_{\max}$。对于任意固定的 $f \in \mathcal{A}_x$，推论3.4 给出$J_{t,\beta_*}(f_{t,\beta_*}) \leq J_{t,\beta_*}(f)$。由于 $te^{-q(f_{t,\beta_*})} \leq J_{t,\beta_*}(f_{t,\beta_*})$，我们得到

$$\limsup_{t\to\infty} e^{-q(f_{t,\beta_*})} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{J_{t,\beta_*}(f)}{t} = e^{-q(f)}.$$

由此得到 $q(f_{t,\beta_*}) \to +\infty$ 因为根据（1.1），我们可以令 $q(f) \to \infty$。考虑径向缩放（f_{t,β_*}）$_r(z) := f_{t,\beta_*}(rz)$，并应用引理 3.2，取 $r = 1/2$，可得圆盘（f_{t,β_*}）$_{1/2} \in \mathcal{A}_x$ 以及估计式

$$A((f_{t,\beta_*})_{1/2}) \leq \frac{4}{3}W(f_{t,\beta_*}) \leq \frac{4}{3}W_{\max}, \qquad q((f_{t,\beta_*})_{1/2}) \longrightarrow +\infty \quad (t \to \infty).$$

Set

$$L := \lim_{s\to\infty} \inf\{A(f) : f \in \mathcal{A}_x,\ q(f) > s\}.$$

上述圆盘 $(f_t,\ \beta_*)$ 1/2 覆盖了 $L \le \frac{4}{3}W_{\max}$。根据 L 的定义，我们可以选择 $g_j \in \mathrm{A}_x$，使得$q(g_j) > 2j$ 且 $A(g_j) \le L + j^{-1}$。然后取 $t_j = e^j$ 并选择 $0 < \beta_j \le \beta_*$，使 $\lim_j \beta_j = 0$ 满足$-\beta_j\Psi(g_j) \le j^{-1}$；这是可能的，因为对于每个 j，$\Psi(g_j)$ 都是有限的（例如参见引理 3.8(1)）。现在，取命题 3.10 中的一个极小化子 $f_j := f_{t_j,\ \beta_j}$，并记为 $\mu_j = t_j e^{-q(f_j)}$。由推论 3.4，我们得到

$$A(f_j) + \mu_j - \beta_j\Psi(f_j) = J_{t_j,\beta_j}(f_j) \le J_{t_j,\beta_j}(g_j) \le L + 2j^{-1} + e^{-j}.$$

特别地，$\mu_j = t_j e^{-q(f_j)}$有界，因此 $q(f_j) \to +\infty$。根据引理 3.2，我们可以选取 $r_j < 1$使得 $q((f_j)^{r_j}) \ge q(f_j) - 1$。由于 $(f_j)^{r_j} \in \mathrm{A}_x$ 且 $A((f_j)^{r_j}) \le A(f_j)$，根据 L的定义，有 $\liminf_j A(f_j) \ge L$，这迫使 $A(f_j) \to L$ 且 $\mu_j \to 0$, $-\beta_j\Psi(f_j) \to 0$。

最后，命题6.3中的变分估计（6.10）给出

$$0 \le 4\pi(n+1) - (2\delta - 8\pi n\beta_j)A(f_j) + C_1\mu_j.$$

取极限得到 $2\delta L \le 4\pi(n+1)$。 □

定理 *1.1* 的证明。命题6.4产生了面积一致有界且中心位于 f_j 的全纯圆盘 x，其中

$$q(f_j) \to +\infty, \qquad A(f_j) \to L \le \frac{2\pi(n+1)}{\delta}.$$

推论 2.4 给出了一个经过 x 的有理曲线 R，其 ω-面积为 $[\omega]\cdot R := \int_R \omega \le L \le {}^{2\pi}\underline{(n+1)\,\delta}$。证明完成。□

7. 紧致 Kähler 流形的圆盘泛函、伪有效性与单有理覆盖性

在本节中，我们通过结合 Poletsky 图定理1.2 、Magnússon 的一个论证 [Pol13]以及 [Mag11, Mag12] 并使用泊松包络定理 [Ros03]来证明定理 1.2 [Ou25]。作为应用，我们给出 Ou 的单有理性定理的另一种证明。

定理 7.1 (= 定理1.2)。 设 X 是一个连通复流形，且 ρ 是一个光滑闭实 (1,1)-形式。那么对于每个 $x \in X$,

$$x \longrightarrow E(x) := \inf_{f \in \mathcal{A}(X,x)} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) f^*\rho$$

或者是 $-\infty$，或者是 ρ-拟亚纯次调和的。

证明。 我们首先证明 E 是上半连续的。其思想是，对于 $x_0 \in X$ 和 f：取一个满足 $f(0) = x_0$ 的全纯圆盘 $D_R \to X$，我们构造一个由 x_0 的邻域U 参数化的圆盘族，使得

$$F : D_s \times U \longrightarrow X, \qquad F(\cdot, x_0) = f, \qquad F(0,x) = x$$

对于某个 $1 < s < R$。

Forstnerič 图定理发挥着关键作用。存在一些 $1 < s < R$ 以及邻域 $\Omega \subset \mathbb{C}\times X$，其图为 $G = \{(z,\ f(z)):\ |z| \le s\}$，以及一个保纤维同构

$$\Theta : \Omega \longrightarrow \Omega' \subset D_R \times \mathbb{C}^n$$

我们可以写成 $\Theta(z,\ x) = (z,\ G(z,\ x))$, $\Theta^{-1}(z,\ v) = (z,\ H(z,\ v))$，那么集合 $\{(z,\ G(z,\ f(z))) :\ |z| \le s\}$ 在 Ω' 中是紧的，因此存在 $\eta > 0$ 使得

$$(z, G(z, f(z)) + b) \in \Omega'_f \qquad (|z| \le s,\ |b| \le \eta).$$

选择 $f(0)$ 的一个邻域 U，使得 $(0,\ x)\ \in\Omega$ 且 $|G(0,\ x)\ -G(0,\ f(0))|<\eta$若 $x\in U$。然后定义

$$F(z,x)=H\big(z,G(z,f(z))+G(0,x)-G(0,f(0))\big),$$

我们得到 $F(z,\ f(0))\ =H(z,\ G(z,\ f(z)))\ =f(z)$ 和 $F(0,\ x)\ =H(0,\ G(0,\ x))\ =x.$

利用 $F(\cdot\ x)\ \to F(\cdot\ x_0)$ 在 $C^1(\overline{\mathbb{D}})$中的 $x\to x_0$，于是我们得到对于 $x_0\in U$，

$$\left|\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)F^*(\cdot,x)\rho-\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)F(\cdot,x_0)^*\rho\right|\longrightarrow 0,\qquad x\to x_0.$$

由于 $f=F(\cdot\ x_0)$ 是任意的，我们得到 E是上半连续的。

我们证明 E 的次平均值不等式。关键思路是使用 Poisson 包络 [Pol91、Pol93、Ros03] 的 Poletsky–Rosay 定理。设 $U\subset X$ 是以 x_0 为中心的一个小球，且$dd^c\psi=\rho$ 对应某个光滑势函数 ψ。设 $h:\ \ D_r\ ,\to U$ 是一个以 $r>1$为中心的全纯圆盘。我们需要证明

$$E(x_0)+\psi(x_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}(E+\psi)(h(e^{i\theta}))\,d\theta.\tag{7.1}$$

我们可以假设 $E(x_0)\ >-\infty$，固定 $\varepsilon>0$ 以及连续函数 $v:\ S^1\to\mathbb{R}\ ,$ 使得 $v\ge E+\psi$在 S^1上成立。对于每个 $t_0\in S^1\ ,$ 选取一个圆盘 $f_0:\ D_R\to X\ ,$ 使得 $f_0(0)\ =h(t_0),$ 且 $Q_\rho(f_0)\ +\psi(h(t_0))\ <v(t_0)\ +\varepsilon/2,$ 并像之前一样构造一个族 $F:\ D_s\times U_{t_0}\to X,\ s>1$ 。对于以 t_0为中心的开集 $B_0\subset\subset D_r,$ 我们定义 $F_0:\ D_s\times B_0\to X,\ (z,\ t)\ \mapsto F(z,\ h(t))$。由连续性可知，适当缩小 B_0后，

$$Q_\rho(F_0(\cdot,t))+\psi(h(t))\le v(t)+\varepsilon,\quad t\in S^1\cap\overline{B_0}.$$

我们可以选取有限个这样的全纯映射 $F_j:\ D_s\times B_j\ \to\ X,\ s\ >\ 1\ ,$ 使得$B_j\subset\subset D_r$ 两两不相交，$J_j\subset S^1\cap B_j$ 是紧弧，并且

$$\begin{aligned}&F_j(0,t)=h(t),\qquad Q_\rho(F_j(\cdot,t))+\psi(h(t))\le v(t)+\varepsilon\quad\text{if }\ t\in J_j,\\&\frac{1}{2\pi}\int_{S^1\setminus\cup_jJ_j}(|v|+|\psi\circ h|)(e^{i\theta})\,d\theta<\varepsilon.\end{aligned}\tag{7.2}$$

然而，我们无法在这些圆盘上取 ρ 的单个势函数，因为它们可能不在小球 U 中。为克服这一困难，我们在 $\mathbb{C}^2\times X$ 上考虑这些圆盘的图

$$\begin{aligned}&K_0:=\{(0,t,h(t)):t\in\overline{\mathbb{D}}\},\\&K_j:=\{(z,t,F_j(z,t)):t\in J_j,\ z\in\overline{\mathbb{D}}\},\qquad K:=\bigcup_{j=0}^m K_j.\end{aligned}$$

令 $\pi:\ \mathbb{C}^2\times X\to X$ 为投影。利用下文证明的引理 7.2 ，存在一个连通的 Stein 邻域 $V\supset K$ ，使得 $\pi^*\rho$ 在 V上有势函数，即

$$dd^c\Psi=\pi^*\rho.\tag{7.3}$$

在 V 上定义

$$\widehat{E}(y):=\inf_{g\in\mathcal{A}(V,y)}Q_{\pi^*\rho}(g):=\inf_{g\in\mathcal{A}(V,y)}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)g^*(\pi^*\rho).$$

显然，

$$E\circ\pi\le\widehat{E}\le 0.\tag{7.4}$$

格林公式给出，对每个 $g\in\mathcal{A}(V,\ y)$,

$$Q_{\pi^*\rho}(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\Psi\circ g(e^{i\theta})\,d\theta-\Psi(y).$$

因此 $\widehat{E}+\Psi=\inf_{g\in\mathcal{A}(V,y)}\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\Psi\circ g(e^{i\theta})d\theta$，它恰好是函数 Ψ 的 Poisson 包络。由于 V 连通，Poletsky–Rosay 定理 [Ros03] 表明它是拟亚纯次调和的，或恒等于$-\infty$。对于 $\widehat{h}(t):=(0,t,h(t))$，不等式 (7.4) 和 $E(h(0))>-\infty$ 确保 $(\widehat{E}+\Psi)(\widehat{h}(0))>-\infty$，因此 $E+\Psi$ 是拟亚纯次调和的。此外，

$$dd^c\big(\psi\circ h-\Psi\circ\widehat{h}\big)=h^*\rho-\widehat{h}^*\pi^*\rho=0.$$

由于 $h(\mathbb{D})\subset V$，我们得到 $E\circ h+\psi\circ h$ 在 $\mathbb{D}$ 的某个邻域内是次调和的。

对于 $t\in J_j$，全纯圆盘 $F_j(\cdot,t):D_s\to X$ 位于 V 中，并以 $\widehat{(0,t,F_j(0,t))}$ 为中心 $=(0,t,h(t))=h(t)$。因此，根据 E 的定义，我们得到

$$\widehat{E}(\widehat{h}(t))\le\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)\widehat{h}_j^*(\pi^*\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\log(1/|z|)(F_j(\cdot,t))^*\rho=Q_\rho(F_j(\cdot,t)),\quad t\in J_j.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$关于 $E\circ h+\psi\circ h$ 以及 (7.4)、(7.2) 的次平均值不等式现在给出

$$\begin{aligned}E(h(0))+\psi(h(0))&\le\widehat{E}(\widehat{h}(0))+\psi(h(0))\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}(\widehat{E}\circ\widehat{h}+\psi\circ h)(e^{i\theta})\,d\theta\\&\le\sum_j\frac{1}{2\pi}\int_{J_j}(v+\varepsilon)(e^{i\theta})\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{S^1\setminus\cup_jJ_j}\psi\circ h\,d\theta\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}v\,d\theta+2\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 和连续函数 $v\ge(E+\psi)|_{S^1}$ 是任意的，(7.1) 得证。因此我们得到，E 是 ρ-拟亚纯次调和的，或恒等于 $-\infty$。□

我们通过证明下面的陈述来完成（7.3）的证明。

引理 7.2。设 $r>1$ 和 $h:\ D_r\to X$ 为一个全纯圆盘。设 $J_1,\dots,J_m\subset S^1$ 为两两不相交的紧弧，且 $B_j\subset\subset D_r$ 为 J_j的两两不相交开邻域。假设$s>1$，$F_j:\ D_s\times B_j\to X$ 全纯，且 $F_j(0,t)=h(t)$ 对 $t\in B_j$成立。在 $\mathbb{C}^2\times X$中，令

$$K_0:=\{(0,t,h(t)):t\in\overline{\mathbb{D}}\},$$

$$K_j:=\{(z,t,F_j(z,t)):z\in\overline{\mathbb{D}},\ t\in J_j\},\qquad K:=\bigcup_{j=0}^m K_j.$$

对于 $\mathbb{C}^2\times X$上的任意光滑闭实$(1,1)$-形式 α，存在一个连通 *Stein* 邻域$V\supset K$ 以及 $\Psi\in C^\infty(V,\mathbb{R})$，使得在 V上，

$$dd^c\Psi=\alpha.$$

证明。我们来说明证明的思路。$J:=\cup J_j\ne S^1$ 保证 $L:=(\{0\}\times\mathbb{D})\cup(\mathbb{D}\times J)$是多项式凸的，因此具有 Stein 邻域基。通过粘合 h、F_1、$\cdots$ F_m 得到的连续映射 $G:\ L\to X$，按照 [Pol13, Theorem 3.1], 的意义是局部全纯可逼近的，因此 K（即 G的图）在 $\mathbb{C}^2\times X$中具有 Stein 邻域基。容易看出，K 有一个可缩邻域，因此在此邻域上 $\rho=d\eta$。最后，取 K 的一个更小的 Stein 邻域，使用标准分解 $\eta=\eta^{1,0}+\eta^{0,1}$ 并求解 $\eta^{0,1}=\bar\partial a$，$\eta^{1,0}=\partial\bar a$。于是 $dd^c(\mathrm{Im}(a))=\partial\eta^{0,1}+\bar\partial\eta^{1,0}=d\eta=\rho$。

我们给出详细说明。令 $J:=\bigcup_j J_j$ 且

$$L:=(\{0\}\times\overline{\mathbb{D}})\cup(\overline{\mathbb{D}}\times J)\subset\mathbb{C}^2.$$

回顾一下， L 的多项式包是

$$\widehat{L} := \left\{ (z_0, t_0) \in \mathbb{C}^2 : |Q(z_0, t_0)| \leq \max_{(z,t)\in L} |Q(z,t)| \text{ for every } Q \in \mathbb{C}[z,t] \right\}.$$

我们证明 L 是多项式凸的，即 $L = L$。固定 $(z_0,\ t_0) \notin L$。若 $|z_0| > 1$ 或 $|t_0| > 1$，则坐标 z 或 t 分别给出所需的分离。我们可以假设 $|z_0| \leq 1$ 且 $|t_0| \leq 1$。由于 $(z_0,\ t_0) \notin L$，这意味着 $z_0 \neq 0$ 且 $t_0 \notin J$。若 $|t_0| < 1$，任取 $a \in S^1 \setminus J$；若 $|t_0| = 1$，则取 $a = t_0$。对于 $0 < \lambda < 1$，我们考虑

$$q_\lambda(t) = \frac{1 + \lambda \bar{a} t}{1 - \lambda \bar{a} t}.$$

Then

$$\operatorname{Re} q_\lambda(t) = \frac{1 - \lambda^2 |t|^2}{|1 - \lambda \bar{a} t|^2}.$$

由于 $a \notin J$ 且 J 是紧的，因此

$$\max_{t\in J} \operatorname{Re} q_\lambda(t) \longrightarrow 0 \qquad \text{as } \lambda \uparrow 1.$$

另一方面，若 $|t_0| < 1$，则

$$\operatorname{Re} q_\lambda(t_0) \longrightarrow \frac{1 - |t_0|^2}{|1 - \bar{a} t_0|^2} > 0, \qquad \text{as } \lambda \uparrow 1$$

若 $t_0 = a \in S^1$，则

$$q_\lambda(t_0) = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \longrightarrow +\infty \qquad \text{as } \lambda \uparrow 1.$$

因此，我们可以固定 $\lambda < 1$ 充分接近 1，使得

$$c := \operatorname{Re} q_\lambda(t_0) > b := \max_{t\in J} \operatorname{Re} q_\lambda(t).$$

选取一个整数 $N \geq 1$ 使得 $|z_0| e^{N(c-b)} > 1$，并令

$$H(z,t) = z\, e^{N q_\lambda(t)}.$$

函数 H 在 $\{0\} \times \mathbb{D}$ 上消失，因此

$$|H(z_0, t_0)| = |z_0| e^{Nc} > e^{Nb} = \max_L |H|.$$

函数 $t \mapsto e^{N q_\lambda(t)}$ 在 $D_{1/\lambda}$ 上是全纯的。因此，其泰勒多项式 P_k 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛。于是，当 k 充分大时，我们仍有

$$|z_0 P_k(t_0)| > \max_L |z P_k|.$$

这就证明了 $\widehat{L} = L$。我们指出， $J \neq S^1$ 是必要的，否则多项式包显然是 $\mathbb{D}^2$。

例如，根据 [Hor90，引理 2.7。4]， L 具有由多项式多面体组成的邻域基。特别地， L 具有由开 Stein 邻域组成的基。定义 $G\colon\ L \to X$ 为

$$G(0,t) := h(t), \qquad G(z,t) := F_j(z,t) \quad (t \in J_j).$$

恒等式 $F_j(0,t) = h(t)$ 使 G 定义良好且连续。 $K \subset \mathbb{C}^2 \times X$ 是其图。我们的假设 $F_j(0,t) = h(t)$ 对 $t \in B_j$ 成立，这意味着在点 $(z_0, t_0) \in \mathbb{D} \times J_j$ 附近，映射 G 全纯地延拓到 $(z,t) \mapsto F_j(z,t)$。 L 的其余点满足 $(0, t_0) \in \{0\} \times (\mathbb{D} \setminus J)$， G 延拓到 $(z,t) \mapsto h(t)$。因此， G 是局部全纯的，特别是局部全纯地

可逼近。Poletsky 图定理 [Pol13，定理 3。1] 因此给出了 K 在 $\mathbb{C}^2 \times X$中的开 Stein邻域基。

选择 $\chi_j \in C_c^\infty(B_j,\ [0,1])$，使得 $\chi_j = 1$ 靠近 J_j。我们定义

$$\widetilde{G}(z,t) := \begin{cases} F_j(\chi_j(t)z,t), & t \in B_j, \\ h(t), & t \notin \bigcup_j B_j \end{cases} \qquad (z,t) \in D_s \times D_r,$$

其中一个在 L 上与 G一致的光滑映射。其图

$$\Gamma := \{(z,t,\widetilde{G}(z,t)) : (z,t) \in D_s \times D_r\}$$

是 $D_s \times D_r \times X$ 的光滑嵌入子流形，包含 K。图 Γ 与 $D_r \times D_s$微分同胚，而后者是可缩的。 Γ 具有一个管状邻域 $\Omega \subset D_s \times D_r \times X$，使得 Γ是 Ω 的强形变收缩（参见例如 [Lee18，定理 5。25]）。因此 Ω是可缩的。由于 $d\alpha = 0$，Poincare引理表明，存在一个光滑实 1-形式 η 定义在 Ω 上，使得

$$d\eta = \alpha.$$

最后，我们选择 V，它是 K 的 Stein 邻域，使得 $V \subset\Omega$。由于 K 是连通的，如果V不连通，我们可以直接取包含 K 的连通分量。将$\eta = \eta^{1,\ 0} + \eta^{0,\ 1}$在 V 上分解。(0，2)-部分 $d\eta = \alpha$ 消失，因此得到

$$\bar{\partial}\eta^{0,1} = 0.$$

V是 Stein，因此存在 $a \in C^\infty(V,\ \mathbb{C})$，使得 $\bar{\partial}a = \eta^{0,\ 1}$。由于 η 是实数，$\partial\bar{a} = \eta^{1,\ 0}$。因此，对于$\Psi := \operatorname{Im} a$,

$$\begin{aligned} dd^c\Psi &= \partial\bar{\partial}(a - \bar{a}) \\ &= \partial\eta^{0,1} + \bar{\partial}\eta^{1,0} = d\eta = \alpha. \end{aligned}$$

□

定理 7.3。 [Ou25，定理 1。1] 紧致 *Kähler*流形 X 是单有理的，当且仅当K_X 不是伪有效的。

证明。 假设 K_X 不是伪有效的。设 ω 为一个 Kähler度量，且 θ =Ric(ω) 满足$[-\theta] = 2\pi c_1(K_X)$。存在 $t > 0$ 使得 $[-\theta + 2\pi t\omega] = 2\pi[K_X + t\omega]$ 不是伪有效的，定理 7.1 推出，对每个 $x \in X$,

$$\sup_{f \in \mathcal{A}(X,x)} Q_{\theta - 2\pi t\omega}(f) = +\infty.$$

对于 $\delta < 2\pi t$ 和 $c = (2\pi t - \delta)/(4\pi)$。由于 2 log(1/|$z$|) $\geq 1 - |z|^2$，我们有

$$\begin{aligned} Q_{\theta-\delta\omega}(f) - cW(f) &= Q_{\theta-2\pi t\omega}(f) + c\big(4\pi Q_\omega(f) - W(f)\big) \\ &\geq Q_{\theta-2\pi t\omega}(f). \end{aligned}$$

定理 1.1 通过每个 x 构造一条具有次数界的有理曲线，因此 X 是单有理的。逆向蕴含是标准结论；参见 [Ou25定理 1 的证明的第一段。1] .

□

8. 具有非 nef 典范丛的紧致 Kähler 流形上的有理曲线

我们从一个简单的引理开始。

引理 8.1。 固定一个 *Kähler* 形式 ω_0、一个常数 $M < \infty$，以及 X上的光滑闭实二形式 α。则集合

$$\left\{ \int_C \alpha : C \subset X \text{ is an irreducible analytic curve with } \int_C \omega_0 \leq M \right\}$$

是有限的。

证明。 由于 X 是一个紧致流形，自然映射

$$H^2(X,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\longrightarrow H^2(X,\mathbb{R})$$

是一个同构。选取上同调类 $c_1,\dots,c_N\in H^2(X,\mathbb{Z})$，使其像构成$H^2(X,\mathbb{R})$的一个实基。根据德拉姆同构 $H^2_{\mathrm{dR}}(X)\simeq H^2(X,\mathbb{R})$，我们可以选取一个光滑闭实二形式 η_i，代表每个 c_i的像。于是得到

$$\alpha=\sum_{i=1}^{N}a_i\eta_i+d\beta$$

其中 a_i 为实常数， β为一个光滑实1-形式。

对于正规化 $\nu:\ \tilde{C}\to C\subset X$，我们有 $[\nu^*\eta_i]$ 属于自然映射$H^2(\tilde{C},\mathbb{Z})\to H^2(\tilde{C},\mathbb{R})$的像。因此

$$m_i(C):=\int_{\tilde{C}}\nu^*\eta_i\in\mathbb{Z},\qquad |m_i(C)|\le M_i\int_C\omega_0\le M_iM.$$

这个不等式利用了这样一个事实： $\eta^{1,1}_i$，即 η_i的(1,1)部分，在 X 上被 $M_i\omega_0$ 控制，其中某个 $M_i>0$。因此，整数向量$(m_1(C)\dots,m_N(C))$只有有限种可能取值。根据斯托克斯定理，

$$\int_C\alpha=\sum_{i=1}^{N}a_im_i(C),$$

因此，证明得以完成。 □

定理 8.2 (= 定理 1.5)。 设 $Y\subset X$ 是一个维数为 $d\ge1$ 的不可约子簇，且 β_1，……， β_{d-1} 是 (1, 1)-数值有效上同调类，定义 X为

$$L_Y(\gamma):=\int_Y\gamma\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{d-1},\qquad \gamma\in H^{1,1}(X,\mathbb{R}).$$

若 $L_Y(K_X)<0$，则对于每个数值有效(1，1)-上同调类 α 以及每个 $x\in Y$，存在一条经过 x的有理曲线 $R\subset X$，使得

$$\alpha\cdot R\le(n+1)\,\frac{L_Y(\alpha)}{-L_Y(K_X)}.\tag{8.1}$$

证明。 </style}设 $\nu:\ \tilde{Y}\to Y$是 Y的射影消解，则 $\tilde{Y}$是 Kähler 的。固定 $x\in Y$，选取$\tilde{x}\in\nu^{-1}(x)$，并令 ω 为 $\tilde{X}$上的任意 Kähler 形式。设

$$A_Y:=L_Y([\omega]),\qquad k_Y:=-L_Y(K_X),\qquad \theta:=\mathrm{Ric}(\omega).$$

由假设 $k_Y>0$，我们有 $A_Y>0$：当 C充分大时，上同调类 $[K_X]+C[\omega]$ 是 Kähler 的，因此 $0\le-k_Y+CA_Y$。设 $s:=2\pi k_Y/A_Y$。对于 $0<\delta<s$，设

$$c:=\frac{s-\delta}{4\pi}>0,\qquad \varepsilon_0:=\delta+2\pi c=\frac{s+\delta}{2}<s.$$

由于 $[-\theta]=2\pi c_1(K_X)$，我们有

$$\int_{\tilde{Y}}[\nu^*(-\theta+\varepsilon_0\omega)]\wedge\nu^*(\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{d-1})=\int_Y[-\theta+\varepsilon_0\omega]\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_{d-1}=-2\pi k_Y+\varepsilon_0A_Y<0.$$

因此， $[\nu^*(-\theta+\varepsilon_0\omega)]$ 在 Y上不是伪有效的。根据定理7.1，存在全纯圆盘$g_j\in\mathcal{A}(Y,\ \tilde{x})$，满足$Q_{\nu^*(-\theta+\varepsilon_0\omega)}(g_j)\to-\infty$。对于 $f_j:=\nu\circ g_j$，我们有 $f_j\in\mathcal{A}(X,\ x)$，并且

$$Q_{\theta-\varepsilon_0\omega}(f_j)=-Q_{\nu^*(-\theta+\varepsilon_0\omega)}(g_j)\longrightarrow+\infty.$$

不等式 $2\log(1/|z|) \geq 1-|z|^2$ 给出 $2\pi Q_\omega \geq W$。因此

$$Q_{\theta-\delta\omega}(f) - cW(f) = Q_{\theta-\varepsilon_0\omega}(f) + c\big(2\pi Q_\omega(f) - W(f)\big) \geq Q_{\theta-\varepsilon_0\omega}(f).$$

因此，(1.1) 得以满足，定理 1.1 给出一条经过 R_δ 的有理曲线 x，使得 $\int_{R_\delta}\omega \leq 2\pi(n+1)/\delta$。取满足 $\delta_j \geq s/2$ 的 $\delta_j \uparrow s$。曲线 R_{δ_j} 的 ω 面积一致有界，因此根据引理 8.1，我们可以取一个子列，使得 $\int_{R_{\delta_j}}\omega$ 为常数。此常数不超过 $2\pi(n+1)/s = (n+1)A_Y/k_Y$。这证明了 $\alpha = [\omega]$ 的 (8.1)。

最后，我们处理数值有效类 α。对于 $\varepsilon > 0$，令 ω_ε 为 $\alpha + \varepsilon[\omega_0]$ 中的一个 Kähler 形式。存在一条经过 x 的有理曲线 R_ε，使得

$$\alpha\cdot R_\varepsilon + \varepsilon\int_{R_\varepsilon}\omega_0 \leq M + \varepsilon V, \qquad M := \frac{n+1}{k_Y}L_Y(\alpha), \qquad V := \frac{n+1}{k_Y}L_Y([\omega_0]).$$

如果没有经过 x 的有理曲线满足 $\alpha\cdot R \leq M$，那么

$$\int_{R_\varepsilon}\omega_0 < V, \qquad 0 < \alpha\cdot R_\varepsilon - M \leq \varepsilon V.$$

对于序列 $\varepsilon\downarrow 0$ 这与引理 8.1矛盾，因为 $\alpha\cdot R_\varepsilon$ 只能取有限多个值。证明完毕。 □

定理 8.2 结合 Demailly–Păun 对数值有效类的刻画 [DP04], 定理 8.2 给出了 Miyaoka–Mori 判据的 Kähler 版本：若 K_X 不是数值有效的，则存在一个解析子簇 Y 可见证这种非丰性：每个 Y 点都经过一条具有最优次数界的有理曲线。

若 K_X 不是数值有效的，则存在最小的 $\tau > 0$，使得伴随类 $\alpha = [K_X + \tau\omega]$ 数值有效。我们可以构造经过零点轨迹 Null(α)中每一点的 α-平凡有理曲线，其次数界为 $n+1$。

推论 8.3 (=推论 1.6)。 设 K_X 不是数值有效的。取一个 *Kähler* 形式 ω 并令

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : c_1(K_X) + t[\omega] \ \textit{is nef}\}, \qquad \alpha := c_1(K_X) + \tau[\omega].$$

于是零空间(α) 是 X 的一个非空解析子集，并且每个点 $x \in$ 零空间(α) 都位于一条满足下列条件的有理曲线 $R \subset X$ 上

$$\alpha\cdot R = 0, \qquad 0 < -K_X\cdot R = \tau\int_R\omega \leq n+1.$$

证明。 由于 K_X 不是数值有效的，我们有 $\tau > 0$。根据数值有效锥的闭性，上同调类 α 是数值有效的；根据 τ 的定义以及凯勒锥的开性，它不是凯勒类。根据 Demailly–Păun 的凯勒锥刻画 [DP04，主定理 0.1]: 若一个数值有效类在每个正维不可约解析子簇上的最高次自交数均为正，则它是凯勒类。因此 零空间(α) 非空。根据 [CT15定理 1.1]，它是解析的。

取 $x \in$ 零空间(α)。根据定义，存在一个经过 x 的不可约解析子簇 Z，其维数为 $d \geq 1$，且满足 $\int_Z\alpha^d = 0$。令 $j < d$ 为满足 $\int_Z\alpha^j\wedge[\omega]^{d-j} > 0$ 的最大整数；这样的 j 存在，因为 $\int_Z\omega^d > 0$。设

$$L_Z(\gamma) := \int_Z\gamma\wedge\alpha^j\wedge\omega^{d-1-j},$$

我们得到

$$L_Z(\alpha) = 0, \qquad L_Z([\omega]) > 0, \qquad -L_Z(c_1(K_X)) = \tau L_Z([\omega]) > 0.$$

应用定理 8.2 于凯勒类 $\alpha+\varepsilon[\omega]$ 可得一条有理曲线 R_ε 经过 x，使得

$$\alpha\cdot R_\varepsilon + \varepsilon\int_{R_\varepsilon}\omega \leq \frac{(n+1)\varepsilon}{\tau}.$$

由于 α是数值有效的， ω-面积 $\int_{R_\varepsilon}\omega$被 $(n+1)/\tau$和 $\alpha\cdot R_\varepsilon\to 0$所界定，因为 $\varepsilon\downarrow 0$。根据引理 8.1，这些次数只能取有限多个值。因此，其中一条曲线，设为 R，满足 $\alpha\cdot R=0$，因此

$$0<-K_X\cdot R=\tau\int_R\omega\leq n+1.$$

□

附录 A. 紧致性定理的证明

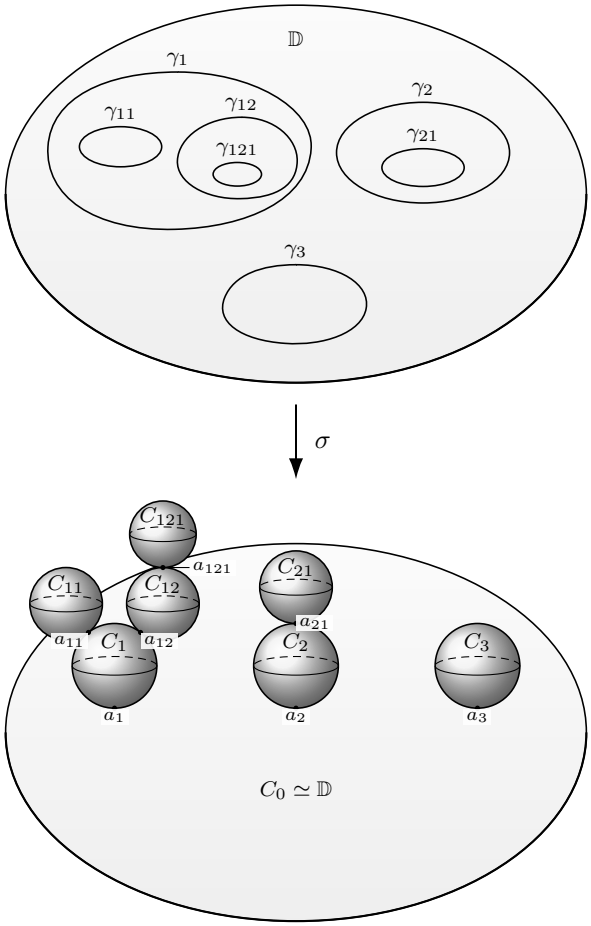
在本 附录中，我们证明命题 2.3。我们在 [IS0 中引入若干必要的概念 0].

定义 A.1. 带边界的结点曲线是一个复曲线 C，它只有结点奇点，并且 $\overline{C}:=C\cup\partial C$ 是紧的，且在 ∂C附近， C 是带边界的黎曼曲面。

定义 A.2. 带边界的结点曲线 C 由 $\mathbb{D}$参数化，当且仅当存在一个连续映射 $\sigma:\ \mathbb{D}\to C$，使得

- 若 $a\in C$ 是一个结点，则 $\gamma_a=\sigma^{-1}(a)$ 是 $\mathbb{D}$中的一条光滑嵌入圆，
- $\sigma:\ \overline{\mathbb{D}}\setminus\cup_{i=1}^N\gamma_{a_i}\to\overline{C}\setminus\{a_1,\cdots\ a_N\}$是一个微分同胚，其中 $a_1,\cdots\ a_N$是 C的结点。

我们很容易看出，这样的结曲线有一个主分支 $C_0\simeq\mathbb{D}$，并且有一些 $\mathbb{P}^1$树附着在 C_0上。事实上，令 $\gamma_1,\cdots\ \gamma_{N_1}$为“最大的”圆，也就是说，它们不包含在任何其他圆的内部。其余的圆都包含在 $\cup_{i_1=1}^{N_1}\mathrm{Int}(\gamma_{i_1})$ 中。选出 $\gamma_{i_1 1},\cdots\gamma_{i_1 N_{i_1}}$中位于 $\mathrm{Int}(\gamma_{i_1})$ 内的“最大”圆。接着选出 $\gamma_{i_1 i_2 1},\cdots\gamma_{i_1 i_2 N_{i_1 i_2}}$中位于 $\mathrm{Int}(\gamma_{i_1 i_2})\ldots$ 内的 “ 最大 ” 圆。见下图。



包含 σ（$\mathbb{D}\setminus\cup_{i_1=1}^{N_1}$ 由 γ_{i_1} 围成的闭区域）的 C_0 的不可约分支与 $\mathbb{D}$ 同胚，这是因为从拓扑上看， C_0 是通过将 $\mathbb{D}$ 中的 N_1 个圆盘捏缩为 N_1 个点而得到的，因此是 $\mathbb{D}$。此外，由于（$C_0,\partial C_0$）是带边界的黎曼曲面，

很容易证明（$C_0, \partial C_0$）作为带边界的黎曼曲面与（$\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}$）$\simeq$。$C_0$ 称为主分支，而 $a_1, \cdots\ a_{N_1}$ 称为根。

由于 $\sigma(\gamma_{i_1}) = a_{i_1}$，我们看到 σ（由 γ_{i_1} 围成的闭区域）是一棵附着于 a_{i_1} 的 $\mathbb{P}^1$ 树。事实上，包含 σ（由 $\gamma_{i_1} \setminus \cup_{i_2=1}^{N_{i_1}}$所围成的闭区域）的 C_{i_1}（C 的分量）与 S^2 同胚，这是因为从拓扑上看，C_{i_1} 是将 $\mathbb{D}$ 的边界捏缩为一点，并将 $\mathbb{D}$ 中的 N_{i_1} 个球捏缩为点得到的，因此是 S^2。与 S^2 同胚的紧黎曼曲面只能是 $\mathbb{P}^1$。C_{i_1} 上 C 的结点为 $a_{i_1} = \sigma(\gamma_{i_1})$ $a_{i_1 1} = \sigma(\gamma_{i_1 1})$，$\cdots$ $a_{i_1 N_{i_1}} = \sigma(\gamma_{i_1 N_{i_1}})$。同样的分析表明，分量 $C_{i_1 1}$，$\cdots$ $C_{i_1 N i_1}$ 附着在这些结点上。

根据 [IS00，定义 24]，我们定义全纯映射的稳定性。

定义 A.3. 设 C 是由 $\mathbb{D}$ 参数化的带边界的结点曲线，Y 是复流形。若全纯映射 $F: C \to Y$ 在每个球面分量 C_i 上均为非恒定映射，且至多有两个节点连接到 C_i，则称其为稳定的。

IS00 [的一个特殊情形定理 1]如下。

定理 *A.4.* 设 X 是紧复流形，$M > 0$ 且 $f_j : \mathbb{D} \to X$ 是全纯映射，并满足 $A(f_j) := \int_{\mathbb{D}} f_j^* \omega \le M$,。那么，取一个子列后，$(\iota, f_j) : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \times X$，其中$\iota : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 是典范嵌入，收敛到稳定曲线 $(g, F) : C \to \mathbb{C} \times X$，其含义如下：存在参数化 $\sigma_j : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 和 $\sigma_\infty : \mathbb{D} \to C$，它们满足定义 *A.2* 的条件，使得

(1) $(\iota, f_j) \circ \sigma_j$ 收敛于 (g, F)。σ_∞ 中的 $C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}, \mathbb{C} \times X)$；*(2)* 令 a_i 为 C 的节点，令 $\gamma_i = \sigma_\infty^{-1}(a_i)$ 为 $\mathbb{D}$中的圆，则对于每个紧子集 $K \subset \mathbb{D} \setminus \cup_i \gamma_i$，$(\iota, f_j) \circ \sigma_j \to (g, F)$。$\sigma_\infty$ 在 W^1中收敛，$^p(K, \mathbb{C} \times X)$对于任意 $p < \infty$成立；*(3)* σ_j 在$\{1 - \varepsilon < |z| \le 1\}$上为恒等映射，对于某个 $\varepsilon > 0$，并且对于每个紧子集$K \subset \mathbb{D} \setminus \cup_j \gamma_j$，复结构 $\sigma_j^* J_{\mathbb{D}}$ 在 K上光滑地收敛于 $\sigma_\infty^* J_C$。

备注 A.5。[IS00] 允许目标流形的拟复结构 Y 发生变形。在我们的情形中 $Y = \mathbb{C} \times X$ 配备了固定的复结构，因此 (2)、(3) 意味着C^∞ 在 ι、f_j）$\circ \sigma_j$ 的紧子集上 $\mathbb{D} \setminus \cup_i a_i$的收敛。为完整起见，我们给出这一陈述的证明。

在 $\mathbb{D}$ 上固定一个黎曼度量 g和一个小球 $B \subset \mathbb{D} \setminus \overline{\cup \gamma_i}$。令 $J_j := \sigma_j^* J_{\mathbb{D}}$为 $\mathbb{D}$上的拉回复结构。

$$g_j(\cdot, \cdot) := \frac{1}{2}\Big(g(\cdot, \cdot) + g(J_j(\cdot), J_j(\cdot))\Big)$$

是一个与 J_j相容的黎曼度量，依据 (3) 在 B 上光滑收敛。由于 $(\iota, f_j) \circ \sigma_j$依据 (1) 在 $\mathbb{D}$ 上局部一致收敛，缩小 B 后，对于充分大的 j，映射 $(\iota, f_j) \circ \sigma_j$ 会将 B 映到 $\mathbb{C} \times X$的一个公共坐标图中。由于 $J_j = \sigma_j^* J_{\mathbb{D}}$ 以及$\sigma_j : (\mathbb{D}, J_j) \to (\mathbb{D}, J_{\mathbb{D}})$ 是双全纯的，因此$u_j := (\iota, f_j) \circ \sigma_j$ 在 $(\mathbb{D}, J_j)$ 上是全纯的。故在所选坐标下，其分量是g_j-调和的：

$$\Delta_{g_j} u_{j0} = \cdots = \Delta_{g_j} u_{jn} = 0.$$

于是，对每个整数 k，由拉普拉斯算子的内部估计可得 $\|u_j\|_{C^k(\frac{1}{2}B)} \le C(k, \|g_j\|_{C^k(B)}) \|u_j\|_{C^0(B)}$。这证明，由于 B 任意，映射 $(\iota, f_j) \circ \sigma_j$ 在 $\mathbb{D} \setminus \cup_i \gamma_i$ 上关于 C^k局部一致有界。最后，由于 k 任意，阿尔泽拉–阿斯科利定理推出 $(\iota, f_j) \circ \sigma_j \to (g, F) \circ \sigma_\infty$ 在 $\mathbb{D} \setminus \cup_i \gamma_i$上局部光滑收敛。

注记 A.6. 我们证明 $g|_{C_0} : C_0 \to \mathbb{D}$ 是双全纯的，并且在紧子集 $K \subset \mathbb{D} \setminus g$（$C$的根）上，$f_j$ 光滑地收敛到 $f := F \circ (g|_{C_0})^{-1}$。

令 $r > 1 - \varepsilon$，则 σ_j 在 $\{r \le |z| \le 1\}$ 上是恒等映射。由 (1)，我们得到 $g \circ \sigma_\infty =$ 在该环带上恒等于 id。令 $D'_r \subset C_0 \simeq \mathbb{D}$ 为由 $\sigma_\infty(\{|z| = r\})$ 围成的区域，由最大值原理可知 $g(D'_r) \subset D_r$。我们证明 $D'_r \xrightarrow{g} D_r$ 是双全纯的。对于任意点 $a \in D_r$，$r > 1 - \varepsilon$ 在 σ_j 中的零点数为

的零点数为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_\infty(\{|z|=r\})}\frac{dg}{g-a}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{d(g\circ\sigma_\infty)}{g\circ\sigma_\infty-a}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{z-a}=1.$$

这证明了 $D'_r\to D_r$ 是双射，因而是双全纯的。由于 σ_∞ 在 $\{r\le|z|\le1\}$ 的某个邻域内是微分同胚，且 $g\circ\sigma_\infty=$ 在 $\{r\le|z|\le1\}$ 的某个邻域内恒等，因此我们得到 g 在 $C_0\backslash D'_r$ 上是双全纯的。这证明了第一个结论。

在紧子集 $K\subset\mathbb{D}\backslash g$（$C$ 的根）上，我们有如下光滑收敛

$$F\circ g^{-1}=F\circ\sigma_\infty\circ(g\circ\sigma_\infty)^{-1}=\lim_{j\to\infty}(f_j\circ\sigma_j)\circ(\sigma_j)^{-1}=\lim_{j\to\infty}f_j.$$

这里我们用到备注 A.5，从而得到 $\sigma_j=\iota\circ\sigma_j$ 在 $\mathbb{D}\backslash\cup_i\operatorname{Int}\gamma_i$ 上局部光滑收敛到

$$g\circ\sigma_\infty\big|_{\mathbb{D}\backslash\cup_i\overline{\operatorname{Int}\gamma_i}}:\mathbb{D}\setminus\cup_i\overline{\operatorname{Int}\gamma_i}\longrightarrow\mathbb{D}\backslash g(\{\text{roots of }C\}),$$

因此，其逆映射在 $\mathbb{D}\backslash g(\{C\text{ 的根}\})$ 上局部光滑收敛到 $(g\circ\sigma_\infty)^{-1}$。这证明了第二个结论。

命题 A.7 (=命题 2.3)。设 (X,ω) 是一个紧致凯勒流形。设 $M>0$和 $f_j\colon\mathbb{D}\to X$ 是全纯映射，使得 $A(f_j)=\int_{\mathbb{D}}f_j^*\omega\le M$ 且 $f_j(0)=x$。那么，取适当子列后，存在一条稳定曲线 $(g,F)\colon C\to\mathbb{C}\times X$，具有以下性质：

(1) $g|_{C_0}:\ C_0\to\mathbb{D}$ 是双全纯的，f_j 光滑收敛到 $f:=F\circ(g|_{C_0})^{-1}$，且在 $\mathbb{D}\backslash g(C$ 的根)的每个紧子集上都成立；*(2)* 存在 $p\in C$，使得 $g(p)=0$, $F(p)=x$；*(3)* 对于 X 上的每个光滑实(1,1)-形式 ρ，

$$\int_{\mathbb{D}}\chi\,f_j^*\rho\longrightarrow\int_C(g^*\chi)\,F^*\rho,\qquad\forall\,\chi\in C_c(\mathbb{D}).\tag{A.1}$$

(4) $A_*(C)\le$ 下极限$_j\,A(f_j)$.

证明。该结论几乎可直接由定理 A.4 推出，除了 (3) 需要进行颈部分析，这可通过分部积分完成。

应用 Gromov 紧性定理 A.4，并沿用该定理中的记号。(1) 已在注 A.6 中证明。下面证明 (2)。令 $q_j:=\sigma_j^{-1}(0)$。这个序列属于 $\{|z|<1-\varepsilon\}$，因为 $\sigma_j=$ 在 $\{1-\varepsilon\le|z|\le1\}$ 上是恒等映射。取一个子列后，$q_j\to q_\infty$。令 $p=\sigma_\infty(q)$。$(\iota,f_j)\circ\sigma_j\to(g,F)\circ\sigma_\infty$ 的局部一致收敛给出 $(g,F)(p)=(g,F)\circ\sigma_\infty(q)=\lim(\iota,f_j)\circ\sigma_j(q_j)=(0,x)$。

我们证明(3)。由于 ρ 是 d-闭的，颈部分析相当容易。收敛（A.1）等价于

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{D}}\sigma_j^*\chi\,(f_j\circ\sigma_j)^*\rho=\int_{\mathbb{D}}(g\circ\sigma_\infty)^*\chi\,(F\circ\sigma_\infty)^*\rho.$$

注A.5 已经给出了光滑收敛 $\sigma_j\to g\circ\sigma_\infty$，$f_j\circ\sigma_j\to F\circ\sigma_\infty$ 远离$\cup_i\gamma_i$，因此我们只需在每个圆 γ_i附近进行颈部分析。更具体地说，只需证明

$$\lim_{r\downarrow0}\Big(\limsup_{j\to\infty}\int_{A_{i,r}}\big|\chi\circ\sigma_j\,(f_j\circ\sigma_j)^*\rho\big|\Big)=0,\tag{A.2}$$

其中，颈部 $A_{i,r}\simeq\gamma_i\times[-r,r]$ 是圆 γ_i 的环形邻域，并在 $r\downarrow0$ 时收缩至 γ_i。由定理 A.4(1)，$\sigma_j\to g\circ\sigma_\infty$、$f_j\circ\sigma_j\to F\circ\sigma_\infty$ 在 $\mathbb{D}$ 上局部一致收敛。因此，设 $a_i:=\sigma_\infty(\gamma_i)\in C$、$x_i:=F(a_i)=F\circ\sigma_\infty(\gamma_i)\in X$，我们可以选取一个以 x_i 为中心的球 $B_i\subset X$，使得对某个 $r_0>0$，当 $r<r_0$ 且 $j>j(r_0)$ 时，$f_j\circ\sigma_j(A_{i,r})\subset\subset B_i$。由于 ρ 是 X 上的实闭 (1, 1)-形式，我们可以在 X 上将 $\rho=\omega_1-\omega_2$ 写成两个 Kähler 形式之差，并且在某个 1-形式 α_k 定义于 B_i 的情况下，$\omega_k=d\alpha_k$ 在 B_i 上。显然，$\int_{A_{i,r}}|\chi\circ\sigma_j(f_j\circ\sigma_j)^*\rho|\le\|\chi\|_{C^0}\int_{A_{i,r}}(f_j\circ\sigma_j)^*(\omega_1+\omega_2)$

并且我们有

$$\int_{A_{i,r}} (f_j \circ \sigma_j)^* \omega_k = \int_{\partial A_{i,r}} (f_j \circ \sigma_j)^* \alpha_k, \qquad k = 1, 2.$$

但是， $f_j \circ \sigma_j$ 在 $\cup_i \gamma_i$之外光滑地收敛，因此在与 $\cup_i \gamma_i$不相交的$\partial A_{i,\,r}$上，我们得到

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\partial A_{i,r}} (f_j \circ \sigma_j)^* \alpha_k = \int_{\partial A_{i,r}} (F \circ \sigma_\infty)^* \alpha_k.$$

接着，利用 σ 在 $\cup_i \gamma_i$之外微分同胚这一事实，我们得到

$$\int_{\partial A_{i,r}} (F \circ \sigma_\infty)^* \alpha_k = \int_{\partial(\sigma_\infty(A_{i,r}))} F^* \alpha_k = \int_{\sigma_\infty(A_{i,r})} F^* \omega_k.$$

我们来说明第二个等式中使用的斯托克斯公式。 $\sigma_\infty(A_{i,\,r})$有两个分量$B_{i,\,r}^+$， $B_{i,\,r}^-$，它们都与圆盘双全纯。因此，我们在每个$B_{i,\,r}^\pm$上应用斯托克斯公式：$\int_{\partial B_{i,\,r}^\pm} F^* \alpha_k = \int_{B_{i,\,r}^\pm} F^* \omega_k$。这就证明了第二个等式。

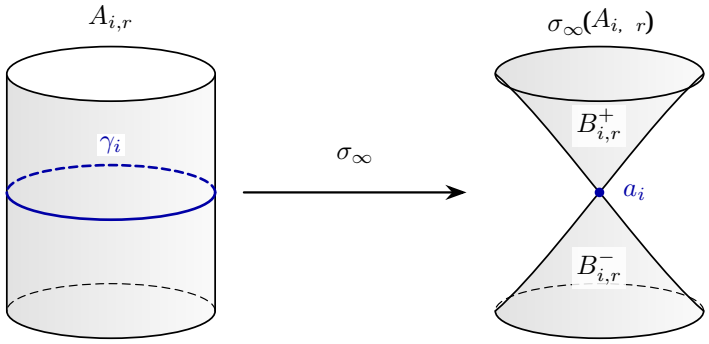


图1. σ_∞ 将圆$\gamma_i \subset A_{i,\,r}$ 收缩到节点 a_i。

当 $r \downarrow 0$， σ_∞ $(A_{i,\,r})$ 收缩为单点 σ_∞ (γ_i) $= a_i$，因此 极限$r\downarrow 0 \int_{\sigma_\infty\,(A_{i,\,r})}$ $F^* \omega_k = 0$。这证明了（A.2）。

最后，我们证明（4）。陈述（3）给出，对于每个支集紧的截断函数 $0 \le \chi \le 1$， $\mathbb{D}$ 中的 $f_j$lim$_j \int_{\mathbb{D}} \chi f_j^* \omega \le$lim inf$_j \int_{\mathbb{D}} f_j^* \omega =$liminf$_j\, A(f_j)$。由于 χ 是任意的，因此 $A_*(C) \le$ liminf$_j\, A(f_j)$ 如我们所需成立。证明至此完成。□

附录 B。圆盘泛函与伪有效阈值

设 $(X,\ \omega)$ 为一个紧致 Kähler流形，我们将伴随类的伪有效阈值 t_* 定义为

$$t_* := \inf\{\, t > 0 : [K_X + t\omega] \text{ is pseudoeffective}\}.$$

在本附录中，我们构造紧致 Kähler流形 $(X,\ \omega)$，使得

$$\sup_{f \in \mathcal{A}(X,x)} Q_{\theta - \delta\omega}(f) = \begin{cases} +\infty, & 0 < \delta < 2\pi t_*, \\ 0, & \delta \ge 2\pi t_*. \end{cases} \qquad \forall\, x \in X.$$

全纯向量丛 V在复流形 Y上称为酉平坦的，如果其过渡矩阵是局部常数且取值于酉矩阵中，参见例如 [Beauv13，第 2 节。2]。在复环面 $T = \mathbb{C}^m/\Lambda$ 上，我们可以按以下方式构造酉平坦丛。设$\lambda_1, \cdots \lambda_{2m}$是格 Λ的一组基。若 α是实数，我们定义

$$\chi : \Lambda \longrightarrow U(1), \qquad \chi\left(\sum_{j=1}^{2m} k_j \lambda_j\right) = e^{2\pi i \alpha k_1}.$$

Let

$$L_\chi := (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C})/\sim, \qquad (z, v) \sim (z + \lambda, \chi(\lambda)v).$$

那么 L_χ 是 T 上的酉平坦线丛。

命题 B.1. 设 T 是带有平坦 *Kähler* 形式 η 的复环面， V 是 T 上的秩为 $r+1 \geq 2$的酉平坦全纯向量丛。设

$$\pi : X = \mathbb{P}(V) \longrightarrow T$$

为该丛的射影化丛。纤维上的 *Fubini–Study* 形式定义了一个全局半正定的$(1,1)$形式β ， 定义在 X上。令

$$\omega = a\beta + b\pi^*\eta, \qquad a, b > 0.$$

那么 X 是一个单有理紧 *Kähler* 流形，

$$\theta := \mathrm{Ric}(\omega) = (r+1)\beta.$$

伪有效阈值为 $t_* = \frac{r+1}{2\pi a}$ 。此外，每个 $x \in X$ 都满足

$$\sup_{f \in \mathcal{A}(X,x)} Q_{\theta - \delta\omega}(f) = \begin{cases} +\infty, & 0 < \delta < 2\pi t_*, \\ 0, & \delta \geq 2\pi t_*. \end{cases}$$

证明。 $\mathbb{P}^r$ 上的 Fubini–Study 度量为 $i\partial\bar\partial \log(1 + |z_1|^2 + \cdots + |z_r|^2)$，因此在酉变换下不变。因此，通过在 $\mathbb{P}(V)$的每个平凡化 $U_\alpha \times \mathbb{P}^r$上粘合 Fubini–Study 度量，我们得到一个全局半正定的 (1,1)-形式 β。显然，对于 $a, b > 0$， $\omega := a\beta + b\pi^*\eta$ 是 Kähler 的，且 $\mathrm{Ric}(\omega) = (r+1)\beta$。

我们证明阈值 $t_* = \frac{r+1}{2\pi a}$。利用 $-2\pi[K_X] = [\mathrm{Ric}(\omega)] = (r+1)[\beta]$，得到 $[K_X + t\omega] = (at - \frac{r+1}{2\pi})[\beta] + b t[\pi^*\eta]$。如果 $t \geq \frac{r+1}{2\pi a}$， 显然 $[K_X + t\omega]$ 是伪有效的。反之，若一个闭正 $(1,1)$-流 T 表示 $[K_X + t\omega]$，则利用 $\pi^*\eta^{\dim T + 1} = 0$ 得到

$$0 \leq \int_X T \wedge \beta^{r-1} \wedge (\pi^*\eta)^{\dim T} = (at - \frac{r+1}{2\pi}) \int_X \beta^r \wedge (\pi^*\eta)^{\dim T}.$$

由于 $\int_X \beta^r \wedge (\pi^*\eta)^{\dim T} = (\int_{\mathbb{P}^r} \omega_{FS}^r) \cdot (\int_T \eta^{\dim T}) > 0$，我们得到 $t \geq \frac{r+1}{2\pi a}$。这就证明了阈值 $t_* = \frac{r+1}{2\pi a}$ 。

最后，对于每个 $x \in X$，我们选取一个嵌入 $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^r \simeq \pi^{-1}(\pi(x))$ $[z_1 : z_2] \mapsto [z_1 : z_2 : 0 : \cdots : 0]$. 考虑圆盘 $f_\lambda(z) := [\lambda z : 1 : \cdots : 0]$, $\lambda > 0$，直接计算可得

$$Q_{\theta - \delta\omega}(f_\lambda) = \frac{r + 1 - a\delta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|) i\partial\bar\partial \log(1 + \lambda^2|z|^2) = \frac{r + 1 - a\delta}{2} \log(1 + \lambda^2).$$

若 $\delta < 2\pi t_* = \frac{r+1}{a}$ ，则 $\lim_{\lambda \to +\infty} Q_{\theta - \delta\omega}(f_\lambda) = +\infty$。若 $\delta \geq 2\pi t_* = \frac{r+1}{a}$ ，则 $\theta - \delta\omega \leq 0$, $Q_{\theta - \delta\omega}(f) \leq 0$ 对任意 $f \in \mathcal{A}(X, x)$ 均成立。此外，$\lim_{\lambda \downarrow 0} Q_{\theta - \delta\omega}(f_\lambda) = 0$ 表明 $\sup_{f \in \mathcal{A}(X,x)} Q_{\theta - \delta\omega}(f) = 0$。因此证明完成。□

参考文献

[Beauv13] A. Beauville, 《Thetafunctions，新旧》，载于《当代数学开放问题与综述》，《现代数学综述》第6卷，International Press，马萨诸塞州萨默维尔，以及高等教育出版社，北京，2013年，第99–131页。[BDPP13] S. Boucksom、J.-P. Demailly、M. Păun 和 T. Peternell, 《紧致 Kähler 流形的伪有效锥与柯代拉维数为负的簇》，《代数几何杂志》**22** （2013），第2期，201–248页。[BR03] B. Berndtsson 和 J.-P. Rosay, 《拟等距向量丛与全纯矩阵的有界分解》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）**53** （2003），第3期，885–901页。[BCHM10] C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 和 J. McKernan, 《对数一般型簇的极小模型的存在性》，《美国数学会杂志》**23** （2010），第2期，405–468页。[Bre11] H. Brezis, 《泛函分析、索博列夫空间与偏微分方程》，Universitext，施普林格，纽约，2011年。

[Bru06] M. Brunella, 《紧致 Kähler 流形上叶层的一个正性》, 《国际数学杂志》17（2006）, 第1期, 35–43页。[CH20] J. Cao 和 A. Höring, 《紧致凯勒流形上的有理曲线》, 《微分几何杂志》114（2020）, 第1期, 1–39页。[CP25] J. Cao 和 M. Păun, 《关于 Kähler 背景下叶层的相对典范丛与代数性判据的注记》, （2025）, arXiv:2502.02183v2。[CT15] T. C. Collins 和 V. Tosatti, 《Kähler流与零轨迹》, 《数学创刊》202（2015）, 1167–1198页。[DP04] J.-P. Demailly 和 M. Păun, 《紧致 Kähler 流形的 Kähler 锥的数值刻画》, 《数学年刊》（第2辑）159（2004）, 第3期, 1247–1274页。[Don04] S. K. Donaldson, 《黎曼曲面》, 讲义, 2004年12月2日。[DDF12] B. Drinovec Drnovšek 和 F. Forstnerič, 《奇异簇上的圆盘泛函与 Siciak–Zaharyuta极值函数》, 《波兰数学年刊》106（2012）, 171–191页。[DGX26] Y.-H. Du、B. Guo 和 S.-Y. Xie, 《Fano 流形上有理曲线的解析构造》, 2026年9月10日, arXiv:2609.11612v1。[For07] F. Forstnerič, 《从强伪凸域到全纯映射流形》, 《亚洲数学杂志》11（2007）, 113–126页。[Fuj26] O. Fujino, 《复解析情形中的有理链连通性》, 《奇异性杂志》29（2026）, 234–253页。[Gra58] H. Grauert, 《全纯完备空间上的解析纤维化》, 《数学年刊》135（1958）, 263–273页。[GT01] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger, 《二阶椭圆型偏微分方程》, 第二版, 重印本, 数学经典, 施普林格出版社, 柏林, 2001年。[Gro85] M. Gromov, 《辛流形中的伪全纯曲线》, 《数学创刊》82 2, 307 1985 347（）, 第–期。[GZ15a] Q. Guan 和 X. Zhou, 《一个具有最优估计的 L^2 延拓问题及其应用》, 《数学年刊》（第2辑）181(3):1139–1208, 2015年。[GZ15b] Q. Guan 和 X. Zhou, 《 L^2 延拓问题中的最优常数及 Ohsawa 猜想的证明》, 《中国科学：数学》58(1):35–59, 2015年。[GZ17] Q. Guan 和 X. Zhou, 《乘子理想层的强开性与最优 L^2 延拓》, 《中国科学：数学》60(6):967–976, 2017年。[GX26] B. Guo 和 S.-Y. Xie, 《通过喷流在典范丛非数值有效的射影簇上构造有理曲线》, （2026）, arXiv:2609.28465v1。[HP24] C. Hacon 和 M. Păun, 《关于广义 Kähler 对的典范丛公式与伴随》, （2024）, arXiv:2404.12007。[HLX26] C. Hacon、Y. Li 和 L. Xie, 《Fujiki C类簇与 Kähler 判据》, （2026）, arXiv:2608.20588。[HX26] C. Hacon 和 L. Xie, 《关于 Kähler极小模型纲领与超越无基点定理》, （2026）, arXiv:2607.24986。[HP11] A. Höring 和 T. Peternell, 《容许自同态的非代数紧Kähler三维流形》, 《中国科学：数学》54（2011）, 第8期, 1635–1664页。[HP16] A. Höring 和 T. Peternell, 《Kähler 三维流形的极小模型》, 《数学创刊》203 1, 217 2016 264（）, 第–期。[Hor90] L. Hörmander, 《多复变函数论导论》, 第3版修订版, 北荷兰数学图书馆, 第7卷, 北荷兰, 阿姆斯特丹, 1990年。[IS99] S. Ivashkovich 和 V. Shevchishin, 《尖点曲线邻域中模空间的结构与亚纯包》, 《数学创刊》136(1999), 571–602页。[IS00] S. Ivashkovich 和 V. Shevchishin, 《带边界的 J-复曲线的 Gromov紧性定理》, 《国际数学研究通讯》2000, 第22期, 1167–1206页。[JLR26] E. Jovinelly、B. Lehmann 和 E. Riedl, 《弯曲与断裂中的最优界》, 《论坛数学》Pi 14（2026）, e16。[Kis00] C. O. Kiselman, 《多复变函数中的多重次调和函数与位势理论》, 载于《1950–2000年数学发展》（J.-P. Pier 编）, Birkhäuser, 巴塞尔, 2000年, 第655–714页。[Kle66] S. L. Kleiman, 《走向丰性的数值理论》, 《数学年刊》（第2辑）84（1966）, 第3期, 293–344页。[Kol96] J. Kollár, 《代数簇上的有理曲线》, 《数学及其边缘领域成果》第3辑, 第32卷, 施普林格出版社, 柏林, 1996年。[KM98] J. Kollár 和 S. Mori, 《代数簇的双有理几何》, 剑桥数学论丛, 第134卷, 剑桥大学出版社, 1998年。[LS03] F. Lárusson 和 R. Sigurdsson, 《流形上圆盘泛函包络的多重次调和性》, 《纯粹与应用数学杂志》555（2003）, 27–38页。[Lee18] J. M. Lee, 《黎曼流形导论》, 第2版, 数学研究生教材, 第176卷, 施普林格, Cham, 2018年。[Mag11] B. S. Magnússon, 《极值 ω-多重次调和函数作为圆盘泛函的包络》, 《数学档案》49（2011）, 第2期, 383–399页。

[Mag12] B. S. Magnússon, 《拟亚纯次调和函数作为圆盘泛函的包络：推广及其在局部理论中的应用》, 《斯堪的纳维亚数学杂志》111（2012）, 第 2 期, 296–319。[MM86] Y. Miyaoka 和 S. Mori, 《单有理覆盖性的一个数值判据》, 《数学年刊》（第 2 辑）1, 65 124 1986 69（）, 第 – 期。[Moi64] B. G. Moishezon, 《完备代数抽象簇的射影性判据》, 《苏联科学院消息·数学辑》28（1964）, 第 1 期, 179–224。[Mor79] S. Mori, 《具有丰切丛的射影流形》, 《数学年刊》（第 2 辑）110（1979）, 第 3 期, 593–606。[Mor82] S. Mori, 《典范丛非数值有效的三维簇》, 《数学年刊》（第 2 辑）116（1982）, 第 1 期, 133–176。[Nak63] Y. Nakai, 《射影概形上丰层的一个判据》, 《美国数学杂志》85（1963）, 第 1 期, 14–26。[Ou25] W. Ou, 《单有理紧致 Kähler 流形的一个刻画》, （2025）, arXiv:2501.18088。[Pol91] E. A. Poletsky, 《拟亚纯次调和函数作为变分问题的解》, 载于《多复变与复几何》, 第 1 部分（Santa Cruz, CA, 1989）, 《纯数学专题讨论会论文集》, 第 52 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 1991, 第 163–171 页。[Pol93] E. A. Poletsky, 《全纯流》, 《印第安纳大学数学杂志》42（1993）, 第 1 期, 85–144。[Pol13] E. A. Poletsky, 《全纯映射图像的 Stein 邻域》, 《纯粹与应用数学杂志》684（2013）, 187–198。[Ros03] J.-P. Rosay, 《全纯流形上的 Poletsky 圆盘理论》, 《印第安纳大学数学杂志》52 1, 157 2003 169（）, 第 – 期。[Siu09] Y.-T. Siu, 《动态乘子理想层与 Fano 流形中有理曲线的构造》, 载于《复分析与数字几何》（M. Passare 编）, 《乌普萨拉大学学报》系列、《乌普萨拉大学学报》C 部·组织史, 第 86 卷, 乌普萨拉大学, 乌普萨拉, 2009, 323–360。arXiv:0902.2809。[SY80] Y.-T. Siu 和 S.-T. Yau, 《正双截曲率的紧致 Kähler 流形》, 《数学创刊》59（1980）, 第 2 期, 189–204。[WM57] N. Wiener 和 P. Masani, 《多元随机过程的预测理论：I. 正则性条件》, 《数学学报》98（1957）, 111–150。[Yau78] S.-T. Yau, 《紧致 Kähler 流形的 Ricci 曲率与复 Monge–Ampère 方程：I》, 《纯粹与应用数学通讯》31（1978）, 第 3 期, 339–411。[Zhou98] X.-Y. Zhou, 《扩展未来管猜想的一个证明》, 《数学消息》62 1, 201 1998 213（）, 第 – 期。[Zhou02] X. Zhou, 《多复变中与群作用有关的一些结果》, 载于《国际数学家大会论文集》（北京, 2002）, 第 II 卷, 高等教育出版社, 北京, 2002, 第 743–753 页。[ZZ16] X. Zhou 和 L. Zhu, 《弱伪凸 Kähler 流形上的最优 L^2 延拓定理》, 《微分几何杂志》110（1）：135–186, 2018。[Zing17] A. Zinger, 《关于 J-全纯映射的笔记》, arXiv:1706.00331, 2017。Yinji Li：数学研究所、数学与系统科学研究院、中国科学院, 北京, 100190, 中国 Email 地址： liyinji@amss.ac.cnHaoyuan Sun：数学科学学院、北京师范大学, 北京, 100875, 中国 Email 地址： 202531130037@mail.bnu.edu.cnZhiwei Wang：数学与复杂系统实验室（教育部）、数学科学学院、北京师范大学, 北京, 100875, 中国 Email 地址： zhiwei@bnu.edu.cnXiangyu Zhou：数学研究所、数学与系统科学研究院, 以及华罗庚数学重点实验室、中国科学院, 北京, 100190, 中国 Email 地址： xyzhou@math.ac.cn