arXiv:2611.30834v1 [math.AP] 23 Nov 2026

蒙日–安培方程的唯一延拓及其失效

XIAORUI LU

Abstract. 我们研究具有相同且上下有界的蒙日–安培密度的 Alexandrov 解的唯一延拓问题。在平面上，我们证明，若两个解在某个开集上相等，则它们全局相等。对于每个满足 $n \geq 3$ 的有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，我们构造两个不同的一致凸 $C^{1,1}(\Omega)$ 解，它们在 Ω 的一个非空开子集上相等。

1. Introduction

Mooney 在其综述中提出了关于有界密度的以下唯一延拓问题[31, §6.1]。设 u, v 是连通开集 Ω 上的凸函数 $\subset \mathbb{R}^n$，且

$$M_u = M_v = f\,dX \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.1}$$

若 $0 < \lambda \leq f \leq \Lambda < \infty$ 几乎处处且 $u = v$ 在 Ω 的一个非空开子集上成立，它们是否必然在整个 Ω 上一致？这里 $M_w(E) = |\partial w(E)|$ 是 w的 Monge–Amp`ere 测度，即其次梯度像的勒贝格测度。

对于光滑的 Monge–Amp`ere 方程，Aronszajn 证明了在 C^4部分边界 [6]上柯西数据相同的 $C^{4,1}$ 椭圆解具有唯一性。Mooney 证明，在每个维数下，对于密度严格为正的 Alexandrov 解，唯一延拓成立 $C^{1,\alpha}$ 密度 [30]。对于满足 $\lambda \leq f \leq \Lambda$的可测 f，Jian 和 Tu 证明，若一对有序的 $u \geq v$ 在某一点相接，且该点是其中一个解的严格凸性内点，则二者一致u，v [25]。Mooney 的问题允许$u - v$ 改变符号。

De Philippis、Guerra 和 Tione 利用定量唯一延拓获得了平面内部 $W^{2,1+\delta}$ 估计 [16]。Uhlmann 和 Zimmermann 通过有界一致凸 $C^{1,1}$区域 [39]上的广义边界测量，证明了非负 L^1 密度情形下的唯一性。

Monge-Amp`ere 测度（1.1）不能用几乎处处海森矩阵行列式相等来替代。设 u（X）$= |X|^2/2$和 v（X）$= u$（X）$+$最大值$\{X_1, 0\}$。二者 u的 v 海森矩阵行列式几乎处处等于 1，并且在 $\{X_1 < 0\}$上相等。 v 还具有额外的

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：35J96、35B60。次分类号：30C62。
Key words and phrases. Monge–Amp`ère 方程，唯一延拓，Alexandrov 解，部分 Legendre 变换。

界面上的质量，因为其 $\{0\}\times E$ 的次梯度像为 $[0,1]\times E$。在比较 Brenier 解与 Alexandrov 解时，也会出现相关例子 [11, 14]。

在一维中，$M_w = w''$ 在分布意义下。方程（1.1）意味着 $u-v$ 是仿射的，因此即使公共测度是奇异的，在一个区间上一致也已足够。在平面中，密度界可以是局部的。

定理 1.1。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是一个连通开集，且 f 是 Ω 上的可测函数。假设对于每个开集 $U\Subset\Omega$，都存在常数 $0<\lambda_U\le\Lambda_U<\infty$ 使得

$$\lambda_U\le f(x)\le\Lambda_U\quad\text{for a.e. } x\in U.$$

设 u，$v:\Omega\to\mathbb{R}$ 是方程（1.1）的 Alexandrov 解。如果 $u=v$ 在 Ω 的某个非空开子集上一致，那么 $u=v$ 在整个 Ω 上成立。

平面严格凸性 [4] 和内部 $C^{1,\alpha}$ 正则性 [10]允许在 x中进行局部部分 Legendre 变换；Lewy 和 Heinz 在二维 Monge-Amp`ere 方程的工作中使用了这种变换，其渊源可以追溯到 19 世纪的 Darboux [26, 38]。对于 $C^{1,1}$属于具有 $w_{xx}\ge c>0$的某一类的解，Guan 推导出了逆坐标 [19, 的一个散度方程§5，引理 18]。变换后的势函数之差 $h=u^*-v^*$ 满足

$$\partial_p(a\,\partial_p h)+\partial_y^2 h=0,\qquad a\,\partial_p h=\int_{X_v(p,y)}^{X_u(p,y)} f(s,y)\,ds.$$

这里 $\partial_p h=X_u-X_v$，因此 a 是 $f(\cdot,y)$在两个逆坐标之间的平均值。系数矩阵 diag(a, 1) 是可测且一致椭圆的，因此 Alessandrini 和 Magnanini 的平面定理将原变量 [1, 3] 中的相等性传播开来。

对于 $n\ge3$，部分 Legendre 变换在 $n-1$ 个横向变量中保留了一个非线性行列式。在这些维数下，即使对于海森矩阵任意接近单位矩阵的解，唯一延拓也会失效。记 B_1^n 为单位球，$B_{1,+}^n=B_1^n\cap\{X_1>0\}$，并且 $Q_n(X)=|X|^2/2$。

定理 1.2。对于每个 $n\ge3$ 和 $0<\varepsilon<1$，存在 u_n，$v_n\in C^{1,1}(B_1^n)$ 以及一个可测的f_n，使得

(1) $(1-\varepsilon/4)\,I_n\le D^2u_n$，$D^2v_n\le(1+\varepsilon/4)\,I_n$ 几乎处处成立；**(2)** $u_n=v_n=Q_n$ 在 $B_{1,+}^n$ 上，而 $u_n(t,0,\ldots\ldots,0)>v_n(t,0,\ldots\ldots,0)$ 对 $-1<t<0$ 成立；**(3)** 对于每个 Borel 集 $E\subset B_1^n$，

$$M_{u_n}(E)=M_{v_n}(E)=\int_E f_n\,dX;\tag{1.2}$$

(4) $1-\varepsilon\le f_n\le1+\varepsilon$ 几乎处处，且 $f_n=1$ 在 $B_{1,+}^n$。

对于 $f \equiv c > 0$，Mooney定理给出了每个维度下的唯一延拓 [30, 定理 1.3]。对于 $n \geq 3$，c 的每个 $L^\infty(B_1^n)$-邻域都包含一个使延拓失效的密度。数对 $c^{1/n}u_n$，$c^{1/n}v_n$ 具有共同密度 $g = cf_n$，其中 $\|g - c\|_{L^\infty(B_1^n)} \leq c\varepsilon$ 且在 $B_{1,+}^n$ 上几乎处处成立。

推论 1.3。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，且具有 $n \geq 3$。对于任意 $0 < m < M < \infty$，存在 Ω 上的可测密度 f，使得 $m \leq f \leq M$ 几乎处处成立，并且（1.1）在 Ω 上存在两个不同的一致凸Alexandrov解 u，$v \in C^{1,1}(\Omega)$，它们在 Ω 的某个非空开子集上相同。

这对 Mooney的唯一延拓问题 [31, §6.1，条目 2]给出了否定答案，且这一结论适用于每个维数 $n \geq 3$ 以及每个有界区域。Pli´s 构造了一个三维线性椭圆反例，其为非散度形式 [32]。Miller 和 Mandache 得到了系数为 H¨older 的散度型反例 [27–29]。我们改造了 Miller 的振荡，其切向频率不断增大。对于 $u_3 = \phi + w$ 和 $v_3 = \phi - w$，当且仅当以下条件成立时，行列式相同

$$\operatorname{cof}(D^2\phi) : D^2 w + \det D^2 w = 0.$$

我们修正 ϕ 和 w，使其满足这一恒等式。单射Lipschitz梯度的面积公式给出（1.2）。差值 $h = u_n - v_n$ 是方程 $\operatorname{div}(A\nabla h) = 0$ 的一个非零解，它在 $B_{1,+}^n$ 上消失，其中 $A = \int_0^1 \operatorname{cof} D^2(v_n + sh)\, ds$。这个一致椭圆矩阵无散，并且可以使其在 L^∞ 中任意接近 I_n。

第 2 节回顾第 3 节证明定理 1.1所需的一些有用结果。第4–7节构造三变量振荡函数，并利用线性方程的右逆求解非线性行列式恒等式。第8 节将解延拓至界面两侧，验证其 Monge–Amp`ere 测度，并将这些例子推广到任意维数 $n > 3$。

2. Preliminaries

**2.1. Monge–Amp`ere 测度与正则性**。我们首先回顾 Alexandrov 解的精确定义。任意凸函数 $w : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 都对应一个 Borel测度 $M_w$，称为 Monge–Amp`ere 测度，定义为 $M_w(E) = |\partial w(E)|$，其中 $|\partial w(E)|$表示 w 在 E中的次梯度像的勒贝格测度，见 [20]。若$p \in \mathbb{R}^n$ 在 x 处是 w 的次梯度，则称其为 w 在 x 处的次梯度，当且仅当它是 w 在 x处图像的某个支撑超平面的斜率。若 $w \in C^2$，则 $|\partial w(E)| = \int_E \det D^2 w\, dx$. 给定一个 Borel测度 μ，若 $M_w = \mu$，则称 w是 $\det D^2 w = \mu$ 的 Alexandrov 解。

引理 2.1。若 $M_w = g\, dx\, dy$ 且 $0 < \lambda \leq g \leq \Lambda$ 在平面区域 Ω 上成立，则 Alexandrov 解 w 局部严格凸，且 $w \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}$ 对某个 $\alpha > 0$成立。若 g 在 Ω 上光滑，则w 在该处光滑，且 $D^2 w$ 正定。

局部严格凸性由亚历山德罗夫平面定理推出 [4]；关于现代表述和历史归属，另见 [14, 注 2.19]。局部 $C^{1,\alpha}$ 正则性由 Caffarelli [10]推出。当 g 光滑时，Caffarelli 的内部 $C^{2,\alpha}$ 正则性定理 [9], 结合标准的椭圆正则性提升，可得 w光滑。由凸性和 $\det D^2 w = g > 0$，可进一步推出 $D^2 w$ 正定。

引理 2.2。设 $B \subset\subset \Omega$ 是一个球，并且假设 $M_w = g\,dx\,dy$ 在 B附近成立，且满足上述界。存在光滑的 g_j 和凸的 $w_j \in C(\overline{B}) \cap C^\infty(B)$，使得

$$\lambda \le g_j \le \Lambda, \quad g_j \longrightarrow g \text{ in } L^1(B), \quad \det D^2 w_j = g_j, \quad w_j = w \text{ on } \partial B,$$
$$w_j \longrightarrow w \text{ uniformly on } \overline{B}, \qquad Dw_j \longrightarrow Dw \text{ locally uniformly in } B.$$

这里 g_j 可通过磨光获得：先用非负核对 g 进行磨光，并将其 λ延拓到 B之外。关于亚历山德罗夫狄利克雷问题的经典存在理论，可追溯至 Bakelman [7]和 Alexandrov [5]。关于此处所用的存在性和稳定性结果，请参见 [18, 定理 2.14 和命题 2。16]引理 2.1 给出了内部光滑性。由于$w \in C^1(B)$，由可微凸函数的经典收敛定理可知梯度局部一致收敛；参见 [33,定理 25。7]。

作为背景，我们回顾一下已有的内部 Sobolev 正则性 $w \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}$，它适用于具有有界正密度 [13], 的严格凸解，同时满足几乎处处恒等式 $\det D^2 w = g$，见 [37, 引理 2.1]。下文不需要更强的 $W^{2,1+\eta}$ 估计 [15, 34]。

2.2. 部分 Legendre 变换。

设 $w = w(x, y)$ 是一个严格凸的 C^1 函数。关于 x 的部分 Legendre 变换为

$$w^*(p, y) = \sup_x \{px - w(x, y)\},$$

其中 $p = w_x(x, y)$。记 $x = X_w(p, y)$，则

$$w^*(p, y) = pX_w(p, y) - w(X_w(p, y), y).$$

变换函数 w^* 为 C^1，其中

$$(w^*)_p = X_w, \qquad (w^*)_y = -w_y(X_w(p, y), y). \tag{2.1}$$

特别地,

$$x = (w^*)_p(p, y), \qquad w(x, y) = xp - w^*(p, y).$$

此外，如果 $w \in C^2$ 和 $w_{xx} > 0$，则

$$\begin{aligned} (X_w)_p = (w^*)_{pp} = \frac{1}{w_{xx}}, \qquad (X_w)_y = (w^*)_{py} = -\frac{w_{xy}}{w_{xx}}, \\ (w^*)_{yy} = -w_{yy} + \frac{w_{xy}^2}{w_{xx}} = -\frac{\det D^2 w}{w_{xx}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于 Alexandrov 解，这些二阶计算是在光滑的近似函数上进行的。参见 [22, 23] 和 [18, §5.1。4] 以获取更多信息。

固定 $R=(a,b)\times(c,d)$，其中 $R\subset B\Subset\Omega$。对于在 R 附近严格凸的 C^1 函数 w，定义

$$T_w(x,y)=(w_x(x,y),y),\qquad O_w=\{(p,y):c<y<d,\ w_x(a,y)<p<w_x(b,y)\}. \tag{2.3}$$

$w_x(x,y)$ 关于 x坐标严格单调，因此 T_w 是从 R 到 O_w的双射。将其逆函数记为 $(X_w(p,y),y)$，并令

$$w^*(p,y)=\max_{x\in[a,b]}\{px-w(x,y)\}=pX_w(p,y)-w(X_w(p,y),y). \tag{2.4}$$

引理 2.3。集合 O_w 是开集，$T_w:R\to O_w$ 是一个同胚。若严格凸函数 C^1在 $C^1(R)$ 中收敛到 w，则对充分大的 j，每个$K\Subset O_w$ 都包含于 O_{w_j} 中，并且在 K上一致地，

$$X_{w_j}\longrightarrow X_w,\qquad w_j^*\longrightarrow w^*,\qquad Dw_j^*\longrightarrow Dw^*.$$

对每个固定的 y，函数 $x\mapsto w_x(x,y)$ 连续且严格递增。因此，T_w 是从 R 到 O_w的连续双射，并且由 (2.3) 可知 O_w 是开集。由于 $w_x(x,y)$ 关于 x连续且严格递增，逆坐标 $X_w(p,y)$ 关于 (p,y) 连续。因此，$T_w^{-1}(p,y)=(X_w(p,y),y)$ 连续，故 T_w 是一个同胚。由于 $T_{w_j}\to T_w$ 在 R上局部一致地，[35, 引理 2.5] 可推出，对充分大的 j，$K\subset O_{w_j}$ 成立，且 $X_{w_j}\to X_w$ 在 K上一致。w_j^* 的一致收敛由 [12, 注 2.3(2)]得出。由于$X_{w_j}\to X_w$ 一致，且 $w_j\to w$ 在 $C^1(R)$ 中，(2.1) 及 w_y 的一致连续性可得$Dw_j^*\to Dw^*$ 在 K上一致。

2.3. **平面唯一延拓**。

引理 2.4（Alessandrini–Magnanini）。设 $Q\subset\mathbb{R}^2$ 是一个圆盘，A 是一个有界、可测、对称且一致正定的矩阵场。若 $h\in W^{1,2\,\mathrm{loc}}(Q)$ 是 $\operatorname{div}(A\nabla h)=0$ 的一个弱解，且在某个非空开子集上为零，则它恒等于零。若其零集具有正的平面测度，结论同样成立。

已发表的论文 [3, 定理 2.1] 中写作 $h=H\circ\chi$ 局部成立，其中 H 调和且 χ 拟共形；相应的强延拓结论见 [3,推论 2.2]。关于正测度零集的结论可由 [21,引理 2.3] 直接推出。1992年 的报告 [1] 早于已发表的证明；作者在 [2, 引言]中明确记载了这一时间先后。

2.4. **面积公式与行列式恒等式**。对于凸域上的一致凸 $u\in C^{1,\,1}(\Omega)$，Lipschitz 梯度是单射。因此，面积公式给出，对于任意

Borel 集 E,

$$M_u(E) = |\nabla u(E)| = \int_E \det D^2 u \, dX. \tag{2.5}$$

我们使用 [17, 定理 3.23]中的精确面积公式。特别地，对于下文构造的一致凸 $C^{1,1}$ 函数，不存在奇异界面质量。

对于对称的 3×3 矩阵，我们将使用基本的行列式恒等式

$$\det(A+B) - \det(A-B) = 2(\operatorname{cof} A : B + \det B), \tag{2.6}$$

$$\operatorname{cof}(I_3 + H) = I_3 + (\operatorname{tr} H) I_3 - H + \operatorname{cof} H. \tag{2.7}$$

Piola 恒等式给出 $\operatorname{div}(\operatorname{cof} D^2 q) = 0$ 在 $q \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}$ 上分布意义下成立；这是将零拉格朗日恒等式应用于 ∇q所得，而相应的 Sobolev 表述可通过逼近得到 [8]。

3. Proof of Theorem 1.1

固定一个矩形 $R = (a,b) \times (c,d)$ 以及一个球 B，使得 $\overline{R} \subset B \Subset \Omega$。选取常数 $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$，使得 $\lambda \le f \le \Lambda$ 在 B的一个邻域上几乎处处成立。我们选取 f 的一个 Borel 代表，使其在该处取值于 $[\lambda, \Lambda]$。对于每个解 w，我们采用与第2节相同的记号。

假设 w, $f \in C^\infty(B)$, $D^2 w > 0$，且 $\det D^2 w = f$。根据（2.2），

$$w^*_{yy} + f(X_w, y) w^*_{pp} = 0.$$

对 p 关于此恒等式求导，并利用 $w^*_p = X_w$，得到

$$(X_w)_{yy} + \partial_p\big(f(X_w, y)(X_w)_p\big) = 0.$$

这就是 [19, 引理 18，方程（71）]中出现的弱散度型方程。

命题 3.1。 假设 u 和 v 是下列方程的 Alexandrov 解

$$M_u = M_v = f \, dx \, dy$$

在 B上。设 $Q \Subset O_u \cap O_v$ 为一个圆盘，并令 $h = u^* - v^*$. 定义

$$a(p,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{X_u(p,y) - X_v(p,y)} \displaystyle\int_{X_v(p,y)}^{X_u(p,y)} f(s,y)\, ds, & X_u(p,y) \neq X_v(p,y), \\ \lambda, & X_u(p,y) = X_v(p,y). \end{cases} \tag{3.1}$$

则 a 是可测的，且满足 $\lambda \le a \le \Lambda$，并且

$$\partial_p(a h_p) + h_{yy} = 0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'(Q). \tag{3.2}$$

等价地，对于每个 $\eta \in C_c^\infty(Q)$,

$$\int_Q \big(a h_p \eta_p + h_y \eta_y\big)\, dp\, dy = 0. \tag{3.3}$$

证明。 首先假设 f， u， $v \in C^\infty(B)$， D^2u， $D^2v > 0$，且 $\det\ D^2u = \det\ D^2v = f$。由于 $h_p = X_u - X_v$，根据 a 的定义可得

$$ah_p = \int_{X_v}^{X_u} f(s,y)\,ds.$$

对该恒等式关于 p 求导可得

$$\partial_p(ah_p) = f(X_u,y)(X_u)_p - f(X_v,y)(X_v)_p = -u^*_{yy} + v^*_{yy} = -h_{yy}.$$

这就证明了光滑情形下的（3.2）。乘以 $\eta \in C_c^\infty$（Q）并进行分部积分，可得（3.3）。

对于一般的 Alexandrov 解 u， v，系数 a 是可测的，因为它可以写成

$$a(p,y) = \int_0^1 f\big(X_v(p,y) + t(X_u(p,y) - X_v(p,y)), y\big)\,dt$$

在 $\{h_p \neq 0\}$ 上，而 $a = \lambda$ 在 $\{h_p = 0\}$ 上。由于 f 是取值于 $[\lambda, \Lambda]$中的博雷尔可测函数，我们有 $\lambda \le a \le \Lambda$。此外，在 $h_p = 0$的地方， $ah_p = \int_{X_v}^{X_u} f(s,\ y)\ ds$ 也成立。

取引理 2.2中的狄利克雷逼近解 f_j、u_j、v_j，对两个解使用相同的密度 f_j，并设

$$h_j = u_j^* - v_j^*, \qquad X_{u_j} = (u_j^*)_p, \qquad X_{v_j} = (v_j^*)_p.$$

固定 $\eta \in C_c^\infty$（Q）时，引理 2.3 给出 $Q \subset \overline{O}_{u_j} \cap O_{v_j}$ 当 j 较大时，且

$$u_j^* \longrightarrow u^*, \qquad v_j^* \longrightarrow v^* \quad \text{in } C^1(\overline{Q}).$$

根据（3.1）定义 a_j，将 f、X_u、X_v 替换为 f_j、X_{u_j}、X_{v_j}。则

$$a_j(h_j)_p = \int_{X_{v_j}}^{X_{u_j}} f_j(s,y)\,ds.$$

光滑恒等式给出

$$\int_Q \big(a_j(h_j)_p\eta_p + (h_j)_y\eta_y\big)\,dp\,dy = 0. \tag{3.4}$$

界 $f \le \Lambda$ 给出

$$|a_j(h_j)_p - ah_p| = \left|\int_{X_{v_j}}^{X_{u_j}} f_j(s,y)\,ds - \int_{X_v}^{X_u} f(s,y)\,ds\right|$$

$$\le \int_a^b |f_j(s,y) - f(s,y)|\,ds + \Lambda|X_{u_j} - X_u| + \Lambda|X_{v_j} - X_v|.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\|a_j(h_j)_p - ah_p\|_{L^1(Q)}\\ &\le \operatorname{diam}(Q)\|f_j - f\|_{L^1(R)} + \Lambda|Q|\left(\|X_{u_j} - X_u\|_{L^\infty(Q)} + \|X_{v_j} - X_v\|_{L^\infty(Q)}\right) \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

引理 2.3 还给出 $\|(h_j)_y - h_y\|_{L^\infty(Q)} \longrightarrow 0$, 所以

$$\left| \int_Q \big((h_j)_y - h_y\big)\eta_y \, dp\, dy \right| \le \|(h_j)_y - h_y\|_{L^\infty(Q)} \|\eta_y\|_{L^1(Q)} \longrightarrow 0.$$

结合（3.5），这就证明可以在（3.4）中取极限，并证明了（3.3），从而得到（3.2）。 □

只有光滑逼近函数经过了微分。特别地，这个论证不要求对仅可测的 f，在 $f(X_w(p,y)$ $y)$ 上应用链式法则。Guan 弱方程 [19,引理 18] 是在不同正则性假设下的先行结果。

定理 *1.1* 的证明。由引理 2.1， u 和 v 均为局部严格凸函数，且属于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。令

$$E = \{z \in \Omega : u = v \text{ in a neighborhood of } z\}.$$

该集合非空且开。我们证明它是相对闭的。取 $z_0 = (x_0, y_0) \in E \cap \Omega$ 和 $z_j \in E$，其中 $z_j \to z_0$。在 E 上， u, v 及其梯度相等；再利用连续性可得

$$u(z_0) = v(z_0), \qquad Du(z_0) = Dv(z_0).$$

选取一个矩形 R 和一个球 B，满足 $z_0 \in R$, $\overline{R} \subset B$，且 $\overline{B} \subset \Omega$；并在 B 的某个邻域上，为 f 选取正界 λ, Λ。于是

$$T_u(z_0) = (u_x(z_0), y_0) = (v_x(z_0), y_0) = T_v(z_0)$$

位于 $O_u \cap O_v$。选择一个以该点为中心的圆盘 Q，使得 $\overline{Q} \subset O_u \cap O_v$。

对于所有充分大的 j，我们有 $z_j \in E \cap R$ 和 $T_u(z_j) \in Q$。因此， $T_u(E \cap R) \cap Q$ 非空；由于 T_u 是一个同胚，它是开集。对于 $(p,y) \in T_u(E \cap R) \cap Q$，令 $(x,y) = T_u^{-1}(p,y)$。由于在 (x,y) 处 $u = v$ 且 $u_x = v_x$，我们有 $T_v(x,y) = (p,y)$，以及 $T_v^{-1}(p,y) = (x,y)$。因此，由公式 (2.4) 得

$$u^*(p,y) = px - u(x,y) = px - v(x,y) = v^*(p,y).$$

因此 $h = u^* - v^*$ 在非空开集 $T_u(E \cap R) \cap Q$ 上消失。由于 $h \in C^1(Q) \subset W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(Q)$ 和 diag(a,1) 有界、可测、对称且一致椭圆，引理 2.4 适用于 h，这意味着 $h = 0$，因此 $u^* = v^*$在整个 Q 上成立。它们的 p 导数在 Q 上也相同，因此 (2.1) 得到

$$T_u^{-1}(p,y) = (u_p^*(p,y), y) = (v_p^*(p,y), y) = T_v^{-1}(p,y).$$

$T_u^{-1}(Q) = T_v^{-1}(Q)$ 的逆像因此是 z_0 的一个开邻域。对于该邻域中的任意 (x,y)，取 $(p,y) = T_u(x,y) = T_v(x,y)$，则

$$u(x,y) = xp - u^*(p,y) = xp - v^*(p,y) = v(x,y).$$

由此可得 $z_0 \in E$。因此， E 在连通集 Ω 中非空、开且相对闭，所以 $E = \Omega$。□

4. Construction in dimension three

我们首先构造两个三变量函数，并在第4–7节讨论它们。推广到所有 $n \geq 3$ 的内容包含在第1.2 节定理的证明中8。我们需要的解析结论如下。

命题 4.1。 对于每个 $\delta > 0$，存在 ϕ， $w \in C^{1,1}(B_1^3)$，使得

$$\|D^2\phi - I_3\|_{L^\infty(B_1^3)} + \|D^2 w\|_{L^\infty(B_1^3)} \leq \delta, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{cof}(D^2\phi) : D^2 w + \det D^2 w = 0 \quad \text{a.e. in } B_1^3. \tag{4.2}$$

此外， $\phi = Q_3$ 和 $w = 0$ 在 $B_{1,+}^3$ 上，而 $w(t, 0, 0) > 0$ 对于 $-1 < t < 0$。

记 $X = (t, x, y)$。我们寻求

$$u_3 = Q_3 + \psi + w, \qquad v_3 = Q_3 + \psi - w.$$

在命题 4.1中，这意味着 $\phi = Q_3 + \psi$；下面的构造直接使用 ψ。行列式恒等式（2.6）表明，所需等式等价于

$$\operatorname{cof}(I_3 + D^2\psi) : D^2 w + \det D^2 w = 0. \tag{4.3}$$

证明分为四个部分。我们选取一个函数 ah_0，其空间频率逐渐增加而振幅逐渐衰减，同时拉普拉斯算子相对较小。接着，我们写出 $w = a(h_0 + z)$，并为 (ψ, z) 中的线性方程构造一个右逆，从而可以通过压缩映射求解 (4.3)。最后，我们将 ψ, w 延拓至 $t = 0$，并检验凸性和 Monge–Amp`ère 测度。采用递增频率的做法受到 Miller [28, 29]的启发。下文将证明求解 (4.3) 所需的线性逆算子和非线性估计。

在第8节进行提升之前，构造所需的所有估计都在三维中完成。用 C 表示的常数可能随推导步骤而变化。除非另有说明，它们只依赖于固定函数 S, ζ, χ。这些常数关于 N、区间指标以及所有傅里叶频率均一致。未采用傅里叶范数的海森界使用算子范数。在整个构造过程中， D 对全部三个变量求导，而 $\Delta_{x,y} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$。所有修正项关于 x, y 均为 2π-周期函数。我们在 $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ 上进行构造，然后将这些函数视为 $\mathbb{R}^2$ 上的周期函数，从而可以针对每个空间频率求解一个常微分方程。

4.1. 傅里叶范数与导数估计。

对于区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和一个傅里叶级数

$$b(t, x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} b_m(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_1 x + m_2 y)},$$

定义

$$\|b\|_{\mathcal{A}(I)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \|b_m\|_{L^\infty(I)}\,. \tag{4.4}$$

如果 b 取实值，则对于几乎处处的 t，$\overline{b_m}(t) = b_{-m}(t)$。此外，$\|b\|_{L^\infty(I\times\mathbb{T}^2)} \le \|b\|_{\mathcal{A}(I)}$。对于向量 $v=(v_i)$ 和矩阵 $M=(M_{ij})$，我们定义

$$\|v\|_{\mathcal{A}(I)} = \sum_i \|v_i\|_{\mathcal{A}(I)}\,, \qquad \|M\|_{\mathcal{A}(I)} = \sum_{i,j} \|M_{ij}\|_{\mathcal{A}(I)}\,.$$

对于 $b,\ c\in\mathcal{A}(I)$，绝对收敛给出 $(bc)_m = \sum_{q\in\mathbb{Z}^2} b_q c_{m-q}$。因此，根据 Tonelli 定理，

$$\|bc\|_{\mathcal{A}(I)} \le \sum_{m,q\in\mathbb{Z}^2} \|b_q\|_{L^\infty(I)}\|c_{m-q}\|_{L^\infty(I)} = \|b\|_{\mathcal{A}(I)}\|c\|_{\mathcal{A}(I)}. \tag{4.5}$$

对于矩阵，设 $A:B=\sum_{i,j} A_{ij}B_{ij}$，这给出

$$\|A:B\|_{\mathcal{A}(I)} \le \|A\|_{\mathcal{A}(I)}\,\|B\|_{\mathcal{A}(I)}\,, \qquad \|\operatorname{tr} A\|_{\mathcal{A}(I)} \le \|A\|_{\mathcal{A}(I)}\,.$$

对于 $k\ge 1$，定义二阶范数

$$\|b\|_{2,k;I} = \sum_m \Big[(k^2+|m|^2)\,\|b_m\|_{\infty,I} + (k+|m|)\,\big\|b'_m\big\|_{\infty,I} + \big\|b''_m\big\|_{\infty,I}\Big]\,. \tag{4.6}$$

这里的时间导数是弱导数。该范数在尺度 k 下控制函数、其梯度及其 Hessian，

$$k^2\,\|b\|_{\mathcal{A}(I)} + k\,\|Db\|_{\mathcal{A}(I)} + \big\|D^2 b\big\|_{\mathcal{A}(I)} \le C\,\|b\|_{2,k;I}\,. \tag{4.7}$$

由傅里叶微分法则可直接得到此估计。对于每个系数，

$$\begin{aligned} &(\partial_t b)_m = b'_m, \quad (\partial_{x_\ell} b)_m = \mathrm{i} m_\ell b_m, \\ &(\partial_{tt} b)_m = b''_m, \quad (\partial_{tx_\ell} b)_m = \mathrm{i} m_\ell b'_m, \qquad (\partial_{x_\ell x_r} b)_m = -m_\ell m_r b_m, \end{aligned}$$

其中 $x_1=x, x_2=y$。令 $s_m = |m_1|+|m_2|$。频率 m 对（4.7）左侧的贡献恰为 $(k^2+ks_m+s_m^2)\,\|b_m\|_{\infty,I} + (k+2s_m)\,\|b'_m\|_{\infty,I} + \|b''_m\|_{\infty,I}$。由于 $s_m\le\sqrt{2}|m|$ 且 $ks_m \le (k^2+s_m^2)/2$，因此有 $k^2+ks_m+s_m^2 \le 3(k^2+|m|^2)$ $k+2s_m \le 3(k+|m|)$。对 m 求和即可证明（4.7），且常数与 k 无关。

（4.6）中的有限范数也给出一个 $C^{1,\,1}_{\mathrm{loc}}$ 代表元。事实上，（4.6）意味着 $b\in W^{2,\,\infty}_{\mathrm{loc}}$，因此 b 及其一阶弱导数都存在局部利普希茨代表元；参见[24, 定理 3.38，第 71] 页。因此，在每个紧凸集 $K\Subset I\times\mathbb{R}^2$ 上，该代表元满足

$$|Db(Y)-Db(X)| \le C\|b\|_{2,k;I}|Y-X|, \qquad \text{for } X,Y\in K.$$

在全文中，我们始终采用这一代表元。

我们将用时间的光滑函数乘以解。这些公式

$$(\zeta b_m)' = \zeta b'_m + \zeta' b_m, \qquad (\zeta b_m)'' = \zeta b''_m + 2\zeta' b'_m + \zeta'' b_m$$

give

$$\|\zeta b\|_{2,k;I} \le C\left(\|\zeta\|_\infty + k^{-1}\left\|\zeta'\right\|_\infty + k^{-2}\left\|\zeta''\right\|_\infty\right)\|b\|_{2,k;I}\,. \tag{4.8}$$

~ ~4.2. **矩阵的估计**。 设 H, B, H, B 是 3×3矩阵函数，其元素属于 $\mathcal{A}(I)$。本小节中的所有范数 $||\cdot||$都是 $\mathcal{A}(I)$ 范数。由于余子式是两个乘积之差，而行列式是六个带符号乘积之和，

$$\|\operatorname{cof} H\| \le C\,\|H\|^2\,, \qquad \|\det B\| \le C\,\|B\|^3\,. \tag{4.9}$$

~ ~为估计差值，对每个余子式中的两个乘积分别应用 $ab - \widetilde{a}\widetilde{b} = (a-\widetilde{a})b + \widetilde{a}(b-\widetilde{b})$。再结合求和可得4.5。

$$\|\operatorname{cof} H - \operatorname{cof}\widetilde{H}\| \le C\big(\|H\| + \|\widetilde{H}\|\big)\|H - \widetilde{H}\|. \tag{4.10}$$

~ ~ ~类似地，对行列式中的六个乘积分别应用 $abc - \widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c} = (a-\widetilde{a})bc + \widetilde{a}(b-\widetilde{b})c + \widetilde{a}\widetilde{b}(c-\widetilde{c})$。因此，应用（4.5）并求和可得

$$\|\det B - \det\widetilde{B}\| \le C\big(\|B\| + \|\widetilde{B}\|\big)^2\|B - \widetilde{B}\|. \tag{4.11}$$

这些估计不需要对矩阵元素求任何导数。

范数（4.4）和（4.6）所对应的空间是完备的。令 $\|\cdot\|_*$ 表示（4.4）和（4.6）中的任一范数，其中 $k \ge 1$ 固定。若 $(b^{(n)})$ 是柯西列，则由系数空间的完备性，对于每个 m、$b_m^{(n)} \to b_m$，在 $L^\infty(I)$ 或 $W^{2,\infty}(I)$ 中分别成立。令 b 的傅里叶系数为 b_m。由法图引理可得

$$\|b\|_* \le \liminf_{n\to\infty}\|b^{(n)}\|_* < \infty, \qquad \|b^{(n)} - b\|_* \le \liminf_{\ell\to\infty}\|b^{(n)} - b^{(\ell)}\|_* \longrightarrow 0,$$

当 $n \to \infty$ 时。因此两个空间都是完备的。若 $b_{-m}^{(n)} = \overline{b_m^{(n)}}$，则 $b_{-m} = \lim_n b_{-m}^{(n)} = \overline{\lim_n b_m^{(n)}} = b_m$；因此它们的实子空间是闭的。

4.3. **振荡函数**。 现在我们构造 h_0 和 a。函数 h_0 在 x 和 y中的振荡之间交替变化。振幅 $a(t)$ 随着 $t \uparrow 0$ 趋于零，从而确保 $ah_0 \to 0$在 x上一致成立， y。我们选择特定的频率和过渡区间，使得 $a^{-1}\Delta(ah_0)$ 相对较小；见（4.16）。

取一个光滑非递减函数 $S\colon\ \mathbb{R} \to [0,1]$ 在（$-\infty$， 0] 上等于零，在$[1,\infty$上等于一。令 N 为一个足够大的正整数，并设

$$k_j = (N^4 + j)^2, \qquad t_j = -2N^2\sum_{r=j}^{\infty}\frac{1}{k_r}, \qquad j \ge 1.$$

函数 $s \mapsto (N^4+s)^{-2}$ 是递减的，因此

$$\frac{2N^2}{N^4+j} \le -t_j \le \frac{2N^2}{N^4+j-1}.$$

特别地，当 $N \geq 3$ 时，$t_j \uparrow 0$、$t_{j+1}-t_j = 2N^2/k_j$ 和 $-1/4 < t_1 < 0$。相邻频率满足

$$\frac{k_{j+1}}{k_j} = 1 + \frac{2}{N^4+j} + \frac{1}{(N^4+j)^2} \leq 1 + 3N^{-4}. \tag{4.12}$$

对于奇数 j，令 $e_j = (1,\ 0)$；对于偶数 j，令 $e_j = (0,\ 1)$。在 $[t_j, t_{j+1}]$ 上，定义

$$\theta_j(t) = \frac{\pi}{2} S\left(\frac{k_j(t-t_j)}{N^2}\right),$$

$$h_0(t,x,y) = \cos\theta_j(t)\cos(k_j e_j \cdot (x,y)) + \sin\theta_j(t)\cos(k_{j+1}e_{j+1}\cdot(x,y)), \tag{4.13}$$

$$\kappa(t) = k_j + (k_{j+1}-k_j) S\left(\frac{k_j(t-t_j)}{N^2}\right).$$

对于 $t < t_1$，设 $h_0 =$ 余弦$(k_1 x)$，并令 $\kappa = k_1$。频率的变化发生在 $[t_j, t_j + N^2/k_j]$ 中。在 $[t_j + N^2/k_j, t_{j+1}]$ 期间，公式化简为

$$h_0 = \cos(k_{j+1}e_{j+1}\cdot(x,y)), \qquad \kappa = k_{j+1}.$$

这些恰好是下一个区间起点处的取值。由于 $S \in C^\infty(\mathbb{R})$，$h_0$ 和 κ 的所有正阶 t 导数在每个连接点 t_j 处都为零，因此分段公式定义了 $t<0$ 上的光滑函数。

定义

$$g(t) = \int_{-1}^{t} \kappa(s)\,ds, \qquad a(t) = N^{-2}k_1^{-2}\mathrm{e}^{-g(t)}, \qquad \text{when } t<0.$$

我们将寻找

$$w(t,x,y) = a(t)\big(h_0(t,x,y) + z(t,x,y)\big).$$

只剩下需要求出的 z 和 ψ。对 a 求导得到 $a' = -\kappa a$，并且 $a'' = (\kappa^2 - \kappa')a$。定义两个归一化海森矩阵

$$B_0 = a^{-1}D^2(ah_0), \qquad B_z = a^{-1}D^2(az).$$

乘积法则给出了第二个矩阵的每个元素：

$$\begin{aligned} (B_z)_{tt} &= z_{tt} - 2\kappa z_t + (\kappa^2 - \kappa')z, \\ (B_z)_{t\ell} &= z_{t\ell} - \kappa z_\ell \quad (\ell = x,y), \\ (B_z)_{\ell r} &= z_{\ell r} \quad (\ell, r = x,y). \end{aligned} \tag{4.14}$$

特别地，$\operatorname{tr} B_z = z_{tt} - 2\kappa z_t + (\kappa^2 - \kappa')z + z_{xx} + z_{yy}$.

引理 4.2。对于所有充分大的 N，

$$0 \leq \kappa' \leq CN^{-6}\kappa^2. \tag{4.15}$$

设 I 为一个区间，它至多与一个过渡区间相交，并且可能延伸到相邻的频率恒定区间中。若它与第 j 个过渡区间相交，令 $k = k_j$；若它仅包含一种恒定频率，则令 k 为该频率。于是

$$\|B_0\|_{\mathcal{A}(I)} \le Ck^2, \qquad \|\operatorname{tr} B_0\|_{\mathcal{A}(I)} \le Ck^2N^{-2}. \tag{4.16}$$

此外，

$$\kappa(t) \to \infty, \qquad a(t)\kappa(t)^p \to 0 \quad (p>0) \quad \text{as } t \uparrow 0, \tag{4.17}$$

and

$$\sup_{-1\le t<0} a(t)\kappa(t)^2 \le N^{-2}. \tag{4.18}$$

函数 g 是从 $(-\infty, 0)$ 到 $\mathbb{R}$ 的光滑递增双射。

证明。 对 κ 求导可得

$$\kappa' = (k_{j+1}-k_j)\frac{k_j}{N^2}S'\left(\frac{k_j(t-t_j)}{N^2}\right), \qquad 0 \le k_{j+1}-k_j \le 3N^{-4}k_j.$$

这就证明了（4.15），因为在常值区间上导数为零，而（4.12）使 k_j和 κ 具有可比性。在第 j 个过渡区间上，

$$|\theta_j'| \le Ck_jN^{-2}, \qquad |\theta_j''| \le Ck_j^2N^{-4}.$$

为方便起见 ce，记作 $c=$余弦θ_j或正弦 θ_j，以及 $d = k_j$或 k_{j+1}。求导后，我们有 e

$$|c| \le 1, \qquad |c'| \le CkN^{-2}, \qquad |c''| \le Ck^2N^{-4}. \tag{4.19}$$

对于任意振幅以及相邻的常值区间。由于 d 等于 k_j 或 k_{j+} 1，

$$k \le \kappa, d \le (1+3N^{-4})k, \qquad |\kappa - d| \le CkN^{-4}. \tag{4.20}$$

对于项 $c(t)$ 余弦(dx)，$a^{-1}D^2(ac$余弦$(dx))$ 的非零项为

$$\begin{aligned} tt: &\quad [c''-2\kappa c'+(\kappa^2-\kappa')c]\cos(dx), \\ tx = xt: &\quad d(\kappa c - c')\sin(dx), \\ xx: &\quad -d^2c\cos(dx). \end{aligned} \tag{4.21}$$

非零项为 $a^{-1}D^2(ac$余弦$(dy))$，与 (4.21) 类似，其中 x 替换为 y。利用 (4.19)–(4.20)，每个显示的系数均有上界 Ck^2 。对所有项求和即可证明 (4.16) 中的第一个界。对于 $a^{-1}D^2(ac$余弦$(dx))$ 或 $a^{-1}D^2(ac$余弦$(dy))$，其迹系数为

$$c''-2\kappa c'+(\kappa^2-d^2)c-\kappa' c.$$

这四项的绝对值均不超过

$$Ck^2N^{-4}, \quad Ck^2N^{-2}, \quad |\kappa-d|(\kappa+d) \le Ck^2N^{-4}, \quad Ck^2N^{-6},$$

分别而言。它们的和至多为 Ck^2N^{-2}，这证明了迹界。

在 $[t_j, t_{j+1}]$ 上， $k_j \le \kappa \le k_{j+1}$，因此当 $t \uparrow 0$ 时， $\kappa(t) \to \infty$。此外，

$$g(t_{j+1}) - g(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \kappa(s)\, ds \ge k_j \frac{2N^2}{k_j} = 2N^2. \tag{4.22}$$

对于 $t \in [t_j, t_{j+1}]$，这给出

$$a(t)\kappa(t)^p \le N^{-2} k_1^{-2} \mathrm{e}^{-g(t_1)} \mathrm{e}^{-2N^2(j-1)} (N^4 + j + 1)^{2p}.$$

对于固定的 N， p，因此右侧趋于零，从而证明了（4.17）。（4.22）给出 g（t） $\to \infty$ 当 $t \uparrow 0$时。对于 $t < t_1$， $g' = k_1$，因此 g（t） $\to -\infty$ 当 $t \to -\infty$时。最后， $g' = \kappa > 0$。这些事实证明了所述双射及其光滑逆映射。由（4.15），

$$\frac{d}{dt} \log(a\kappa^2) = -\kappa + \frac{2\kappa'}{\kappa} \le -\kappa(1 - 2CN^{-6}) \le -\frac{\kappa}{2}$$

一旦 $2CN^{-6} \le 1/2$。因此 $a\kappa^2$ 递减。由于 $-1 < t_1$， g（-1） $= 0$ 且 κ（-1） $= k_1$，其在 -1 处的值为 N^{-2}。这证明了（ 4.18 ）。□

5. A right inverse for the frozen operator

下面的引理是证明中的一个关键要素。在本节中，我们为参数在 t 处冻结的线性方程构造一个右逆。在下一节中，我们将在短时间区间上应用这一构造，并控制由此产生的误差，以求解变系数线性方程。

对于正整数 d，定义

$$T_x(d) = d^2 \begin{pmatrix} \cos(dx) & \sin(dx) & 0 \\ \sin(dx) & -\cos(dx) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_y(d) = d^2 \begin{pmatrix} \cos(dy) & 0 & \sin(dy) \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin(dy) & 0 & -\cos(dy) \end{pmatrix}.$$

若余弦(dx) 的振幅为常数，且 $\kappa = d$，则它对 B_0 在 (4.21) 中的贡献恰好是该振幅乘以 $T_x(d)$。两个矩阵的迹均为零。

引理 5.1. 设 d_1, d_2 为正整数，且 $k = \min(d_1, d_2)$。假设

$$\max(d_1, d_2) \le 11k/10, \qquad k \le \kappa_0 \le 11k/10.$$

对于 $c_1, c_2 \ge 0$ 且满足 $c_1^2 + c_2^2 = 1$， 令

$$\overline{B} = c_1 T_x(d_1) + c_2 T_y(d_2),$$
$$\overline{P}(\psi, z) = ((\partial_t - \kappa_0)^2 + \Delta_{x,y}) z - \overline{B} : D^2\psi.$$

存在一个 实线性右逆 R_0，使得对于每个实数 $r \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$， $P(R_0 r) = r$ 满足

$$\|\psi\|_{2,k;\mathbb{R}} + k^{-2} \|z\|_{2,k;\mathbb{R}} \le C k^{-2} \|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}, \qquad (\psi, z) = R_0 r. \tag{5.1}$$

该常数与 k、 d_1、 d_2、 κ_0、 c_1、 c_2 无关。

证明。**步骤1：选择频率并推导系数方程**。 暂时假设 c_1、 $c_2 \geq \eta > 0$。数值 η 将在证明的最后确定。令

$$E_k = \{m \in \mathbb{Z}^2 : |m| \leq 5k/4\}.$$

在此证明中， $e_1 = (1,\ 0)$ $e_2 = (0,\ 1)$ 表示固定的坐标向量。给定 $m \in E_k \setminus \{0\}$，选择 $j \in \{1, 2\}$ ，使得 $d_j|m_j|$ 最大；若存在并列，则取 $j = 1$ 。定义

$$\sigma = \operatorname{sgn}(m_j), \qquad q = m + \sigma d_j e_j.$$

我们将选择 ψ_q 以生成所需的系数 r_m。

j 次矩阵移位中的正弦和余弦将频率 q 移至 $q \pm d_j e_j$。其中一个是 m；另一个是 $m + 2\sigma d_j e_j$。后者位于 E_k 之外，因为 $|m_j| + 2d_j \geq 2k > 5k/4$。另一个指标为 $h \neq j$ 的矩阵产生 $q \pm d_h e_h$。由于 $d_j|m_j| \geq d_h|m_h|$，我们有

$$\begin{aligned} |m + \sigma d_j e_j \pm d_h e_h|^2 &= |m|^2 + d_j^2 + d_h^2 + 2d_j|m_j| \pm 2d_h m_h \\ &\geq |m|^2 + d_j^2 + d_h^2 \geq 2k^2 > 25k^2/16. \end{aligned}$$

因此，在 E_k 中的频率中， ψ_q 仅在 m 处有贡献。

我们证明映射 $m \mapsto q(m)$ 是单射。根据 j 的选择，

$$\begin{aligned} j = 1: &\quad d_1|q_1| - d_2|q_2| = d_1|m_1| - d_2|m_2| + d_1^2 \geq d_1^2, \\ j = 2: &\quad d_1|q_1| - d_2|q_2| = d_1|m_1| - d_2|m_2| - d_2^2 \leq -d_2^2. \end{aligned}$$

这两种情况互不相交，因此 q 决定了 j。由于 $\sigma = \operatorname{sgn}(q_j)$，我们随后可以恢复 $m = q - \sigma d_j e_j$。这证明了单射性。将 m 替换为 $-m$ 得到

$$q(-m) = -q(m). \tag{5.2}$$

要计算系数方程，只需明确写出 x 方向。由于

$$T_x(d_1) : D^2\psi = d_1^2\{\cos(d_1 x)(\psi_{tt} - \psi_{xx}) + 2\sin(d_1 x)\psi_{tx}\},$$

$\psi_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1 x + q_2 y)}$ 在频率 $q - \sigma d_1 e_1$处产生贡献，

$$-cd_1^2\left\{\frac{1}{2}(\psi_q'' + q_1^2\psi_q) + 2\frac{\mathrm{i}\sigma}{2}\,\mathrm{i}q_1\psi_q'\right\} = -\frac{cd_1^2}{2}(\psi_q'' - 2\sigma q_1\psi_q' + q_1^2\psi_q).$$

对于 y，将 q_1 替换为 q_2 ，并将 d_1 替换为 d_2。因此，所需频率处的系数恰好为

$$-\frac{c_j d_j^2}{2}(\partial_t - |q_j|)^2\psi_q. \tag{5.3}$$

步骤 2：构造并估计低频中的 ψ 。对于 $d > 0$ 以及有界可测的 f，定义

$$(G_d f)(t) = \int_0^\infty s e^{-ds} f(t + s)\, ds. \tag{5.4}$$

因此 $G_d f = L_d * f$，其中 $L_d(s) = -se^{ds}\mathbf{1}_{\{s<0\}}$。由于 L_d 连续，且 L_d' 在零点处有单位跳跃，$D^2 L_d = (-2d - d^2 s)e^{ds}\mathbf{1}_{\{s<0\}} + \delta_0$.。直接计算得 $(D-d)^2 L_d = \delta_0$，因此 $(\partial_t - d)^2 G_d f = f$ 在分布意义下成立。此外，

$$\|L_d\|_{L^1} = d^{-2}, \qquad \|L_d'\|_{L^1} \le 2d^{-1}, \qquad |D^2 L_d|(\mathbb{R}) \le 4.$$

利用 $(G_d f)' = L_d' * f$ 和 $(G_d f)'' = (D^2 L_d) * f$，我们得到

$$d^2\|G_d f\|_\infty + d\|(G_d f)'\|_\infty + \|(G_d f)''\|_\infty \le C\|f\|_\infty,$$

其中 $C \ge 7$ 为一个绝对常数。$G_d f$ 的导数均按弱意义理解；不需要对 f 求导。

对于 E_k 中的 $m \ne 0$，使用其选定的 j，q 并设

$$\psi_q = -\frac{2}{c_j d_j^2} G_{|q_j|} r_m. \tag{5.5}$$

(5.3) 和 (5.4) 表明，其在 m 处的贡献为 r_m。步骤1证明，其他选定的傅里叶系数在该目标处均不产生贡献。

对于 $m = 0$，选择 j_*，使得 $c_{j_*} \ge 1/\sqrt{2}$。设

$$\psi_{d_{j_*} e_{j_*}} = \psi_{-d_{j_*} e_{j_*}} = -\frac{1}{c_{j_*} d_{j_*}^2} G_{d_{j_*}} r_0. \tag{5.6}$$

这两个傅里叶系数各自在零点处产生 $r_0/2$，由（5.3），因此它们的和为 r_0。它们的其他频率为 $\pm 2d_{j_*} e_{j_*}$ 和 $\pm d_{j_*} e_{j_*} \pm d_h e_h$，其中 $h \ne j_*$。其范数至少为$\sqrt{2}k > \frac{5}{4}k$。将 ψ 所有未指定的傅里叶系数设为零。

对于每个选定的系数，

$$k \le |q_j| \le |q| \le |m| + d_j \le \frac{47}{20}k.$$

由（5.5）和（5.6），ψ_q、ψ_q'和ψ_q''的界依次为

$$2\eta^{-1}k^{-4}\|r_m\|_\infty, \qquad 4\eta^{-1}k^{-3}\|r_m\|_\infty, \qquad 8\eta^{-1}k^{-2}\|r_m\|_\infty.$$

分别乘以 $k^2 + |q|^2$、$k + |q|$ 和 1，可知其对 $\|\psi\|_{2,\,k;\mathbb{R}}$的贡献至多为 $C\eta^{-1}k^{-2}\|r_m\|_\infty$。由单射性可将各项求和，因此

$$\|\psi\|_{2,k;\mathbb{R}} \le C\eta^{-1}k^{-2}\sum_{m\in E_k}\|r_m\|_\infty. \tag{5.7}$$

步骤3：在高频处构造并估计 z。令

$$r^* = r + \overline{B} : D^2\psi. \tag{5.8}$$

步骤 1–2 表明 $r_m^* = 0$ 在 E_k上。$\mathcal{A}(\mathbb{R})$-范数下，$T_x(d)$ 中各项之和为 $4d^2$，对 $T_y(d)$ 也同样成立。因此 $\|B\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})} \le Ck^2$。利用 (4.7) 和 (5.7) 可得

$$\|r^*\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})} \le \|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})} + Ck^2\|\psi\|_{2,k;\mathbb{R}} \le C(1+\eta^{-1})\|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}. \tag{5.9}$$

对于 $|m|>5k/4$，定义

$$K_{|m|,\kappa_0}(s)=-\frac{1}{2|m|}\begin{cases}e^{(\kappa_0-|m|)s}, & s\geq 0,\\ e^{(\kappa_0+|m|)s}, & s<0.\end{cases}$$

与步骤 2 一样，在分布意义下求导可得

$$((D-\kappa_0)^2-|m|^2)K_{|m|,\kappa_0}=\delta_0. \tag{5.10}$$

直接积分可得

$$\|K\|_{L^1}=\frac{1}{|m|^2-\kappa_0^2},\qquad \|K'\|_{L^1}=\frac{1}{|m|},\qquad |D^2K|(\mathbb{R})=2. \tag{5.11}$$

Set

$$z_m=K_{|m|,\kappa_0}*r_m^*\quad (m\notin E_k),\qquad z_m=0\quad (m\in E_k).$$

对于 $m\notin E_k$，我们有 $\kappa_0/|m|\leq 22/25$ 且 $k\leq 4|m|/5$。结合（5.11），得到

$$(k^2+|m|^2)\|z_m\|_\infty+(k+|m|)\|z_m'\|_\infty+\|z_m''\|_\infty\leq C\|r_m^*\|_\infty.$$

对 m 求和并利用（5.9）可得

$$\|z\|_{2,k;\mathbb{R}}\leq C\|r^*\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}\leq C(1+\eta^{-1})\|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}.$$

由（5.10）及可求和的导数界可知，$((\partial_t-\kappa_0)^2+\Delta_{x,\ y})z=r^*$ 在分布意义下成立。结合（5.8），这就证明了 $P(\psi,\ z)=r$ 以及（5.1），其中常数目前依赖于 η。方程（5.2）和（5.6）连同实核与实系数保持共轭对称性。因此，ψ、r^*、z 均为实数。

步骤 4：当一个振幅为零时构造逆。假设只有第 j 个矩阵存在，其振幅为 c_j satisfying $1/\sqrt{2}\leq c_j\leq 1$。下面的构造给出了一个具有绝对界的右逆，并且在整个区间内一致。保持与上述相同的 k,κ_0,E_k。对于每个非零的 $m\in E_k$，令

$$\sigma=\begin{cases}\operatorname{sgn}(m_j), & m_j\neq 0,\\ \operatorname{sgn}(m_h), & m_j=0,\end{cases}\qquad q=m+\sigma d_je_j,\quad h\neq j.$$

在这两种情况下，$|q_j|=|m_j|+d_j$ 以及 $\operatorname{sgn}(q_j)=\sigma$。因此，$q$ 决定了 $m=q-\operatorname{sgn}(q_j)d_je_j$；映射 $m\to q(m)$ 是单射，而 $q(m)=-q(-m)$。另一个频率为 $m+2\sigma d_je_j$，其中 $|m_j|+2d_j\geq 2k$ 位于 E_k之外。对于 $m=0$，定义 $\psi_{d_je_j}=\psi_{-d_je_j}$ 如 (5.6) 中所示，这在频率平移后给出相同的贡献。其他频率 $\pm 2d_je_j$ 位于 E_k之外。

如步骤 2 中一样，利用（5.5）–（5.6），对于 $m\in E_k$，我们有

$$(k^2+|q|^2)\,\|\psi_q\|_\infty+(k+|q|)\,\|\psi_q'\|_\infty+\|\psi_q''\|_\infty\leq\frac{C}{c_jk^2}\,\|r_m\|_\infty.$$

单射性以及 $c_j^{-1}\leq\sqrt{2}$ 因此可得

$$\|\psi\|_{2,k;\mathbb{R}}\leq\frac{C}{c_jk^2}\sum_{m\in E_k}\|r_m\|_\infty\leq Ck^{-2}\,\|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}.$$

对于 hi gh 频率，取 $j=1$；情形 $j=2$ 可通过交换 x,y得到。定义

$$r^* = r + c_1 T_x(d_1) : D^2\psi.$$

如步骤3所示，我们知道 $r^*_m = 0$ 在 E_k上，而

$$\|r^*\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})} \le \|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})} + 4c_1 d_1^2 \left\|D^2\psi\right\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})} \le C\|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}.$$

令 $z_m = K_{|m|,\ \kappa_0} * r^*_m$ 在 E_k 并且 $z_m = 0$ 在 E_k上。方程（5.10）–（5.11）于是给出

$$((\partial_t - \kappa_0)^2 + \Delta_{x,y})z - c_1 T_x(d_1) : D^2\psi = r, \qquad \|\psi\|_{2,k;\mathbb{R}} + k^{-2}\|z\|_{2,k;\mathbb{R}} \le Ck^{-2}\|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}.$$

因此， $R_* r = (\psi,\ z)$是一个具有绝对界的右逆。

第5步：通过收敛级数处理小的非零振幅。若 $c_2 < \eta < 1/\sqrt{2}$，则$c_1 > 1/\sqrt{2}$。定义 P_* 为

$$\overline{P} = P_* + D, \qquad D(\psi, z) = -c_2 T_y(d_2) : D^2\psi.$$

因此 P_* 有一个振幅零点。步骤 4 随后给出

$$k^{-2}\|DR_* r\|_{\mathcal{A}} \le k^{-2} c_2\, 4d_2^2 \left\|D^2(R_* r)_\psi\right\|_{\mathcal{A}} \le Cc_2\, k^{-2}\|r\|_{\mathcal{A}}.$$

这里 $(R_* r)_\psi$ 表示第一分量。固定 η，使得 $\eta < 1/\sqrt{2}$ 和 $C\eta \le 1/2$。算子级数

$$(I + DR_*)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-DR_*)^\nu$$

随后收敛，且范数至多为二。因此

$$R_0 = R_* \sum_{\nu=0}^{\infty} (-DR_*)^\nu$$

是一个右逆，因为

$$\overline{P} R_0 = (P_* R_* + DR_*)(I + DR_*)^{-1} = (I + DR_*)(I + DR_*)^{-1} = I.$$

如果 $c_1 < \eta$，交换 x 和 y。由于 η 现在已固定，在 (5.1) 中可以使用同一个常数。 □

6. Patching local inverses for the variable-coefficient operator

之后 令 $w = a(h_0 + z)$，并将（4.3）除以 a，余因子项具有线性部分 t

$$P(\psi, z) = \operatorname{tr} B_z + (\operatorname{tr} D^2\psi)(\operatorname{tr} B_0) - D^2\psi : B_0.$$

其系数随 t 变化。我们在短区间上冻结振幅和 κ，将局部解拼接起来，并估计系数差与截断项。随后，诺伊曼级数为第 7 节中的压缩映射论证给出一个一致的右逆。

选取光滑截断函数 χ，ζ：$\mathbb{R} \to [0,1]$ 使得

$$\chi = 1 \text{ on } [-1,1], \quad \operatorname{supp}\chi \subset (-2,2), \qquad \zeta = 1 \text{ on } [-2,2], \quad \operatorname{supp}\zeta \subset (-3,3).$$

对于 $i \in \mathbb{Z}$，令

$$s_i = g^{-1}(Ni), \qquad V_i = \{t < 0 : |g(t)/N - i| < 3\},$$
$$\chi_i(t) = \frac{\chi(g(t)/N - i)}{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi(g(t)/N - j)}, \qquad \zeta_i(t) = \zeta(g(t)/N - i).$$

因此，

$$0 \le \chi_i, \zeta_i \le 1, \qquad \sum_i \chi_i = 1, \qquad \zeta_i\chi_i = \chi_i. \tag{6.1}$$

它们的支集是 V_i的紧子集。由于 g 是递增双射，每个 V_i 在（$-\infty$，0）中都有紧闭包。若 $V_i \cap V_j \neq \varnothing$，则 $|i - j| < 6$；因此每个 V_i 至多与另外十个过渡区间 V_j相交。在两个相邻的过渡区间之间，κ 保持不变。这个恒定频率区间的g长度至少为 N^2，因为

$$\int_{t_j+N^2/k_j}^{t_{j+1}} \kappa(t)\,dt = N^2\frac{k_{j+1}}{k_j} \ge N^2.$$

对于 $N > 6$，有 $|g(V_i)| = 6N < N^2$，因此 V_i 至多与一个过渡区间相交。因此，在 V_i上，h_0 具有以下形式，其中固定的正整数 d_1，d_2满足

$$h_0 = c_1(t)\cos(d_1x) + c_2(t)\cos(d_2y), \qquad c_1, c_2 \ge 0,\ c_1^2 + c_2^2 = 1. \tag{6.2}$$

如果存在一个过渡区间，则 d_1，d_2 是其两个频率，并按照实际的坐标方向分配。如果只有一个频率，则将相同的频率分配给另一个方向，并令振幅为零。

令 $K_i := \min(d_1, d_2)$，并令 $\kappa_i = \kappa(s_i)$。我们使用 K_i 来区分 V_i 上的局部尺度与第4节中的频率序列 k_j。如果 V_i 遇到第 j个过渡区间，则 $\{d_1, d_2\} = \{k_j, k_{j+1}\}$，且 $K_i = k_j$. 如果 V_i 位于频率为 k_j的恒定部分中，则取 $d_1 = d_2 = k_j$，并且 $K_i = k_j$.因此，每个局部尺度 K_i 都是第4节频率序列中的一项，但它在该序列中的索引不一定是 i。

根据（4.12），当 N 时，

$$K_i \le \kappa(t), d_1, d_2 \le 11K_i/10 \quad (t \in V_i). \tag{6.3}$$

I特别地，如果 $V_i \cap V_j \neq \varnothing$，在（6.3）中取它们交集中的一点可得

$$\frac{10}{11} \le \frac{K_i}{K_j} \le \frac{11}{10}. \tag{6.4}$$

此外 $6N = \int_{V_i} \kappa \ge K_i|V_i|$，因此

$$|V_i| \le 6N/K_i. \tag{6.5}$$

这些截断函数还满足

$$\|\chi_i'\|_\infty + \|\zeta_i'\|_\infty \le CK_i/N, \quad \|\chi_i''\|_\infty + \|\zeta_i''\|_\infty \le CK_i^2/N^2. \tag{6.6}$$

对于（$-\infty$，0）$\times\mathbb{T}^2$上的实傅里叶级数，定义

$$\|(\psi,z)\|_{\mathcal{X}}=\sup_i\left(\|\psi\|_{2,K_i;V_i}+K_i^{-2}\|z\|_{2,K_i;V_i}\right), \tag{6.7}$$

$$\|r\|_{\mathcal{Y}}=\sup_i K_i^{-2}\|r\|_{\mathcal{A}(V_i)}. \tag{6.8}$$

设 $\mathcal{X}$ 为由有限（ψ， z）范数（6.7）的有序对构成的空间，并设 $\mathcal{Y}$ 为有限（6.8）范数的函数 r所在的空间。两个空间都是完备的，其证明与范数为（4.4）和（4.6）的空间类似。

记 $p=(\psi,\ z)$。由（4.4）、（4.6）、（4.7）和（6.7），可得

$$\begin{array}{lll}\|\psi\|_{\mathcal{A}}\le K_i^{-2}\|p\|_{\mathcal{X}}, & \|D\psi\|_{\mathcal{A}}\le CK_i^{-1}\|p\|_{\mathcal{X}}, & \left\|D^2\psi\right\|_{\mathcal{A}}\le C\|p\|_{\mathcal{X}},\\ \|z\|_{\mathcal{A}}\le\|p\|_{\mathcal{X}}, & \|Dz\|_{\mathcal{A}}\le CK_i\|p\|_{\mathcal{X}}, & \left\|D^2z\right\|_{\mathcal{A}}\le CK_i^2\|p\|_{\mathcal{X}},\end{array} \tag{6.9}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 表示$\|\cdot\|_{\mathcal{A}(V_i)}$。由（4.14），可知 $\kappa\le CK_i$ 和 $|\kappa'|\le CK_i^2$满足

$$\|B_z\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le CK_i^2\|p\|_{\mathcal{X}}. \tag{6.10}$$

（4.5）和（4.16）现在给出

$$K_i^{-2}\|Pp\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le K_i^{-2}\|B_z\|_{\mathcal{A}}+CK_i^{-2}\left\|D^2\psi\right\|_{\mathcal{A}}\|B_0\|_{\mathcal{A}}\le C\|p\|_{\mathcal{X}}.$$

因此 $P\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是有界的。

我们首先比较下文定义的 P 与 P_i，并估计截断函数产生的各项。在每个 V_i 上，令

$$\begin{aligned}\overline{B}_i&=c_1(s_i)T_x(d_1)+c_2(s_i)T_y(d_2),\\ \overline{P}_i(\psi,z)&=((\partial_t-\kappa_i)^2+\Delta_{x,y})z-\overline{B}_i:D^2\psi.\end{aligned}$$

引理 6.1。 对于上述 N，以下估计成立。

$$\left\|B_0-\overline{B}_i\right\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le CK_i^2/N. \tag{6.11}$$

对于每个实数对 $p=(\psi,\ z)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2$ 上，满足$\|\psi\|_{2,\ K_i;\mathbb{R}}+K_i^{-2}\|z\|_{2,\ K_i;\mathbb{R}}<\infty$ ，

$$K_i^{-2}\left\|(P-\overline{P}_i)p\right\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le\frac{C}{N}\left(\|\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}}+K_i^{-2}\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}\right), \tag{6.12}$$

and

$$K_i^{-2}\|[P,\zeta_i]p\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le\frac{C}{N}\left(\|\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}}+K_i^{-2}\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}\right), \tag{6.13}$$

其中

$$[P,\zeta_i]p=P(\zeta_i\psi,\zeta_iz)-\zeta_iP(\psi,z).$$

常数 C 与 i 和 N无关。

证明。 对于任一振幅 $c = c_1$ 或 c_2，式（4.19）和（6.5）给出

$$|c(t) - c(s_i)| \le |V_i| \sup_{V_i} |c'| \le (6N/K_i)(CK_i/N^2) \le C/N.$$

对于 x 项，其对 $B_0 - B_i$ 的贡献的系数为

$$\begin{aligned} tt &: c_1'' - 2\kappa c_1' - \kappa' c_1 + (\kappa^2 - d_1^2)c_1 + d_1^2(c_1 - c_1(s_i)), \\ tx = xt &: d_1\{(\kappa - d_1)c_1 - c_1' + d_1(c_1 - c_1(s_i))\}, \\ xx &: -d_1^2(c_1 - c_1(s_i)). \end{aligned} \tag{6.14}$$

它们分别乘以余弦函数 $\cos(d_1 x)$、正弦函数 $\sin(d_1 x)$和 余弦函数 $\cos(d_1 x)$。 y 项具有所显示的系数，其中 d_1、c_1、x 分别替换为 d_2、c_2、y，而条目 tx、xx 分别替换为 ty、yy。在（6.14）的第一行中，五项的界为

$$CK_i^2N^{-4}, \quad CK_i^2N^{-2}, \quad CK_i^2N^{-6}, \quad CK_i^2N^{-4}, \quad CK_i^2N^{-1},$$

分别为。在第二行中，它们分别由 $CK_i^2N^{-4}$、$CK_i^2N^{-2}$和 $CK_i^2N^{-1}$界定；第三行由 $CK_i^2N^{-1}$界定。求和即得（6.11）。

由于 κ 和 κ_i 位于相同的相邻频率之间，（4.12）、（4.15）和（6.3）给出

$$|\kappa - \kappa_i| \le CK_iN^{-4}, \qquad |\kappa^2 - \kappa_i^2 - \kappa'| \le CK_i^2N^{-4}.$$

将两个算子相减，得到

$$(P - \overline{P}_i)(\psi, z) = -2(\kappa - \kappa_i)z_t + (\kappa^2 - \kappa_i^2 - \kappa')z + (\operatorname{tr} B_0)(\operatorname{tr} D^2\psi) - (B_0 - \overline{B}_i) : D^2\psi.$$

使用(4.7) 作用于一对(ψ， z)上，除以 K_i^2后，前两项的范数至多为 st

$$CK_i^{-2}\left(K_iN^{-4}\frac{\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}}{K_i} + K_i^2N^{-4}\frac{\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}}{K_i^2}\right) \le CN^{-4}K_i^{-2}\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}.$$

剩余各项根据(4.16)和(6.11)，其除后范数至多为

$$CK_i^{-2}(K_i^2N^{-2} + K_i^2N^{-1})\|\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}} \le CN^{-1}\|\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}}.$$

综合以上即得(6.12)。

为估计交换子，令 $e_t = (1, 0, 0)$。根据乘积法则，

$$D^2(\zeta_i\psi) - \zeta_i D^2\psi = \zeta_i'(e_t \otimes D\psi + D\psi \otimes e_t) + \zeta_i''\psi\, e_t \otimes e_t.$$

代入 P 的定义可得

$$[P, \zeta_i]p = 2\zeta_i' z_t + (\zeta_i'' - 2\kappa\zeta_i')z + ((\operatorname{tr} B_0)I_3 - B_0) : \left[\zeta_i'(e_t \otimes D\psi + D\psi \otimes e_t) + \zeta_i''\psi\, e_t \otimes e_t\right].$$

前两项除以 K_i^2 后可估计为

$$CK_i^{-2}\left[\frac{K_i}{N}\frac{\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}}{K_i} + \left(\frac{K_i^2}{N^2} + \frac{K_i^2}{N}\right)\frac{\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}}{K_i^2}\right] \le \frac{C}{N}K_i^{-2}\|z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}.$$

由（4.16），

$$\|(\operatorname{tr} B_0)I_3 - B_0\|_{\mathcal{A}(V_i)} \le 3\|\operatorname{tr} B_0\|_{\mathcal{A}(V_i)} + \|B_0\|_{\mathcal{A}(V_i)} \le CK_i^2.$$

因此，除以 K_i^2 后，剩余各项的范数至多为

$$C\left[\frac{K_i}{N}\frac{\|\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}}}{K_i}+\frac{K_i^2}{N^2}\frac{\|\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}}}{K_i^2}\right]\le\frac{C}{N}\|\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}}.$$

这就证明了（6.13）。 □

命题 6.2。对于所有充分大的 N，存在一个实线性算子 $\mathcal{R}:\ \mathcal{Y}\to\mathcal{X}$满足

$$P\mathcal{R}=I_{\mathcal{Y}},\qquad \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}\le C,$$

其中 C 与 N无关。

证明。令 R_i 为引理 P_i 5.1中的右逆。将 $\chi_i r$ 在 V_i 之外延拓为零，定义于 $\mathbb{R}$上。由于 $0\le\chi_i\le 1$,

$$K_i^{-2}\|\chi_i r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}\le K_i^{-2}\|r\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le\|r\|_{\mathcal{Y}}.$$

令 $p_i=R_i(\chi_i r)$，并定义

$$\mathcal{S}r=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\zeta_i p_i.$$

该和是局部有限的。（5.1）给出

$$\|(p_i)_\psi\|_{2,K_i;\mathbb{R}}+K_i^{-2}\|(p_i)_z\|_{2,K_i;\mathbb{R}}\le C\|r\|_{\mathcal{Y}}.$$

由（4.8）和（6.6），将 p_i 替换为 $\zeta_i p_i$后，同样的界仍然成立。对于 $V_i\cap V_j\neq\varnothing$，由（6.4）以及范数定义（4.6）可得

$$\|\zeta_i(p_i)_\psi\|_{2,K_j;V_j}+K_j^{-2}\|\zeta_i(p_i)_z\|_{2,K_j;V_j}\le C\|r\|_{\mathcal{Y}}.$$

由于 $\zeta_i p_i$ 的支集包含于 V_i中，因此每个 V_j上至多有十一项有贡献。由三角不等式和（6.7）可得

$$\|\mathcal{S}r\|_{\mathcal{X}}\le C\|r\|_{\mathcal{Y}}. \tag{6.15}$$

利用 $\overline{P_i}p_i=\chi_i r$ 和 $\zeta_i\chi_i=\chi_i$，我们得到

$$P\mathcal{S}r=r+\mathcal{E}r,\qquad \mathcal{E}r=\sum_i\left[\zeta_i(P-\overline{P}_i)p_i+[P,\zeta_i]p_i\right]. \tag{6.16}$$

De注意 $e_i=\zeta_i(P-\overline{P}_i)\,p_i+[P,\zeta_i]p_i$。引理6.1，结合（6.1）和（5.1）给出 es

$$K_i^{-2}\|e_i\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le CN^{-1}\|r\|_{\mathcal{Y}}.$$

在固定的 V_j上，由三角不等式可得

$$K_j^{-2}\sum_m\|(\mathcal{E}r)_m\|_{\infty,V_j}\le\sum_{i:V_i\cap V_j\neq\varnothing}\left(\frac{K_i}{K_j}\right)^2K_i^{-2}\sum_m\|(e_i)_m\|_{\infty,V_i}\le\frac{C}{N}\|r\|_{\mathcal{Y}}.$$

对 j 取上确界可得

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}}\le C/N. \tag{6.17}$$

取 N 足够大，使（6.17）右侧不超过 $1/2$。因此，$(I+\mathcal{E})^{-1}$ 的诺伊曼级数在巴拿赫空间 $\mathcal{Y}$ 上按算子范数收敛，且其范数不超过二。定义

$$\mathcal{R}=\mathcal{S}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-\mathcal{E})^{\nu}.$$

由于 P有界，式（6.16）和（6.15）便可得出

$$P\mathcal{R}=(I+\mathcal{E})\sum_{\nu=0}^{\infty}(-\mathcal{E})^{\nu}=I_{\mathcal{Y}},$$

$$\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}\le\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\|\mathcal{E}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}}^{\nu}\le 2\,\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}\le C.$$

所有余切片、系数矩阵和局部逆算子都保持实值函数，因此 $\mathcal{R}$ 也如此。 □

注 6.3。 对于固定的 N，我们省略空间 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 以及算子 $P,\mathcal{S},\mathcal{E},\mathcal{R}$ 对 N 的依赖。更确切地说，存在常数 N_0,C_S,C_E，它们仅依赖于固定函数 S,χ,ζ，使得对于每个整数 $N\ge N_0$，算子 $\mathcal{S}_N$ 和 $\mathcal{E}_N$ 满足

$$P_N\mathcal{S}_N=I_{\mathcal{Y}_N}+\mathcal{E}_N,\qquad\|\mathcal{S}_N\|\le C_S,\qquad\|\mathcal{E}_N\|\le C_E/N.$$

因此，对于每个 $N\ge\max\{N_0,2C_E\}$，算子

$$\mathcal{R}_N=\mathcal{S}_N(I_{\mathcal{Y}_N}+\mathcal{E}_N)^{-1}$$

是 P_N 的右逆，并满足 $\|\mathcal{R}_N\|\le 2C_S$。下文每当增大 N 时，所有依赖于 N 的对象均视为使用新的 N 值构造；估计中的所有常数保持不变。

7. Solving the exact nonlinear equation

第 6 节为 P（式（4.3）中归一化余子式表达式的线性部分）提供了一个一致有界的右逆。（4.3）还包含迹、非线性余子式和行列式。我们对这些其余项进行估计，并应用压缩映射构造一个实数对 $(\psi,z)\in\mathcal{X}$，使得 $\|(\psi,z)\|_{\mathcal{X}}$足够小，且 ψ和 $w=a(h_0+z)$ 几乎处处满足（4.3），其中 $-1<t<0$。

第 6 节中逆的构造使用了所有 $t<0$，但定理 1.2中的函数只在 $-1<t<0$时才需要。由于 a 随 $t\to-\infty$增大，令

$$\tau(t)=\mathbf{1}_{(-1,0)}(t)a(t)^2.$$

它只会乘以一个行列式，且绝不会被求导。因此，有界可测截断函数便已足够。由（4.18）和（6.3），

$$\sup_{t<0}\tau(t)\kappa(t)^4\le N^{-4},\qquad\|\tau\|_{L^\infty(V_i)}\le N^{-4}K_i^{-4}.\tag{7.1}$$

定义

$$F(\psi, z) = \operatorname{cof}(I_3 + D^2\psi) : (B_0 + B_z) + \tau \det(B_0 + B_z). \tag{7.2}$$

我们旨在求解 $F(\psi,\ z) = 0$ 在 $t < 0$ 上。在 $-1 < t < 0$ 上，由于 $D^2 w = a(B_0 + B_z)$，三维行列式的齐次性给出

$$\text{余子式}(I_3 + D^2\psi) :\ D^2 w + \text{行列式}\ D^2 w = a\,\text{余子式}(I_3 + D^2\psi) : (B_0 + B_z)\ + a^3\,\text{行列式}(B_0 + B_z)\ = aF(\psi,\ z)。$$

因此，方程（7.2）的一个解给出了所需的方程（4.3）。利用（2.7），余子式部分展开为

$$\begin{aligned}\operatorname{cof}(I_3 + D^2\psi) : (B_0 + B_z) = {} & \operatorname{tr} B_0 + \operatorname{tr} B_z + ((\operatorname{tr} D^2\psi) I_3 - D^2\psi) : B_0 \\ & + ((\operatorname{tr} D^2\psi) I_3 - D^2\psi) : B_z + \operatorname{cof} D^2\psi : (B_0 + B_z).\end{aligned}$$

将常数项分离出来，我们得到

$$F(p) = F(0) + Pp + \mathcal{N}(p), \qquad F(0) = \operatorname{tr} B_0 + \tau \det B_0, \tag{7.3}$$

其中

$$\mathcal{N}(p) = ((\operatorname{tr} D^2\psi) I_3 - D^2\psi) : B_z + \operatorname{cof} D^2\psi : (B_0 + B_z) + \tau\{\det(B_0 + B_z) - \det B_0\}. \tag{7.4}$$

特别地，$\mathcal{N}(0) = 0$。

引理 7.1. 存在常数 C_0, C_1，它们与较大的 N 无关，使得

$$\|F(0)\|_{\mathcal{Y}} \le C_0 N^{-2}. \tag{7.5}$$

对于 $0 < r \le 1$ 和 $\|p\|_{\mathcal{X}}, \|q\|_{\mathcal{X}} \le r$,

$$\|\mathcal{N}(p) - \mathcal{N}(q)\|_{\mathcal{Y}} \le C_1(r + N^{-4}) \|p - q\|_{\mathcal{X}}. \tag{7.6}$$

证明. 在固定的 V_i上，将范数 $\mathcal{A}(V_i)$ 简记为 $\mathcal{A}$. (4.16), (4.9) 和 (7.1) 给出

$$\begin{aligned}\|F(0)\|_{\mathcal{A}} &\le \|\operatorname{tr} B_0\|_{\mathcal{A}} + \|\tau\|_{\infty, V_i} \|\det B_0\|_{\mathcal{A}} \le CK_i^2 N^{-2} + N^{-4} K_i^{-4} C(K_i^2)^3 \\ &= CK_i^2(N^{-2} + N^{-4}).\end{aligned}$$

两边除以 K_i^2，使用 $N^{-4} \le N^{-2}$，并对 i取上确界。由此证明了 (7.5)。

~取两组配对 $p = (\psi, z)$ 和 $q = (\psi, \tilde{z})$. (6.9) 和 (6.10) 给出

$$\begin{gathered}\left\|D^2\psi\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|D^2\widetilde{\psi}\right\|_{\mathcal{A}} \le Cr, \qquad \left\|D^2\psi - D^2\widetilde{\psi}\right\|_{\mathcal{A}} \le C\|p - q\|_{\mathcal{X}}, \\ \|B_z\|_{\mathcal{A}} + \|B_{\tilde{z}}\|_{\mathcal{A}} \le CK_i^2 r, \qquad \|B_z - B_{\tilde{z}}\|_{\mathcal{A}} \le CK_i^2 \|p - q\|_{\mathcal{X}}, \\ \|B_0 + B_z\|_{\mathcal{A}} + \|B_0 + B_{\tilde{z}}\|_{\mathcal{A}} \le CK_i^2(1 + r).\end{gathered} \tag{7.7}$$

我们不我们将（7.7）应用于（7.4）的每一项。 $\mathcal{N}$（p） $-\mathcal{N}$（q）由三部分组成。首先 ，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 :=& ((\operatorname{tr} D^2\psi) I_3 - D^2\psi) : B_z - ((\operatorname{tr} D^2\widetilde{\psi}) I_3 - D^2\widetilde{\psi}) : B_{\tilde{z}} \\ =& ((\operatorname{tr}(D^2\psi - D^2\widetilde{\psi})) I_3 - (D^2\psi - D^2\widetilde{\psi})) : B_z + ((\operatorname{tr} D^2\widetilde{\psi}) I_3 - D^2\widetilde{\psi}) : (B_z - B_{\tilde{z}}).\end{aligned}$$

由于 $\left\|(\operatorname{tr} D^2\psi)I_3 - D^2\psi\right\|_{\mathcal{A}} \le 4\left\|D^2\psi\right\|_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{E}_1$ 因此有界于

$$C\|p-q\|_{\mathcal{X}}\ K_i^2 r + Cr\,K_i^2\|p-q\|_{\mathcal{X}} \le CK_i^2 r\|p-q\|_{\mathcal{X}}.$$

其次,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 :=& \operatorname{cof} D^2\psi : (B_0+B_z) - \operatorname{cof} D^2\widetilde{\psi} : (B_0+B_{\tilde{z}})\\ =&(\operatorname{cof} D^2\psi - \operatorname{cof} D^2\widetilde{\psi}) : (B_0+B_z) + \operatorname{cof} D^2\widetilde{\psi} : (B_z - B_{\tilde{z}}).\end{aligned}$$

由（4.10）和（7.7），

$$\left\|\operatorname{cof} D^2\psi - \operatorname{cof} D^2\widetilde{\psi}\right\|_{\mathcal{A}} \le Cr\|p-q\|_{\mathcal{X}}, \qquad \left\|\operatorname{cof} D^2\widetilde{\psi}\right\|_{\mathcal{A}} \le Cr^2.$$

因此， $\mathcal{E}_2$ 有界于

$$Cr\|p-q\|_{\mathcal{X}}\ K_i^2(1+r) + Cr^2K_i^2\|p-q\|_{\mathcal{X}} \le CK_i^2(r+r^2)\|p-q\|_{\mathcal{X}}.$$

根据（4.11）可 以及（7.7），最后一项 $\mathcal{E}_3$: $=\tau\{\det(B_0+B_z) - \det(B_0+B_{\tilde{z}})\}$ 也有界,

$$\begin{aligned}&\|\tau\{\det(B_0+B_z) - \det(B_0+B_{\tilde{z}})\}\|_{\mathcal{A}}\\ \le& C\|\tau\|_{\infty,V_i}\left(\|B_0+B_z\|_{\mathcal{A}} + \|B_0+B_{\tilde{z}}\|_{\mathcal{A}}\right)^2\|B_z - B_{\tilde{z}}\|_{\mathcal{A}}\\ \le& C(N^{-4}K_i^{-4})\,K_i^4(1+r)^2K_i^2\|p-q\|_{\mathcal{X}} = CN^{-4}K_i^2(1+r)^2\|p-q\|_{\mathcal{X}}.\end{aligned}$$

将 $\mathcal{E}_1$、 $\mathcal{E}_2$、 $\mathcal{E}_3$ 相加，除以 K_i^2，并对 i 取上确界，得到

$$\|\mathcal{N}(p) - \mathcal{N}(q)\|_{\mathcal{Y}} \le C\{r + r^2 + N^{-4}(1+r)^2\}\|p-q\|_{\mathcal{X}}.$$

由于 $r \le 1$， $r^2 \le r$ 且 $(1+r)^2 \le 4$，我们证明（7.6）。 □

Prop命题 7.2。 对所有充分大的 N，存在一个实数对 $p=(\psi,\ z) \in \mathcal{X}$满足 h

$$F(\psi, z) = 0 \quad \text{a.e. on } t<0, \qquad \|p\|_{\mathcal{X}} \le CN^{-2}. \tag{7.8}$$

证明。 设 C_R 是 $\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}$ 的一个上界（可取 $C_R = 2C_S$，即备注6.3中的一致上界），并令

$$r_N = 2C_RC_0N^{-2}.$$

这些常数与 N无关。增大 N，直到

$$r_N \le 1, \qquad C_RC_1(r_N + N^{-4}) \le \frac{1}{4}.$$

对 $\|p\|_{\mathcal{X}} \le r_N$，定义

$$T(p) = -\mathcal{R}\big(F(0) + \mathcal{N}(p)\big).$$

利用 $\mathcal{N}$（0） $=0$，引理7.1 给出

$$\|T(p)\|_{\mathcal{X}} \le C_RC_0N^{-2} + C_RC_1(r_N+N^{-4})\|p\|_{\mathcal{X}} \le 3r_N/4,$$

$$\|T(p) - T(q)\|_{\mathcal{X}} \le \tfrac{1}{4}\|p-q\|_{\mathcal{X}}.$$

因此， T 是一个压缩映射。定义闭球 $B^* = \{p \in \mathcal{X} : \ \|p\|_{\mathcal{X}} \le r_N\}$，它是完备的。根据巴拿赫压缩映射定理， T 因此在 B^* 中有唯一的不动点。特别地，从 $p^{(0)} = 0$ 开始，迭代

$$p^{(j+1)} = -\mathcal{R}\big(F(0) + \mathcal{N}(p^{(j)})\big) \tag{7.9}$$

在 $\mathcal{X}$ 中收敛到 p，且具有 $\|p\|_{\mathcal{X}} \le r_N$。压缩估计还给出

$$\left\|p^{(j+1)} - p^{(j)}\right\|_{\mathcal{X}} \le 4^{-j} \left\|p^{(1)}\right\|_{\mathcal{X}} \le \tfrac{1}{2} r_N 4^{-j}.$$

将 $P\mathcal{R} = I$ 应用于 (7.9)，对于 $j \ge 1$,

$$Pp^{(j)} = -F(0) - \mathcal{N}(p^{(j-1)}).$$

因此，(7.3) 和 (7.6) 意味着

$$F(p^{(j)}) = \mathcal{N}(p^{(j)}) - \mathcal{N}(p^{(j-1)}),$$
$$\left\|F(p^{(j)})\right\|_{\mathcal{Y}} \le C_1(r_N + N^{-4})\, \tfrac{1}{2} r_N 4^{1-j} \longrightarrow 0.$$

在 B^*上，(7.3也可推出

$$\left\|F(p^{(j)}) - F(p)\right\|_{\mathcal{Y}} \le \big(\|P\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} + C_1(r_N + N^{-4})\big) \left\|p^{(j)} - p\right\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0.$$

因此， $F(p) = 0$ 在 $\mathcal{Y}$中。对于每个 i，其傅里叶系数在V_i上几乎处处为零，因此 $F(p) = 0$ 在 $V_i \times \mathbb{T}^2$上几乎处处成立。可数覆盖 $\{V_i\}$ 给出 $F(p) = 0$ 在 $(-\infty,0) \times \mathbb{T}^2$上几乎处处成立。所有迭代及其极限均为实数。这证明了 (7.8)。□

8. Proof of Theorem 1.2

我们首先将函数延拓到 $t = 0$ 上，并证明命题 4.1。随后我们在三维 中证明定理 1.2，并将其推广到更高维。取由命题 ψ， z7.2所给出的实数对 ψ，将 $t \ge 0$延拓为零，并在 B_1^3上定义

$$\phi = Q_3 + \psi, \qquad w(t,x,y) = \begin{cases} a(t)\big(h_0(t,x,y) + z(t,x,y)\big), & t < 0, \\ 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

引理 8.1。 对于所有充分大的 N，(8.1) 中的函数属于 $C^{1,\ 1}(B_1^3)$，并且满足

$$\|D^2\phi - I_3\|_{L^\infty(B_1^3)} + \|D^2 w\|_{L^\infty(B_1^3)} \le CN^{-2},$$

其中， C与 N无关。此外，在 $B^3_{1,\ +}$上， $\phi = Q_3$和 $w = 0$，而 $w(t,\ 0,\ 0) > 0$，当 $-1 < t < 0$时。

证明。由（6.3）、（6.9）和（7.8），对几乎处处的（$t,\ x,\ y$） $\in$（$V_i \cap$（$-1,\ 0$））$\times \mathbb{T}^2$。

$$|\psi(t,x,y)| \le CN^{-2}\kappa(t)^{-2},\ |D\psi(t,x,y)| \le CN^{-2}\kappa(t)^{-1},\ |D^2\psi(t,x,y)| \le CN^{-2},$$
$$|z(t,x,y)| \le CN^{-2}, \qquad |Dz(t,x,y)| \le CN^{-2}\kappa(t). \tag{8.2}$$

对于 h_0、$c_1^2+c_2^2=1$ 中的两个非负振幅，因此 $c_1+c_2\le\sqrt{2}$。于是，由（4.13）、（6.2）和（4.19），

$$|h_0|\le\sqrt{2},\qquad |\partial_x h_0|+|\partial_y h_0|\le C\kappa,\qquad |\partial_t h_0|\le C\kappa N^{-2}.$$

结合 $a'=-\kappa a$ 使用乘积法则，得到

$$|w|=a|h_0+z|\le Ca,\qquad |w_t|\le a\{\kappa|h_0+z|+|(h_0)_t|+|z_t|\}\le Ca\kappa,$$
$$|w_x|+|w_y|\le a\{|(h_0)_x|+|(h_0)_y|+|z_x|+|z_y|\}\le Ca\kappa.$$

最后，在 $-1<t<0$ 上，我们有 $D^2w=a(B_0+B_z)$，因此几乎处处

$$|w|\le Ca,\qquad |Dw|\le Ca\kappa,\qquad |D^2w|\le Ca\kappa^2\le CN^{-2}. \tag{8.3}$$

对于海森矩阵估计，我们使用 $\|B_0\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le CK_i^2$，$\|B_z\|_{\mathcal{A}(V_i)}\le CK_i^2N^{-2}$，以及（4.18）。

（4.17）、（8.2）和（8.3）表明，当 $t\uparrow 0$ 时，ψ、w 以及 $D\psi$、Dw 一致趋于零。对于 $F=\psi$ 或 w，由（8.2）和（8.3）可得 $|D^2F|\le L$：在负半球中几乎处处成立。将引理 7.8(iii) 中的 $W^{1,\infty}$ 估计应用于 $e\cdot DF$，对每个单位向量 e，可知 DF 是 L-利普希茨的，因此 $|DF(t,x,y)-DF(s,x,y)|\le L(s-t)$ 对 $t<s<0$ 成立。取 $s\uparrow 0$ 并利用上述梯度极限，得到 $|DF(t,x,y)|\le L|t|$。由于 $F(0,x,y)=0$，对 t 积分可得

$$|F(t,x,y)|\le\int_t^0 L|s|\,ds=\frac{L}{2}t^2.$$

对于任意 $X_0\in B_1^3\cap\{t=0\}$，这给出在负侧上 $|F(X)-F(X_0)|\le\frac{L}{2}|X-X_0|^2$。由于 $F=0$，正侧上也有相同的界。因此 $DF(X_0)=0$。若 $X=(t,x,y)$ 位于负半球内，且 $Y\in B_1^3\cap\{t\ge 0\}$，则

$$|DF(X)-DF(Y)|=|DF(X)|\le L|t|\le L|X-Y|.$$

因此，DF 在 B_1^3 上是 L-利普希茨的。这证明了 $\psi,\ w\in C^{1,1}(B_1^3)$，并且

$$\|D^2\psi\|_{L^\infty(B_1^3)}+\|D^2w\|_{L^\infty(B_1^3)}\le CN^{-2}$$

其中常数 C 固定且与 N 无关。

在 (x,y) 处，$=(0,0)$，$h_0(t)=$余弦 $\theta_j(t)$+正弦 $\theta_j(t)$。在过渡区间内，其值为余弦 $\theta_j(t)$+正弦 $\theta_j(t)\ge 1$。在常值区间上，其值为 1。选取足够大的 N，使得由 (8.2) 有 $|z|\le 1/2$。由于 $a(t)>0$，$w(t,0,0)=a(t)(h_0(t,0,0)+z(t,0,0))\ge a(t)/2>0$，当 $-1<t<0$ 时。□

命题 *4.1* 的证明。给定 $\delta>0$，选择 N 足够大，使得 $CN^{-2}\le\delta$ 在引理 8.1 中成立。在 $B_1^3\cap\{t<0\}$ 上，我们有

$$D^2\phi=I_3+D^2\psi,\qquad D^2w=a(B_0+B_z),\qquad \tau=a^2.$$

因此，由（7.2）和命题7.2，

$$\begin{aligned}\operatorname{cof}(D^2\phi):D^2w+\det D^2w&=a\big\{\operatorname{cof}(I_3+D^2\psi):(B_0+B_z)+a^2\det(B_0+B_z)\big\}\\&=aF(\psi,z)=0\qquad\text{almost everywhere.}\end{aligned}$$

在 $B_{1,+}^3$，同一恒等式可由 $w=0$ 得出。由于 $B_1^3\cap\{t=0\}$ 的勒贝格测度为零，（4.2）在 B_1^3上几乎处处成立。正则性、界（4.1）以及关于 ϕ，w 的取值的断言均由引理 8.1 得出。□

定理 *1.2* 在三维中的证明。取 $0<\varepsilon<1$。应用命题 4.1，令 $\delta=\varepsilon/4$并设

$$u_3=\phi+w,\qquad v_3=\phi-w.$$

两个函数都属于 $C^{1,1}(B_1^3)$。对于几乎处处的 $X\in B_1^3$ 以及每个 $\xi\in\mathbb{R}^3$，

$$|\xi^T(D^2\phi-I_3\pm D^2w)\xi|\le(|D^2\phi-I_3|+|D^2w|)|\xi|^2\le\frac{\varepsilon}{4}|\xi|^2.$$

因此，

$$(1-\varepsilon/4)I_3\le D^2u_3,D^2v_3\le(1+\varepsilon/4)I_3\quad\text{almost everywhere,}\tag{8.4}$$

这意味着 u 和 v 在 B_1^3上一致凸。

由（2.6）和（4.2），在 B_1^3上几乎处处有

$$\begin{aligned}\det D^2u_3-\det D^2v_3&=\det(D^2\phi+D^2w)-\det(D^2\phi-D^2w)\\&=2\big\{\operatorname{cof}(D^2\phi):D^2w+\det D^2w\big\}=0.\end{aligned}\tag{8.5}$$

选取一个零测集 $E_3\subset B_1^3$，使得两个海森矩阵均存在，且 (8.4)、(8.5) 在 $B_1^3\setminus E_3$的每一点都成立。定义

$$f_3(X)=\begin{cases}\det D^2u_3(X), & X\in B_1^3\setminus E_3,\\ 1, & X\in E_3.\end{cases}$$

那么 f_3是可测的，并且几乎处处同时与 $\det D^2u_3$和 $\det D^2v_3$相等。(8.4) 给出

$$1-\varepsilon<(1-\varepsilon/4)^3\le f_3\le(1+\varepsilon/4)^3<1+\varepsilon.$$

将 (2.5) 应用于 u_3 和 v_3，

$$\begin{aligned}M_{u_3}(E)=|Du_3(E)|&=\int_E\det D^2u_3(X)\,dX=\int_E f_3(X)\,dX\\&=\int_E\det D^2v_3(X)\,dX=|Dv_3(E)|=M_{v_3}(E)\end{aligned}$$

对每个 Borel 集 $E\subset B_1^3$ 都成立。特别地，两个测度在 $B_1^3\cap\{t=0\}$ 上的质量均为零。最后，命题 4.1 给出 $u_3=v_3=Q_3$ 在 $B_{1,+}^3$，以及 $u_3(t,0,0)-v_3(t,0,0)=2w(t,0,0)>0$上对 $-1<t<0$成立。这就证明了三维情形下的全部四个断言。□

定理的证明*1.2* 在维数 $n>3$。令 u_3，v_3，f_3 为针对相同的 ε构造出的函数。记 $X=(X',X'')\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^{n-3}$ 并定义

$$u_n(X)=u_3(X')+\tfrac12|X''|^2,\qquad v_n(X)=v_3(X')+\tfrac12|X''|^2.$$

若 $X \in B_1^n$，则 $|X'| \le |X| < 1$。它们的梯度分别为 $(Du_3(X')\ X'')$ 和 $(Dv_3(X')\ X'')$，它们是利普希茨连续且为单射。它们的海森矩阵为

$$D^2u_n = \begin{pmatrix} D^2u_3 & 0 \\ 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}, \qquad D^2v_n = \begin{pmatrix} D^2v_3 & 0 \\ 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}, \quad \text{almost everywhere.}$$

令 $E_n = B_1^n \cap E_3 \times [-1,1]^{n-3}$。富比尼定理给出 $|E_n| \le 2^{n-3}|E_3| = 0$。对于每个$X = (X', X'') \in B_1^n \setminus E_n$，(8.5) 在 X'处成立。因此，$\det(D^2u_n) = \det(D^2v_n)$ 在 B_1^n中几乎处处成立。(8.4) 推出

$$(1-\varepsilon/4)I_n \le D^2u_n, D^2v_n \le (1+\varepsilon/4)I_n \quad \text{almost everywhere.}$$

令 $f_n(X) = f_3(X')$。对于几乎所有 $X \in B_1^n$，我们有

$$\det D^2u_n(X) = \det D^2u_3(X') = f_n(X) = \det D^2v_n(X).$$

其界仍为 $1-\varepsilon$ 和 $1+\varepsilon$。对每个博雷尔 2.5，应用 ($E \subset B_1^n$,

$$M_{u_n}(E) = \int_E \det D^2u_n(X)\,dX = \int_E f_3(X')\,dX = \int_E f_n(X)\,dX = M_{v_n}(E).$$

这证明了 (1.2)，也包括与 $\{X_1 = 0\}$ 相交的集合。

若 $X_1 > 0$, $u_n(X) = v_n(X) = Q_n(X)$，且 $f_n(X) = 1$。对于 $-1 < t < 0$, $u_n(t, 0, \ldots,$ $0) - v_n(t, 0, \ldots, 0) = u_3(t, 0, 0) - v_3(t, 0, 0) = 2w(t, 0, 0) > 0$. 定理 1.2 的所有断言现在都在每个维数 $n > 3$ 中成立。□

推论 *1.3*的证明。 令

$$\varepsilon = \frac{M-m}{M+m}, \qquad s = \left(\frac{m+M}{2}\right)^{1/n},$$

并令 u_n, v_n, f_n 由定理 1.2 针对这一取值的 ε给出。

固定 $X_0 \in \Omega$，并选取 $0 < r < R$ 使得 $B_r(X_0) \subset \Omega \subset B_R(X_0)$。定义 $T(X) = (X - X_0)/R$ 于 $B_R(X_0)$ 上，并且

$$u(X) = sR^2u_n(T(X)), \qquad v(X) = sR^2v_n(T(X)), \qquad f(X) = s^nf_n(T(X)).$$

u 和 v 在 Ω 上的限制是一致凸的，且具有 Lipschitz 梯度。由于$Du(X) = sR\,Du_n(T(X))$ 且 $Dv(X) = sR\,Dv_n(T(X))$，每个 Borel 集 $E \subset \Omega$ 都满足

$$M_u(E) = (sR)^nM_{u_n}(T(E)) = \int_E f(X)\,dX = (sR)^nM_{v_n}(T(E)) = M_v(E).$$

密度界由 $s^n(1-\varepsilon) = m$ 和 $s^n(1+\varepsilon) = M$ 得出。

令 $e_1 = (1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$。根据定理 1.2 的第 (2) 部分，这两个解在非空开集 $\{X \in \Omega\colon\ (X - X_0)\cdot e_1 > 0\}$ 上一致，而 $u(X_0 - he_1) > v(X_0 - he_1)$ 对每个 $0 < h < r$ 都成立。因此，u 和 v 在 Ω 上不相同。□

Acknowledgement

在准备本手稿的过程中使用了 AI 工具 ChatGPT（OpenAI）。作者已审阅所有 AI 辅助生成的内容，并对最终手稿承担全部责任。

References

1. Giovanni Alessandrini, *A simple proof of the unique continuation property for two dimensional elliptic equations in divergence form* 276, ` 1992 , Quaderni Matematici, 的里雅斯特大学 II 系列, 。2. , *Strong unique continuation for general elliptic equations in 2D*, 《数学分析与应用杂志》386（2012年）, 第2期, 669–676。3. Giovanni Alessandrini 和 Rolando Magnanini, *Elliptic equations in divergence form geometric critical* , , , 《工业与应用数学学会数学分析杂志》 （） , 第–期。4. A. Alexandroff, *Smoothness of the convex surface of bounded Gaussian curvature*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 36（1942年）, 195–199。5. A. D. Alexandrov, *Dirichlet's problem for the equation* det $\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. *I*, 《列宁格勒大学学报》数学、力学与天文学系列13（1958年）, 第1期, 5–24。6. Nachman Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order* 9 **36** 1957 235 249 , 《J. Math. Pures Appl.》 （） （） , –。7. I. Ya. Bakelman, *A generalization of the solution of Monge–Ampère equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 114（1957年）, 第6期, 1143–1145。8. John M. Ball、J. C. Currie 和 Peter J. Olver, *Null Lagrangians weak continuity and variational problems* , , , 《J. Funct. Anal.》 （） , 第–期。9. Luis A. Caffarelli, *Interior W^2, ^{p} estimates for solutions of the Monge–Ampère equation*, Ann. of Math. (2) 131（1990年）, 第1期, 135–150。10. , *Some regularity properties of solutions of Monge Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. 44（1991年）, 第8–9期, 965–969。11. Yuriria Cort´es-Poza、David Padilla-Garza 和 Pablo Padilla-Longoria, *New and old links between PDEs and Voronoi patterns* **202** 2026 3 Acta Appl. Math.（） , 。12. Panagiota Daskalopoulos 和 Ovidiu Savin, *On Monge–Ampère equations with homogenous right-hand sides*, Comm. Pure Appl. Math. 62（2009年）, 第5期, 639–676。13. Guido De Philippis 和 Alessio Figalli, *W^2, ^{1} regularity for solutions of the Monge–Ampère equation*, Invent. Math. 192（2013年）, 第1期, 55–69。14. , *The Monge–Ampère equation and its link to optimal transportation*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 51（2014年）, 第4期, 527–580。15. Guido De Philippis、Alessio Figalli 和 Ovidiu Savin, *A note on interior $W^{2\,1+\varepsilon}$ estimates for the Monge–Ampère equation* **357** 2013 1, 11 22 , , 《Math. Ann.》 （） , 第–期。16. Guido De Philippis、Andr´e Guerra 和 Riccardo Tione, *Unique continuation for differential inclusions*, Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 43（2026年）, 第1期, 127–154。17. Herbert Federer, *Geometric measure theory*, 数学科学基础丛书, 第153卷, 施普林格, 纽约, 1969年。18. Alessio Figalli, *The Monge–Ampère equation and its applications*, 苏黎世高级数学讲座, 欧洲数学学会, 苏黎世, 2017年。19. Pengfei Guan, *Regularity of a class of quasilinear degenerate elliptic equations*, Adv. Math. 132（1997年）, 24–45。20. Cristian E. Guti´errez, *The Monge–Ampère equation*, 非线性微分方程及其应用进展, 第44卷, Birkhäuser Boston, 马萨诸塞州波士顿, 2001年。21. Bastian Harrach、Valter Pohjola 和 Mikko Salo, *Monotonicity and local uniqueness for the Helmholtz equation* **12** 2019 7, 1741 1771 , Analysis & PDE （） , 第–期。22. Erhard Heinz, *On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings*, J. Analyse Math. 5（1956年）, 197–272。23. , *On elliptic Monge–Ampère equations and Weyl's embedding problem*, J. Analyse Math. 7（1959年）, 1–52。

24. John K. Hunter, *Notes on partial differential equations*, 讲义，戴维斯加利福尼亚大学数学系，2014年。25. Huaiyu Jian 和 Xushan Tu, *Strong maximum principle for generalized solutions to equations of the Monge–Ampère type*, Adv. Math. **463** 2025 110116 （），。26. Jiakun Liu, *Interior C^2 estimate for Monge-Ampère equation in dimension two*, 《美国数学会会刊》**149** （2021年），第6期，2479–2486。27. Niculae Mandache, *On a counterexample concerning unique continuation for elliptic equations in divergence form*, Math. Phys. Anal. Geom. **1** 1998 273 292 （）。–。28. Keith Miller, *Nonunique continuation for uniformly parabolic and elliptic equations in selfadjoint divergence form with Hölder continuous coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** 1973 2, 350 354 （）。第–期，29. *Nonunique continuation for uniformly parabolic and elliptic equations in self-adjoint divergence form with Hölder continuous coefficients*, Arch. Rational Mech. Anal. **54** 1974 105 117 （），–。30. Connor Mooney, *Partial regularity for singular solutions to the Monge–Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **68** （2015年），第6期，1066–1084。31. Connor Mooney, *The Monge–Ampère equation*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **76** 1，93 2018 113（），第–期。32. Andrzej Pli´s, *On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astronom. Phys. **11** （1963年），95–100。33. R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, 普林斯顿数学丛书，第28卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。34. Thomas Schmidt, *$W^{2,1+\varepsilon}$ estimates for the Monge–Ampère equation*, Adv. Math. **240** （2013年），672–689。35. Graham Smith, *Pointed k-surfaces*, , , , **134** 2006 4, ，法国数学会通报（），第–期。36. Luc Tartar，意大利数学联合会讲义，第3卷，施普林格，柏林、海德堡，2007年。37. Neil S. Trudinger 和 Xu-Jia Wang, *The affine Plateau problem*, 《美国数学会杂志》**18** （2005年），第2期，253–289。38. , *The Monge-Ampère equation and its geometric applications*, 《几何分析手册》第1卷（Lizhen Ji、Peter Li、Richard Schoen 和 Leon Simon 编），高等数学讲座，第7卷，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2008年，第467–524页。39. Gunther Uhlmann 和 Philipp Zimmermann, *Recovery of rough sources in the inverse monge-ampère problem* 2026 ，。

School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China
Email address: 12435035@zju.edu.cn