arXiv:2611.30843v1 [q-fin.PM] 23 Nov 2026

利用外部信息清理相关矩阵：最大方差（MaxVar）估计量

Sebastien Valeyre[a, b]

[a]*Machina Capital*，法国巴黎 *75002*，*Banque* 街 *21* 号[b]
Valeyre Research，法国戛纳 *06400*，昂蒂布街 *114* 号

摘要

旋转不变估计量会清理经验相关矩阵的特征值，但保留其含噪的特征向量。我们研究一种利用外部信息（即将资产划分为资产类别或地区等分组）来校正特征向量的估计量。最大方差（MaxVar）估计量将主特征向量限制为各组最大方差投资组合的线性组合，并用单一特征值替代谱的其余部分。它是一个约含n 个参数而非 $n^2/2$个参数的因子模型；即使观测值数量少于资产数量 n，它仍为正定矩阵。我们将其应用于由股票指数、债券和货币期货构成的 47 项资产的相关矩阵，并以这三个资产类别作为分组。在一项说明性蒙特卡洛检验中，参考矩阵具有该估计量所假设的结构；与经验矩阵相比，该估计量使其与参考矩阵的距离减少了三分之一，而旋转不变估计量的降幅不到 10%。决定性的检验是其在真实数据上的投资组合表现：1993—2018年，采用矩阵逆矩阵的风险平价投资组合，其夏普比率使用MaxVar估计量时为 1.28，使用旋转不变估计量时为 1.24，使用经验矩阵时为 1.17；缩短估计窗口后，优势还会扩大。

关键词：相关矩阵、随机矩阵理论、因子模型、投资组合管理、风险平价*JEL*分类：C13、C38、C58、G11

电子邮箱地址：svaleyre@machinacap.com (Sebastien Valeyre), sv@valeyreresearch.com(Sebastien Valeyre)

1. 引言

n 项资产的经验相关矩阵由 T 个观测值估计得出；只要 n 相对于 T 并不小，它就是对真实相关矩阵的有噪估计量。随机矩阵理论描述了这种测量噪声：较小的特征值被低估，较大的特征值被高估（Marchenko and Pastur，1967；Laloux et al.，1999；Plerou et al.，1999、2002；Potters et al.，2005）。这对投资组合构建的影响众所周知，因为 Markowitz（1952）的均值—方差优化涉及矩阵的逆矩阵，因此会放大小特征值上的误差（Michaud，1989；Pafka and Kondor，2003）。

现有两类修正方法。第一类方法仅修改特征值，同时保留经验特征向量。其中包括 Laloux 等人（1999 年）的特征值截断、Ledoit 和 Wolf（2004a）的向单位矩阵线性收缩，以及 Ledoit 和 Péché（2011 年）和 Ledoit 和 Wolf（2012 年）的非线性收缩；后者由 Bun 等人（2016 年、2017 年）实现后，被称为旋转不变估计量（RIE）。当对特征向量一无所知时，这些估计量是最优的，但它们无法修正特征向量。第二类方法则对矩阵施加结构约束：向单指标目标或常相关目标收缩（Ledoit 和 Wolf，2003 年、2004b）、块模型（Engle 和 Kelly，2012 年）、具有稀疏残差的因子模型（Fan 等人，2013 年），以及通过聚类从数据中推断结构的层次模型（Tumminello 等人，2007a、b）。在这类方法中，特征向量受到约束，但如果假设的结构有误，就会付出产生偏差的代价。

实际上，投资组合经理确实掌握有关特征向量的信息：资产属于预先已知且不依赖于样本的类别、地区或行业。Valeyre 等人（2019）利用此类信息清理单只股票的相关矩阵：针对每项财务标准（账面价值、市值等），他们构建最大方差投资组合，并在由这些“基本面最大方差投资组合”张成的子空间中对相关矩阵进行对角化。所得的约束特征向量是具有经济意义的投资组合的线性组合，其方式与量子化学中用原子轨道的线性组合近似分子轨道相同。

本文旨在将这一思想表述为一种针对相关矩阵的通用清洗方法，确立其性质，并将其与标准估计量进行评估。我们的贡献如下。

1. 我们针对任意的资产组分组（这些分组可能相互重叠）定义了最大方差（MaxVar）估计量，并证明该估计量是一种正定的因子模型，且不依赖于任何任意选择（第2节）。2. 我们通过蒙特卡洛模拟展示了测量噪声的降低；在该模拟中，参考矩阵具有估计量所假设的结构（第3节）。3. 我们将MaxVar估计量应用于47种股票指数、债券和货币期货，并比较使用经验矩阵、旋转不变估计量和MaxVar估计量构建的风险平价投资组合的夏普比率（第4节）。

2. 最大方差估计量

2.1. 定义

设 C 为 $n \times n$ 资产的 n 经验相关矩阵。外部信息由 $K < n$ 个资产组 $\mathcal{G}_1$、.....、$\mathcal{G}_K \subset \{1, \ldots, n\}$构成，这些资产组的并集包含所有资产。这些资产组可以重叠：对于期货，可以将资产类别（股票指数、债券、货币）与地区（欧洲、美洲、亚洲）结合使用。该估计量分四步构建。

步骤 *1*：每个资产组的最大方差投资组合。 对于每个资产组 $\mathcal{G}_k$，设 $\mathbf{p}_k$ 为一个单位范数的投资组合，仅投资于 $\mathcal{G}_k$ 的资产，并具有最大的方差：

$$\mathbf{p}_k = \arg\max_{\mathbf{w}} \ \mathbf{w}^\dagger \mathbf{C}\, \mathbf{w} \qquad \text{subject to} \quad \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} = 1, \quad w_i = 0 \ \text{ for } i \notin \mathcal{G}_k. \quad (1)$$

它是 C 限制在该资产组上的矩阵的主特征向量，并以零补全。我们将 P =(p1、... ...、$\mathbf{p}_K$)记为由这些投资组合构成的 $n \times K$ 矩阵，并假设这些投资组合是线性无关的。

步骤 *2*：约束特征向量。 我们寻找 C 在其为 $\mathbf{p}_k$的线性组合这一限制下的特征向量，即寻找 $\mathbf{w}^\dagger$Cw/$\mathbf{w}^\dagger$w 的驻点，其中 w =Pa。令

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{C}\, \mathbf{P}, \qquad (2)$$

这是广义特征值问题 Ha $= \mu$Ga。当分组互不重叠时，矩阵 G 是单位矩阵。对称的 $K \times K$

矩阵

$$\mathbf{G}^{-1/2}\,\mathbf{H}\,\mathbf{G}^{-1/2} = \mathbf{\Omega}\,\mathbf{M}\,\mathbf{\Omega}^{\dagger}, \qquad \mathbf{M} = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_K), \tag{3}$$

我们得到约束特征值 $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_K$ 以及约束特征向量，它们是下列矩阵的列向量

$$\mathbf{Z} = \mathbf{P}\,\mathbf{G}^{-1/2}\,\mathbf{\Omega}. \tag{4}$$

它们是正交归一的，并且在该子空间中将 C 对角化：$\mathrm{Z}^{\dagger}\mathrm{Z} = \mathrm{I}_K$，且 $\mathrm{Z}^{\dagger}\mathrm{C}\mathrm{Z} = \mathrm{M}$。

步骤 *3*：补空间。在由 p_k 张成的子空间的正交补中，没有可用信息，因此我们用单位矩阵的一个倍数替换 C，同时保持其迹不变：

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z}\,\mathbf{M}\,\mathbf{Z}^{\dagger} + \delta\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\dagger}\right), \qquad \delta = \frac{n - \sum_{k=1}^{K}\mu_k}{n-K}. \tag{5}$$

步骤 *4*：归一化。F 的对角元素为

$$\mathbf{F}_{ii} = \delta + \sum_{k=1}^{K}(\mu_k - \delta)\, z_{k,i}^2, \tag{6}$$

其中 $z_{k,\,i}$ 是资产 i 在第 k 个约束特征向量中的权重。它们的平均值为 1，因为 $\mathrm{Tr}\,\mathrm{F} = n$，但各自并不都等于 1：对于受约束特征向量影响较弱的资产，F_{ii} 小于 1；对于受其影响较强的资产，F_{ii} 则大于 1。只有当每组资产的暴露程度相同时，它们才都等于 1。因此，MaxVar估计量定义为与 F 相关联的相关矩阵：

$$\hat{\mathbf{F}}_{ij} = \frac{\mathbf{F}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{F}_{ii}\,\mathbf{F}_{jj}}}. \tag{7}$$

2.2. 性质

命题1。 (i) **F** 仅通过由$\mathbf{p}_k$张成的子空间取决于各**F** 组，并且不取决于正交补空间的基的选择。(ii) $\mathrm{Tr}\mathbf{F} = n$ 和 $\delta = \mathrm{Tr}(\mathbf{QCQ})/(n-K) \geq 0$，其中 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n - \mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\dagger}$。(iii) 如果**C** 在由$\hat{}\,\mathbf{p}_k$ 张成的子空间上正定，且在其补空间上不为零，那么**F** 和**F** 均为正定，即使**C** 是奇异的也如此。(iv) 约束特征值受**C**的特征值 $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ 所界定：$\lambda_{n-K+k} \leq \mu_k \leq \lambda_k$。

证明。 (i) 矩阵 $ZMZ^{\dagger}$ 是将 C 压缩到该子空间所得的矩阵，与基的选择无关，而 Q 是投影到补空间上的投影算子。(ii) $\mathrm{Tr}\,F = \sum_k \mu_k + \delta(n-K) = n$，且 $\mathrm{Tr}(QCQ) = \mathrm{Tr}\,C - \mathrm{Tr}(Z^{\dagger}CZ) = n - \sum_k \mu_k$；由于 QCQ 半正定，因此该值非负。(iii) 在这些假设下，$\mu_k > 0$ 和 $\delta > 0$，且 F 的特征值为 μ_k和 δ（重数为 $n-K$）；归一化（7）是合同变换，会保持正性。(iv) 这是将庞加莱分离定理应用于 $Z^{\dagger}CZ$。

□

ˆ 性质 (iii) 具有实际重要性：第4节的投资组合所需的 F 的逆矩阵，即使观测值的数量小于 n时也存在。

互不相交的组。 当各分组互不相交时，p_k 是正交归一的，且 F 的结构清晰明了。令 $\lambda_k^{(0)} = H_{kk}$ 表示 p_k的方差。对于两个不同的资产 $i \in \mathcal{G}_k$ 和 $j \in \mathcal{G}_l$，

$$F_{ij} = \begin{cases} \left(\lambda_k^{(0)} - \delta\right) p_{k,i}\, p_{k,j} & (k = l), \\ H_{kl}\, p_{k,i}\, p_{l,j} & (k \neq l). \end{cases} \tag{8}$$

在每个分组内部，相关性符合单因子模型，其载荷由该分组的最大方差投资组合给出；在两个分组之间，相关性等于载荷与两个分组投资组合的协方差 H_{kl} 的乘积。该估计量包含 $n-K$个自由载荷和 H 的 $K(K+1)/2$个元素，即约有 $n + K^2/2$ 个参数，而不是 $n(n-1)/2$ 个相关性：对于第4节中的 47 个期货和三个资产类别，只需 50 个参数，而不是 1081 个。

极限情形。 当只有一个分组且其中包含所有资产时，p_1 是 C 的主特征向量，而 F 是将除最大特征值以外的所有特征值截断后得到的矩阵。相反，当分组缩减为单个资产时，子空间就是整个空间，$F = C$，且没有任何内容得到清理。因此，分组体系在单因子模型与原始经验矩阵之间进行插值。

旋转不变性。 与 RIE 不同，MaxVar估计量并非旋转不变：分组在资产空间中划定了特定方向。这正是该方法的目的，也是它的风险所在。如果分组包含有用信息，特征向量就会得到改善，而任何旋转不变估计量都无法

做到这一点。如果真实矩阵具有分组未能描述的结构，这种结构就会被抹去。

2.3. 偏差与方差

将 MaxVar 映射应用于真实相关矩阵 C_0, 后，除非 C_0 恰好具有式（5）所示的结构，否则不会得到 C_0 。因此，该估计量存在偏差，且偏差不随观测值数量 T变化；此外，由于估计的参数很少，方差也较小。相比之下，经验矩阵没有偏差，方差的量级为 n^2/T。因此，预计 MaxVar估计量在样本较短时最有用；对于那些对测量噪声比对相关性精细结构更敏感的应用，例如涉及矩阵逆矩阵的投资组合，也尤其有用。对于特定的资产范围和矩阵用途，噪声的减少能否抵消偏差，属于经验问题，我们将在第4节中探讨。

3. 蒙特卡罗示例

我们首先通过一个模拟示例说明测量噪声的减少。参考矩阵 C_0 是第4节中所述的47种期货在2018年12月28日的相关矩阵，并使用三个资产类别作为分组，通过 MaxVar估计量进行清理（图1(a)）。我们生成100组样本，每组包含 $T = 150$ 个协方差为 C_0,的独立高斯向量；该协方差对应于第4节所用估计窗口中的150个周收益率。然后，对每组样本计算经验相关矩阵 C。接着，使用 MaxVar 估计量和 Bun 等人（ 2016 年、 2017 年）的旋转不变估计量（RIE）对这个含噪矩阵进行清理，并通过弗罗贝尼乌斯距离将每个估计值 $\hat{C}$ 与参考矩阵进行比较

$$d(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{C}_0) = \sqrt{\mathrm{Tr}\big[(\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}_0)^\dagger (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}_0)\big]}. \tag{9}$$

结果见表 1。与经验矩阵相比，MaxVar估计量使与参照值的距离缩短了三分之一（2.09 对比 3.24），而 RIE 使其缩短不到 10%（2.99）。

解读这项测试时必须谨慎。参考矩阵经构造后具有 MaxVar估计量所假设的结构，因此这一设定对它有利：这项测试衡量的是在假设结构正确时，各种方法能去除多少测量噪声；它并未说明

估计量	与参照值的距离
MaxVar	2.09
RIE	2.99
经验	3.24

表 1：47 种期货的 150 个模拟周收益率样本（100 个样本）得到的参照相关矩阵及其估计值之间的平均弗罗贝尼乌斯距离（9）。参照值为 2018年12月28日 的 MaxVar矩阵。

第2.3节讨论的偏差问题。因此，这只是对该方法潜力的展示，而非其优越性的证明。最终真正重要的衡量标准，是基于真实数据构建的、使用清洗后的矩阵的投资组合表现。现在我们转而讨论这一点。

4. 期货应用

4.1. 数据与投资组合

我们考察流动性最高的期货：24种股票指数期货、14种政府债券期货和9种货币期货（表2）。数据始于1985年5月8日，止于2018年12月31日；统计数据根据1993年1月1日至2018年12月31日期间的数据计算。未将交易成本和市场冲击纳入考虑。

日收益率 r_t^j 按各合约的波动率 v_t^j 进行缩放，该波动率通过对日收益率平方进行指数移动平均（EMA）估算，参数为 $\eta = 1/100$,

$$[v_t^j]^2 = (1-\eta)\,[v_{t-1}^j]^2 + \eta\,[r_t^j]^2. \tag{10}$$

相关矩阵根据周收益率 $\hat{r}_t^j$ 估算，以抵消各市场交易时间的差异；所用指数移动平均（EMA）的参数为 η',

$$\hat{\mathbf{C}}_t^{ij} = (1-\eta')\,\hat{\mathbf{C}}_{t-1}^{ij} + \eta'\,\hat{r}_t^i\,\hat{r}_t^j, \qquad \mathbf{C}_t^{ij} = \frac{\hat{\mathbf{C}}_t^{ij}}{\sqrt{\hat{\mathbf{C}}_t^{ii}\,\hat{\mathbf{C}}_t^{jj}}}. \tag{11}$$

当 $\eta' = 1/750$ 以天为单位时，估计窗口包含 47 个合约的大约 150 个独立周收益率。随后，经验矩阵 $\mathbf{C}_t$ 通过 RIE 或 MaxVar估计量进行清洗，其中三个资产类别作为分组（$K = 3$）。

股票指数	债券	货币
AEX指数、标普中型股400指数, 罗素2000指数 , CAC 40指数 , DAX, 富时100指数、斯托克欧洲600指数、恒生指数、富时MIB指数, 日经225指数、东证指数、韩国综合股价指数200, MSCI EAFE指数 , IBEX 35指数 , MSCI新兴市场、Nifty, 纳斯达克100指数、MSCI新加坡指数, 标准普尔500指数 , MSCI台湾指数 , Euro斯托克50指数 , 标普加拿大60指数 , SPI 200, 道琼斯	德国国债、加拿大10年期国债, Bobl, 德国短期国债 , BTP, Buxl、英国国债、法国国债、美国5年期美国国债、日本国债、美国10年期美国国债、美国国债2Y, 美国超长期国债 , 30年期美国国债	澳元、英镑、CAD, EUR, US美元指数、日元、墨西哥比索、新西兰元、瑞士法郎

表2：图1中按所用顺序排列的47种期货清单。货币均以美元报价。

我们通过风险平价投资组合的夏普比率比较清洗后的矩阵,

$$\Pi_t \propto \Sigma_t^{-1}\, \mathbf{C}_t^{-1}\, \mathbf{1}, \tag{12}$$

其中， Σ_t 是波动率的对角矩阵。它是 Choueifaty 和 Coignard（2008年）提出的最大分散化投资组合；当所有合约的夏普比率相同时，该组合是最优的。该投资组合仅通过波动率和相关矩阵依赖数据，因此其表现能够单独体现清洗方法的影响；本文不考虑相关矩阵的其他用途。

4.2. 清洗后的矩阵

图1展示了2018年12月28日清洗前后测得的相关性的绝对值。经验矩阵呈现出清晰的块结构。有些合约与其所属类别的相关性低于其他合约：在股票指数中，Nifty（第16位；0.55，而其他指数为0.60）；在债券中，意大利BTP（第5只债券；0.20，而其他债券为0.60）；在货币中，则是墨西哥比索和日元。

RIE 几乎不会改变矩阵的外观，因为它只会修改特征值。MaxVar估计量的影响更大。它通过较小的载荷保留块结构以及弱相关合约的特有表现，同时平滑各个块内部的相关性，这与公式（8）一致。这种平滑一部分消除了测量噪声，另一部分则可能消除了同一类别合约之间真实存在的差异

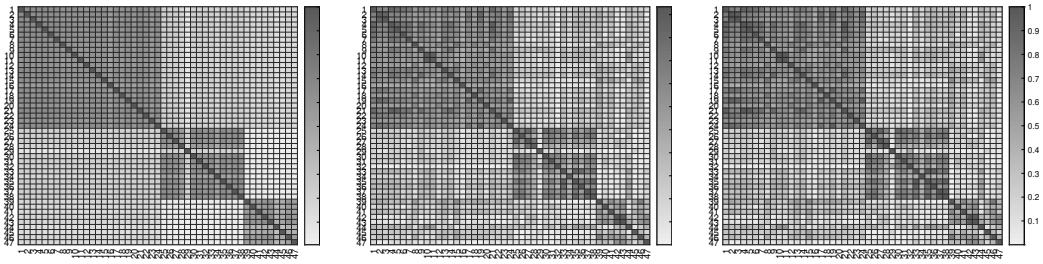

图1：2018年12月28日（$\eta' = 1/750$）47种期货之间相关性的绝对值热图。左：将三个资产类别作为分组的 MaxVar估计量。中：RIE。右：经验矩阵。合约按表2中的顺序排列：股票指数（1–24）、债券（25–38）和货币（39–47）。

估计窗口	经验 RIE		MaxVar
$\eta' = 1/750$	1.17	1.24	1.28
$\eta' = 1/100$	–	0.93	1.05

表3：1993—2018年风险平价投资组合（12）的夏普比率（未计成本）。该投资组合分别基于经验相关矩阵、经 RIE 清洗的矩阵以及经 MaxVar估计量（$K = 3$）清洗的矩阵构建；估计窗口参数 η' 取两个值。

，这正是第2.3节讨论的偏差。仅凭热图无法区分两者，因此我们依据投资组合的表现进行判断。

4.3. 风险平价投资组合的表现

表3给出了夏普比率。清理矩阵可提升风险平价投资组合的表现；该组合涉及逆矩阵：夏普比率从使用经验矩阵时的1.17，升至使用RIE时的1.24，以及使用MaxVar估计量时的1.28。将估计窗口缩短至 $\eta' = 1/100$，即47个合约约20个周收益率时，MaxVar估计量相较RIE的优势进一步扩大（1.05对0.93），这符合低方差估计量的预期。

需要注意的是，表3中夏普比率之间的差异，与在26年期间测得的夏普比率的统计误差相比很小，而该误差约为 $1/\sqrt{26} \approx 0.2$。由于采用这三个矩阵构建的投资组合高度相关，因此这些差异的测量精度高于各个夏普比率本身，但尚未检验其统计显著性。此外，这些结果仅涉及单个投资组合，并且并不能

证明该估计量更适用于相关矩阵的其他用途。

5. 结论

我们构建了最大方差估计量，用于估计相关矩阵；该估计量利用预先定义的资产组系列来约束主特征向量。该估计量是一种简约因子模型，始终为正定矩阵，包含约 n 个参数。不同于旋转不变估计量，它不仅校正特征值，还校正特征向量，但当真实矩阵偏离假定结构时，需要付出产生偏差的代价。

在一次蒙特卡洛检验中，参考矩阵具有估计量所假定的结构；这一设定对该估计量有利，也是我们采用的示例。在该检验中，MaxVar估计量消除了远多于旋转不变估计量的测量噪声。真正重要的检验是其在真实数据上的表现。在1993—2018年间的47种期货上，以三个资产类别作为分组的MaxVar估计量，为需要使用矩阵逆矩阵的风险平价投资组合带来了最高的夏普比率；随着估计窗口缩短，它相对于旋转不变估计量的优势进一步扩大。

有几项自然的扩展方向：检验夏普比率差异的统计显著性；评估该估计量在以其他方式使用相关矩阵的投资组合上的表现；采用比资产类别更细的分组来降低偏差；以及仿照 Ledoit 和 Wolf（2003年）的方法，将MaxVar矩阵用作收缩目标，从而兼得其较小的方差和经验矩阵无偏的特性。

参考文献

J. Bun、J.-P. Bouchaud 和 M. Potters，《清理相关矩阵》，《Risk Magazine》（2016年）。J. Bun、J.-P. Bouchaud 和 M. Potters，《清理大型相关矩阵：随机矩阵理论工具》，《Physics Reports》666，1–109（2017年）。Y. Choueifaty 和 Y. Coignard，《迈向最大化分散投资》，《Journal of Portfolio Management》35(1)，40–51（2008年）。R. Engle 和 B. Kelly，《动态等相关》，《商业与经济统计学杂志》30，212–228（2012年）。

J. Fan、Y. Liao 和 M. Mincheva，《通过阈值化主正交补进行大规模协方差估计》，英国皇家统计学会会刊 B 辑 75，603–680（2013年）。L. Laloux、P. Cizeau、J.-P. Bouchaud 和 M. Potters，《金融相关矩阵的噪声修饰》，《物理评论快报》83，1467–1470（1999年）。O. Ledoit 和 S. Péché，《某些大样本协方差矩阵系综的特征向量》，《概率论及相关领域》151，233–264（2011年）。O. Ledoit 和 M. Wolf，《改进股票收益协方差矩阵估计及其在投资组合选择中的应用》，《实证金融学杂志》10，603–621（2003年）。O. Ledoit 和 M. Wolf，《高维协方差矩阵的良态估计量》，《多元分析杂志》88，365–411（2004年）。O. Ledoit 和 M. Wolf，《亲爱的，我缩小了样本协方差矩阵》，《Journal of Portfolio Management》30(4)，110–119（2004年）。O. Ledoit 和 M. Wolf，《高维协方差矩阵的非线性收缩估计》，《统计年刊》40，1024–1060（2012年）。V. A. Marchenko 和 L. A. Pastur，《某些随机矩阵集合的特征值分布》，《苏联数学汇刊》1，457–483（1967年）。H. Markowitz，《投资组合选择》，《金融学杂志》7，77–91（1952年）。R. O. Michaud，《Markowitz 优化之谜：‘优化后’的结果是否最优？》，《金融分析师杂志》45(1)，31–42（1989年）。S. Pafka 和 I. Kondor，《含噪协方差矩阵与投资组合优化 II》，《物理学 A》319，487–494（2003年）。V. Plerou、P. Gopikrishnan、B. Rosenow、L. A. N. Amaral 和 H. E. Stanley，《金融时间序列中交叉相关的普适与非普适性质》，《物理评论快报》83，1471–1474（1999年）。V. Plerou、P. Gopikrishnan、B. Rosenow、L. A. N. Amaral、T. Guhr 和 H. E. Stanley，《金融数据交叉相关的随机矩阵方法》，Physical Review E 65，066126（2002年）。

M. Potters、J.-P. Bouchaud 和 L. Laloux，《随机矩阵理论的金融应用：旧的纽带与新的篇章》，Acta Physica Polonica B 36，2767–2784（2005）。M. Tumminello、F. Lillo 和 R. N. Mantegna，《基于多元数据的层次嵌套因子模型》，Europhysics Letters 78，30006（2007）。M. Tumminello、F. Lillo 和 R. N. Mantegna，《作为衡量从多元数据中经过滤的信息的指标的 Kullback–Leibler距离》，Physical Review E 76，031123（2007）。S. Valeyre、S. Kuperstein、D. S. Grebenkov 和 S. Aboura，《市场中性基本面最大方差投资组合》，载于 S. Valeyre，《股票协方差/相关性矩阵的精细建模》，博士论文，巴黎第十三大学，arXiv:2001.08911（2019）。