关于 F. Riesz 的 Blaschke乘积定理，以及 $\mathbb{C}^{n*}$ 单位球中的内函数

Arthur A. Danielyan

arXiv:2611.30851v1 [math.CV] 23 Nov 2026

摘要

对于 $\mathbb{C}$ 单位圆盘中的收敛 Blaschke乘积 f，设 $G(f)$ 为单位圆上所有满足 $|f(rt)| \to 1$（当 $r \to 1$ 时）的点 t 的集合。根据经典F. Riesz定理， $G(f)$ 具有满测度，这从度量角度描述了 G。我们通过证明它是一个 G_δ 集，从拓扑角度描述 G。对于内函数，同样的描述普遍成立，不仅适用于单位圆盘，也适用于 $\mathbb{C}^n$ 单位球。

1 引言。

分别令 $U = \{z : |z| < 1\}$ 和 $T = \{z : |z| = 1\}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘和单位圆。我们用 m 表示 T 上的勒贝格测度。我们还分别用 B 和 S 表示 $\mathbb{C}^n$ 的单位球和单位球面。（当 $n = 1$ 时，则 $B = U$ 且 $S = T$；参见 [4], 第 2 页。）在 S 上，标准测度是唯一满足 $\sigma(S) = 1$ 的旋转不变正博雷尔测度 σ（见 [4], 第 12 页，或 [5], 第 100 页）。

对于 U 中满足 $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |a_k|) < \infty$ 的点序列 $\{a_k\}$，Blaschke乘积

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}$$

是 U 上的有界（上界为 1）解析函数，其零点恰好是点 a_k。

对于定义在 U 中的函数 f（分别地，定义在 B中），以及 $\zeta \in T$（分别地 $\zeta \in S$），如果极限存在，我们记 $f(\zeta) = \lim_{r\to 1} f(r\zeta)$，。

根据 Fatou定理，任意有界解析函数在 T 上几乎处处存在径向极限。此外，以下结论成立。

*2010 数学主题分类：主要分类30J05、30J10、32A40。关键词：Blaschke乘积、单位球中的内函数 $\mathbb{C}^n$、G_δ 集、径向极限。

定理 A（F. Riesz，1923年）。*Blaschke*乘积的径向极限在 T 上几乎处处的模为 *1*。

内函数构成有界解析函数的一个子类。可以分别为 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$定义内函数如下（参见 [3], 第 62 页，以及 [5], 第 101, [4], 页第 403 页）。

定义 1. 非恒定函数 $f \in H^\infty(B)$， $n \geq 1$，若其径向极限 $\lim_{r\to 1} f(rt) = f(t)$满足 $|f(t)| = 1$对几乎所有 $t \in S$均成立，则称其为内函数

由定理 A 可知，Blaschke乘积是在 U中定义的内函数。然而，众所周知， U中还存在其他内函数。Aleksandrov 已证明 B 的 $\mathbb{C}^n$ 中存在内函数 [1]（参见 [5]）。

显然，在定义 1 中，条件 $f \in H^\infty(B)$ 可以替换为条件$|f(z)| \leq 1$， $z \in B$（参见[1], 第 143 页）。但是，由于 f是非恒定的，最大模定理（参见 [4], 第 5 页 (iv)）表明，事实上我们有 $|f(z)| < 1$， $z \in B$。

定义 2. 对于 $\mathbb{C}^n$ 的 B 中的内函数 f， $n \geq 1$，定义集合

$$G(f) = \{t \in S : \lim_{r\to 1} |f(rt)| = 1\}.$$

对于 U 中的 Blaschke乘积 f，由定理 A 可知， $G(f)$ 具有满测度，这是对 $G(f)$ 的度量描述。显然，对于 B 中的任意内函数， $G(f)$ 都具有满测度，其中 $\mathbb{C}^n$，对每个 $n \geq 1$.

本文旨在从拓扑角度描述集合 $G(f)$。

定理 1. 若 f 是 $\mathbb{C}^n$ 的 B 中的内函数， $n \geq 1$，则 $G(f)$ 是一个 G_δ 集。

当 $n = 1$ 时，定理 1 是定理 A 的拓扑对应形式。我们将这一结论针对 Blaschke乘积明确表述为一个推论。

推论 1. 若 f 是 U 中的 *Blaschke*乘积，则 $G(f)$ 是一个 G_δ 集。

定理 1 的以下推论也显而易见。

推论 2. 若 f是 U中的内函数，则 $T \setminus G(f)$ 是 F_σ，且 $m(T \setminus G(f)) = 0$.

推论 **ry 3.** 若 f 是 B中的内函数，则 $S \setminus G(f)$ 是 F_σ，且 $\sigma(S \setminus G(f)) = 0.$

由于一个 F_σ 零测度集是瘦集[1], ，推论 2 蕴含了 G. T. Cargo 的以下已知结果 [2]（见 [2]中的定理 1 和定理 2），我们将其表述为定理 B 和定理 C。

定理 B。 若 f是 U中的一个内函数，则集合 $\{\zeta \in T\colon \ f(\zeta) = \alpha\}$对每个 $\alpha \in U$而言，在 T 中都是瘦集。

定理 **C**。 若 f是 U中的一个内函数，则 $\{\zeta \in T\colon \ f(\zeta) \in U\}$在 T中是瘦集 .

上述定理的原始证明基于 Seidel、Bagemihl 和 Seidel 以及 Collingwood 在聚类集理论及相关领域中的一些著名结果（见 [2]）。相比之下，本文的证明简单直接。

推论 3 将定理 B 和定理 C 推广到了多复变情形。据我们所知，不仅推论 3，而且上述推广在多复变领域中也都是新的结果。此外，本文为一元和多复变情形中的此类结果提出了一种统一的证明方法。由于定理 C 蕴含定理 B，我们仅阐述定理 C 向多复变情形的推广。

推论 **论 4**。 如果 f是 B中的一个内函数，那么 $\{\zeta \in S\colon \ f（\zeta） \in U\}$在 S中是第一类集。

2 证明。

这些推论的证明显然。下面给出定理 1 的证明。

定理 *1* 的证明。设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 中 B 的一个内函数， $n \geq 1$. 对于 $t \in S$，显然 $\lim_{r\to 1} |f(rt)| = 1$ 当且仅当 $\liminf_{r\to 1} |f(rt)| = 1.$。这意味着 $t \in G(f)$ 当且仅当

$$\limsup_{r\to 1} \frac{1}{1 - |f(rt)|} = +\infty.$$

[1]第一类集是无处稠密集的可数并（见 [2]）。

换句话说,

$$G(f) = \{t \in S : \limsup_{r \to 1} \frac{1}{1 - |f(rt)|} = +\infty\}.$$

这样的集合是 G_δ。我们给出一个直接而简短的证明。

非负函数

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{1 - |f(rt)|}$$

对于固定的 r、 $0 < r < 1$, 作为 t 在 S 上的函数是连续的。记 $D_r^{(k)} = \{t : \varphi_r(t) \leq k\}$.。由于对每个 r, $D_r^{(k)}$ 都是闭集，因此交集

$$D^{(k)} = \bigcap_{0<r<1} D_r^{(k)}$$

是闭集。对于 $t_0 \in D^{(k)}$, 对所有 r, $\varphi_r(t_0) \leq k$。因此 $\limsup_{r \to 1} \varphi_r(t_0) \leq k$, 这意味着$t_0 \in S \setminus G(f)$。因此

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D^{(k)} \subset S \setminus G(f).$$

Also

$$S \setminus G(f) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D^{(k)},$$

因为若 $\limsup_{r \to 1} \varphi_r(t_0) < +\infty$, 则存在 k，使得对所有 $0 < r < 1$, $\varphi_r(t_0) \leq k$，因而$t_0 \in D^{(k)}$。因此,

$$S \setminus G(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D^{(k)}.$$

因此 $S \setminus G(f)$ 是 F_σ, 这意味着 $G(f)$ 是 G_δ。定理 1 得证。

人工智能声明。 本文的撰写未使用人工智能。

参考文献

[1] A. B. Aleksandrov, 《球中内函数的存在性》, Math. USSR-Sb., 第 46 卷第 2 期（1983）, 143–159。

[2] G. T. Cargo, 《F. 和 M. Riesz 唯一性定理》的若干拓扑类比, 《伦敦数学学会杂志》, 第 s2-12 卷（1975）, 第 67—74 页。

[3] K. Hoffman, 《解析函数的巴拿赫空间》, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 新泽西州, 1962 年。

[4] W. Rudin, 《$\mathbb{C}^n$单位球中的函数论》, Springer-Verlag, 1980 .

[5] W. Rudin, 《$\mathbb{C}^n$单位球中的内函数》, 《泛函分析杂志》, 第50卷（1983）, 100-126。

Arthur A. Danielyan 数学
与统计学系 南佛罗里达大
学 坦帕, 佛罗里达州
33620 美国电子邮件:
adaniely@usf.edu