Draft version November 24, 2026 年使用 LaTeXtwocolumn样式排版于 AASTeX631

arXiv:2611.30855v1 [astro-ph.EP] 23 Nov 2026

偏心行星轨道在无轨道衰减情况下的早期重新对齐

Diego J. Muñoz[1]

[1] Department of Astronomy and Planetary Science, Northern Arizona University, Flagstaff, AZ 86011, USA

摘要

温木星（WJs）的自转—轨道平均而言比热木星更加对齐，即使在偏心率较高时也是如此。尤其令人费解的是，一些偏心温木星似乎位于所谓的“潮汐迁移轨迹”上。这些系统被认为是正在进行高偏心率迁移（HEM）的候选者，然而，它们较低的投影倾斜角很难与已知会激发大幅失准的高偏心率迁移路径相协调。较低的倾斜角表明两种可能性之一：其一，动力学上较冷的行星轨道可以在几乎保持共面的情况下被激发至较高偏心率；其二，动力学上较热的轨道能够因恒星上的潮汐作用，比轨道圆化更快地降低恒星倾角，尽管这些行星与恒星的间距相对较大。我们通过计算偏心温木星的潮汐演化来探究第二种可能性，重点考察恒星响应的 (1,0) 分量。该分量以潮汐频率 $\tilde{\omega}_{10} = -\Omega_\star$ 受迫，在保持轨道能量和偏心率不变的同时耗散恒星自转能，并以取决于偏心率的速率改变倾斜角。该频率位于惯性波范围内，并与刚性“自旋翻转模”的自然频率重合。尽管已知该模态不具有耗散性，但快速自转的膨胀恒星中非刚性运动在 $\tilde{\omega}_{10}$处对完整响应的耗散强度仍不确定。因此，我们在现象学上增强耗散响应，并发现，对于超级木星而言，增强幅度达到 $\eta_{10} \sim 10^6$ 可能就足够解释观测到的倾斜角趋势。通过这种增强，如果行星已经处于偏心暖轨道，而其宿主在前主序阶段（PMS）仍处于膨胀且快速自转状态，恒星重新对齐的速度就可能超过轨道圆化。在超级木星的情况下，重新对齐最为有效。如果重新对齐发生在前主序阶段，偏心温木星的倾斜角未必会与其宿主恒星当前的有效温度呈现很强的相关性。在我们测试的双星驱动的高偏心率迁移构型中，有利于重新对齐的条件可以抑制长期偏心率激发之后，在主序阶段，能够维持偏心率驱动的构型比重新对齐更快地发生圆化。这些结果使人们对将对齐的偏心温木星解释为长期演化驱动的高偏心率迁移遗迹产生怀疑，即使它们位于潮汐迁移轨迹上。

关键词： 系外行星迁移 — 系外行星潮汐 — 太阳系外气态巨行星 — 行星对齐 — 主序前恒星 — 恒星自转

1. 引言

1.1. 近距巨行星与恒星倾角

对天空投影恒星自转轴倾角的测量 λ 已成为诊断行星系统动力学演化历史的关键取证指标。受观测偏差影响，大多数测量针对的是近距离巨行星，尤其是热木星（HJs；其半长轴 $a_{\rm p} < 0.1$ 天文单位）。不断增加的自转轴倾角测量样本促成了大量统计研究（例如，Fabrycky & Winn 2009；Winn etal.2010；Schlaufman 2010；Morton &Johnson 2011；Albrecht et al. 2012，2022；Mu˜noz & Perets 2018；Riceet al. 2022a，b；Wang et al.2024），其中包括尝试推断热木星最可能的起源（例如，Morton &Johnson 2011；Riceetal. 2022a）。

热木星系统中恒星倾角的广泛分布（例如，Albrechtetal.2022）通常被解释为早期高度激发动力学状态的遗迹。这被用来支持热木星起源于高偏心率迁移（HEM）的观点（综述见Dawson&Johnson 2018 ），因为这种机制的大多数变体都会在偏心率增长的同时激发显著的倾角变化。

温木星（WJs；$0.1\ \mathrm{au} \leq a_{\rm p} \lesssim 0.7\ \mathrm{au}$）则似乎讲述着一个不同的故事。在单星系统中，与热木星相比，温木星的恒星倾角分布在统计上更窄（Rice et al.

2022b；Wang et al.2024）。尤其引人注目的是，若干偏心热木星测得的投影倾斜角极低（例如，Sedaghatietal.2023；Espinoza-Retamal et al. 2023，2025；Mireles et al. 2025）。例如，尽管偏心率相当高，TOI-677 b 和 TOI-3362 b 的自转轴倾角测量值分别为 $\lambda = 0.3 \pm 1.3^\circ$（Sedaghati et al. 2023）和$\lambda = 1.2^{+2.8}_{-2.7}{}^\circ$（Espinoza-Retamal et al. 2023）。

其中一些偏心行星位于所谓的“潮汐迁移轨迹”上（Dong 等人（2014）），其轨道角动量与最终沿近似恒定 $a_{\rm p}(1-e_{\rm p}^2)$ 轨迹圆化为热木星的情形相符。这类系统通常被称为“原热木星”（Dawson & Johnson 2012；Dawson 等人（2015）；Dong 等人（2021）；Espinoza-Retamal 等人（2023）；Gupta 等人（2024））。它们是检验高偏心率迁移假说的理想对象，因为其偏心率尚未被潮汐圆化抹去，其轨道结构可能仍然保留着引发迁移的动力学激发痕迹。

值得注意的是，这些偏心暖木星（EWJs）较低的自转轴倾角似乎与大多数高偏心率迁移路径所预期的倾角激发相矛盾。近共面版本的高偏心率迁移原则上可以在保持较小错位的同时激发较大的偏心率（例如，Lee & Peale2003；Petrovich 2015a）。然而，这类结果依赖于特定的初始构型，包括足够小的相互倾角和非零的初始偏心率，而这些条件在真实行星系统中的普遍程度仍不确定。因此，与其说这些系统为正在进行的高偏心率迁移提供了明确无疑的证据，不如说它们可能是对该假说最具挑战性的反例之一。另一种可能是，它们较低的自转轴倾角并非原初形成的，而是反映了其宿主恒星随后发生的重新对齐。在不存在其他机制（例如耗散盘）的情况下，这种重新对齐必须源于恒星内部的潮汐耗散。

1.2. 恒星所受潮汐作用导致的轨道演化

长期以来，恒星潮汐一直被用于解释近距巨行星的演化（例如，Lin et al. 1996；Ra-sio et al. 1996），其中包括温度低于 ~ 6000 K 的热木星宿主星较小的自转轴倾角（Winn et al. 2010；Albrecht et al.2012）。然而，在传统潮汐模型下，高效的恒星重新对齐通常伴随着轨道衰减，甚至可能导致行星毁灭（Winnet al. 2010；Lai 2012）。这对偏心温木星尤其构成问题，因为它们的轨道似乎经历了相对较少的潮汐圆化。

广泛采用的弱摩擦近似通过单一时间滞后来描述恒星响应Δt（例如，Alexander 1973；Mignard 1979；Hut1981），对潮汐驱动的不同分量施加共同的耗散定律。实际上，响应可能强烈依赖于潮汐频率，Darwin（1879）对此早已有所认识；他认为每个潮汐频率都应“因其自身的特殊量而产生滞后”（Darwin 1879，§I.2）。因此，更一般的参数化模型可以为不同的潮汐驱动分量指定不同的潮汐品质因数 Q（例如，Lai 2012），从而可能使倾角阻尼与轨道衰减以截然不同的速率进行。

我们也有充分的物理理由预期，潮汐响应会高度依赖频率。对于行星天体，这种依赖性通常通过黏弹性流变学模型来描述，这些模型决定了复潮汐Love数的频率依赖性（例如，Efroim-sky2012，2015）。恒星还存在一个额外的复杂因素：其流体内部的响应充满共振，耗散既可能来自准静水潮汐流（平衡潮汐），也可能来自激发波（动力潮；参见Ogilvie2014）。这些波包括稳定层结区域中的内部重力波（Zahn 1975，1977；Gol-dreich & Nicholson1989；Goodman& Dickson 1998）以及旋转对流区中的惯性波（IWs）（Pa-paloizou & Savonije 1997；Savonije &Papaloizou 1997；Ogilvie 与 Lin（2004），2007；Ogilvie 2009，2013；Barker&Ogilvie 2009）。近期关于惯性波耗散和整体振荡模的计算（例如，Barker 2020，2022；Barker et al. 2024；Wu 等，2024）进一步展现了这种响应的复杂性，不过，对于真实恒星内部结构的定量预测仍存在不确定性。

尤其值得关注的是通过倾角潮汐激发惯性波的可能性。Lai (2012)表明，自旋—轨道失配会产生一个具有方位角和时间指标（m，m'）=(1，0）的潮汐分量，其在恒星旋转参考系中的频率为 $\tilde{\omega}_{10} = -\Omega_\star$，位于惯性区内（Greenspan 1968）。该分量在惯性参考系中是静止的，因此不会传递轨道能量，尽管它会施加力矩，从而改变恒星倾角。因此，其耗散能够驱动自旋轨道演化，而不会直接改变轨道半长轴或偏心率。此外，由于其频率位于惯性波范围内，其耗散可能显著强于其他潮汐分量（Lai 2012；Lin& Ogilvie 2017）。然而，尽管非平凡的惯性运动能够在该频率下耗散能量，这种响应的幅度仍受到很大限制，现有计算也无法确定其是否足以解释观测到的自转—轨道对齐。前主序

阶段（PMS）或许为此类重新对齐提供了特别有利的窗口，因为较大的恒星半径会增强潮汐驱动，而快速自转和广泛的对流还可能进一步增强耗散响应（Barker2020，2022）。这种可能性要求行星在其演化过程中足够早地形成偏心且失配的构型。

在本研究中，我们将 Lai （2012）的理论框架推广到任意偏心率的轨道，并将其应用于偏心温木星。我们研究（1，0）倾角潮汐是否能够解释其较小的自旋—轨道错位，并量化在不伴随轨道圆化的情况下实现这一点所需的增强耗散，重点关注恒星主序前阶段的作用。由于这种阻尼效率仍受到较大不确定性的制约，我们在不规定其潜在机制的情况下，引入了对有效潮汐响应的现象学增强。更一般地说，我们的方法允许不同潮汐驱动分量具有不同的有效品质因子，为研究它们对恒星自旋和轨道演化的综合影响提供了一个灵活的框架。

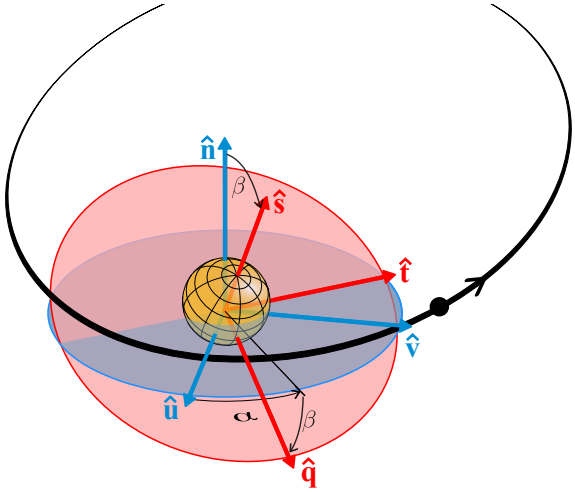


图 1。用于将潮汐势分解为傅里叶分量和多极分量的参考系示意图。正交归一三元组（$\hat{\mathbf{q}}$，$\hat{\mathbf{t}}$，$\hat{\mathbf{s}}$）（红色矢量）与恒星自旋轴对齐。正交归一三元组（$\hat{\mathbf{u}}$，$\hat{\mathbf{v}}$，$\hat{\mathbf{n}}$）（蓝色矢量）与轨道角动量和偏心率矢量对齐。我们使用欧拉角旋转（α，β，γ）在坐标系之间进行变换，其中 $\gamma = 0$ 位于 *z-y-z* 约定下（例如，Rose 1957）。

2. 偏心轨道潮汐耗散的广义有效理论

2.1. 问题的几何构型

如图 1 所示，我们使用两个坐标系：轨道对齐参考系 $\mathscr{S}$ 和自旋对齐参考系 S。轨道对齐参考系 $\mathscr{S}$的笛卡尔单位矢量为 ($\hat{\mathrm{u}}$, $\hat{\mathrm{v}}$, $\hat{\mathrm{n}}$)，其中 $\hat{\mathrm{n}} = \mathrm{L_p}/|\mathrm{L_p}|$ 与轨道角动量方向一致，$\hat{\mathrm{u}} = \mathrm{e_p}/|\mathrm{e_p}|$ 与偏心率矢量或拉普拉斯矢量方向一致，而 $\hat{\mathrm{v}} = \hat{\mathrm{n}} \times \hat{\mathrm{u}}$（例如，Tremaine 等，2009）。$S$中的笛卡尔单位矢量为 ($\hat{\mathrm{q}}$, $\hat{\mathrm{t}}$, $\hat{\mathrm{s}}$)，其中 $\hat{\mathrm{s}} = \mathrm{S_\star}/|\mathrm{S_\star}|$与恒星自旋轴方向一致；$\mathrm{t}$ 表示相对于 $\mathscr{S}$赤道面的升交线，$\hat{\mathrm{q}} = \hat{\mathrm{t}} \times \hat{\mathrm{s}}$也位于赤道面上。此外，我们分别为参考系 $\mathscr{S}$和 S使用球坐标组 (r, ϑ, φ) 和 (r, θ, ϕ)。

这两个坐标系通过欧拉角旋转相互关联 $\alpha \to \beta \to \gamma = 0$，采用 *z-y-z* 约定（例如，Rose 1957），即

$$\hat{\mathbf{q}} = \cos\beta\cos\alpha\hat{\mathbf{u}} + \cos\beta\sin\alpha\hat{\mathbf{v}} - \sin\beta\hat{\mathbf{n}} \tag{1a}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = -\sin\alpha\hat{\mathbf{u}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{v}} \tag{1b}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \sin\beta\cos\alpha\hat{\mathbf{u}} + \sin\beta\sin\alpha\hat{\mathbf{v}} + \cos\beta\hat{\mathbf{n}}\,, \tag{1c}$$

其中，β 是恒星倾角，$\alpha + \pi/2$ 是恒星赤道面相对于 $\mathscr{S}$的升交点经度。

2.2. 潮汐势与潮汐响应 A *nsatz*

我们将行星对恒星施加的潮汐势 V 展开，其中行星沿半长轴为 a_p 、偏心率为 e_p的开普勒轨道运行。截断至 $l = 2$ 阶后，势可写为

$$V(\mathbf{r},t) = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{p}r^2}{a_\mathrm{p}^3}\sum_{m=2}^{2}\sum_{\mu=2}^{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{2\mu}D^{2*}_{\mu m}(\alpha\beta 0)X^{-3,\mu}_{k+\mu}(e_\mathrm{p}) \times Y_{2m}(\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+\mu)\mathcal{M}}\,, \tag{2}$$

其中，μ 和 m 分别是 $\mathscr{S}$和 S 系统中的方位角数，$\mathcal{M}$ 是轨道平近点角。附加系数定义如下：$W_{2\mu} = (4/5)\pi|Y_{2\mu}(\frac{\pi}{2}, 0)|$（Press & Teukolsky 1977），$X^{-3}_{k+\mu}$、$^{\mu}$表示平移汉森系数（Newcomb 1895；Plummer 1918），而 $D^2_{\mu m}(\alpha\beta 0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\alpha}d^2_{\mu m}(\beta)$对应于 l=2阶的Wigner D矩阵，与欧拉角旋转$\alpha \to \beta \to \gamma = 0$ 相关，其中 $d^2_{\mu m}(\beta)$是所谓的Wigner“小-d”矩阵（Wigner 1959；Rose 1957）。

用紧凑记号，我们将四极潮汐势写为

$$V(\mathbf{r},t) = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{p}r^2}{a_\mathrm{p}^3}\sum_{m=-2}^{+2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{V}_{mn}Y_{2m}(\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Omega t} \tag{3}$$

（例如，Miranda 和 Lai 2015），其中 $n = k + \mu$ 是与扰动相关的时间谐波系数

，并且这里我们用 $\Omega = [\mathcal{G}(M_\star+m_{\rm p})/a_{\rm p}^3]^{1/2}$ 替换了 $\mathcal{M} = \Omega t$ 。无量纲系数$\mathcal{V}_{mn}$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{mn} &\equiv \sum_{\mu=-2}^{2}\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta_{k+\mu,n}W_{2\mu}D^{2^*}_{\mu m}(\alpha\beta 0)X^{-3,\mu}_{k+\mu}(e_{\rm p}) \\ &= \sum_{p=-2}^{2}W_{2p}D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)X^{-3,p}_{n}(e_{\rm p})\end{aligned} \tag{4}$$

这里我们用到了$W_{2,\ \pm 1}=0$ (Press 与 Teukolsky 1977）。请注意，这一定义意味着

$$\mathcal{V}^*_{mn} = (-1)^m\mathcal{V}_{-m,-n} \tag{5}$$

这等价于说，数对 $(m,\ n)$ 和 $(-m,\ -n)$ 在物理上是等价的。

在恒星的共转参考系中，该潮汐势为 $\propto {\rm e}^{-{\rm i}\tilde{\omega}_{mn}t}$，其潮汐频率为

$$\tilde{\omega}_{mn} \equiv n\Omega - m\Omega_\star \ . \tag{6}$$

在线性理论中，该潮汐势会在恒星中产生响应 $\delta\rho(\mathbf{r}\ t) = \sum_{mn}\delta\rho_{mn}(\mathbf{r}\ t)$，使得每个（$mn$）分量都会在恒星中激发一种独立的流体扰动。依照Lai(2012)，我们假设流体响应中的耗散效应可用一个小的相位滞后项 Δ_{mn}来参数化，该项是每种（mn）流体扰动所固有的：

$$\delta\rho_{mn} = \frac{M_{\rm p}}{M_\star}\left(\frac{R_\star}{a_{\rm p}}\right)^3\mathcal{V}_{mn}\delta\bar{\rho}_{mn}(r,\theta){\rm e}^{{\rm i}m\phi}{\rm e}^{-{\rm i}n\Omega t+{\rm i}\Delta_{mn}} \ . \tag{7}$$

在方程（7）中，实函数 $\delta\bar{\rho}_{mn}(r,\ \theta)$概括了响应的几何形状（Lai2012），而特征响应振幅 $\simeq\nabla V|_{r=R_\star}/(\mathcal{G}M_\star/R_\star^2)$由标准静态潮汐理论给出。

2.3. 潮汐响应势与潮汐摩擦力

恒星形变继而产生潮汐响应势，通过求解 Poisson 方程计算得到：

$$\begin{aligned}\delta V(\mathbf{r},t) &= -\mathcal{G}\int{\rm d}^3x'\frac{\delta\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}R_\star^5}{a_{\rm p}^3r^3}\sum_{m,n}Y_{2m}(\theta,\phi)\mathcal{V}_{mn}{\rm e}^{-{\rm i}n\Omega t}K_{2mn}\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $K_{2mn} = K_{2m}(\tilde{\omega}_{mn})$ 是（复）势 Love 数（例如，Ogilvie2013，2014），其谐波次数为 $l=2$，方位波数为 m，时间谐波系数为 n，在潮汐频率$\tilde{\omega}_{mn}$处求值。在此近似下，它表示为

$$K_{2mn} = k_{2mn}{\rm e}^{{\rm i}\Delta_{mn}} \tag{9}$$

其中

$$k_{2mn} \equiv \frac{4\pi}{5}\frac{1}{M_\star R_\star^2}\int{\rm d}^3x\delta\bar{\rho}_{mn}(r,\theta)e^{{\rm i}m\phi}r^2Y^*_{2m}(\theta,\phi) \tag{10}$$

是一个广义（实数）Love 数（例如，Lai 2012；Storch &Lai 2014）。

由 δV，我们通过对势取梯度并在行星所在位置求值，得到有效潮汐摩擦力（例如，Mignard1979），即 $\delta\mathbf{F} = -M_{\rm p}\nabla\delta V|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\rm p}}$。在 $\mathscr{S}$ 参考系中进行此导数运算较为方便。因此，再次使用 Wigner 矩阵，我们将

$$Y_{2m}(\theta,\phi) = \sum_{\nu=-2}^{2}D^2_{\nu m}(\alpha\beta 0)Y_{2\nu}(\vartheta,\varphi) \ . \tag{11}$$

并将 δV 的梯度写为

$$\begin{aligned}\nabla\delta V(\mathbf{r},t) = &-\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}R_\star^5}{a_{\rm p}^3r^4} \\ &\times\sum_{mn\nu}D^2_{\nu m}(\alpha\beta 0)\mathcal{V}_{mn}k_{2mn}{\rm e}^{-{\rm i}n\Omega t+{\rm i}\Delta_{mn}}\Big\{ \\ &Y_{2\nu}(\vartheta,\varphi)\Big[-3\hat{\mathbf{r}}+\nu\cot\vartheta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}+\frac{{\rm i}\nu}{\sin\vartheta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\Big] \\ &+Y_{2,\nu+1}(\vartheta,\varphi)\sqrt{(3+\nu)(2-\nu)}{\rm e}^{-{\rm i}\varphi}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\Big\}\end{aligned} \tag{12}$$

其中我们利用了 $\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{2\nu} = {\rm i}\nu Y_{2\nu}$ 以及$\frac{\partial}{\partial\vartheta}Y_{2\nu} = \sqrt{(3+\nu)(2-\nu)}{\rm e}^{-{\rm i}\varphi}Y_{2,\ \nu+1}+\nu\cot\vartheta Y_{2\nu}$（例如，Abramowitz &Stegun1964）。在 $\mathscr{S}$ 参考系中，行星的位置为 $r=r_{\rm p}$，$\vartheta=\vartheta_{\rm p}=\frac{\pi}{2}$ 而$\varphi=\varphi_{\rm p}=f$是行星轨道的真近点角。写出$\hat{\mathbf{r}}$、$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ 和$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$，并将其表示为笛卡尔向量$\hat{\mathbf{u}}$、$\hat{\mathbf{v}}$和$\hat{\mathbf{n}}$后，潮汐摩擦力可写为

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{F} = &-\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^3r_{\rm p}^4} \\ &\times\sum_{mn\nu}\frac{5}{4\pi}D^2_{\nu m}(\alpha\beta 0)\mathcal{V}_{mn}k_{2mn}{\rm e}^{-{\rm i}n\Omega t+{\rm i}\Delta_{mn}}\Big\{ \\ &W_{2\nu}{\rm e}^{{\rm i}\nu f}\Big[(3\cos f+{\rm i}\nu\sin f)\hat{\mathbf{u}} \\ &+(3\sin f-{\rm i}\nu\cos f)\hat{\mathbf{v}}\Big] \\ &+W_{2,\nu+1}{\rm e}^{{\rm i}\nu f}\sqrt{(3+\nu)(2-\nu)}\hat{\mathbf{n}}\Big\}\end{aligned} \tag{13}$$

这种潮汐摩擦力伴随着轨道能量损失，其表达式为

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{r}}_{\rm p}\cdot\delta\mathbf{F} \ , \tag{14}$$

对此我们可以假设瞬时开普勒运动，即$\mathbf{r}_{\rm p} = r_{\rm p}[\cos f\hat{\mathbf{u}}+\sin f\hat{\mathbf{v}}]$，因此 $\dot{\mathbf{r}}_{\rm p} = \Omega a_{\rm p}(1-e_{\rm p}^2)^{-1/2}[-\sin f\hat{\mathbf{u}}+(e_{\rm p}+\cos f)\hat{\mathbf{v}}]$。

使用汉森系数展开

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu f}}{r_{\mathrm{p}}^{\alpha}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\Omega t}}{a_{\mathrm{p}}^{\alpha}}\sum_{s=-\infty}^{\infty}X_{s+\nu}^{-\alpha,\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Omega t} \tag{15}$$

在 $\alpha=4$ 的情况下，我们将潮汐摩擦功率写为

$$\begin{aligned}\dot{E}=&\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{p}}^2R_\star^5\Omega}{a_{\mathrm{p}}^6\sqrt{1-e_{\mathrm{p}}^2}}\frac{5}{4\pi}\\&\times\sum_{\mu n\nu s}\mathrm{i}D_{\nu\mu}^2(\alpha\beta0)\mathcal{V}_{\mu n}k_{\mu n}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-s)\Omega t+\mathrm{i}\Delta_{\mu n}}\Big\{\\&\quad\frac{1}{2}W_{2\nu}\Big[\,2\nu X_{s+\nu}^{-4,\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\Omega t}\\&\qquad+(3+\nu)X_{s+\nu+1}^{-4,\nu+1}e_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\&\qquad-(3-\nu)X_{s+\nu-1}^{-4,\nu-1}e_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{16}$$

然后，对 E取时间平均，经过一些整理后，我们得到

$$\begin{aligned}\langle\dot{E}\rangle=&\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{p}}^2R_\star^5\Omega}{a_{\mathrm{p}}^6\sqrt{1-e^2}}\frac{5}{4\pi}\sum_{mn}\mathrm{i}\mathcal{V}_{mn}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\\&\times\sum_{r}D_{rm}^2(\alpha\beta0)W_{2r}\Big\{rX_n^{-4,r}\\&\quad+\frac{e_{\mathrm{p}}}{2}\left[(3+r)X_n^{-4,r+1}-(3-r)X_n^{-4,r-1}\right]\Big\}\\=&\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{p}}^2R_\star^5\Omega}{a_{\mathrm{p}}^6}\frac{5}{4\pi}\\&\times\sum_{mnr}\mathrm{i}n\mathcal{V}_{mn}D_{rm}^2(\alpha\beta0)W_{2r}X_n^{-3,r}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\end{aligned} \tag{17}$$

这里我们使用了式（Correia &Valente2022）中的恒等式 156（另见Giacaglia 1976）。回顾 $\mathcal{V}_{mn}$ 的定义（方程4），最终可写为

$$\langle\dot{E}\rangle=-\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{p}}^2R_\star^5\Omega}{a_{\mathrm{p}}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mn}n|\mathcal{V}_{mn}|^2k_{2mn}\Delta_{mn} \tag{18}$$

（例如，参见Lai2012，式 25），其中我们还假设 $\Delta_{mn}\ll1$ 且只保留实部。

请注意，这些能量损失仅表示轨道能量的变化。因此，我们预计方程（18）与系统的净耗散率 $\mathcal{D}$ 不同（见下文方程46 ）。

2.4. 米兰科维奇形式下的轨道摄动

摄动力 $\delta\mathbf{F}$ （方程 13）会导致行星轨道要素在长时间尺度上发生变化。这种长期演化可以用米兰科维奇状态矢量表示$\mathbf{L}_{\mathrm{p}}=\mu_{\mathrm{p}}\Omega a_{\mathrm{p}}^2\left(1-e_{\mathrm{p}}^2\right)^{1/2}\hat{}\,\mathbf{n}$和 $\mathbf{e}_{\mathrm{p}}=e_{\mathrm{p}}\,\hat{}\,\mathbf{u}$（米兰科维奇 1939），其运动方程为：

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}=\mathbf{r}_{\mathrm{p}}\times\delta\mathbf{F}\equiv\mathbf{T} \tag{19}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}=(\mathcal{G}M_{\mathrm{p}}M_\star)^{-1}\left(\mu_{\mathrm{p}}^{-1}\delta\mathbf{F}\times\mathbf{L}_{\mathrm{p}}+\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{p}}\times\mathbf{T}\right) \tag{20}$$

（例如，Eggleton 等，1998；Tremaine 等，2009；Correia 等，2011）。

利用方程（13）及方程（15）的级数展开，我们可以明确写出：

$$\begin{aligned}\mathbf{T}=&\mathbf{r}_{\mathrm{p}}\times\delta\mathbf{F}\\=&\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{p}}^2R_\star^5}{a_{\mathrm{p}}^6}\\&\times\sum_{mn\nu s}\mathrm{i}\frac{5}{4\pi}D_{\nu m}^2(\alpha\beta0)\mathcal{V}_{mn}k_{2mn}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-s)\Omega t+\mathrm{i}\Delta_{mn}}\Big\{\\&\quad\nu W_{2\nu}X_{s+\nu}^{-3,\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\Omega t}\hat{\mathbf{n}}\\&\quad-\mathrm{i}W_{2,\nu+1}b_\nu^{(+)}[X_{s+\nu+1}^{-3,\nu+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\&\qquad+X_{s+\nu-1}^{-3,\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}]\hat{\mathbf{v}}\\&\quad+W_{2,\nu+1}b_\nu^{(+)}[X_{s+\nu+1}^{-3,\nu+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\&\qquad-X_{s+\nu-1}^{-3,\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}]\hat{\mathbf{u}}\Big\}\,,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathbf{F}\times\mathbf{L}_{\mathrm{p}}}{\mu_{\mathrm{p}}}=&\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{p}}^2R_\star^5\Omega}{a_{\mathrm{p}}^5}\sqrt{1-e_{\mathrm{p}}^2}\\&\times\sum_{mn\nu s}\frac{5}{4\pi}D_{\nu m}^2(\alpha\beta0)\mathcal{V}_{mn}k_{2mn}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-s)\Omega t+\mathrm{i}\Delta_{mn}}\\&\quad\times\frac{1}{2}W_{2\nu}\Big\{\Big[(3+\nu)X_{s+\nu+1}^{-4,\nu+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\&\qquad+(3-\nu)X_{s+\nu-1}^{-4,\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}\Big]\hat{\mathbf{v}}\\&\qquad+\mathrm{i}\Big[(3+\nu)X_{s+\nu+1}^{-4,\nu+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\&\qquad-(3-\nu)X_{s+\nu-1}^{-4,\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}\Big]\hat{\mathbf{u}}\Big\}\end{aligned} \tag{22}$$

and

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_{\rm p}\times\mathbf{T} =&\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5\Omega}{a_{\rm p}^5\sqrt{1-e^2}}\\ &\times\sum_{mn\nu s}\mathrm{i}\frac{5}{4\pi}D^2_{\nu m}(\alpha\beta 0)\mathcal{V}_{mn}k_{2mn}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-s)\Omega t+\mathrm{i}\Delta_{mn}}\Big\{\\ &-\mathrm{i}\frac{\nu}{2}W_{2\nu}[X^{-3,\nu+1}_{s+\nu+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\ &\qquad-X^{-3,\nu-1}_{s+\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}]\hat{\mathbf{v}}\\ &+\frac{\nu}{2}W_{2\nu}\big[2eX^{-3,\nu}_{s+\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\Omega t}+X^{-3,\nu+1}_{s+\nu+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\ &\qquad+X^{-3,\nu-1}_{s+\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}\big]\hat{\mathbf{u}}\\ &-eW_{2,\nu+1}b^{(+)}_\nu[X^{-3,\nu+1}_{s+\nu+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\Omega t}\\ &\qquad-X^{-3,\nu-1}_{s+\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-1)\Omega t}]\hat{\mathbf{n}}\Big\}\end{aligned}\tag{23}$$

其中我们引入了系数

$$b^{(\pm)}_\nu\equiv\tfrac{1}{2}\sqrt{(3\pm\nu)(2\mp\nu)}\tag{24}$$

其满足 $b^{(+)}_{\nu-1}=b^{(-)}_\nu$和 $b^{(-)}_{\nu+1}=b^{(+)}_\nu$。

紧接着对 $\langle E\rangle$的计算，我们计算时间平均值 $\langle\dot{\mathbf{T}}\rangle$、$\langle\delta\mathbf{F}\times\mathbf{L}_{\rm p}\rangle$和 $\langle\dot{\mathbf{r}}_{\rm p}\times\mathbf{T}\rangle$，并得到平均后的米兰科维奇运动方程，其分量形式写为:

$$\langle\dot{\mathbf{L}}_{\rm p}\rangle=\langle T_u\rangle\hat{\mathbf{u}}+\langle T_v\rangle\hat{\mathbf{v}}+\langle T_n\rangle\hat{\mathbf{n}}\tag{25}$$

$$\langle\dot{\mathbf{e}}_{\rm p}\rangle=\langle\dot{e}_u\rangle\hat{\mathbf{u}}+\langle\dot{e}_v\rangle\hat{\mathbf{v}}+\langle\dot{e}_n\rangle\hat{\mathbf{n}}\tag{26}$$

其中力矩项为

$$\begin{aligned}\langle T_u\rangle=&\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnr}\mathrm{i}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\mathcal{V}_{mn}W_{2r}X_n^{-3,r}\\ &\times\big[D^2_{r-1,m}(\alpha\beta0)b^{(-)}_r+D^2_{r+1,m}(\alpha\beta0)b^{(+)}_r\big],\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}\langle T_v\rangle=&-\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnr}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\mathcal{V}_{mn}W_{2r}X_n^{-3,r}\\ &\times\big[D^2_{r+1,m}(\alpha\beta0)b^{(+)}_r-D^2_{r-1,m}(\alpha\beta0)b^{(-)}_r\big]\end{aligned}\tag{28}$$

and

$$\begin{aligned}\langle T_n\rangle=&\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnr}\mathrm{i}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\mathcal{V}_{mn}W_{2r}X_n^{-3,r}\\ &\times rD^2_{rm}(\alpha\beta0)\,,\end{aligned}\tag{29}$$

偏心率演化项为

$$\begin{aligned}\langle\dot{e}_u\rangle=&\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{(1-e_{\rm p}^2)^{1/2}}{e_{\rm p}}\frac{5}{4\pi}\\ &\times\sum_{mnr}\mathrm{i}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\mathcal{V}_{mn}W_{2,r}X_n^{-3,r}\\ &\times\big[n\sqrt{1-e_{\rm p}^2}-r\big]D^2_{rm}(\alpha\beta0)\,,\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}\langle\dot{e}_v\rangle=&\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}(1-e_{\rm p}^2)^{-1/2}\frac{5}{4\pi}\\ &\times\sum_{mnr}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\mathcal{V}_{mn}W_{2r}\\ &\times\Big[\frac{3+r}{4}e_{\rm p}X_n^{-3,r+2}+\frac{3+2r}{2}X_n^{-3,r+1}\\ &\quad+\frac{3}{2}e_{\rm p}X_n^{-3,r}+\frac{3-2r}{2}X_n^{-3,r-1}\\ &\quad+\frac{3-r}{4}e_{\rm p}X_n^{-3,r-2}\Big]D^2_{rm}(\alpha\beta0)\end{aligned}\tag{31}$$

and

$$\begin{aligned}\langle\dot{e}_n\rangle=&-\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}(1-e_{\rm p}^2)^{-1/2}e_{\rm p}\frac{5}{4\pi}\\ &\times\sum_{mnr}\mathrm{i}k_{2mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_{mn}}\mathcal{V}_{mn}W_{2,r}X_n^{-3,r}\\ &\times\big[D^2_{r-1,m}(\alpha\beta0)b^{(+)}_{r-1}+D^2_{r+1,m}(\alpha\beta0)b^{(-)}_{r+1}\big]\,,\end{aligned}\tag{32}$$

其中，我们使用了标准恒等式（Giacaglia 1976；Correia & Valente 2022）以确保汉森系数具有 $X^{-3,k}_n$的形式，并利用了关系式

$$W_{2,m\pm2}=-W_{2m}\frac{b^{(\pm)}_m}{b^{(\pm)}_{m\pm1}}\tag{33}$$

在给出广义有效潮汐模型的最终方程之前，我们说明另外两点简化。

Effective Time Lag Model—根据 Lai (2012)，我们假设每个相移 Δ_{mn} 均与潮汐频率 $\tilde{\omega}_{mn}$ 呈线性关系，形式为

$$\frac{\mathrm{Im}[K_{2m}(\tilde{\omega}_{mn})]}{k_{2mn}}=\Delta_{mn}=\frac{\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}}{k_{2mn}}\tag{34}$$

Uniform Tidal Love Numbers—通常假定，二阶潮汐 Love 数 k^2_m 与恒星方位数无关 m（详细讨论参见例如Poisson 和 Will 2014，§2.4）。然而，对于快速自转天体，由于旋转形变与潮汐形变之间存在耦合，这种近似不再成立，导致 Love 数依赖于 m（例如，Wahl 等，2017，2020）。尽管对于自转速度很快的天体而言，这些修正可能很重要

（例如，对于木星模型，自转频率高于其解体自转频率的 $\sim 10\%$ 时；Wahl 等，2017），这些修正仍为一阶量。因此，我们假设，在与滞后时间无关的项 $k_{2mn} = k_2$中 τ_{mn}，运动方程（27）–（29）中的力矩项最终为：

$$\begin{aligned}\langle T_u \rangle =& -\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}\\ &\times \mathrm{Re}\big\{D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{r-1,m}^2(\alpha\beta 0)b_r^{(-)}\\ &+ D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{r+1,m}^2(\alpha\beta 0)b_r^{(+)}\big\}\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\langle T_v \rangle =& \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}\\ &\times \mathrm{Im}\big\{D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{r+1,m}^2(\alpha\beta 0)b_r^{(+)}\\ &- D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{r-1,m}^2(\alpha\beta 0)b_r^{(-)}\big\}\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\langle T_n \rangle =& -\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr} rW_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}\\ &\times \mathrm{Re}\big\{D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{rm}^2(\alpha\beta 0)\big\}\end{aligned} \tag{37}$$

而对于偏心率矢量项：

$$\begin{aligned}\langle \dot{e}_u \rangle =& -\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{5}{4\pi}\frac{(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}}}{e_{\rm p}}\\ &\times\sum_{mnpr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}\\ &\times [n(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}}-r]\mathrm{Re}\big\{D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{rm}^2(\alpha\beta 0)\big\}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\langle \dot{e}_v \rangle =& \frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{5}{4\pi}k_2(1-e_{\rm p}^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &\times\sum_{mnpr} W_{2r}W_{2p}X_n^{-3,p}\\ &\times\frac{1}{2}\big[(3+2r)X_n^{-3,r+1}+3eX_n^{-3,r}\\ &+(3+r)\frac{e}{2}X_n^{-3,r+2}+(3-2r)X_n^{-3,r-1}\\ &+(3-r)\frac{e}{2}X_n^{-3,r-2}\big]\\ &\times\mathrm{Re}\big\{D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{rm}^2(\alpha\beta 0)\big\}\\ &-\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{5}{4\pi}(1-e_{\rm p}^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &\times\sum_{mnpr} W_{2r}W_{2p}X_n^{-3,p}\\ &\times\frac{1}{2}\big[(3+2r)X_n^{-3,r+1}+3eX_n^{-3,r}\\ &+(3+r)\frac{e}{2}X_n^{-3,r+2}+(3-2r)X_n^{-3,r-1}\\ &+(3-r)\frac{e}{2}X_n^{-3,r-2}\big]\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}\\ &\times\mathrm{Im}\big\{D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{rm}^2(\alpha\beta 0)\big\}\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\langle \dot{e}_n \rangle =& \frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{5}{4\pi}e_{\rm p}(1-e_{\rm p}^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &\times\sum_{mnpr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}\\ &\times\mathrm{Re}\big\{D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{r-1,m}^2(\alpha\beta 0)b_r^{(-)}\\ &+D_{pm}^{2^*}(\alpha\beta 0)D_{r+1,m}^2(\alpha\beta 0)b_r^{(+)}\big\}\end{aligned} \tag{40}$$

这些方程对任意偏心率和倾角均成立。此外，除了我们关于$\mathrm{Re}[K_{2m}(\tilde{\omega}_{mn})] = k_{mn}^2 = k_2$=为常数的简化假设之外，这些方程是通用的，可应用于恒定时间滞后模型以外的耗散模型。回顾等价关系$\mathrm{Im}[K_{2m}(\tilde{\omega}_{mn})] = k_2\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}$，便可将这些运动方程用于所给定的$K_{2m}(\tilde{\omega})$函数，适用于任意流变学模型（Correia &Valente 2022）。

2.4.1. 轨道根数形式的运动方程

米兰科维奇形式的运动方程（19-20）适用于数值积分；在增加系统的复杂性时（例如加入额外天体、短程力；参见Liu 等，2015），它们也特别有用。不过，这些方程确实可能掩盖动力学的简单物理解释

。对于两个天体之间的简单相互作用，重点考察轨道根数形式的四个运动方程：$\dot{a}_{\rm p}$、$\dot{e}_{\rm p}$、$\Omega_\star$ 和 β，会很有启发性。

半长轴的运动方程 $a_{\rm p}$可直接由方程（18）以及关系式$\dot{a}_{\rm p}/a_{\rm p} = -\dot{E}/E$得到，其中 $E = -\frac{1}{2}\mathcal{G}M_\star M_{\rm p}/a_{\rm p}$:

$$\frac{\langle \dot{a}_{\rm p}\rangle}{a_{\rm p}} = -\frac{2M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr} nW_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \times \mathrm{Re}\{D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{rm}(\alpha\beta 0)\} \tag{41}$$

偏心率方程可直接由方程（30）得到，因为 $\dot{e}_{\rm p} = \dot{\mathbf{e}}_{\rm p}\cdot \mathbf{e}_{\rm p}/|\mathbf{e}_{\rm p}| = \dot{e}_u$，即

$$\begin{aligned}\frac{\langle \dot{e}_{\rm p}\rangle}{e_{\rm p}} =& -\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}}}{e_{\rm p}^2}\frac{5}{4\pi} \\ &\times\sum_{mnpr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \\ &\times [n(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}} - r]\mathrm{Re}\{D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{rm}(\alpha\beta 0)\}\end{aligned} \tag{42}$$

对于自旋率 $\Omega_\star = I_\star^{-1}S_\star$，其变化率为 $\dot{\Omega}_\star = -(\mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{s}})/I_\star$，因此，$\langle\dot{\Omega}_\star\rangle = -\frac{1}{I_\star}\left[\sin\beta\cos\alpha\langle T_u\rangle + \sin\beta\sin\alpha\langle T_v\rangle + \cos\beta\langle T_n\rangle\right]$

$$\begin{aligned}\langle\dot{\Omega}_\star\rangle =& \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{I_\star a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \\ &\times\mathrm{Re}\big\{\sin\beta e^{i\alpha}D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0)b_r^{(+)} \\ &+\sin\beta e^{-i\alpha}D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0)b_r^{(-)} \\ &+\cos\beta r D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{rm}(\alpha\beta 0)\big\} \\ =& \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{I_\star a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr} mW_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \\ &\times D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{rm}(\alpha\beta 0)\end{aligned} \tag{43}$$

其中最后一个等式使用了方程（C20）（参见 Varshalovich 等，1988）。

接下来，通过展开$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{S}_\star\cdot\mathbf{L}_{\rm P}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_\star L_{\rm p}\cos\beta)$，并利用 $\dot{\mathbf{S}}_\star = -\dot{\mathbf{L}}_{\rm P} = -\mathbf{T}$，我们得到恒星倾角 β 的显式运动方程，即

$$\begin{aligned}\dot{\beta} =& \frac{(\mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{n}})}{\sin\beta}\left(\frac{\cos\beta}{L_{\rm p}}+\frac{1}{S_\star}\right) - \frac{(\mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{s}})}{\sin\beta}\left(\frac{\cos\beta}{S_\star}+\frac{1}{L_{\rm p}}\right) \\ =& -(T_u\cos\alpha + T_v\sin\alpha)\left(\frac{\cos\beta}{S_\star}+\frac{1}{L_{\rm p}}\right) + \frac{T_n}{S_\star}\sin\beta\end{aligned}$$

代入以下表达式 $\langle T_u\rangle$、$\langle T_v\rangle$ 和 $\langle T_n\rangle$，并使用 Varshalovich 等人（1988）中的恒等式（**4.8.17**），我们得到

have

$$\begin{aligned}\langle\dot{\beta}\rangle =& -\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \\ &\times\left[r\frac{\sin\beta}{S_\star} - \frac{m-r\cos\beta}{\sin\beta}\left(\frac{\cos\beta}{S_\star}+\frac{1}{L_{\rm p}}\right)\right] \\ &\times\mathrm{Re}\{D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{rm}(\alpha\beta 0)\}\end{aligned} \tag{44}$$

这些表达式使我们能够计算净耗散率，它不同于方程（18）。由于净耗散率 $\mathcal{D}$ 定义为总能量预算的变化量$E_{\rm tot} = E + \frac{1}{2}I_\star\Omega_\star^2$，因此

$$\mathcal{D} = -\dot{E}_{\rm tot} = -\dot{E} - I_\star\Omega_\star\dot{\Omega}_\star\ . \tag{45}$$

代入方程（18）和（43），可得

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{D}\rangle =& \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mnpr}(n\Omega - m\Omega_\star)W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r} \\ &\times D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0)D^2_{rm}(\alpha\beta 0)\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \\ =& \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\sum_{mn}|\mathcal{V}_{mn}|^2\tilde{\omega}_{mn}^2\tau_{mn}\end{aligned} \tag{46}$$

分量耗散率可写为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{2mn} =& \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}|\mathcal{V}_{mn}|^2\tilde{\omega}_{mn}^2\tau_{mn} \\ =& \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}|\mathcal{V}_{mn}|^2\tilde{\omega}_{mn}\mathrm{Im}(K_{2mn})\ ,\end{aligned} \tag{47}$$

这与 Im 和耗散之间通常的关系式完全相同[K_{lm}]（Ogilvie 2013，方程 **41**），该关系式对应于如下形式的潮汐势 $V(\mathbf{r}\ t) = A_{lmn}(r/R_\star)^l Y_{lm}(\theta,\ \phi)\ e^{-i\tilde{\omega}_{mn}t}$，在确定 $A_{2mn} = -2(\mathcal{G}M_{\rm p}R_\star^2/a_{\rm p}^3)\ \mathcal{V}_{mn}$之后。其中多出的因子 2 来自方程（46）中物理等价的两组（m，n）和（$-m$，$-n$）的组合。

注意，方程41—44描述的是一个仅有 4 个方程的 5 个未知量系统，其中省略了关于角度 α的运动方程。虽然存在不能忽略该角度的情况，但在轨道近心点进动较快的情况下，可以再次对这一进动周期进行平均（Correia，2009；Correia 等，2011）。

由于，在我们当前的记号下，这一额外的平均步骤很容易完成，

$$e^{is\alpha}D^{l^*}_{\mu m}(\alpha\beta\gamma)D^l_{\nu m}(\alpha\beta\gamma) = e^{i(s+\mu-\nu)\alpha}d^l_{\nu m}(\beta)d^l_{\mu m}(\beta) \tag{48}$$

仅当 $s+\mu-\nu=0$ 时才不发生振荡。因此，对 r 求和后，我们得到

$$\frac{\langle\langle \dot{a}_{\rm p}\rangle\rangle}{a_{\rm p}} = -\frac{2M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5} \times \frac{5}{4\pi}\sum_{mnp} n\,(W_{2p})^2\,[X_n^{-3,p}]^2[d_{pm}^2(\beta)]^2\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \tag{49}$$

$$\frac{\langle\langle \dot{e}_{\rm p}\rangle\rangle}{e_{\rm p}} = -\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}}}{e_{\rm p}^2} \times \frac{5}{4\pi}\sum_{mnp}\Big\{[n(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}}-p]\,(W_{2p})^2\,[X_n^{-3,p}]^2 \times [d_{pm}^2(\beta)]^2\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}\Big\} \tag{50}$$

$$\langle\langle \dot{\Omega}_\star\rangle\rangle = \frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{I_\star a_{\rm p}^6} \times \frac{5}{4\pi}\sum_{mnp} m\,(W_{2p})^2\,[X_n^{-3,p}]^2[d_{pm}^2(\beta)]^2\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \tag{51}$$

and

$$\langle\langle \dot{\beta}\rangle\rangle = -\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{1}{\sin\beta} \times \frac{5}{4\pi}\sum_{mnp}\Big\{(W_{2p})^2\,[X_n^{-3,p}]^2[d_{pm}^2(\beta)]^2\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn} \times\Big[\frac{p-m\cos\beta}{S_\star}+\frac{p\cos\beta-m}{L_{\rm p}}\Big]\Big\} \tag{52}$$

其中我们使用了恒等式（4.8.17）Varshalovich 等人 (1988) 来简化方程（51）。

2.5. 弱摩擦极限下的运动方程

在标准的弱摩擦极限下，我们假设时间滞后为常 $\tau_{mn}=\tau$ (例如，Alexander 1973；Mignard1979；Hut 1981）。在此极限下，表达式（27）–（32）借助 Wigner D 矩阵的正交性质（见附录A），可大幅简化。力矩项简化为

$$\langle T_u\rangle_{\rm eq} = \frac{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\tau\Omega_\star\sin\beta\cos\alpha\frac{1}{2}\left(X_0^{-6,0}-X_0^{-6,2}\right), \tag{53}$$

$$\langle T_v\rangle_{\rm eq} = \frac{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\tau\Omega_\star\sin\beta\sin\alpha\frac{1}{2}\left(X_0^{-6,0}+X_0^{-6,2}\right), \tag{54}$$

and

$$\langle T_n\rangle_{\rm eq} = 3\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5\Omega}{a_{\rm p}^6}\tau\left[\frac{\Omega_\star}{\Omega}\cos\beta X_0^{-6,0}-(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}}X_0^{-8,0}\right], \tag{55}$$

而偏心率矢量项简化为

$$\begin{aligned}\langle \dot{e}_u\rangle_{\rm eq} =& \frac{3M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\tau\Omega e_{\rm p}^{-1}(1-e_{\rm p}^2) \times 2\big[-3X_0^{-9,0}+2X_0^{-8,0}+(1-e^2)X_0^{-10,0}\big] \\ &+\frac{3M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\tau\Omega_\star\cos\beta \times\left[(1-e_{\rm p}^2)X_0^{-8,0}-X_0^{-6,0}\right]e_{\rm p}^{-1}(1-e_{\rm p}^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{56}$$

$$\langle \dot{e}_v\rangle_{\rm eq} = \frac{3M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}k_2(1-e_{\rm p}^2)^{-\frac{1}{2}} \times\frac{1}{2}\left(2X_0^{-6,1}+eX_0^{-6,0}+eX_0^{-6,2}\right) \tag{57}$$

and

$$\langle \dot{e}_n\rangle_{\rm eq} = -\frac{M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{M_\star a_{\rm p}^5}\frac{3}{2}e_{\rm p}(1-e_{\rm p}^2)^{-\frac{1}{2}}\tau\Omega_\star\sin\beta\cos\alpha \times\left(X_0^{-6,0}-X_0^{-6,2}\right) \tag{58}$$

利用 $X^{l,\ m}_{\ 0}$ Hansen 系数的闭式定义（Hughes 1981），可以很容易地验证，方程（55）—（58）等价于 Correia 等人 (2011）的方程 22 和 21，只需将 $\tau=k_2\Delta t$替换为，其中 Δt 是传统时间滞后（Mignard 1979；Hut1981）。具体而言，我们有

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{T}\rangle_{\rm eq} = 3\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6(1-e_{\rm p}^2)^{9/2}}\tau\Omega\Big\{&\frac{1}{2}f_4(e_{\rm p}^2)\frac{\Omega_\star}{\Omega}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} \\ &+\frac{1}{2}f_6(e_{\rm p}^2)\frac{\Omega_\star}{\Omega}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \\ &+\Big[(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}})\frac{\Omega_\star}{\Omega}f_5(e_{\rm p}^2)-(1-e_{\rm p}^2)^{-3/2}f_2(e_{\rm p}^2)\Big]\hat{\mathbf{n}}\Big\}\end{aligned} \tag{59}$$

and

$$\begin{aligned}\langle\dot{\mathbf{e}}\rangle_{\rm eq} =& e_{\rm p}\frac{3M_{\rm p}R_\star^5\Omega^2}{M_\star a_{\rm p}^5}\tau\Big\{\Big[\\ &-9(1-e_{\rm p}^2)^{-13/2}f_3(e_{\rm p}^2) \\ &+\frac{11}{2}(1-e_{\rm p}^2)^{-5}\frac{\Omega_\star}{\Omega}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}})f_4(e_{\rm p}^2)\Big]\hat{\mathbf{u}} \\ &+\Big[-\frac{1}{2}(1-e_{\rm p}^2)^{-5}\frac{\Omega_\star}{\Omega}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{u}})f_4(e_{\rm p}^2)\Big]\hat{\mathbf{n}}\Big\} \\ &+e_{\rm p}\frac{15M_{\rm p}R_\star^5\Omega}{2M_\star a_{\rm p}^5}k_2(1-e_{\rm p}^2)^{-5}f_4(e_{\rm p}^2)\hat{\mathbf{v}}\end{aligned} \tag{60}$$

其中我们使用了 $f_i(e^2)$ 函数（$i=1,\ .....,\ 5$），其定义见Hut(1981），此外还采用了以下定义$f_6(e^2)=1+\frac{9}{2}e^2+\frac{5}{8}e^4$。

同样地，只要令 $\tau_{mn}=\tau$，就可以用轨道根数形式恢复平衡潮的弱摩擦理论，见方程（49）—（52）。为完整起见，现将这些熟知的表达式列于此处（另见附录A）：

$$\frac{\langle \dot{a}_{\rm p}\rangle_{\rm eq}}{a_{\rm p}} = -\frac{6M_{\rm p}R_\star^5\Omega^2}{M_\star a_{\rm p}^5}\tau\Big[f_1(e_{\rm p}^2)(1-e_{\rm p}^2)^{-15/2} - \frac{\Omega_\star}{\Omega}\cos\beta f_2(e_{\rm p}^2)(1-e_{\rm p}^2)^{-6}\Big] \tag{61}$$

$$\frac{\langle \dot{e}_{\rm p}\rangle_{\rm eq}}{e_{\rm p}} = -\frac{27M_{\rm p}R_\star^5\Omega^2}{M_\star a_{\rm p}^5(1-e_{\rm p}^2)^{13/2}}\tau\Big\{ f_3(e_{\rm p}^2) - \frac{\Omega_\star}{\Omega}\cos\beta\frac{11}{18}(1-e_{\rm p}^2)^{3/2}f_4(e_{\rm p}^2)\Big\} \tag{62}$$

$$\langle\dot{\Omega}_\star\rangle_{\rm eq} = \frac{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5\Omega}{I_\star a_{\rm p}^6(1-e_{\rm p}^2)^6}\tau\Big\{\cos\beta f_2(e_{\rm p}^2) - \frac{1}{2}\frac{\Omega_\star}{\Omega}(1-e_{\rm p}^2)^{3/2}\big[(1+\cos^2\beta)f_5(e_{\rm p}^2) - \sin^2\beta\cos 2\alpha\left(f_5(e_{\rm p}^2)-f_4(e_{\rm p}^2)\right)\big]\Big\} \tag{63}$$

$$\langle\dot{\beta}\rangle_{\rm eq} = -\frac{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5\Omega}{a_{\rm p}^6(1-e_{\rm p}^2)^6}\frac{\sin\beta}{S_\star}\tau\Big\{f_2(e_{\rm p}^2) - \frac{\Omega_\star}{2\Omega}\left(\cos\beta-\frac{S_\star}{L_{\rm p}}\right)f_5(e_{\rm p}^2)(1-e_{\rm p}^2)^{3/2} - \frac{\Omega_\star}{2\Omega}\cos 2\alpha\left(\cos\beta+\frac{S_\star}{L_{\rm p}}\right) \times[f_5(e_{\rm p}^2)-f_4(e_{\rm p}^2)](1-e_{\rm p}^2)^{3/2}\Big\} \tag{64}$$

其中，与之前一样，双括号表示对轨道周期和近心点进动周期取平均。这些方程与 Lai（2012）中的方程 42–44 一致，前提是取极限 $e_{\rm p}=0$。作替换 $\tau=k_2\Delta t$，其中 Δt 是通常所说的“恒定时间滞后”（Mignard1979；Hut1981；Correia 等，2011），方程（61）–（64）在 Hut(1981）中也与方程 9–11 和 13 一致，精确到 β的一阶项。

3. 惯性波耗散引起的倾角阻尼

3.1. *(1,0)* 分量的唯一性

在这项工作中，我们重点关注因对以下因素的耗散响应增强而导致的轨道演化：潮汐势的 (1,0) 分量。直接考察方程（49）和（50）可知，对于 $n=0$，

$$\langle\dot{a}_{\rm p}\rangle_{10} = \langle\dot{e}_{\rm p}\rangle_{10} = 0 \tag{65}$$

也就是说，轨道衰减率和圆化率均严格为零。

另一方面，倾角阻尼率是有限的。Lai (2012) 计算了圆轨道中 (1,0) 分量的倾角阻尼率。根据方程（52），只需直接将（m，n）替换为 $=(\pm1,\ 0)$，即可将其结果直接推广到偏心轨道。已知 $X^{-3,\ -p}_{0\ \ 0}=X^{-3,\ p}_{0\ \ 0}=0$当 $-|p|-1\le-3$时（例如，Brumberg 2012），那么 $p=0$就成为求和中唯一非零的项。因此，将 $d^2_{01}(\beta)=\sqrt{3/2}\cos\beta\sin\beta$和 $X^{-3,\ 0}_{0\ \ 0}(e)=(1-e^2)^{-3/2}$替换后，得到

$$\langle\dot{\beta}\rangle_{10} = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6I_\star(1-e_{\rm p}^2)^3}\sin\beta\cos^2\beta\left(\cos\beta+\frac{S_\star}{L_{\rm p}}\right)\tau_{10} \tag{66}$$

为简洁起见，我们省略了双括号，而额外的因子 2 来自对物理上等价的 $m=1$ 和 $m=-1$ 分量求和。此表达式与Lai (2012) 中的式（52）相同，唯一的区别是偏心率相关因子；该因子会在高 $e_{\rm p}$时进一步增强倾角阻尼效应。

正如Lai(2012) 所讨论的，方程（65）表明，（10）分量造成的能量损失并非来自轨道能量的损失。在这种情况下，能量损失是以恒星的转动动能为代价的。将（m，n）=（±1，0）代入方程（51）可得

$$\langle\dot{\Omega}_\star\rangle_{10} = -\frac{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{4I_\star a_{\rm p}^6(1-e_{\rm p}^2)^3}\sin^2\beta\cos^2\beta\Omega_\star\tau_{10}\ . \tag{67}$$

也就是说，(1,0) 分量的耗散会使恒星减速。

利用关系式 Im τ_{10} 可以得到$[K_{2mn}]=\mathrm{Im}[K_2(\tilde{\omega}_{mn})]=\tilde{\omega}_{mn}\tau_{mn}$（方程9），从而可将修正滞后时间 τ_{mn} 表示为已知响应函数 $K_{2m}(\tilde{\omega})$ 在名义共振处的取值，即

$$\tau_{10} = \frac{\mathrm{Im}[K_{21}(\tilde{\omega}_{10})]}{\tilde{\omega}_{10}} \tag{68}$$

其中 $K_{2m}(\tilde{\omega})$ 必须通过直接求解流体动力学线性化方程（例如，Ogilvie 2013；Dewberry 2023），或通过模态分解（Wu 等，2024）。

3.2. 在 $\tilde{\omega}_{10}$ 潮汐频率下的惯性波耗散

潮汐频率 $\tilde{\omega}_{10}$ 处的共振响应必然会增强倾角阻尼。此类行为最初由 Barker &Ogilvie (2009) 在研究潮汐驱动下太阳型恒星中的惯性波耗散时报告 $\propto Y_{21}$。但后来 Ogilvie(2013) 指出，这实际上是与所谓的自转翻转全局模态（Poincar´e 1910；Greenspan1968）发生的“形式共振”；由于对波阻尼的处理过于简化，它看起来才会增强耗散。若不采用特设的阻尼力，而是假设黏性阻尼具有动力黏度 μ，则能量耗散率为

$$\mathcal{D}=\int_{V_{\rm conv}}\mu\delta\mathbf{S}^{*}:\delta\mathbf{S}dV \tag{69}$$

其中， $\delta\mathbf{S}$ 是与速度扰动$\mathbf{v}$相关的无迹应变张量：

$$\delta\mathbf{S}=\frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^{T}-\tfrac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{I}\right]\ , \tag{70}$$

（例如，Landau & Lifshitz1959；Kundu 等 2001）。张量 $\delta\mathbf{S}$ 仅当$\mathbf{v}$ 作刚体旋转时才严格为零，而这正是自旋翻转模：$\mathbf{v}=\delta\mathbf{\Omega}_{\perp}\times\mathbf{r}$，其中 $\delta\mathbf{\Omega}_{\perp}=\epsilon\Omega_{\star}[\cos t\,\hat{}\mathbf{x}+\sin t\,\hat{}\mathbf{y}]$ 是一个垂直于背景均匀旋转流的任意角速度矢量（Zhang&Liao2017）。因此，预计全局模态的激发在驱动频率下恰好不会产生任何耗散ω_{10}。

与此同时，自旋翻转模并非该频率下潮汐驱动所产生的唯一动力学响应。Lin &Ogilvie （2017）的研究表明，该频率下激发的行波可以产生显著的黏性耗散，但其大小在很大程度上取决于流体天体的内部结构，尤其是是否存在刚性核心。最近，Dewberry& Lai（2022）通过对旋转形变恒星中的潮汐驱动进行直接二维计算，探究了自旋翻转模的性质。尽管这些作者发现，即便在强烈的离心形变下，自旋翻转模仍保持其惯性系频率为零，但他们关于惯性振荡修正谱的开创性研究表明，快速旋转恒星中的模态混合效应仍未得到充分探索，这可能会开辟额外的耗散通道。

在本研究中，我们对惯性波（IW）耗散采取中立态度，同时旨在推断解释温木星观测趋势所需的耗散量。因此，我们将把对自旋翻转模的性质留待下文第6.2.1 节进一步讨论。我们接下来进行一些简单的标度论证，并通过引入增强系数$\tilde{\omega}_{10}$ 来参数化潮汐频率处线性响应的增强 η_{10}，即

$$\eta_{10}\equiv\frac{{\rm Im}[K_{2m}(\tilde{\omega}_{10})]}{{\rm Im}[K_{2m}^{\rm (bg)}(\tilde{\omega}_{10})]} \tag{71}$$

其中， $K_{2m}^{\rm (bg)}(\tilde{\omega})$ 表示“背景”响应函数。该背景可很好地表示为

$${\rm Im}\{K_{lm}^{\rm (bg)}(\tilde{\omega})\}\frac{\omega_{\rm dyn}^{2}}{\Omega_{\star}\tilde{\omega}}\approx\mathcal{K} \tag{72}$$

其中，根据经验， $\mathcal{K}\sim10^{-6}$-10^{-5} （例如 Wu 等，2024；Dewberry 与 Wu（2024）；Dewberry（2026）），其结果是多个宽共振的贡献，例如大尺度 f 模（Dewberry 与 Wu（2024））。将这些标度关系代入方程（68），可得

$$\begin{aligned}\tau_{10}=&\eta_{10}\mathcal{K}\frac{\Omega_{\star}}{\omega_{\rm dyn}^{2}}\\ \approx&1.84\times10^{-4}{\rm s}\ \eta_{10}\left(\frac{\mathcal{K}}{10^{-6}}\right)\left(\frac{P_{\star}}{\rm d}\right)^{-1}\left(\frac{R_{\star}}{R_{\odot}}\right)^{3}\left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{73}$$

与 η_{mn} 惯性区内任意共振峰相关的强度通常处于 10^{4}-10^{9} （Ogilvie 与 Lin（2004），2007；Ogilvie 2013；Wu 等，2024；Dewberry（2026））范围内。然而，在大多数情况下，这针对的是共面轨道（即不存在倾斜潮汐）；而少数专门研究 (1,0) 响应的工作得出结论认为，其对倾斜角阻尼的贡献充其量也很有限（Lin &Ogilvie2017）。如上所述，为了解释观测趋势，我们推测 $\tilde{\omega}_{10}$ 处的响应可能会增强（参见第 6.2.1节的讨论），因此将η_{10} 作为可调节的自由参数。

作为构建玩具模型的最后一步，我们将无量纲系数 $\mathcal{K}$ 与恒星结构联系起来。Dew-berry(2026) 表明 $\mathcal{K}$ 取决于恒星对流包层的范围。由于耗散本质上具有黏滞性，因此我们假设 $\mathcal{D}$ 在方程（69）中与对流包层的质量 $M_{\rm conv}$ 和湍流涡旋的运动黏度系数 ν的乘积成标度关系。根据 Zahn (1977) 提出的论证，我们将涡旋周转时间尺度 $\tau_{\rm conv}\sim(M_{\star}R_{\star}^{2}/L_{\star})^{1/3}$ 与黏滞时间尺度 $\tau_{\nu}\sim R_{\star}^{2}/\nu$ 相等，以求得运动涡黏度 $\nu\sim R_{\star}^{4/3}L_{\star}^{1/3}M_{\star}^{-1/3}$；因此，仅将量纲分析应用于恒星的对流包层（例如 Vick 与 Lai（2020）），我们写作 $M_{\rm conv}\nu\sim l_{\rm conv}^{4/3}L_{\star}^{1/3}M_{\rm conv}^{2/3}$，其中$l_{\rm conv}$ 是对流区的长度尺度。我们

由此得到一个启发式标度关系：

$$\mathcal{K} = 10^{-6}\left(\frac{M_{\rm conv}}{M_\odot}\right)^{2/3}\left(\frac{l_{\rm conv}}{l_{\rm conv,\odot}}\right)^{4/3}\left(\frac{L_\star}{L_\odot}\right)^{1/3} \tag{74}$$

这在之后考虑演化中的恒星时会很有用。

3.3. 运动方程：与弱摩擦理论共存的增强型 (1,0) 响应

一种便于对弱摩擦运动方程做最小幅度修改，并增强特定 $(m,\ n)$ 分量所导致的耗散的方法，是采用 Lai (2012) 提出的方法：假设 $\tau_{mn} = \tau_{\rm eq}$ 适用于所有模态，但不包括 $(m,\ n) = (\pm1,\ 0)$。因此，运动方程变为弱摩擦方程（方程59-60），但其中用 $\tau_{10} = \tau_{\rm eq}$ 计算的 $(\pm1,\ 0)$ 项会被移除，随后再以不同的 τ_{10} 重新加入。此处我们采用相同的方法，并将其写成米兰科维奇矢量形式。

$(\pm1,\ 0)$ 项的 $\langle T_u\rangle$（方程35）为

$$\begin{aligned}\langle T_u\rangle_{10} =& 2\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\Omega_\star\tau_{10}\frac{5}{4\pi}\left(W_{20}\right)^2\left[X_0^{-3,0}\right]^2\\ &\times\sqrt{\frac{3}{2}}\,d_{01}^2(\beta)\left[d_{-11}^2(\beta)+d_{11}^2(\beta)\right]\cos\alpha\\ =&\frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6(1-e_{\rm p}^2)^3}\Omega_\star\tau_{10}\cos\alpha\cos^2\beta\sin\beta\end{aligned} \tag{75}$$

这里我们再次利用了 $X_0^{-3\,p}=0 \quad -|p|-1 \le$，对于 $-3\ \ d_{01}^2\ \beta\ =\ \sqrt{3/2}\quad \beta\quad \beta\quad X_0^{-3\,0}_e\ =\ 1-$，( ) cos sin 和 ,() $(e^2)^{-3/2}$，以及 $d^l_{\pm11}(\beta)=\mp\frac{1}{2}(1\mp2\cos\beta)(1\pm\cos\beta)$（附录C）。与之前一样，额外的因子 2 来自合并 $(1,\ 0)$ 和 $(-1,\ 0)$ 分量。

同样地，我们得到

$$\langle T_v\rangle_{10} = \frac{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{4a_{\rm p}^6(1-e_{\rm p}^2)^3}\Omega_\star\tau_{10}\sin\alpha\cos^2\beta\sin\beta \tag{76a}$$

$$\langle T_n\rangle_{10} = 0 \tag{76b}$$

and

$$\langle \dot e_u\rangle_{10} = 0 \tag{77a}$$

$$\langle \dot e_v\rangle_{10} = \frac{9M_{\rm p}R_\star^5\Omega e_{\rm p}}{4M_\star a_{\rm p}^5(1-e_{\rm p}^2)^{7/2}}k_2\cos^2\beta\sin^2\beta \tag{77b}$$

$$\langle \dot e_n\rangle_{10} = \frac{-3M_{\rm p}R_\star^5\Omega e_{\rm p}}{4M_\star a_{\rm p}^5(1-e_{\rm p}^2)^{7/2}}\Omega_\star\tau_{10}\cos^2\beta\sin\beta\cos\alpha \tag{77c}$$

注意，$\langle \dot e_v\rangle_{10}$ 只是重现整体进动率，因为它不显式依赖于 τ_{10}。

于是，修正后的弱摩擦演化方程最终变得异常简单：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_{\rm p}\Big|_\star =&\langle T_u\rangle_{{\rm eq},\star}\hat{\mathbf{u}}+\langle T_v\rangle_{{\rm eq},\star}\hat{\mathbf{v}}+\langle T_n\rangle_{{\rm eq},\star}\hat{\mathbf{n}}\\ &+\frac{T_0}{(1-e_{\rm p}^2)^3}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{u}})(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\Omega_\star(\tau_{10}-\tau_{{\rm eq},\star})\hat{\mathbf{u}}\\ &+\frac{T_0}{(1-e_{\rm p}^2)^3}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{v}})(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\Omega_\star(\tau_{10}-\tau_{{\rm eq},\star})\hat{\mathbf{v}}\end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\mathbf{e}}_{\rm p}}{e_{\rm p}}\Big|_\star =&\frac{\langle \dot e_u\rangle_{{\rm eq},\star}}{e_{\rm p}}\hat{\mathbf{u}}+\frac{\langle \dot e_v\rangle_{{\rm eq},\star}}{e_{\rm p}}\hat{\mathbf{v}}+\frac{\langle \dot e_n\rangle_{{\rm eq},\star}}{e_{\rm p}}\hat{\mathbf{n}}\\ &-\frac{T_0(1-e_{\rm p}^2)^{-\frac{7}{2}}}{\mu_{\rm p}\Omega a_{\rm p}^2}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{u}})(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\Omega_\star(\tau_{10}-\tau_{{\rm eq},\star})\hat{\mathbf{n}}\end{aligned} \tag{79}$$

with

$$T_0 \equiv \frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5}{a_{\rm p}^6} = \frac{3}{4}\frac{\mu_{\rm p}M_{\rm p}}{M_\star}\frac{R_\star^5}{a_{\rm p}^3}\Omega^2 \tag{80}$$

其中，以 $\langle\cdot\rangle_{{\rm eq},\star}$ 表示的量对应于方程（53-58）中的量，此处明确将其标记为恒星中的潮汐耗散。

3.4. 重新对齐与圆化时间尺度

如果弱摩擦模型与 (1,0) 增强并存，则 $\langle \dot a_{\rm p}\rangle \neq 0$ 和 $\langle \dot e_{\rm p}\rangle \neq 0$。因此，要实现有效的重新对齐，倾斜角阻尼时间尺度必须短于圆化时间尺度。我们引入阻尼时间尺度 $t_\beta^{(10,\star)}$，将方程（67）改写为

$$\frac{\langle\dot\Omega_\star\rangle_{10}}{\Omega_\star} = -\frac{1}{t_\beta^{(10,\star)}}\sin^2\beta\cos^2\beta \tag{81}$$

其中

$$t_\beta^{(10,\star)} = \frac{4I_\star a_{\rm p}^6(1-e_{\rm p}^2)^3}{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2R_\star^5\tau_{10}} \tag{82}$$

类似地，由恒星中的弱摩擦潮汐导致的圆化时间尺度（参见方程62）为

$$t_e^{({\rm eq},\star)} = \frac{M_\star a_{\rm p}^5(1-e_{\rm p}^2)^{13/2}}{27M_{\rm p}R_\star^5\Omega^2\tau_{{\rm eq},\star}} \tag{83}$$

而行星中弱摩擦导致的圆化时间尺度

$$t_e^{({\rm eq,p})} = \frac{M_{\rm p} a_{\rm p}^5(1-e_{\rm p}^2)^{13/2}}{27M_\star R_{\rm p}^5\Omega^2\tau_{{\rm eq,p}}} \tag{84}$$

这通常 $\ll t_e^{({\rm eq},\star)}$ 因为我们一般有 $\tau_{{\rm eq},\ {\rm p}} \gg \tau_{{\rm eq},\ \star}$。由于圆化的主要驱动力是

行星内部的潮汐耗散，因此高效重新对齐的条件为 $t_\beta^{(10,\star)}/t_e^{(\mathrm{eq,p})} \ll 1$。如果我们写成

$$\begin{aligned}\frac{t_\beta^{(10,\star)}}{t_e^{(\mathrm{eq,p})}} =& \frac{36}{(1-e_\mathrm{p}^2)^{7/2}}\frac{I_\star}{\mu_\mathrm{p} a_\mathrm{p}^2}\left(\frac{M_\star}{M_\mathrm{p}}\right)^2\left(\frac{R_\mathrm{p}}{R_\star}\right)^5\frac{\tau_\mathrm{eq,p}}{\tau_{10}} \\ \approx& \frac{40}{(1-e_\mathrm{p}^2)^{7/2}}\frac{\tau_\mathrm{eq,p}}{\tau_{10}}\left(\frac{k_\star}{0.1}\right)\left(\frac{M_\star}{1\mathrm{M}_\odot}\right)^3\left(\frac{M_\mathrm{p}}{1\mathrm{M}_\mathrm{J}}\right)^{-3} \\ &\times\left(\frac{R_\star}{1\mathrm{R}_\odot}\right)^{-3}\left(\frac{R_\mathrm{p}}{1\mathrm{R}_\mathrm{J}}\right)^5\left(\frac{a_\mathrm{p}}{0.15\,\mathrm{au}}\right)^{-2},\end{aligned} \tag{85}$$

因此，要有效地重新对齐偏心轨道，就需要

$$\tau_{10} \gtrsim (1-e_\mathrm{p}^2)^{-7/2}\tau_{10,\min} \tag{86}$$

其中，我们定义

$$\begin{aligned}\tau_{10,\min} \equiv& 20\ \mathrm{s}\left(\frac{\tau_\mathrm{eq,p}}{0.5\ \mathrm{s}}\right)\left(\frac{k_\star}{0.1}\right)\left(\frac{M_\star}{1\mathrm{M}_\odot}\right)^3\left(\frac{M_\mathrm{p}}{1\mathrm{M}_\mathrm{J}}\right)^{-3} \\ &\times\left(\frac{R_\star}{1\mathrm{R}_\odot}\right)^{-3}\left(\frac{R_\mathrm{p}}{1\mathrm{R}_\mathrm{J}}\right)^5\left(\frac{a_\mathrm{p}}{0.12\,\mathrm{au}}\right)^{-2}\end{aligned} \tag{87}$$

比 τ_{10} 方程（73）中的数值大几个数量级，前提是 η_{10} 为数量级为一的值。

因此，行星中的耗散对该机制能否有效运作构成了显著限制。然而，恒星半径对结果有很强的影响，这表明恒星仍在收缩时，重新对齐或许更容易实现，同时只发生极少的圆化。我们将在下文探讨这种可能性。

4. 主序前阶段的自旋重新对齐

我们现在重点关注前主序星的三个关键特性。首先，在这一阶段，恒星半径较大，因此阻尼率会提高，因为 $\langle\dot{\beta}\rangle_{10} \propto R_\star^3$ （方程66）。其次，在这一阶段相当长的一段时间内，恒星处于完全对流状态，因此耗散惯性波的效率更高（Barker 2022；Wu 等，2024）。第三，年轻恒星可能自转迅速，因此根据方程（73）的标度关系，惯性波耗散会进一步增强。

但是，前主序阶段十分短暂，因此在倾角阻尼机制基本停止作用之前，它只有有限的时间发挥作用。在接下来的章节中，我们将建立一个前主序演化的玩具模型。

4.1. 收缩恒星的玩具模型4.1.1.

Stellar Structure

我们采用一个收缩中的主序前阶段恒星的简单解析模型。我们假设，在恒星处于完全对流状态时，它以恒定的有效温度作为一个 $n=\frac{3}{2}$ 多方体收缩，并且光度完全由引力收缩产生。通过直接计算（例如，Hansen 等（1994）；Spalding 等人 2014）可得到近似的林忠四郎轨迹：

$$R_\star^{\mathrm{Hay}}(t) = R_\odot\left[\frac{t-t_0}{\tau_\mathrm{Hay}} + \left(\frac{R_{\star,\mathrm{init}}}{R_\odot}\right)^{-3}\right]^{-1/3}, \tag{88}$$

其中

$$\tau_\mathrm{Hay} \equiv 0.423\tau_\mathrm{KH}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{74/51} \tag{89}$$

是 Hayashi 特征时间尺度，其中$\tau_\mathrm{KH} \equiv \mathcal{G}M_\odot^2/(R_\odot L_\odot) \approx 3.142\times10^7$ 年是太阳的开尔文–亥姆霍兹时间。在方程式(88)中，我们取$R_{\star,\ \mathrm{init}} = 10R_\odot(M/M_\odot)$，并取 $t_0 = 5\times10^4$ 年，以匹配Baraffe 等人 (2015)的前主序模型。

同样地，一旦恒星形成了相当大的辐射核心，我们便假设它按照有效指数为 $n_\mathrm{eff} \lesssim 3$的多方体收缩，并遵循关系式 $L_\star \sim T_\mathrm{eff}^m$，其中 $m \approx 2$。这一近似的Henyey轨道给出的收缩定律为

$$R_\star^{\mathrm{Hen}}(t) = R_\odot\left[-\frac{t-t_\mathrm{min}}{\tau_\mathrm{Hen}} + \left(\frac{R_{\star,\mathrm{min}}}{R_\odot}\right)\right] \tag{90}$$

其中，R_min 和 t_min 分别是 Hayashi光度达到前主序轨道转折点 $L_\mathrm{min}/L_\odot \approx 0.52(M_\star/M_\odot)^3$，时的半径和时间，并且

$$\tau_\mathrm{Hen} \equiv 1.2348(5-n_\mathrm{eff})\tau_\mathrm{KH}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{-3.5172} \tag{91}$$

是特征 Henyey时间尺度。我们取 n_eff =2.6，此时对于一颗 $1M_\odot$ 恒星，$\tau_\mathrm{Hen} \approx 10^8$ 年。

在赫罗图上，Hayashi轨道和 Henyey轨道必须在 $L_\star$=L_min 处相交。根据这一要求，这两个阶段的有效温度分别为 $T^{\mathrm{Hay}}{}_{\text{有效}} = T_{\mathrm{eff},\ 0} \approx 4400\,\mathrm{K}\,(M_\star/M_\odot)^{7/51}$ 和 $T_\mathrm{eff}^\mathrm{Hen} = 0.946\,T_{\mathrm{eff},\ \odot}(R_\star^\mathrm{Hen}/R_\odot)^{-1}$。

我们通过简单地取 $R_\star^{\mathrm{Hen}}$和 $R_\star^{\mathrm{Hay}}$的加权平均，构建一个统一的前主序收缩定律：

$$R_\star(t) = [1-s(t)]R_\star^{\mathrm{Hay}}(t) + s(t)R_\star^{\mathrm{Hen}}(t) \tag{92}$$

其中，$s(t)$ 是我们选取的渐增函数，其形式为

$$s(t) = 1 - \exp\left[-1.3\frac{t-t_\mathrm{rad}}{t_\mathrm{contr}}\right] \tag{93}$$

其中 $t_\mathrm{rc}\approx\tau_\mathrm{Hay}(R_{\star,\ \mathrm{rc}}/R_\odot)^{-3}$ 标记辐射核心在 Hayashi 阶段首次出现的时间，$R_{\star,\ \mathrm{rc}}\approx2.1R_\odot\ (M_\star/M_\odot)^{1.38}$ （例如，Kippen- hahn 等，2012），而 $t_\mathrm{contr} \approx \tau_\mathrm{Hay}(R_{\star,\ \mathrm{final}}/R_\odot)^{-3}$

是收缩时间，其中$R_{\star,\ \mathrm{final}} = R_{\star,\ \mathrm{ZAMS}} = (0.9$ $^{1.2}$ (

$M_\star/M_\odot$) 标记收缩阶段的结束。有效温度 $T_{\rm eff}$ 同样是 $T^{\rm Hay}_{\rm eff}$和 $T_{\rm Heneff}$的加权合成量，由此我们写出前主序星光度 $L_\star/L_\odot = (R_\star/R_\odot)^2(T_{\rm eff}/T_{\rm eff,\ \odot})^4$, ，下文将在方程（94）中使用。更多详情请参见附录D。

演化中的前主序星半径（方程 92）显示在图 2 的上方面板中，并与 Baraffe 等人 （2015）的模型进行对比，结果表明，我们对 Hayashi 阶段和 Henyey 阶段都实现了良好的近似。纳入 Henyey 阶段非常重要，因为这会使恒星向主序阶段收缩的过程再延迟 ~ 20 Myr，从而延长恒星半径较大、(1,0) 耗散能够发挥作用的时期。

为了进一步对这一收缩模型的结构常数进行建模，我们假设这些常数分别由$k_\star = \frac{2}{5}\kappa_n$ （回转半径）$k_{q\text{、}}$ $_\star \simeq \frac{\kappa_\star^2}{2}\left(1-\frac{n}{5}\right)$ （旋转形变）以及$k_{2\text{、}}$ $_\star = 3k_{q\text{、}}$ $_\star$ （潮汐 Love 数）给出，其中 κ_n 仅由多方指数 n决定（见 Lai 等，1993，1994），对于 $n = 3/2$ 取值 0.5115，对于 $n = 3$ 取值 0.1884（例如见 Lai 等，1993 的表 1）。我们使用与方程（92）中相同的加权平均，在 $n = 3/2$ 和 $n = 3$ 函数的结构常数之间进行插值。我们将这一玩具模型中恒星转动惯量 $I_\star = k_\star M_\star R_\star^2$的演化与 Baraffe 等人（ 2015 ）的数值进行比较，结果显示在图2的第二个面板中。

最后，我们采用唯象定律来描述辐射-对流边界的半径 $r_{\rm rc} = xR_\star$ 以及辐射核心的质量 $M_{\rm rc} = \xi M_\star$，使其与 Baraffe 等人 (2015) 的结果相符（图 2的第三和第四个面板）。随后，我们按照 Hurley 等人 (2002)的做法计算涡旋周转时间尺度

$$\tau_{\rm conv} = \left[\frac{M_{\rm conv}(R_\star - R_{\rm rc})(R_\star + R_{\rm rc})}{6L_\star}\right]^{1/3} \approx 0.237\ \mathrm{yr}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{T_{\rm eff}}{T_{\rm eff,\odot}}\right)^{-\frac{4}{3}}\left[(1-\xi)(1-x^2)\right]^{1/3} \quad (94)$$

（另见 Rasio 等，1996；Belczynski 等，2008）。我们将其与 $\tau_{\rm conv}$ 进行比较，后者根据 Baraffe 等人 (2015) 在图 2的第五个面板中报告的量推导得出。

4.2. 收缩恒星中潮汐耗散的演化

在前主序阶段，$\tau_{\rm eq\text{、}}$ $_\star$ 和 τ_{10} 均随时间变化。我们按如下方式对其进行估算：

Modified lag time for weak friction—随着前主序恒星收缩并进入主序阶段，修正后的时滞 $\tau_{\rm eq,\ }$ $_\star$从 $\tau_{\rm eq}^{\rm (PMS)}$, $_\star \sim 0.5$s 过渡到 $\tau_{\rm (ZAMS)eq\ }$ $_\star \sim 10^{-4}$s。

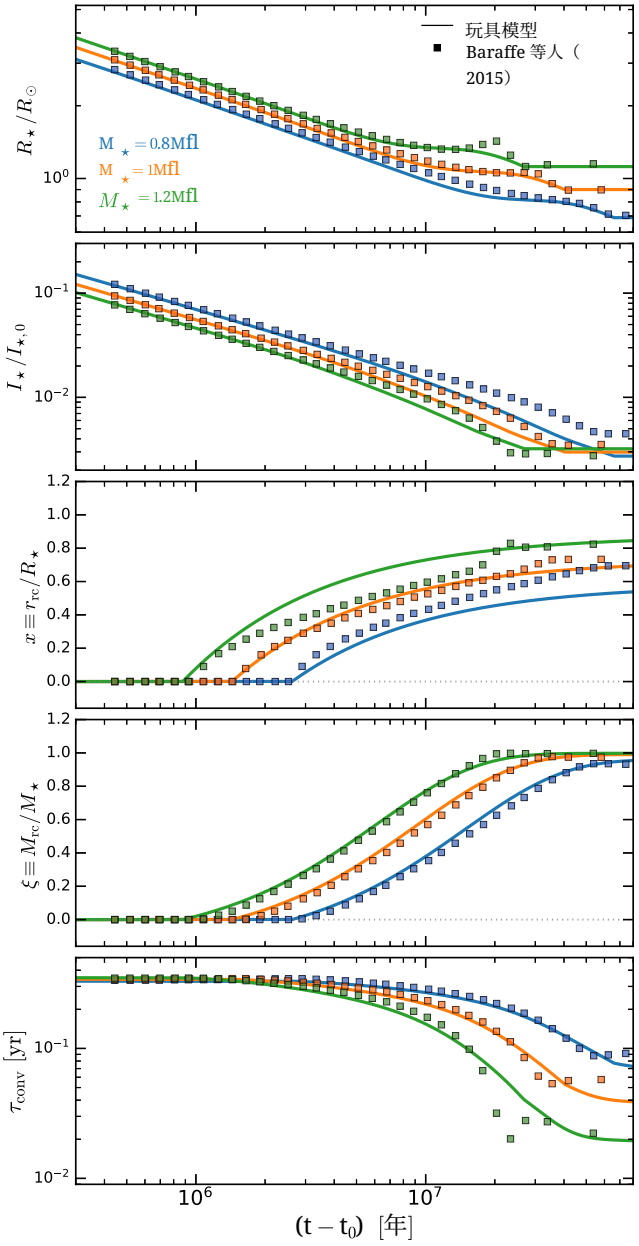


图2。 前主序收缩的玩具模型（实线；见第 4.1节）与 Baraffe 等人 (2015) 的详细演化模型（方形标记）进行比较。 *Top panel:* 恒星半径 $R_\star$ （方程 92）随时间的变化，其中 $M_\star = 0.8M_\odot$ （蓝色）、$1M_\odot$ *Second panel* （橙色） *from top:* $I_\star = k_\star M_\star R_\star^2$ *Third* 和 $1.2M_\odot$ （绿色）。恒星转动惯量。 *panel*: 辐射-对流边界的相对范围 x。 *Fourth panel*: 辐射核心的质量分数 ξ。 *Fifthpanel*: 根据 x 和 ξ 计算的涡旋周转时间（方程94）。

根据Zahn （1977）的图景，我们用 Hut记号将修正后的时滞写为 $\tau_{\mathrm{eq},\star} = k_{2,\star}[\omega_{\mathrm{dyn}}^2 T]^{-1}$，其中 $\omega_{\mathrm{dyn}} = (\mathcal{G}M_\star/R_\star^3)^{1/2}$ 是动力学频率， T 是“典型”的潮汐时间尺度。因此，当$T \approx \tau_{\mathrm{conv}} M_{\mathrm{conv}}/M_\star$时，我们写作

$$\tau_{\mathrm{eq},\star} = k_{2,\star}[\omega_{\mathrm{dyn}}^2 \tau_{\mathrm{conv}}]^{-1} \frac{M_{\mathrm{conv}}}{M_\star} \mathcal{F} \tag{95}$$

其中，额外因子 $\mathcal{F}$ 表示当强迫周期小于最大涡旋的周转周期时，涡黏度的效能会降低（例如，Zahn（1977）；Goldreich与Nicholson 1977；Goldreich与Keeley 1977；Goodman与Oh 1997）。这一衰减因子通常是潮汐频率 $\tilde{\omega}$的函数，但在本文中，我们简单地假设 $\mathcal{F} = 0.1$，并指出这一假设会高估潮汐耗散量。

一颗完全对流的 $1M_\odot$ 前主序恒星具有 $\xi = x = 0$ 和 $\tau_{\mathrm{conv}} \approx 0.35$ 年，而一颗 $1M_\odot$ 零龄主序恒星具有 $\xi \approx 0.97$, $x = 0.65$ 和 $\tau_{\mathrm{conv}} \approx 0.05$ 年（例如，Moe与Kratter 2018）。将这些数值代入方程（95），并假设 a$k_{2,\star} \approx 0.2747$ 对于前主序阶段，以及 $k_{2,\star} \approx 0.0213$对于零龄主序，可得

$$\tau_{\mathrm{eq},\star}^{(\mathrm{PMS})} \approx 0.8 \text{ s} \left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{R_\star}{5R_\odot}\right)^{3} \left(\frac{\tau_{\mathrm{conv}}}{0.35 \text{ yr}}\right)^{-1} \tag{96}$$

and

$$\tau_{\mathrm{eq},\star}^{(\mathrm{ZAMS})} \approx 10^{-4} \text{ s} \left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{R_\star}{R_\odot}\right)^{3} \left(\frac{\tau_{\mathrm{conv}}}{0.05 \text{ yr}}\right)^{-1} \tag{97}$$

恒星的修正时间滞后为 $\tau_{\mathrm{eq},\star} \approx 10^-$ s，比气态巨行星通常假设的值小 $\sim$ 5000 倍（例如，Anderson 等，2016）。在 Eggleton 与 Kiseleva-Eggleton（2001）常用的参数化方法中，$\tau_{\mathrm{eq},\star}$ 对应的黏滞时间为 $t_v \approx 2500$ 年。进而，对于潮汐强迫频率为 $\tilde{\omega}$ 的情况，可通过 $\tau_{\mathrm{eq},\star} = \frac{2}{3}[Q'_\star \tilde{\omega}]^{-1}$ 将这一时间滞后与修正潮汐品质因数 $Q'_\star$ 联系起来。对于当前问题，$\tilde{\omega} = \Omega_\star|1 - \Omega/\Omega_\star|$，强迫周期为 $\sim$ 1–10 天，因此 $Q'_\star \sim 10^8$–10^9，，与根据恒星对流包层中的湍流耗散对潮汐品质因数所作的估算大致一致（Penev 与 Sasselov，2011）。

Modified lag time for the (1,0) component—用74式表示，并将 ξ 和 x 代入方程73式，得到

$$\begin{aligned}\tau_{10} =& 3 \text{ m } \left(\frac{\eta_{10}}{10^6}\right)(1-\xi)^{2/3}(1-x)^{4/3} \\ &\times \left(\frac{L_\star}{L_\odot}\right)^{1/3} \left(\frac{P_\star}{\mathrm{d}}\right)^{-1} \left(\frac{R_\star}{R_\odot}\right)^{3} \left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{98}$$

这是 τ_{10} 随时间演化的表达式，我们在本文后续部分均采用该表达式。

4.3. 短期演化

接下来，我们对由以下方程支配的长期演化双体系统进行数值积分：

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_\star + \dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{p}} + \dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{CSRF}} \tag{99}$$

$$\frac{\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{p}}} = \dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\Big|_\star + \dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{p}} + \dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{CSRF}} \tag{100}$$

其中， $\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_\star$ 和 $\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}\Big|_\star$ 表示恒星平衡潮汐的黏性阻尼与其 (1,0) 模态耗散所产生的合效应对应的运动方程；此外，我们还计入行星内部仅由弱摩擦导致的耗散，即：

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{p}} = \langle T_u \rangle_{\mathrm{eq,p}} \hat{\mathbf{u}} + \langle T_v \rangle_{\mathrm{eq,p}} \hat{\mathbf{v}} + \langle T_n \rangle_{\mathrm{eq,p}} \hat{\mathbf{n}} \tag{101}$$

$$\frac{\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{p}}}\Big|_{\mathrm{p}} = \frac{\langle \dot{e}_u \rangle_{\mathrm{eq,p}}}{e_{\mathrm{p}}} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\langle \dot{e}_v \rangle_{\mathrm{eq,p}}}{e_{\mathrm{p}}} \hat{\mathbf{v}} + \frac{\langle \dot{e}_n \rangle_{\mathrm{eq,p}}}{e_{\mathrm{p}}} \hat{\mathbf{n}} \tag{102}$$

此处的量 $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{eq,p}}$ 也指方程（53-58），但将恒星的物理量替换为行星的物理量。

为求完整起见，我们也纳入保守短程力（CSRF；例如，Liu 等，2015）的影响，尽管这些力不会直接导致倾斜角或偏心率发生变化：

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{CSRF}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{Q},\star} \tag{103}$$

$$\frac{\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{p}}}\Big|_{\mathrm{CSRF}} = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{p}}}\Big|_{\mathrm{Q},\star} + \frac{\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{p}}}\Big|_{\mathrm{Q,p}} + \frac{\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{p}}}\Big|_{\mathrm{GR}} \tag{104}$$

其中我们纳入了由恒星和行星自转所诱导的行星四极矩产生的进动效应，以及一阶后牛顿广义相对论修正。这些效应表示为

$$\frac{1}{\Lambda_{\mathrm{p}}} \dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{p}}\Big|_{\mathrm{Q},\star} = -\frac{3k_{q,\star} M_{\mathrm{p}} R_\star^5 \Omega_\star^2}{2\mu_{\mathrm{p}} a_{\mathrm{p}}^5 \Omega^2} \frac{\Omega}{(1-e_{\mathrm{p}}^2)^{3/2}} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{n}} \tag{105}$$

$$\frac{\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{p}}}\Big|_{\mathrm{Q},\star} = \frac{3}{2} k_{q,\star} \frac{M_{\mathrm{p}}}{\mu_{\mathrm{p}}} \frac{R_\star^5}{a_{\mathrm{p}}^5} \frac{\Omega_\star^2}{\Omega^2} \frac{\Omega}{(1-e_{\mathrm{p}}^2)^2} \tag{106}$$

$$\times \left\{ \tfrac{1}{2} \left[1 - 5(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2\right] \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}} \right. \tag{107}$$

[1] 黏滞时间 t_v 与修正滞后时间之间的关系为 $3R_\star^2/\mathcal{G}M_\star \; 1 + k_2 \; ^2/t_v$ $t_v \approx 2500$ $\tau \approx 10^{-4}$ ()() 。对于 yr，则为 s。

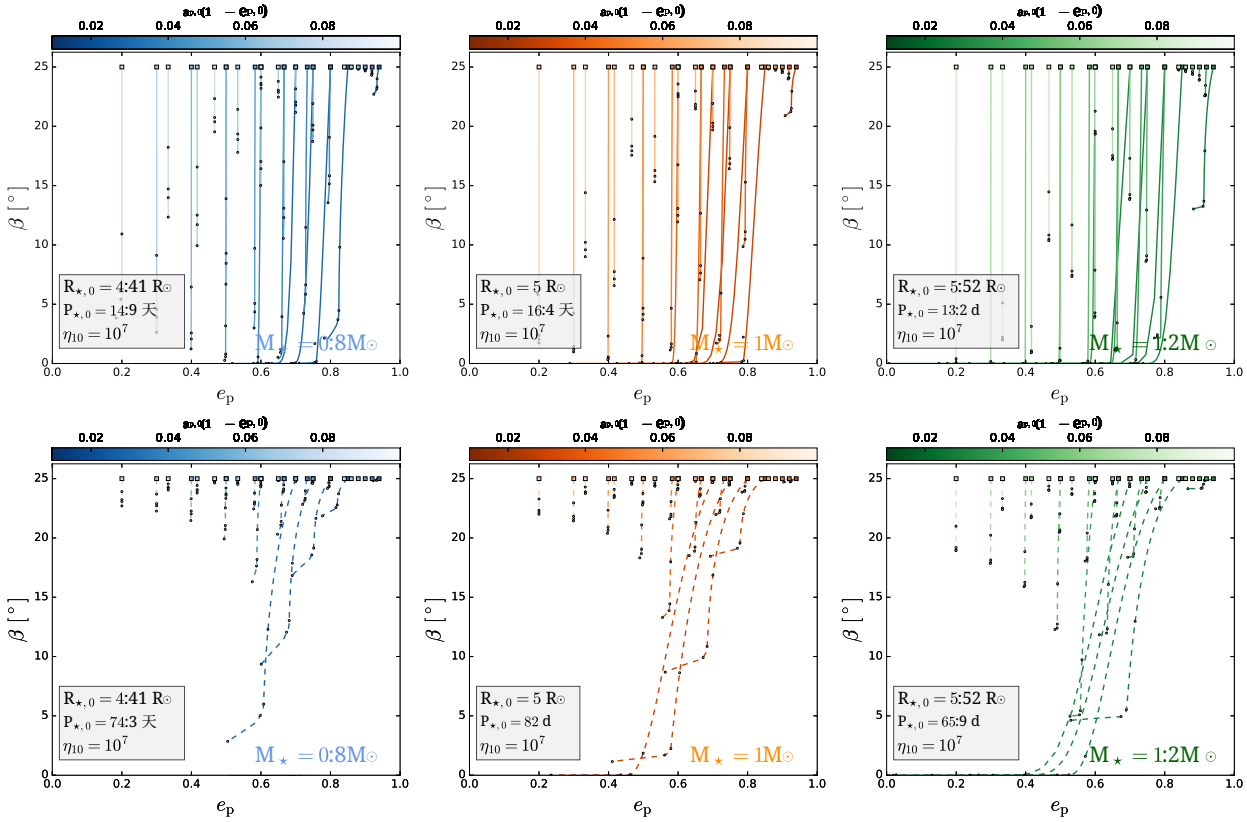


图3。 快速自转体（顶行）和中等自转恒星（底行）在 β–e_p 平面上的演化轨迹。从左到右，恒星质量分别为 $0.8\,M_\odot$（蓝色）、$1.0\,M_\odot$（橙色）和 $1.2\,M_\odot$（绿色）。每个面板展示了 $r_{peri,\,0} = 0.03$、0。04、0。05、0。06、0。07 和 0。08 au 与 $a_{p,\,0} = 0.10$、0。12、0。15、0。20 和 0。50 au 的全部 30 种组合。颜色刻度表示初始近心点距离。

$$- (\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{u}}\Big\} \tag{108}$$

$$\left.\frac{\dot{\mathbf{e}}_p}{e_p}\right|_{Q,p} = \frac{3}{2}k_{q,p}\frac{M_\star}{\mu_p}\frac{R_p^5}{a_p^5}\frac{\Omega_p^2}{\Omega^2}\frac{\Omega}{(1-e_p^2)^2}\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{u}} \tag{109}$$

$$\left.\frac{\dot{\mathbf{e}}_p}{e_p}\right|_{GR} = -\frac{3\mathcal{G}(M_\star+M_p)}{c^2 a_p(1-e_p^2)}\Omega\,\hat{\mathbf{u}}\times\hat{\mathbf{n}} \tag{110}$$

其中 $\Lambda_p = \mu_p\sqrt{\mathcal{G}(M_\star+M_p)a_p}$

恒星的结构和潮汐性质源自第 4.1 节的结构演化模型。对于行星，我们将默认参数设为 $M_p = 1 M_J$、$R_p = 1 R_J$、$k_p = 0.25$、$k_{2,\,p} = 0.37$、$k_{q,\,p} = \frac{1}{3}k_{2,\,p} = 0。123$ 和 $\tau_{eq,\,p} = 0.1$ s。除非另有说明，在本文其余部分中，这些选择将继续作为我们的默认值。

我们对一组行星轨道进行积分，其初始半长轴为 $a_{p,\,0}$，近心点距离为 $r_{peri,0} = a_{p,0}(1-e_{p,0})$，倾斜角为 $\beta_0 = 25°$，同时改变恒星质量（$0.8M_\odot$、$1M_\odot$ 和 $1.2M_\odot$）。对于每种恒星质量，我们分别考虑快速自转星和中等自转星，其名义零龄主序自转周期分别为 $P_{\star,\,ZAMS} = 0.2$ 天和 1 天。我们通过在恒星自旋角动量固定的情况下，从零龄主序阶段向过去演化，得到初始自转周期，$S_\star = k_\star(t)M_\star R_\star^2(t)\Omega_\star$；在这一映射中忽略磁制动（见第 4.4.1 节）。我们将初始半径设为$R_{\star,\,0}/R_\odot = 5(M_\star/M_\odot)^{0.55}$，并将此情景称为“早期起始”，意指前主序星仍明显膨胀且处于完全对流状态。因此，早期起始模型的初始自转周期分别为：快速自转星 16–16 天，中等自转星 70–80 天。所有积分均采用$\eta_{10} = 10^7$运行。

在图 3中，我们展示了快速自转星的演化轨迹在三种恒星质量下都几乎呈垂直分布，这表明倾斜角阻尼发生时，偏心率变化很小。中等自转恒星呈现出更广泛的结果范围。对于初始近心点较大且偏心率较低的轨道，倾角阻尼较弱。在初始近心点较小时，某些高偏心率轨道可能部分圆化并向内迁移，其进程快于重新对齐（见第 3.4节）。

4.4. 长期演化与种群合成

为了与观测趋势进行有意义的比较，我们需要在种群层面

评估不同轨道构型和恒星年龄下的倾角演化。因此，我们采用蒙特卡洛实验。为此，我们必须将前主序阶段之后的恒星演化纳入考量。

4.4.1. 主序阶段的长期演化

我们只对简化恒星模型作少量扩展，加入主序阶段的半径膨胀，以及磁制动（MB）导致的自转减速。

Long-term Radius and Spin Evolution of the Star—前主序收缩之后，太阳型恒星在主序阶段缓慢膨胀。为了尽可能简洁地描述这一半径演化，我们采用 Hurley 等人提出的唯象定律的简化版本，见Hurley 等人(2002)

$$R_\star(t) = R_{\star,\mathrm{PMS}}(t)\left\{1 + \left[1.6\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{0.3} - 1\right]\frac{t}{t_{\mathrm{MS}}}\right\} \tag{111}$$

其中 $t_{\mathrm{MS}} = 10(M_\star/M_\odot)^{-7/2}$十亿年。

在 ∼十亿年时间尺度上，我们还必须将磁制动的影响（Skumanich1972）纳入恒星自旋的演化，因为自旋频率 $\Omega_\star$ 在我们对惯性波耗散的参数化中起着关键作用。因此，恒星自旋的演化方程由 $\dot{\mathbf{S}}_\star = -\dot{\mathbf{L}}_\mathrm{P}$ 修改为至

$$\dot{\mathbf{S}}_\star = -\dot{\mathbf{L}}_\mathrm{p} - T_\mathrm{wind}\hat{\mathbf{s}} \tag{112}$$

其中 T_wind 表示磁风带走角动量的速率。利用 Matt 等人 (2015）经过经验校准的自转减速定律，我们将风力矩写为

$$T_\mathrm{wind} = S_0\Omega_\star\begin{cases}\tau_\mathrm{conv}^2\Omega_\star^2 & \Omega_\star \le 29\tau_\mathrm{conv}^{-1} \quad \text{(unsat.)}\\ 840 & \Omega_\star > 29\tau_\mathrm{conv}^{-1} \quad \text{(sat.)}\end{cases} \tag{113}$$

该式同时涵盖了“饱和”和“未饱和”状态。缩放系数 S_0 的单位为角动量，其表达式为

$$S_0 \equiv 7.2\times10^{-17} M_\odot\sqrt{\mathcal{G}M_\odot R_\odot}\left(\frac{R_\star}{R_\odot}\right)^{3.1}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{0.5} \tag{114}$$

（见Matt 等人 2015的方程 8）。在方程τ_conv 中，（该量）在主序阶段也会发生变化。 Sadeghi Ardestani 等人（2017）确定了主序阶段的经验关系式 $\tau_\mathrm{conv} \propto R_\star^{-1.2}$，因此，根据方程（111），我们写作

$$\tau_\mathrm{conv} = \tau_{\mathrm{conv,PMS}}(t)\left\{1 + \left[1.6\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{0.3} - 1\right]\frac{t}{t_{\mathrm{MS}}}\right\}^{-1.2} \tag{115}$$

其中 $\tau_{\mathrm{conv,\ PMS}}(t)$ 是方程（94）中的前主序阶段对流时间。

在图 4 中，我们展示了一颗 $1M_\odot$ 恒星在孤立演化、且具有不同初始自转周期（$P_{\star,\ 0}$ =8–160 天）时，长时间尺度上的半径（上图）和自转周期演化（下图）。该图还展示了当前太阳自转周期为 27 天、年龄为 4.5 十亿年时的情况，表明这里采用的自转减速模型通常会产生比 G型恒星平均值稍慢的自转体。鉴于我们的恒星演化模型较为粗略，这一数值差异并不令人担忧，但图 4 所体现的定性趋势值得指出：经过 ∼ 2十亿年后，由于饱和阶段的指数自转减速，快速自转体已经赶上了慢速自转体。这意味着，尽管我们提出的机制要求快速自转体才能有效运行，但除非它们相对年轻，否则曾经快速自转的恒星很难通过观测加以识别。

4.4.2. *Monte Carlo Experiments*

Initial Conditions—为进一步与观测趋势进行比较，我们对温木星合成族群的演化进行了数值探索。我们假设这些系统最初具有偏心轨道，且轨道面相对于恒星赤道倾斜。具体而言，我们采用瑞利分布来描述参数 σ_e 和 σ_β 的初始值 e_p 和 β，其依据是行星—行星散射的 N 体数值实验结果（例如，Juri´c & Tremaine 2008；Petrovichet al. 2014）。为简便起见，除非另有说明，我们假设

$$\sigma_e = 2\sigma_\beta \tag{116}$$

（例如，Lissauer1993；Ida &Makino 1992），且 e_p 和 β 的随机抽样值彼此不相关。我们将抽取的样本截断至 $e_\mathrm{p} = 0.95$ 和 $\beta = \pi/2$，也就是说，我们只考虑顺行系统。最后，初始半长轴从 0.1 au 至 0.6 au 之间的对数均匀分布中抽取。

Fiducial Parameters—随机抽取轨道要素生成一个大小为 N 的行星样本后，a_p，e_p 和 β，我们根据第3.3节的运动方程，将每个系统演化80亿年。除非另有说明，我们采用以下一组“基准”参数：$M_\mathrm{p} = 1M_\mathrm{J}$，$M_\star = 1M_\odot$，$R_\mathrm{p} = 1R_\mathrm{J}$，$R_{\star,\ 0} = 5R_\odot$，$P_{\star,\ 0} = 8.2$ d。恒星的潮汐和结构性质根据第4.1 节的玩具模型进行演化，并考虑主序星膨胀和磁制动转矩；默认的(1,0)增强参数设为 $\eta_{10} = 10^7$。对于行星，我们采用与第4.3节相同的参数。

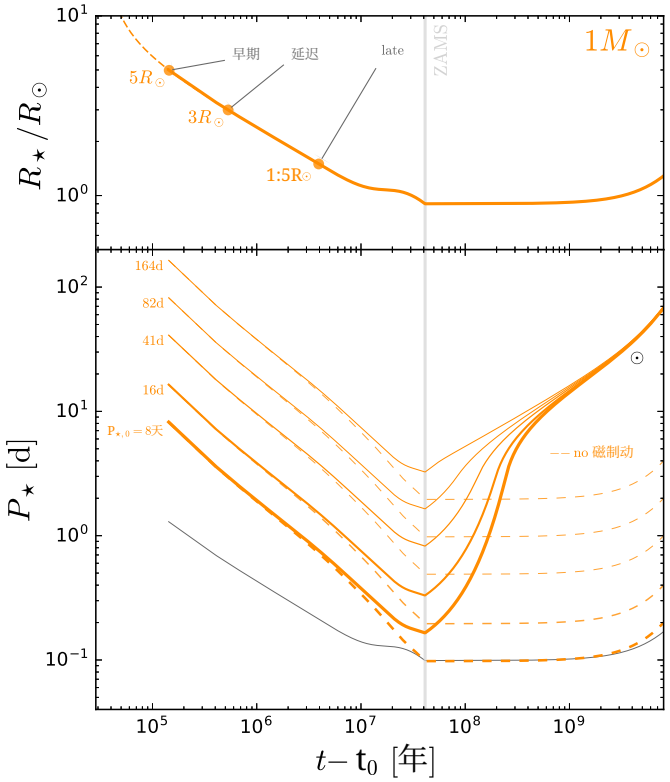


图4. </style}恒星半径（上图）和自转周期（下图）的演化，其中一颗恒星遵循前主序阶段玩具模型，随后经历主序星膨胀并伴随磁制动（MB）。图中展示了,$_0$的5种取值下的自转演化，其中初始时刻定义为恒星半径达到 $5R_\odot$ 的时刻（“早期起始”）。作为参考，上图展示了“延迟启动”（$R_{\star,0}=3R_\odot$）和“晚期开始”（$R_{\star,0}=1.5R_\odot$）情景对应的时刻和半径。作为比较，下图还展示了不受磁制动影响时的自转演化（虚线），以及描绘 $P_{\star,\rm bu}\equiv 2\pi(\mathcal{G}M_\star/R_\star^3)^{-1/2}$解体自转速率的曲线。

4.4.3. 结果

在图5 （左侧面板，黑色方块）中，我们展示了4个大小为 $N=200$ 的不同样本，其中 $e_{\rm p}$ 和 β 取自互不相关的瑞利分布，且 $\sigma_e=2\sigma_\beta$对应于 $\sigma_e=0.8$，0。6、0。4和0。2（从上到下）。

我们通过在 0.5 十亿年到 80亿年之间均匀抽取恒星年龄，并提取该特定时刻的轨道要素，创建了一个 WJs/HJs“观测”样本。结果显示在图5的中间和右侧面板中，其中蓝色方形标记表示“较冷”的温木星族群（ $a_{\rm p}\geq 0.18$ au），橙色方形标记表示“较热”的族群（ $a_{\rm p}<0.18$ au）。每个面板中的灰色标记表示仅依据弱摩擦理论演化的“控制”样本（即，当$\tau_{10}=\tau_{\rm eq,\star}$时）。距离较远的温木星子样本（中间面板）始终表现出经验平均斜率 $\langle\beta\rangle$，接近初始平均值 $\langle\beta\rangle_0=\sigma_\beta\sqrt{\pi}/2$，表明轨道要素几乎没有发生潮汐演化。另一方面，较近距离的子样本（右侧面板）显示，β 中的平均值降低了 50% 至 60%。

其中一些系统由于行星内部的潮汐耗散而演化为名义热木星（$a_{\rm p}$ <0.1 au；以红色突出显示）。这类系统的数量对 σ_e 的选择以及我们将抽取样本截断于 $e_{\rm p}=0.95$ 的做法十分敏感。在大多数情况下，这些系统仅发生轻微迁移，最终到达 $a_{\rm p}\lesssim 0.1$ au，但有些会迁移至 ~ 0.05 au。值得注意的是，许多这类热木星在完全实现自转—轨道对齐时仍保持较高的偏心率。

聚焦于一组单一的初始条件 σ_e =0.3（例如，Juri´c&Tremaine 2008；Dong 等人 2021），我们重复进行蒙特卡洛实验，改变 (1,0)增强系数 η_{10}、行星质量 $M_{\rm p}$、初始自转周期 $P_{\star,\,0}$、恒星质量 $M_\star$ 以及初始恒星半径 $R_{\star,\,0}$

与之前一样，我们通过将恒星年龄在 0.5 十亿年至 80亿年之间随机化来生成温木星的分布，并关注满足以下条件的系统：$a_{\rm p}<0.18$ 天文单位。在图 6中，我们展示了不同 η_{10} 取值下（从左到右）的自转轴倾角和偏心率分布：10^5,10^6,10^7 和 10^8。这些结果表明，在给定基准参数的情况下，阻尼强度为 10^5 对 β几乎没有影响，因为初始分布具有$\langle\beta\rangle_0=\sigma_\beta\sqrt{\pi}/2\approx 11°$。另一方面，取值为 $\eta_{10}=10^8$时，平均自转轴倾角降低了 50 倍，从而产生了多个具有显著偏心率、而自转轴倾角几乎为零的温木星和热木星。现实的恒星模型能否产生 η_{10} 这一范围内的取值仍是一个悬而未决的问题（见第 6.2.1节）。

由（10）响应导致的倾斜角阻尼时间尺度 $t_\beta^{(10,\star)}$（方程82）表明，我们在此探讨的许多物理参数可能彼此完全简并。然而，情况未必如此，因为行星中的弱摩擦潮汐所导致的轨道衰减和圆化时间尺度也取决于诸如 $M_{\rm p}$这样的量，这些量会使整体演化具有非线性。为探究这些部分简并，我们逐一考察对 $M_{\rm p}$、$P_{\star,\,0}$、$M_\star$和 $R_{\star,\,0}$的依赖关系。

图7 展示了温木星族群的倾斜角对行星质量的依赖关系。将行星质量增至 $2M_{\rm J}$ 和 $5M_{\rm J}$ 会使 $\langle\beta\rangle$ 分别降低 $\sim$ 2和 $\sim$ 6倍，相较于$M_{\rm p}=1M_{\rm J}$时的基准情形。这一趋势或许有助于解释为何一些偏心程度最高的温木星往往是大质量行星

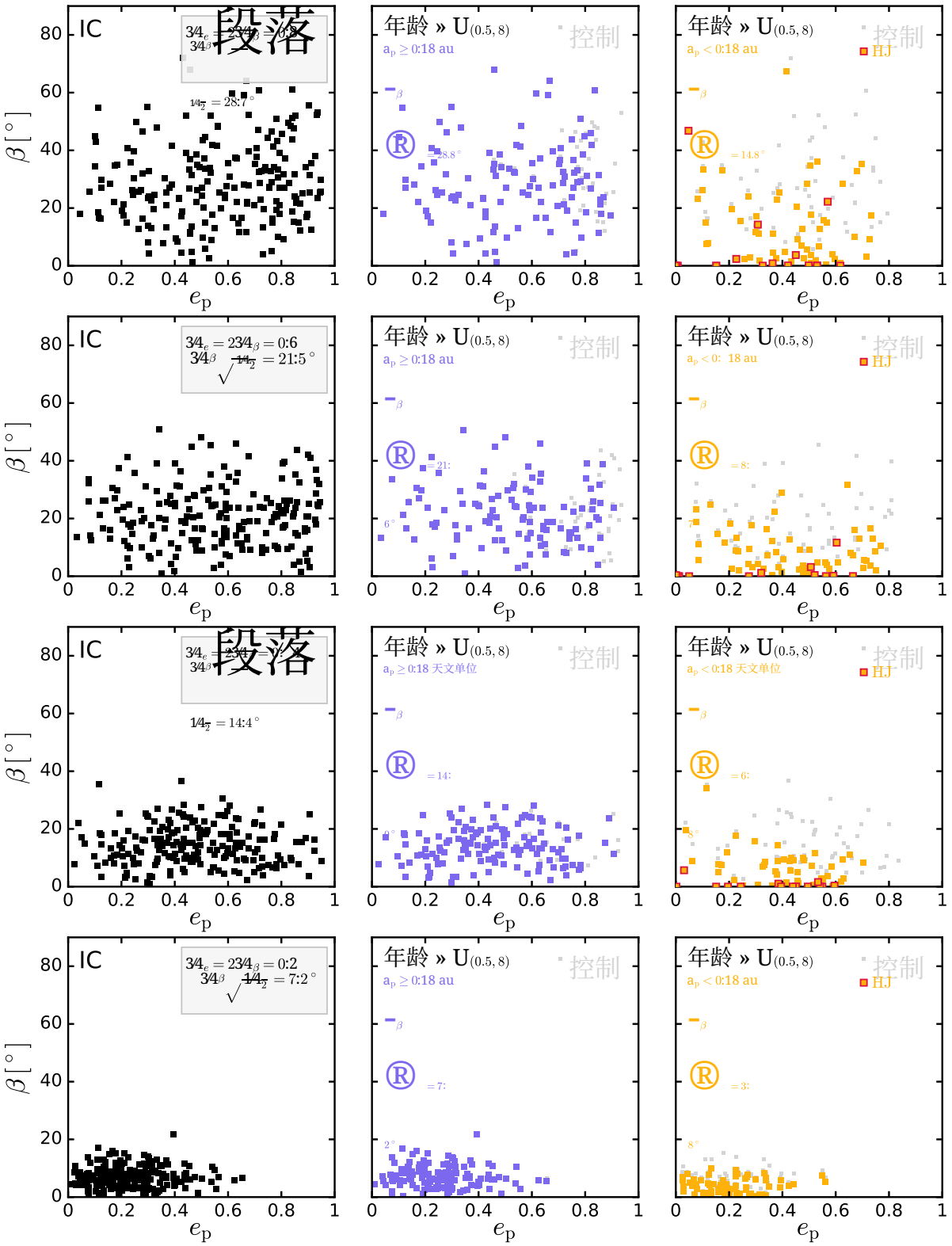


图 5 $[0.1, 0.6]$ β e_p $N = 200$ $a_p \in$ 。 潮汐演化的合成温木星族群的自转轴倾角和偏心率。该族群最初位于 au 处，其初始条件取自参数为（从上到下）、 、 和 0.2 的瑞利分布（第 4.4.2节）。 $\sigma_e = 2\sigma_\beta = 0.8\ 0\ 6,\ 0\ 4$ *Left column:* 自转轴倾角平均值为 $\langle\beta\rangle = \sigma_\beta\sqrt{\pi/2}$ 的初始条件。 *Middle column:* 在时间 $a_p \geq 0.18$ au 处的潮汐演化系统，此时 t t 在 0.5 至 80亿年之间均匀采样。 *Right column:* 在 $a_p < 0.18$ au 处的潮汐演化系统，其中红色标记的点表示名义热木星（$a_p < 0.1$ au），它们源自偏心率最高的温木星的轨道衰减。在中间和右侧面板中，“控制”表示仅对同一组初始条件假设弱摩擦潮汐进行演化的系统样本。

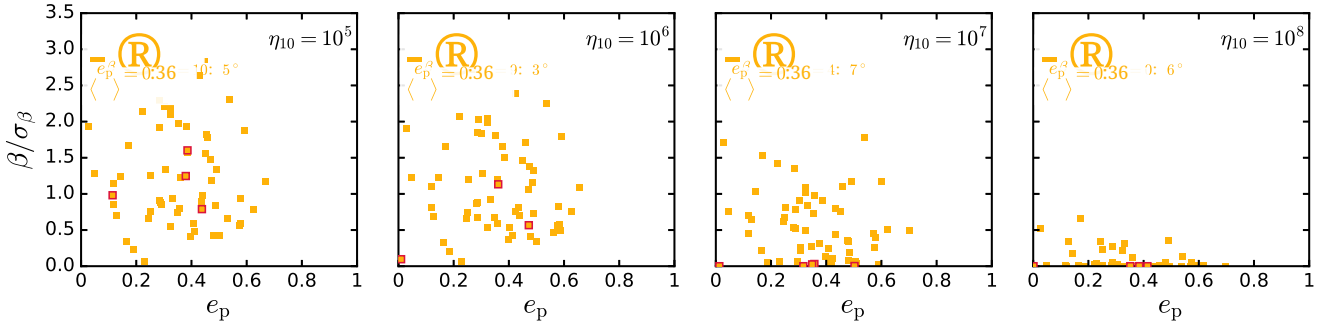


图6。 与图 5 右侧面板类似，显示随机抽取年龄下经潮汐演化的温木星和热木星，但 β 以 σ_β 归一化，并采用不同的倾斜角阻尼强度 η_{10}。从左到右， $\eta_{10} = 10^5$，10_6，10_7 和 10^8 （其他参数固定为基准值）。与图 7一样，针对 $\sigma_e = 2\sigma_\beta = 0.3$ 生成初始条件，其初始偏心率和倾斜角的均值分别为 $\langle e\rangle_0 = \sigma_e\sqrt{\pi}/2 = 0.38$ 和 $\langle \beta\rangle_0 = \sigma_\beta\sqrt{\pi}/2 \approx 11°$。

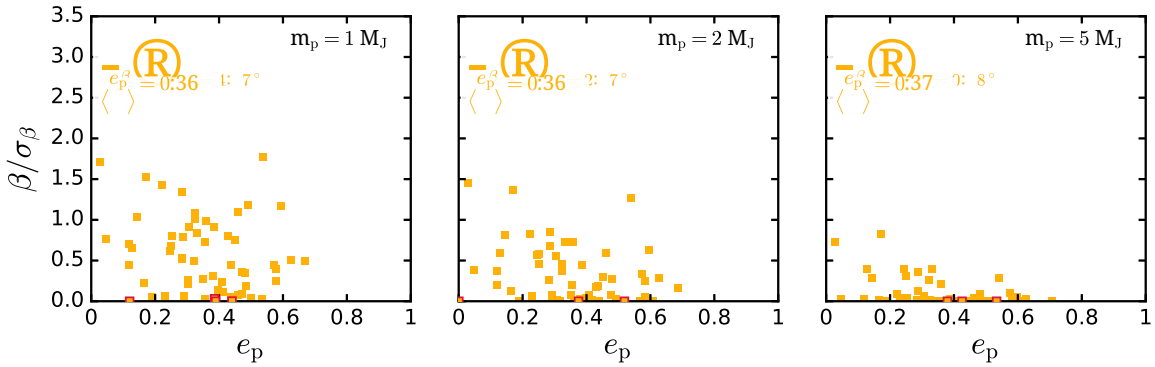


图7。 与图 6类似，但现在探究不同的行星质量 M_p 以及同一组初始条件（$\langle e\rangle_0 = 0.38$ 和 $\langle\beta\rangle_0 = 11°$）。从左到右， $M_p = 1M_J$、$M_p = 2M_J$ 和 $M_p = 5M_J$ （其他参数固定为基准值）。

在超级木星状态下（例如Gupta 等人（2024）；参见第6.1.2节的讨论）。

在图8中，我们展示了倾角阻尼对恒星自转的敏感性（见方程82）。与之前一样，该图描绘了自转轴倾角和偏心率样本，但这次针对的是时间零点时不同的恒星自转周期（在基准“早期开始”情景中定义为 $R_\star = 5R_\odot$ 的时刻）。这些自转周期中的每一个都可以映射到零龄主序时的一个周期，该周期由收缩驱动的自转加速和磁制动共同决定。由于年轻恒星的自转周期可以通过测量获得（例如，Stassun 等人（1999）；Herbst 等人（2002）；另见第6.2.3节），$P_{\star,\,\mathrm{ZAMS}}$ 是一个便于与观测结果进行比较的标签。如果我们将满足 $P_{\star,\,\mathrm{ZAMS}} < 1$ d 的自转体定义为快速自转体，那么从图中可以推断，只有快速自转体才能在整体样本层面有效地阻尼自转轴倾角，而自转周期为 $P_{\star,\,\mathrm{ZAMS}} > 1$ d 的自转体，在其余基准参数保持不变的情况下，只会产生很小的影响。

最后，在图9中，我们展示了恒星质量 $M_\star$ 和初始恒星半径$R_{\star,\,0}$（或等价地，“开始时间”的选择）如何影响测得的倾斜角分布。对于基准“早期开始”情景，质量增加带来了一个有些出人意料的发现：一颗$1.2M_\odot$恒星，其零龄主序时的对流包层不足其总半径的 $\sim 10\%$（图2），其倾角阻尼效率高于一颗 $0.8M_\odot$恒星；后者在零龄主序时的对流包层占 $\sim 50\%$。此外，$1.2M_\odot$ 恒星比低质量恒星更快到达零龄主序，因此用于倾角阻尼的时间也更少。然而，与恒星质量和半径增大所带来的影响相比，这两项特性仍处于次要地位。方程82表明，恒星质量和半径增大能使恒星更快地实现重新对齐，尽管其在前主序阶段所经历的时间有所缩短。为检验这一解释，我们采用“延迟开始”和“晚期开始”情形重复实验，并在图的中间行和底部行展示结果。对于“延迟开始”情形，所有系统的轨道重新对齐效率都低于“早期开始”情形，但质量更大的恒星仍表现出比质量较小的恒星更强的阻尼效应。对于“晚期开始”情形，平均倾斜角与初始条件几乎无法区分（$\langle\beta\rangle_0 = 11°$）；不过在这种情况下，趋势似乎反转了，低质量恒星表现出的阻尼效率略高，这可能是因为其对流包层较大，且前主序阶段寿命较长。这些结果意味着，要使所提出的机制有效运行，行星形成必须较早发生，包括在宿主恒星不论质量大小都处于完全对流状态的时期。这些结果对于恒星倾角与恒星有效温度之间关系的影响可能十分重要；在热木星系统中，这种关系呈现出很强的相关性（这一情景对恒星倾角随恒星有效温度变化的关系可能具有重要影响。对于热木星系统，这种关系呈现出很强的相关性（Winn et al. 2010；Albrechtetal. 2012），但据报道，这种相关性并不适用于偏心热木星（Rice etal.2022a）；偏心热木星可能形成于本文所模拟的温木星族群中近星点距离较小的尾端（讨论见第6.1.2节）。

5. 恒星双星中的倾角阻尼

迄今为止，我们的研究重点是孤立行星—恒星系统的自转—轨道演化，并默认这些行星几乎在原位形成，在原行星盘中的迁移极少或完全没有。然而，另一种情景是，这些行星并非在靠近恒星的地方形成，而是先作为冷木星形成，再通过某种形式的高偏心率迁移向内迁移。这一假说得到了以下发现的支持：一些偏心温木星位于潮汐迁移轨迹上（例如，Dong 等人 2014），该轨迹定义为满足 $a_\mathrm{p}(1-e_\mathrm{p}^2)$ ≈为常数的曲线，这意味着在潮汐时间尺度上，偏心率足够高的温木星最终可能具有 $a_\mathrm{f} = a_\mathrm{p}(1-e_\mathrm{p}^2) \lesssim 0.1$ au 的最终半长轴。这些所谓的“原热木星”（例如，Dawson & Johnson 2012；Dong 等人 2021；Espinoza-Retamal 等人 2023；Gupta 等人（2024））因此可能是检验高偏心率迁移多种变体的关键试验对象，例如恒星双星中的泽佩尔–利多夫–科扎伊（ZLK）周期（Wu & Murray 2003；Fabrycky &Tremaine 2007）。

如果偏心温木星是未完成或失败的高偏心率迁移的结果，那么我们就需要研究将传统高偏心率迁移演化与我们提出的增强型惯性波耗散模型相结合时，恒星倾角如何演化。要充分探索这种可能性，需要针对三体动力学单独开展蒙特卡洛实验，这超出了本文的研究范围。不过，我们仍在下文提供一些见解和初步结果。

我们开展了一项三体实验，通过远距离恒星质量双星伴星驱动的标准 ZLK 振荡形成热木星（例如 Wu& Murray 2003；Fabrycky& Tremaine 2007；Naoz 等 2012；Petrovich2015b；Anderson 等 2016；Mu˜noz 等 2016）。为此，我们扩展了运动方程，以纳入三体效应。现在，我们采用米兰科维奇矢量形式演化

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_\mathrm{p} &= \dot{\mathbf{L}}_\mathrm{p}\Big|_\mathrm{2b} + \dot{\mathbf{L}}_\mathrm{p}\Big|_\mathrm{3b} \\ \dot{\mathbf{e}}_\mathrm{p} &= \dot{\mathbf{e}}_\mathrm{p}\Big|_\mathrm{2b} + \dot{\mathbf{e}}_\mathrm{p}\Big|_\mathrm{3b}\end{aligned} \tag{117}$$

其中 $\dot{\mathbf{L}}_\mathrm{p}\Big|_\mathrm{2b}$ 和 $\dot{\mathbf{e}}_\mathrm{p}\Big|_\mathrm{2b}$ 分别由公式和（100）给出，并且(99)三体耦合

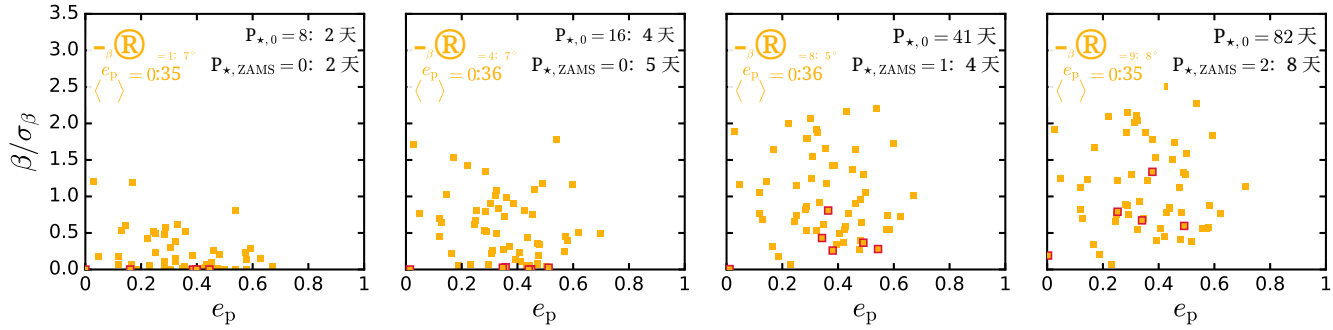


图8。类似于图 7，但现在探究“早期启动”系统的不同初始自转周期 $P_{\star,0}$（$R_{\star,0} = 5R_\odot$）以及相同初始条件（$\langle e\rangle_0 = 0.38$ 和 $\langle\beta\rangle_0 = 11°$）下的情况。从左到右，$P_{\star,0} = 8.2$，16。4，41 和 82 天（其他参数固定为基准值）。对于 $P_{\star,0}$的这四个取值，零龄主序时的自转周期分别为 $P_{\star,ZAMS} = 0.2$，0。5，1。4 和 2。8 天。

由下式给出

$$\left.\dot{\mathbf{L}}_p\right|_{3b} = -\mathbf{L}_p \times \nabla_{\mathbf{L}_p}\mathcal{H}_{3b} - \mathbf{e}_p \times \nabla_{\mathbf{e}_p}\mathcal{H}_{3b}$$
$$\left.\dot{\mathbf{e}}_p\right|_{3b} = -\Lambda_p^{-2}\,\mathbf{L}_p \times \nabla_{\mathbf{e}_p}\mathcal{H}_{3b} - \mathbf{e}_p \times \nabla_{\mathbf{L}_p}\mathcal{H}_{3b} \quad (118)$$

（例如，米兰科维奇 1939；Dullin 2004；Breiter & Rata-jczak 2005），其中 $\mathcal{H}_{3b}$ 为三体相互作用哈密顿量（例如，Harrington 1968；Naoz 等，2013），我们将其截断至八极阶（例如，Liu 等，2015；Petrovich 2015b）。随后，我们通过选择一颗质量为 $m_{out} = 1M_\odot$、半长轴为 $a_{out} = 200$ au、偏心率为 $e_b = 0$且倾角为85°的伴星，以及一颗质量为 $m_p = 5M_J$ 、初始半长轴为 $a_p = 1.5$ au的行星，来设定初始系统。行星的结构和潮汐参数与本文其他部分相同。

我们进行计算时保留恒星演化玩具模型，但为便于与其他研究比较，将系统初始化于零龄主序，即宿主恒星半径达到 0。9 $R_\odot$ 并开始缓慢膨胀时。我们比较三种模型：一颗快速自转星，其$P_{\star,ZAMS} = 0.35$ d（图4中展示的第二快模型）；一颗中等自转星，其$P_{\star,ZAMS} = 2$ d；以及一颗慢速自转星，其 $P_{\star,ZAMS} = 5$ d。对于惯性波耗散模型，所有数值实验中均保留 $\eta_{10} = 10^7$ 。

我们在图10中展示了这些数值积分的结果，这可以与Ander- son 等人（2016）中的图 1 进行比较。从上到下，该图按照$P_{\star,ZAMS}$递增的顺序，展示了偏心率和倾角演化。自转最快的恒星会将偏心率振荡限制在 $e_p \approx 0.98$ ，这是由于恒星的自转四极矩（方程106）所致。这种抑制效应可以用参数

$$\varepsilon_{Rot} = \frac{3}{2}k_{q,\star}\frac{R_\star^5}{a_p^5}\frac{M_\star + m_p}{m_{out}}\frac{\Omega_\star^2}{\mathcal{G}M_\star}a_{out}^3(1-e_{out}^2)^{3/2} \quad (119)$$

(Liu 等，2015），当ZLK振荡受到显著抑制时，该值会大于1。随着最大偏心率受到抑制，需要更多的ZLK周期，才能在高偏心率阶段提取大量轨道能量（例如，Anderson 等，2016），这可能会延长潮汐迁移的时间尺度，甚至可能超过恒星的主序寿命。方程（119）表明，如果我们在前主序阶段初始化该系统，恒星四极矩的抑制效应可能会变得极为显著，甚至可能完全抑制ZLK效应。此外，这些膨胀的恒星半径还可能使一些未受抑制的高偏心率轨道直接坠入恒星。

最重要的是，在全部三种情况下，“标准”模型与“增强”模型在 a_p 和 e_p方面几乎无法区分，只有 β 在行星变成热木星后才表现出显著差异。对于$P_{\star,ZAMS}$ =2 天和 5 天（图10的中、下图板），模型只有在 ZLK周期被遏制后才开始出现分歧（见插图面板），此时 e_p 和 a_p 都已大幅衰减。此时，时间尺度比（方程85）过大，轨道圆化和迁移的速度远快于重新对齐的速度。行星完全圆化后，我们在长时间尺度上观察到 β 的差异。

这些初步计算表明，在高偏心率迁移框架下，增强惯性波耗散无法解释低倾角偏心暖木星，但它仍可能在长时间尺度上促进圆形热木星轨道重新对齐（例如，参见 Zanazzi 等 2024，有关另一种情景）。同样值得深入研究的，是在更一般的情景及高偏心率迁移的各种变体下，增强惯性波耗散与潮汐迁移的综合效应。鉴于近期证据表明，八极阶（即“共面”）高偏心率迁移 Lee & Peale2003；Petrovich2015a）不仅产生的恒星倾角系统性地低于四极阶高偏心率迁移，还会形成轨道间距更大的热木星（Bhaskar 等（2026）），这项研究尤为适时。

6. 讨论

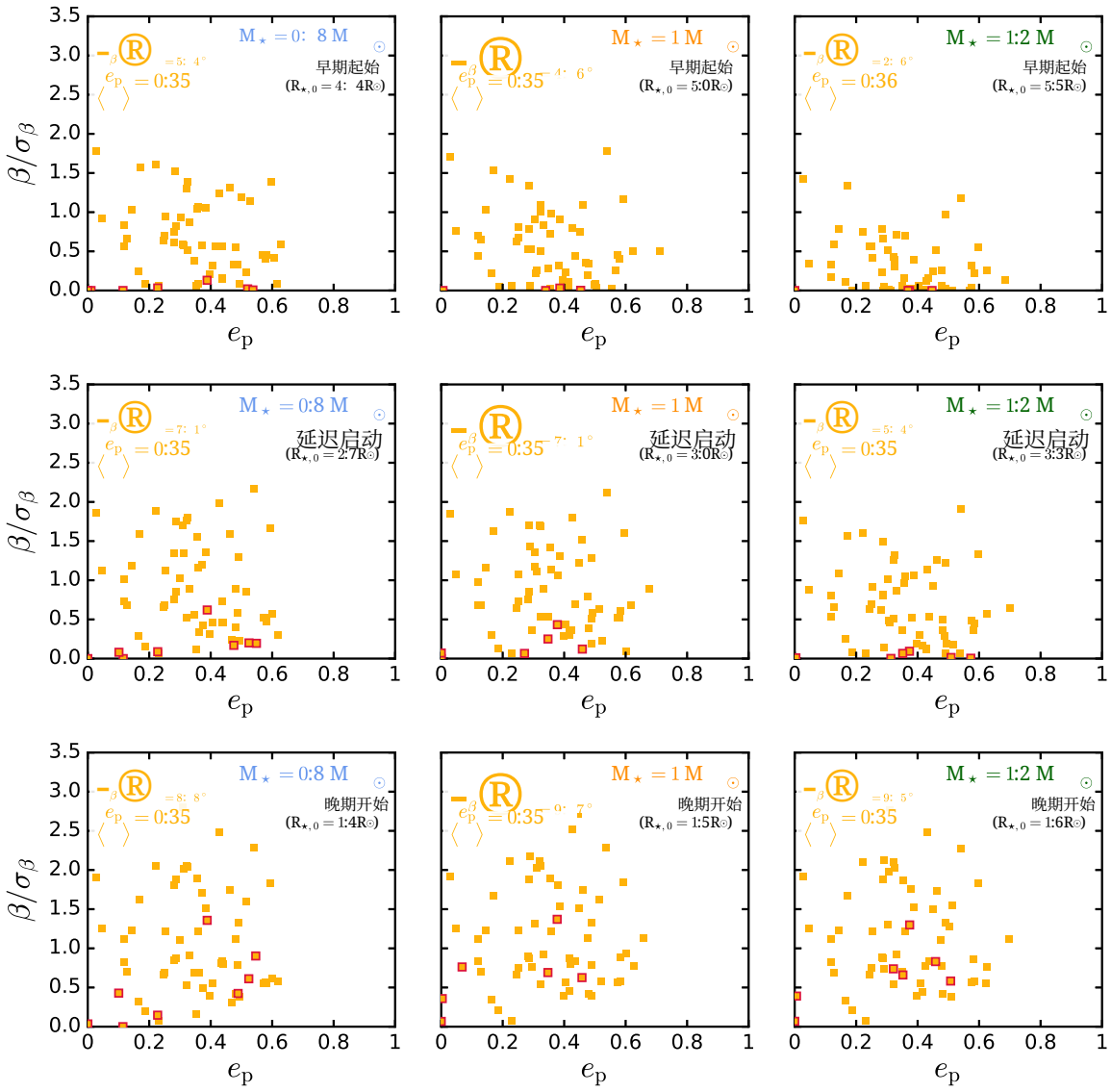


图9. 与图7类似，但此处考察不同的恒星质量（列）和开始时间（行）。从左到右，各列分别表示恒星质量为 $0.8M_\odot$、 $1M_\odot$ 和 $1.2M_\odot$ 的情形（见图2）。从上到下，开始时间分别为“早期”“延迟”和“晚期”，对应的恒星初始半径取决于恒星质量：$R_{\star,0} = 4.4$、2.7和$1.4R_\odot$（对应 $M_\star = 0.8M_\odot$）；$R_{\star,0} = 5$、3.0和 $1.5R_\odot$（对应 $M_\star = 1M_\odot$）；以及$R_{\star,0} = 5.5$、3.3和 $1.6R_\odot$（对应 $M_\star = 1.2M_\odot$）。

6.1. 本研究的启示

6.1.1. *Obliquity as a Function of Stellar Effective Temperature*

我们提出的假说有一项重要推论：由于重新对齐主要发生在前主序阶段，最终倾角并不强烈依赖于恒星在主序阶段达到的有效温度。 Rice etal. （2022a）已经报告过类似结论：他们发现，偏心热木星子样本中没有明显的断点， $T_{\rm eff}$ 而圆轨道热木星则有明显断点（ Winn et al.2010； Albrecht et al. 2012）。目前可能已有观测证据表明，这一趋势也适用于偏心暖木星。一些偏心率最高的温木星具有较低自转轴倾角的恒星围绕 $T_{\rm eff} > 6000$ K运行。其中一些包括 TOI-677 b（$e_{\rm p} = 0.435$、 $a_{\rm p} = 0.1038$au、$T_{\rm eff} = 6295$K, Jord´an 等人 2020； Sedaghati 等人 2023）、HD 17156 b（$e_{\rm p} = 0.6772$、 $a_{\rm p} = 0.1632$ au、 $T_{\rm eff} = 6046$K, Fischer 等人 2007； Narita 等人 2009； Kane 等人 2023）、TOI-4127 b（$e_{\rm p} = 0.7484$、 $a_{\rm p} = 0.303$ au、 $T_{\rm eff} = 6096$K, Gupta 等人 2023； Mireles 等人 2025）、TOI-3362 b（$e_{\rm p} = 0.720$、 $a_{\rm p} = 0.155$ au、 $T_{\rm eff} = 6532$K, Dong 等人 2021； Espinoza-Retamal 等人 2023）以及 TOI-558 b（$e_{\rm p} = 0.31$、 $a_{\rm p} = 0.128$au、 $T_{\rm eff} = 6466$K, Ikwut-Ukwa 等人 2022； Espinoza-Retamal 等人 2025）。尽管该样本仍然很小，但它可能有助于支持这样的假说：潮汐重新对齐发生在前主序阶段，此时

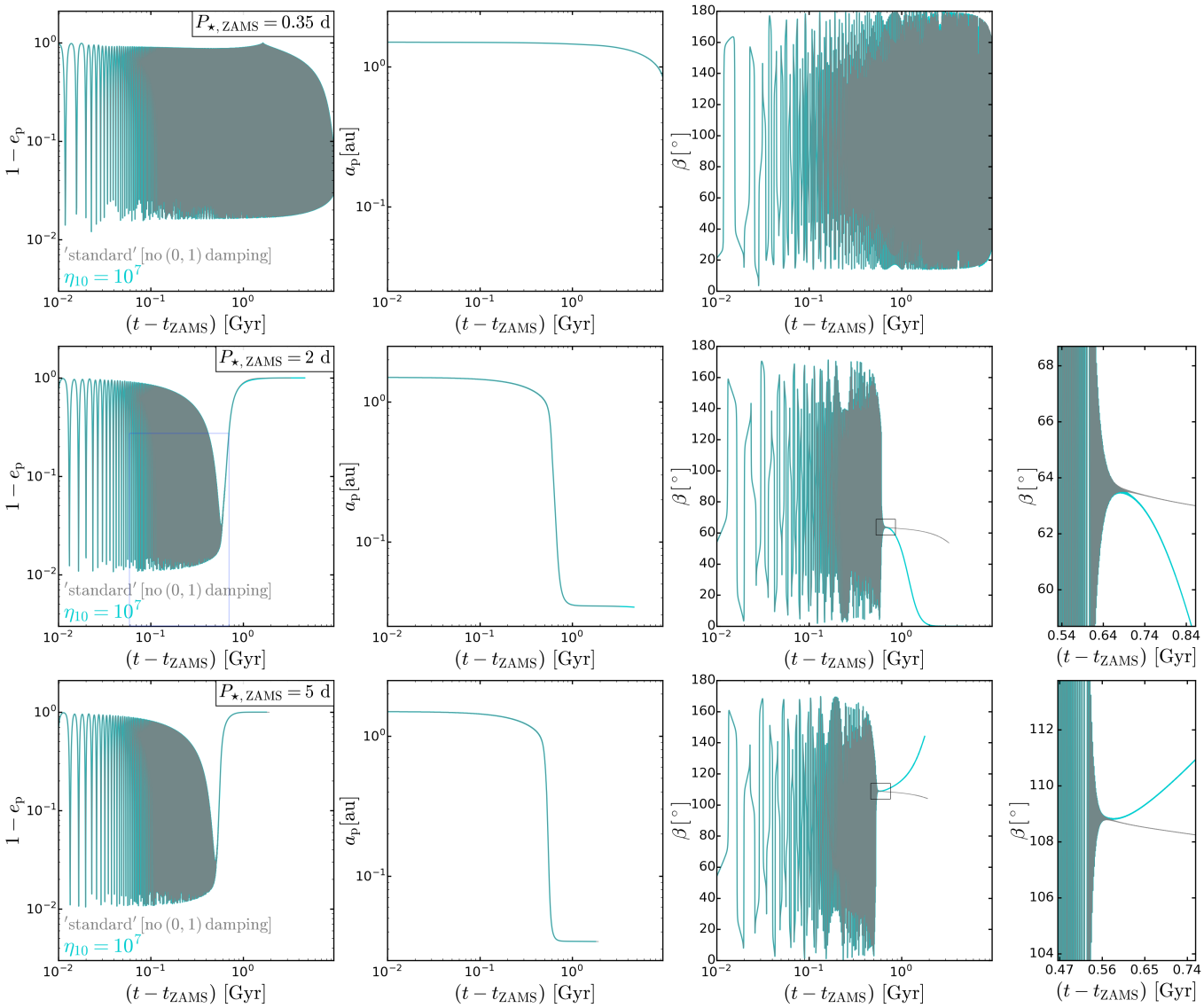


图 10. 有（蓝色）和无（灰色）增强（1，0）潮汐作用时的双星驱动的高偏心率迁移；初始恒星自转周期分别为 $P_{\star,\,\mathrm{ZAMS}} = 0.35$ 天（上排）、 2 天（中排）和 5 天（下排）。每排展示了偏心率（绘制为 $1 - e_\mathrm{p}$）、半长轴 a_p 和恒星倾角 β 在 10 十亿年内的演化。恒星、行星和双星伴星参数为 $M_\star = 1\,M_\odot$, $m_\mathrm{p} = 5\,M_\mathrm{J}$, $a_{\mathrm{p},\,0} = 1.5$ 天文单位、$e_{\mathrm{p},\,0} = 0.01$, $m_\mathrm{out} = 1\,M_\odot$, $a_\mathrm{out} = 200$ 天文单位、 $e_\mathrm{b} = 0$ 和 $I_\mathrm{mut} = 85°$。在所有情况下，其余轨道角的初始值均设为 $\omega_{\mathrm{in},\,0} = \omega_{\mathrm{out},\,0} = \Omega_{\mathrm{in},\,0} = 0$ 和 $\Omega_{\mathrm{out},\,0} = 180°$, 初始恒星倾角为 $\beta_{\mathrm{in},\,0} = 0.5°$。行星结构和潮汐参数与本文其他部分相同。

所有太阳型恒星都会经历一段完全对流的时期。

6.1.2. *Implications for Warm Jupiter Formation*

我们在此倾向于采用的动力学情景依赖于温木星的“快速且早期”形成，原位形成，或仅经历极少的盘驱动迁移。原则上，足够高的卵石通量或许能够支持这一情景（见第6.2.3节），因此这意味着温木星总体而言，尤其是偏心温木星，可能在组成上不同于近距离气态巨行星；后者在经历高偏心率迁移之前，以冷木星的形式形成，并在更远处构建其包层

。如果一颗正在成长的行星在内盘中经历失控吸积，在向内漂移的冰质卵石仍持续供应水汽时，于水雪线以内吸积其大部分包层，那么所形成的大气可能具有较高的氧氢比；如果挥发性物质富集主要由水主导，则其碳氧比会较低（Schneider 和 Bitsch（2021））。

我们初步开展的双星驱动的高偏心率迁移计算未能产生低倾角偏心暖木星（见第 5节）。这支持了这样一种观点：偏心暖木星可能与热木星属于不同的行星群体，尽管它们似乎位于潮汐迁移轨迹上，这一点可能暗示了相反的结论。

此外，如果局部形成的温木星的核心在盘的生命周期内比后来演化为热木星的冷木星核心更早达到失控吸积阶段，那么前者的平均质量也可能更大。较高的早期卵石通量能够加速核心组装，使失控吸积在仍有大量气体储库的情况下开始。如果盘能够持续进行气体输送，更长的吸积窗口将有利于形成质量更大的包层（Savvidou & Bitsch2023）。原则上，这些有利条件还可能形成多个临界核心。对于一个初生行星对，如果内行星先形成，外行星仍可直接获得流入卵石和气体；而如果外行星先形成，仍有足够的气体穿过其形成的空隙，为已经组装完成的内核提供气体，从而促成失控吸积。在这些条件下形成不止一个温木星，将有利于盘消散后通过行星间散射实现动力学演化，因此也为我们选择均分配的初始轨道要素提供了依据（见第 4.4.2节）。

观测证据似乎已支持这样两种观点：行星间散射导致了已测得的温木星偏心率 Dong 等人 (2026)；Mor- gan 等人 (2026)，以及偏心温木星的质量可能非常大。TOI-2145b（Dong 等人 2025）、TOI-4127 b（Gupta 等人 2023；Mireles 等人 2025）和 TOI-3362 b（Espinoza-Retamal 等人 2023）等行星都是超级木星，具有偏心且高度对齐的轨道，位于温木星与热木星的过渡区域。因此，我们认为，本研究关注的偏心温木星可能代表了原位温木星形成过程中质量最大的那一端。

6.1.3. *Polar and Anti-aligned Orbits*

方程（66）表明，在 0、 $\pi/2$、 $\beta_*\equiv\cos^{-1}(-S_\star/L_{\rm p})$ 和 π处存在四个固定点。对这些平衡点进行线性化表明，0 和 π 是稳定点， $\pi/2$ 是半稳定点（当 $\beta<\pi/2$ 时排斥，当 $\beta>\pi/2$时吸引），而 β_* 是不稳定点。因此，根据仅由 (1,0) 分量决定的潮汐演化，起初处于逆行轨道的系统可能演化至极向轨道（$\beta=\pi/2$）或反向对齐轨道（$\beta=\pi$），具体取决于初始倾斜角小于还是大于 β_*。另一方面，起初处于顺行轨道的系统则始终会演化至 $\beta=0$。

图 10 已展示了这种行为。由于考虑自旋—轨道反馈时 ZLK 具有混沌特性（Storch 等，2014, 2017），热木星系统退出 ZLK 循环阶段时，自转轴倾角可能有很大的范围。在图的中间面板（$P_{\star,\ \rm ZAMS}=2$ d）中，ZLK周期结束时为 $\beta\approx64°$，之后它逐渐衰减；与标准情形相比，采用 (1,0)增强的模型会更快地趋向重新对齐。在图的底部面板（$P_{\star,\ \rm ZAMS}=5$ d），ZLK周期结束时为$\beta\approx109°$。在这种情况下，采用 (1,0)增强的模型会演化至反向对齐。在这两种情况下，恒星自旋减速已使角动量比降至 $S_\star/L_{\rm p}\approx0.04$–0。05，因此，到 ZLK 周期停止时，$\beta_*\approx92°$。这意味着几乎所有逆行轨道（$\beta\gtrsim90°$）都会演化至反向对齐。原则上，对于耗散性很强的行星，“快速”潮汐迁移可在更少的 ZLK周期内完成（例如，Petrovich 2015b），因此，在潮汐迁移完成时，β_* 会更大。随着 β_*增大，演化至 $\pi/2$ 存在一个可能的区间。不过，这种行为或许不会持续太久，因为进一步的自旋减速会使 β_* 减小，直至其赶上 β，此时轨道尚未完全变为极向。在这种情况下，自转轴倾角的演化方向会反转，并朝反向对齐发展。未来的研究将对此行为进行更深入的探讨。

6.2. 注意事项与扩展

我们的工作包括严格的推导，以及随后基于若干假设和不确定性的应用模型。下文将讨论我们的近似在多大程度上是合理的。

6.2.1. *Realistic Stellar Models and the True Nature of the Spin-over Mode in Stars*

我们工作中的一个重大简化，是为前主序阶段和主序阶段的演化采用了一个玩具模型。尽管这种参数化模型有助于提高我们工作的可复现性，但不可否认，研究人员可以轻易获得现实的恒星演化模型，而且事实证明，这些模型对于定量研究恒星中的潮汐耗散非常重要（例如 Ma &Fuller2021；Zanazzi 等 2024）。未来对这项工作的扩展将利用公开的数值工具实现现实的恒星演化模型。

我们模型中一个影响更为深远的假设是，倾角潮汐会在 $\tilde{\omega}_{10}=-\Omega_\star$ 处高效耗散，即自旋翻转模的频率。在球形极限下，这一大尺度惯性模对应于自转轴的刚性倾斜（Poincar´e 1910；Greenspan 1968）。刚性倾斜本身不会产生应变，因此不会产生内部黏性耗散（第 3.2 节，另见 Ogilvie2013）。

该频率下的受迫响应可能包含具有有限剪切的波状运动。在考虑自旋—轨道相互进动后，Lin &Ogilvie（2017）在带有刚性核心的球形模型中发现了这类运动。由此产生的耗散取决于核心大小和密度分布。

在模态描述中，即使驱动频率偏离其本征频率，多个模态也可能对这类响应有所贡献。

。惯性区内 $K_{lm}(\tilde{\omega})$ 的耗散部分可能包含来自 f 模共振尾部的贡献（Wu 等，2024；Dewberry 与 Wu（2024）；Dewberry（2026））。由于 $\mathcal{D}$与总应变的平方成正比，因此即使远离单个共振，模态之间的黏性交叉项也可能很重要（方程69 和47）。对$l = m = 2$ 自旋轨道对齐系统中扇区潮汐的计算展示了这些效应。

耗散响应的存在，并不能说明其强度是否足以解释观测到的趋势。对于自转周期为 10 天的类太阳恒星，Lin & Ogilvie (2017基于刚性核心计算，估算了一个修正品质因子$Q'_{10} \sim 10^7$ 。这相当于修正滞后时间 $\tau_{10} = \frac{2}{3}(Q'_{10}\Omega_\star)^{-1} \sim 10^{-2}$ 秒，比我们的演化模型支持的数值低了几个数量级。该估算取决于自转速率和内部结构，因此对于快速自转的膨胀恒星，这一差异的大小尚不确定。鉴于现有计算对快速自转的膨胀恒星的 η_{10} 取值几乎没有提供指导，我们继续将 η_{10} 视为一个有待通过观测约束的自由参数。

近共振响应——如果它确实存在——是达到所需 η_{10}数值的一种途径。 Y_{22} 响应中的共振通常能够产生与此处考虑的 η_{10} 数值相当或更高的峰值与背景比（Wu 等，2024；Dewberry 与 Wu（2024）；Dewberry（2026））。在离心力形变模型中，Dewberry &Lai (2022)发现，模态混合能够增强扇形潮汐重叠，而自旋翻转模仍保持零惯性系频率。我们的推测是，离心形变可能使另一个剪切模接近 $-\Omega_\star$，并通过模态混合增大其 Y_{21}潮汐重叠，进而增强倾斜角潮汐频率下的耗散。

6.2.2. *Inflated Planetary Radii*

我们已经表明，本文提出的模型在恒星演化的早期阶段最为高效。假设年龄较年轻，自然会引出这样的问题：如果行星很年轻，那么它们是否也会膨胀？事实上，年轻恒星周围已知的近距离巨行星，例如 HIP 67522 和 V1298 Tau （Rizzuto 等，2020；James 等，2026；David 等，2019），确实表现出半径显著膨胀的迹象。更大的行星半径会由于行星内部的耗散而直接缩短圆化时间尺度 $t_e^{(\mathrm{eq,p})}$（见第 3.4 节），从而使其在圆化之前更难完成重新对齐（方程 85）。不过，这一额外因素可以并入弱摩擦滞后时间 $\tau_{\mathrm{eq,\ p}}$ 的不确定性中，因此只会对我们的结果产生定量影响。

6.2.3. *Is this Mechanism Likely in Practice?*

如上文所述，本文提出的机制关键取决于不受约束的参数 η_{10} 较高。该机制在恒星为快速自转星、且行星在恒星仍处于前主序阶段时就已形成的情况下最为有效。在一定程度上，这些要求彼此存在退化关系，因此机制运行时可能不必全部满足这些条件。

归根结底， η_{10}值存在的巨大不确定性，使我们无法对偏心温木星或偏心热木星与其宿主恒星良好对齐的频率作出统计性判断。未来针对真实潮汐形变恒星模型中惯性波阻尼的研究，将有助于评估本文所述动力学过程作为观测结果解释的可行性。尽管如此，我们仍可以探讨此处假设的$P_{\star,\ 0}$ 值以及行星形成时间尺度是否总体上合理。

Planet Formation Time Scale—在本文中，我们假设行星在某个名义上的“开始时间”已经存在，并将其相对于所采用前主序演化的初始时期（第 t_0 4.1节）标记为“早期”“延迟”和“晚期”。我们更倾向于早期行星形成情景，此时宿主恒星仍处于膨胀状态，倾角阻尼更加有效。具体而言，我们采用三个参考恒星半径，分别为 $R_* = 5R_\odot$、$3R_\odot$和 $1.5R_\odot$，分别对应于我们的“早期”“延迟”和“晚期”情景（例如，见图4）。

行星形成可能早在零点之前就已开始t_0。如果将这一时期宽泛地与经典恒星“出生线”（Stahler 1983；Baraffe 等人 2012，2015）联系起来，那么此前的嵌入式原恒星阶段还可为行星生长额外提供 $\sim 10^5$–10^6 年。事实上，太阳系中富钙铝包体（CAIs）的早期形成，与嵌入式0/I类阶段固体的形成和加工过程相一致（Wood 2004；Krot 等人 2009；Ciesla 2010）。

行星胚胎形成后，在有利的盘条件下，卵石吸积可在 $\sim 10^5$–10^6 yr 的时间尺度内形成大质量核心（Ormel&Klahr 2010；Lam-brechts & Johansen 2012、2014）。数值模型进一步表明，足够高的卵石通量能够促成快速核心增长、气体吸积和向内迁移，从而形成热木星和温木星（Bitsch etal.2015、2019）。尽管这些模型假设行星胚胎已经存在，但它们支持这样一种可能性：当宿主恒星仍显著膨胀时，温木星就已存在于其周围（$R_* \sim 5R_\odot$）。

Rapid Rotators—尽管年轻的快速自转体（$P_{\star,\mathrm{ZAMS}} < 1$ 天）在年轻恒星群体中只占少数，但它们仍占已测得自转周期的恒星中不可忽视的一部分。在年龄为 1300 万年的英仙座 h 星团中，至少 13% 的自转周期测量样本呈现亚日周期（Moraux etal.2013）。在更年轻的猎户座复合体中，经典金牛座 T 型星的相应比例约为 2–6%，而弱线金牛座 T 型星则为 12–15%（Kounkel et al.2023）。猎户座的其他巡天报告显示，亚日周期所占比例约为 5–20%，具体取决于样本选择和观测节奏（例如，Stas-sun et al. 1999；Herbst 等人（2002））。这些估计包括候选双星系统，它们可能对快速自转星群体有显著贡献（Kounkel et al.2023），不过目前尚不清楚其中有多少快速自转体可以明确判定为单星。

更具推测性地说，我们指出，早期快速的行星形成与恒星快速自转或许并非完全无关。由富含固体的星盘和高卵石通量触发的剧烈早期行星形成过程，可能会促成多颗气态巨行星的形成，进而加速内盘消散。随后，在没有气体通常所提供的阻尼作用下，行星将通过行星—行星散射发生轨道演化，这也为我们设定动力学上较热的初始条件提供了依据。更重要的是，早期盘消散会破坏促成前主序阶段自旋减速的磁盘—星耦合（例如，Armitage &Clarke1996）。事实上，许多快速自转的非吸积弱线金牛座 T 型星也身处双星系统，这一事实支持了如下假设：早期盘消散会妨碍这些恒星自转减速（Staufferetal.2018；Messinaet al. 2017；Kounkeletal.2023）。

6.2.4. 其他行星

如果行星—行星散射产生了本文采用的动力学高温初始条件（例如，Dong 等人 2026），一些温木星可能保留着偏心且相互倾斜的外侧伴星。

众所周知，温木星拥有邻近的行星伴星（Huang 等人 2016）以及位于 au 级间隔处的外侧木星型伴星（Dawson 等人 2014；Rosenthal 等人 2024）。对外侧伴星的探测灵敏度部分取决于视向速度基线（例如，对 TOI-3362 b 的视向速度后续观测基线约为 45 天；Dong 等人 2021）。对于 90 天的基线，在短周期下 50% 的恢复阈值为 $K_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$时，太阳质量恒星周围圆轨道的相应阈值分别为 9。6 和 14。7 $\mathrm{m\,s^{-1}}$，对应轨道半径分别为 1。5 和 2 au（Cumming2004，公式 27）。在这些间隔处，一个 $0.3\,M_\mathrm{J}$ 伴星相对于凌日热木星倾斜 30°–50° 的伴星，其视向速度信号为 $K \simeq 4$–$7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，可能会逃过探测。一个 $1\,M_\mathrm{J}$ 伴星会产生 $K \simeq 13$–$23\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 的信号；当相互倾角超过约 43° 时，在某些观测几何下，它在 2 au 处可能低于 50% 的恢复阈值。

无论是否可探测，这些附加行星的动力学作用可能有限。原则上，偏心外行星甚至能在共面系统中通过八极阶长期耦合驱动显著的偏心率振荡（例如，Lee & Peale 2003；Petro-vich2015a），但恒星四极矩引起的近心点进动会限制这些振荡（第5节）。即使恒星四极矩逐渐减弱，广义相对论（GR）进动仍可继续限制偏心率激发。类似于方程（119），圆轨道广义相对论进动率与特征四极长期频率之比为（例如，Fabrycky & Tremaine 2007；Liu 等，2015）

$$\varepsilon_\mathrm{GR} = \frac{3\mathcal{G}(M_\star + m_\mathrm{p})^2 a_\mathrm{out}^3 (1-e_\mathrm{out}^2)^{3/2}}{a_\mathrm{p}^4 c^2 m_\mathrm{out}}. \tag{120}$$

对于 $M_\star = M_\odot$，$a_\mathrm{p} = 0.15$au，以及 $e_\mathrm{out} = 0.2$，$\varepsilon_\mathrm{GR} \simeq 1.5(m_\mathrm{out}/0.3\,M_\mathrm{J})^{-1}(a_\mathrm{out}/2\mathrm{au})^3$。因此，广义相对论进动能够抑制位于 2au 处、质量相当于土星的伴星所造成的长期摄动，不过距离更近或质量更大的伴星可能施加更强的摄动。

我们预计，第 4.4.2 节的结果在以下情形下仍近似成立：伴星仅引起较小的偏心率振荡，且恒星自旋与热木星轨道保持强耦合。在这种情况下，外部力矩使自旋与轨道几乎同步进动。随着恒星自旋减慢，两者之间的耦合可能减弱，从而使外行星能够驱动倾斜角演化，即使广义相对论仍持续限制偏心率振荡（Anderson& Lai 2018）。升交点力矩平衡的变化类似于中心天体四极矩减弱时发生的拉普拉斯面转变（Mu˜noz & Lai 2015；Schultz 等，2021）。

或者，前主序阶段的散射也可能使偏心热木星成为唯一幸存者，前提是其他行星与膨胀的恒星相撞。

6.2.5. *Other Applications of the Generalized Tides Ansatz*

广义有效潮汐模型可用于潮汐响应中除（1，0）以外的其他分量。潮汐相位锁定就是一个例子（Witte & Savonije1999；Fuller 等，2016；Fuller 2017），它描述了当内部模态的频率随时间升高时，强迫分量与内部模态之间的共振耦合。该模型已应用于热木星迁移（Ma &Fuller2021）和热木星倾斜角阻尼（Zanazzi

等人，2024）。例如，Zanazzi 等人（2024）关注恒星 g 模与潮汐势的（m，n）=（0，2）分量之间的共振锁定。遵循Zanazzi 等人（2024），可以根据恒星演化时间尺度估算 τ_{02} 的值，然后采用本文的相同方法推导运动方程，使潮汐弱摩擦与受共振锁定增强的（m，n）=（0，2）分量能够同时起作用。

7. 总结与结论

在本研究中，我们探讨了恒星潮汐是否能够解释偏心暖木星（EWJ）较低的投影倾斜角。

(a) 我们以米兰科维奇状态矢量形式推导了适用于任意偏心率和倾角的长期潮汐演化方程，并允许每个潮汐谐波具有独立的有效时滞 τ_{mn}。我们尤其关注响应的 (1，0) 分量，该分量不会改变半长轴和偏心率。在半长轴固定时，它对恒星倾角演化的贡献会随偏心率增大而增强。

(b) 我们将这些方程应用于初始时存在错位的偏心温木星。若 (1，0) 响应增强，那么当行星已处于偏心温木星轨道，且其宿主星在主序前阶段（PMS）仍处于膨胀状态并快速自转时，恒星重新对齐的速度可能快于轨道圆化。

(c) 在我们的基准 $1\,M_{\rm J}$ 模型中，$\eta_{10} \sim 10^7$ 会产生显著的倾角阻尼。质量更大的行星表现出更强的阻尼，这表明对于超级木星，$\eta_{10} \sim 10^6$ 或许足以奏效。恒星旋转参考系中的 (1，0) 驱动频率 $\tilde{\omega}_{10} = -\Omega_\star$ 位于惯性波频率范围内，并与整体自转翻转模的频率一致。刚性自转翻转模不产生应变，因此不会引发内部黏性耗散。在相同频率下激发的其他运动则可通过剪切耗散能量。这些运动能否在快速自转且受离心力作用而变形的主序前恒星中提供所推断的增强效应，目前仍不确定。

（d）我们检验了这种重新对齐机制能否在双星驱动的高偏心率迁移（HEM）过程中从较大的初始间距开始发挥作用。在所测试的构型中，有利于快速重新对齐的条件（即较短的旋转周期）可能会抑制长期偏心率激发。在主序阶段能够维持偏心率驱动的构型中，轨道圆化的进程快于恒星重新对齐。这些结果使人们对这样一种解释产生怀疑：已对齐的偏心温木星（EWJs）是长期驱动的高偏心率迁移的遗迹，即使它们看起来位于潮汐迁移轨迹上。

如果前主序阶段潮汐重新对齐可以解释相当一部分已对齐的偏心温木星，我们预期会出现以下趋势：

(a) 在足够年轻的偏心温木星系统中，自转周期较短的宿主星 $P_\star$ 应更倾向于具有较小的投影倾斜角 $|\lambda|$。

(b) 对于轨道性质相近的偏心温木星，对齐比例应随行星质量增加而升高。

(c) 如果大部分阻尼发生在前主序阶段，那么当前恒星有效温度对偏心热木星倾斜角的预测能力应较弱。

(d) 在偏心率和行星质量相近的情况下，半长轴越大，对齐比例应越低。在我们的模型中，超过约 $a_{\rm p} \sim 0.2$ au 后，重新对齐会变得效率低下。

如果行星—行星散射在重新对齐之前激发了某些偏心温木星的偏心率，这些系统可能会保留间距达数 au 的偏心轨道的木星型伴星。相互倾角可能会降低这些伴星发生凌星的可能性，而较短基线的视向速度观测可能无法对其轨道提供有力约束。

致谢

DJM 感谢 C. Petrovich、J. I. Espinoza-Retamal、H. Bhaskar、JJ Zanazzi、J. Jackson、A. Polanksi、J. Fuller、Janosz Dewberry 和 H. Perets 富有建设性的讨论。本工作得到美国国家科学基金会 AST- 2511258 号资助的支持。

参考文献

Abramowitz, M. 与 Stegun, I. A. 1964年，《数学函数手册：公式、图表和数学表格》（纽约：Dover）

Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., 等. 2012，《天体物理学杂志》, 757, 18, doi: 10.1088/0004-637X/757/1/18

Albrecht, S. H., Dawson, R. I., & Winn, J. N. 2022, 《太平洋天文学会刊》, 134, 082001, doi: 10.1088/1538-3873/ac6c09 Alexander, M. E. 1973, 《天体物理学与空间科学》, 23, 459, doi: 10.1007/BF00645172 Anderson, K. R., & Lai, D. 2018, 《皇家天文学会月报》, 480, 1402, doi: 10.1093/mnras/sty1937 Anderson, K. R., Storch, N. I., & Lai, D. 2016, 《皇家天文学会月报》, 456, 3671, doi: 10.1093/mnras/stv2906 Armitage, P. J., & Clarke, C. J. 1996, 《皇家天文学会月报》, 280, 458, doi: 10.1093/mnras/280.2.458 Baraffe, I., Homeier, D., Allard, F., & Chabrier, G. 2015, 《天文学与天体物理学》, 577, A42, doi: 10.1051/0004-6361/201425481 Baraffe, I., Vorobyov, E., & Chabrier, G. 2012, 《天体物理学杂志》, 756, 118, doi: 10.1088/0004-637X/756/2/118 Barker, A. J. 2020, 《皇家天文学会月报》, 498, 2270, doi: 10.1093/mnras/staa2405 —. 2022, 《天体物理学杂志快报》, 927, L36, doi: 10.3847/2041-8213/ac5b63 Barker, A. J., Braviner, H. J., & Ogilvie, G. I. 2016, 《皇家天文学会月报》, 459, 924, doi: 10.1093/mnras/stw701 Barker, A. J., Efroimsky, M., Makarov, V. V., & Veras, D. 2024, 《皇家天文学会月报》, 527, 5131, doi: 10.1093/mnras/stad3530 Barker, A. J., & Ogilvie, G. I. 2009, 《皇家天文学会月报》, 395, 2268, doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.14694.x Belczynski, K., Kalogera, V., Rasio, F. A., 等. 2008, 天体物理学杂志增刊, 174, 223, doi: 10.1086/521026 Bhaskar, H. G., Petrovich, C., & Mu˜noz, D. J. 2026, 《天体物理学杂志快报》, 1007, L12, doi: 10.3847/2041-8213/ae8dbc Bitsch, B., Izidoro, A.,Johansen, A., 等. 2019, 《天文学与天体物理学》, 623, A88, doi: 10.1051/0004-6361/201834489 Bitsch, B., Lambrechts, M., & Johansen, A. 2015, 《天文学与天体物理学》, 582, A112, doi: 10.1051/0004-6361/201526463 Breiter, S., & Ratajczak, R. 2005, 《皇家天文学会月报》, 364, 1222, doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09658.x Brumberg, V. A. 2012, 《天体力学解析技术》（Springer Berlin Heidelberg） Ciesla, F. J. 2010, 《伊卡洛斯》, 208, 455, doi: 10.1016/j.icarus.2010.02.010 Correia, A. C. M. 2009, 《天体物理学杂志快报》, 704, L1, doi: 10.1088/0004-637X/704/1/L1 Correia, A. C. M., Laskar, J., Farago, F., & Bou´e, G. 2011, 《天体力学与动力天文学》, 111, 105, doi: 10.1007/s10569-011-9368-9 Correia, A. C. M., & Valente, E. F. S. 2022, 《天体力学与动力天文学》, 134, 24, doi: 10.1007/s10569-022-10079-3 Cumming, A. 2004, 《皇家天文学会月报》, 354, 1165, doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.08275.x Darwin, G. H. 1879, 《伦敦皇家学会哲学汇刊》第一辑, 170, 447 David, T. J., Petigura, E. A., Luger, R. 等 2019, 《天体物理学杂志快报》, 885, L12, doi: 10.3847/2041-8213/ab4c99 Dawson, R. I., & Johnson, J. A. 2012, 《天体物理学杂志》, 756, 122, doi: 10.1088/0004-637X/756/2/122 —。2018, 《天文学与天体物理学年度评论》, 56, 175, doi: 10.1146/annurev-astro-081817-051853 Dawson, R. I., Murray-Clay, R. A., & Johnson, J. A. 2015, 《天体物理学杂志》, 798, 66, doi: 10.1088/0004-637X/798/2/66 Dawson, R. I., Johnson, J. A., Fabrycky, D. C. 等 2014, 《天体物理学杂志》, 791, 89, doi: 10.1088/0004-637X/791/2/89 Dewberry, J. W. 2023, 《皇家天文学会月报》, 521, 5991, doi: 10.1093/mnras/stad546 —。2026, 《天体物理学杂志》, 997, 27, doi: 10.3847/1538-4357/ae18ca Dewberry, J. W., & Lai, D. 2022, 《天体物理学杂志》, 925, 124, doi: 10.3847/1538-4357/ac3ede Dewberry, J. W., & Wu, S. C. 2024, 《皇家天文学会月报》, 527, 2288, doi: 10.1093/mnras/stad3164 Dong, J., Lee, E. J., Kokubo, E. 等 2026, 《天体物理学杂志快报》, 1007, L29, doi: 10.3847/2041-8213/ae930e Dong, J., Huang, C. X., Zhou, G. 等 2021, 《天体物理学杂志快报》, 920, L16, doi: 10.3847/2041-8213/ac2600 Dong, J., Chontos, A., Zhou, G. 等 2025, 《天文杂志》, 169, 4, doi: 10.3847/1538-3881/ad8ec1 Dong, S., Katz, B., & Socrates, A. 2014, 《天体物理学杂志快报》, 781, L5, doi: 10.1088/2041-8205/781/1/L5 Dullin, H. R. 2004, 规则与混沌动力学, 9, 255 Efroimsky, M. 2012, 《天体力学与动力天文学》, 112, 283, doi: 10.1007/s10569-011-9397-4 —。2015, 《天文杂志》, 150, 98, doi: 10.1088/0004-6256/150/4/98 Eggleton, P. P., Kiseleva, L. G., & Hut, P. 1998, 《天体物理学杂志》, 499, 853 Eggleton, P. P., & Kiseleva-Eggleton, L. 2001, 《天体物理学杂志》, 562, 1012, doi: 10.1086/323843 Espinoza-Retamal, J. I., Brahm, R., Petrovich, C. 等 2023, 《天体物理学杂志快报》, 958, L20, doi: 10.3847/2041-8213/ad096d Espinoza-Retamal, J. I., J ord´an, A., Brahm, R. 等 2025, 《天文杂志》, 170, 70, doi: 10.3847/1538-3881/ade22e Fabrycky, D., & Tremaine, S. 2007, 《天体物理学杂志》, 669, 1298, doi: 10.1086/521702 Fabrycky, D. C., & Winn, J. N. 2009, 《天体物理学杂志》, 696, 1230, doi: 10.1088/0004-637X/696/2/1230 Fischer, D. A., Vogt, S. S., Marcy, G. W. 等 2007, 《天体物理学杂志》, 669, 1336, doi: 10.1086/521869 Fuller, J. 2017, 《皇家天文学会月报》, 472, 1538, doi: 10.1093/mnras/stx2135 Fuller, J., Luan, J., & Quataert, E. 2016, 《皇家天文学会月报》, 458, 3867, doi: 10.1093/mnras/stw609 Giacaglia, G. E. O. 1976, 天体力学, 14, 515, doi: 10.1007/BF01229062

Goldreich, P., & Keeley, D.A. 1977, 《天体物理学杂志》, 211, 934, doi: 10.1086/155005 Goldreich, P., & Nicholson, P. D. 1977, 《伊卡洛斯》, 30, 301, doi: 10.1016/0019-1035(77)90163-4 —。1989, 《天体物理学杂志》, 342, 1079, doi: 10.1086/167665 Goodman, J., & Dickson, E. S. 1998, 《天体物理学杂志》, 507, 938, doi: 10.1086/306348 Goodman, J., & Oh, S. P. 1997, 《天体物理学杂志》, 486, 403, doi: 10.1086/304505 Greenspan, H. 1968, 旋转流体理论, 《剑桥力学与应用数学专著》（剑桥大学出版社） Gupta, A. F., Jackson, J. M., H´ebrard, G. 等 2023, 《天文杂志》, 165, 234, doi: 10.3847/1538-3881/accb9b Gupta, A. F., Millholland, S. C., Im, H. 等 2024, 《自然》, 632, 50, doi: 10.1038/s41586-024-07688-3 Hansen, C. J., Kawaler, S. D., & Trimble, V. 1994, 恒星内部结构：物理原理、结构与演化, 第1版（纽约：施普林格出版社） Harrington, R. S. 1968, 《天文杂志》, 73, 190, doi: 10.1086/110614 Herbst, W., Bailer-Jones, C. A. L., Mundt, R., Meisenheimer, K., & Wackermann, R. 2002, 《天文学与天体物理学》, 396, 513, doi: 10.1051/0004-6361:20021362 Huang, C., Wu, Y., & Triaud, A.H. M.J. 2016, 《天体物理学杂志》, 825, 98, doi: 10.3847/0004-637X/825/2/98 Hughes, S. 1981, 天体力学, 25, 101, doi: 10.1007/BF01301812 Hurley, J. R., Tout, C. A., & Pols, O.R. 2002, 《皇家天文学会月报》, 329, 897, doi: 10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x Hut, P. 1981, 《天文学与天体物理学》, 99, 126 Ida, S., & Makino, J. 1992, 《伊卡洛斯》, 96, 107, doi: 10.1016/0019-1035(92)90008-U Ikwut-Ukwa, M., Rodriguez, J. E., Quinn, S. N. 等 2022, 《天文杂志》, 163, 9, doi: 10.3847/1538-3881/ac2ee1 James, H. R., Barber, M. G., Mann, A.W. 等 2026, arXiv 电子预印本, arXiv:2609.35979, doi: 10.48550/arXiv.2609.35979 J ord´an, A., Brahm, R., Espinoza, N. 等 2020, 《天文杂志》, 159, 145, doi: 10.3847/1538-3881/ab6f67 Juri´c, M., & Tremaine, S. 2008, 《天体物理学杂志》, 686, 603, doi: 10.1086/590047 Kane, S. R., Hill, M. L., Dalba, P. A. 等 2023, 《天文杂志》, 165, 252, doi: 10.3847/1538-3881/acd17a Kerswell, R. R. 2002, 《流体力学年度评论》, 34, 83, doi: 10.1146/annurev.fluid.34.081701.171829 Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, 恒星结构与演化（柏林：施普林格出版社）, doi: 10.1007/978-3-642-30304-3 Kounkel, M., Stassun, K. G., Hillenbrand, L. A. 等 2023, 《天文杂志》, 165, 182, doi: 10.3847/1538-3881/acc2bd Kozai, Y. 1973, SAO特别报告, 349 Krot, A. N., Amelin, Y., Bland, P., et al. 2009, GeoCoA, 73, 4963, doi: 10.1016/j.gca.2008.09.039 Kundu, P., Cohen, I., & Hu, H. 2001, 流体力学（学术出版社）. https://books.google.com/books?id=AFVnbQqCJSQC Lacaze, L., Le Gal, P., & Le Diz`es, S. 2004, 流体力学杂志, 505, 1, doi: 10.1017/S0022112004008328 Lai, D. 2012, 《皇家天文学会月报》, 423, 486, doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.20893.x Lai, D., Rasio, F. A., & Shapiro, S. L. 1993, 天体物理学杂志增刊, 88, 205, doi: 10.1086/191822 —. 1994, 《天体物理学杂志》, 420, 811, doi: 10.1086/173606 Lambrechts, M., & Johansen, A. 2012, 《天文学与天体物理学》, 544, A32, doi: 10.1051/0004-6361/201219127 —. 2014, 《天文学与天体物理学》, 572, A107, doi: 10.1051/0004-6361/201424343 Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 1959, 流体力学（牛津：培格曼出版社）Lee, M. H., & Peale, S. J. 2003, 《天体物理学杂志》, 592, 1201, doi: 10.1086/375857 Lin, D. N. C., Bodenheimer, P., & Richardson, D. C. 1996, 《自然》, 380, 606, doi: 10.1038/380606a0 Lin, Y., & Ogilvie, G. I. 2017, 《皇家天文学会月报》, 468, 1387, doi: 10.1093/mnras/stx540 Lissauer, J. J. 1993, 《天文学与天体物理学年度评论》, 31, 129, doi: 10.1146/annurev.aa.31.090193.001021 Liu, B., Mu˜noz, D. J., & Lai, D. 2015, 《皇家天文学会月报》, 447, 751, doi: 10.1093/mnras/stu2396 Ma, L., & Fuller, J. 2021, 《天体物理学杂志》, 918, 16, doi: 10.3847/1538-4357/ac088e Mathews, P. M., Herring, T. A., & Buffett, B. A. 2002, 地球物理研究杂志（固体地球）, 107, 2068, doi: 10.1029/2001JB000390 Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, 《天体物理学杂志快报》, 799, L23, doi: 10.1088/2041-8205/799/2/L23 Messina, S., Lanzafame, A. C., Malo, L., et al. 2017, 《天文学与天体物理学》, 607, A3, doi: 10.1051/0004-6361/201730444 Mignard, F. 1979, 月球与行星, 20, 301, doi: 10.1007/BF00907581 Milankovitch, M. 1939, 数学与自然科学院公报 A辑, 6, 1 Miranda, R., & Lai, D. 2015, 《皇家天文学会月报》, 452, 2396, doi: 10.1093/mnras/stv1450 Mireles, I., Murgas, F., Dragomir, D., et al. 2025, 《天文学与天体物理学》, 704, A194, doi: 10.1051/0004-6361/202554335 Moe, M., & Kratter, K. M. 2018, 《天体物理学杂志》, 854, 44, doi: 10.3847/1538-4357/aaa6d2 Moraux, E., Artemenko, S., Bouvier, J., et al. 2013, 《天文学与天体物理学》, 560, A13, doi: 10.1051/0004-6361/201321508

Morgan, M., Bowler,B. P.,& Tran,Q.H.2026, 《天文杂志》, 171, 19, doi: 10.3847/1538-3881/ae0e16 Morton, T.D., & Johnson, J. A. 2011, 《天体物理学杂志》,729,138, doi: 10.1088/0004-637X/729/2/138 Mu˜noz, D. J., & Lai, D. 2015, 美国国家科学院院刊, 112,9264, doi: 10.1073/pnas.1505671112 Mu˜noz, D. J., Lai, D., & Liu,B. 2016,《皇家天文学会月报》,460, 1086, doi: 10.1093/mnras/stw983 Mu˜noz, D. J., & Perets, H. B. 2018,《天文杂志》,156, 253, doi: 10.3847/1538-3881/aae7d0 Naoz, S.,Farr, W. M.,Lithwick, Y.,Rasio,F.A.,& Teyssandier, J.2013, 《皇家天文学会月报》, 431,2155, doi: 10.1093/mnras/stt302 Naoz, S.,Farr, W. M.,& Rasio, F. A.2012,《天体物理学杂志快报》, 754, L36, doi: 10.1088/2041-8205/754/2/L36 Narita, N., Hirano,T., Sato, B., etal.2009,《太平洋天文学会刊》, 61, 991, doi: 10.1093/pasj/61.5.991 Newcomb, S. 1895, 美国。航海年历办公室。天文学论文；第5卷, 5, 1 Ogilvie, G. I. 2009, 《皇家天文学会月报》, 396, 794, doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.14814.x —. 2013, 《皇家天文学会月报》,429, 613, doi: 10.1093/mnras/sts362 —. 2014, 《天文学与天体物理学年度评论》, 52, 171, doi: 10.1146/annurev-astro-081913-035941 Ogilvie, G. I., & Lin, D. N.C. 2004,《天体物理学杂志》,610, 477, doi: 10.1086/421454 —. 2007, 《天体物理学杂志》, 661, 1180, doi: 10.1086/515435 Olver, F., 标准与技术研究院, N. I., & (U.S.),T.2010,NIST数学函数手册（平装版及CD-ROM）（剑桥大学出版社）. https://books.google.com/books?id=7EZ6PwDy4qEC Ormel, C. W., & Klahr,H. H. 2010, 《天文学与天体物理学》,520, A43, doi: 10.1051/0004-6361/201014903 Papaloizou, J. C. B., & Savonije,G.J. 1997,《皇家天文学会月报》, 291, 651, doi: 10.1093/mnras/291.4.651 Penev, K., & Sasselov,D. 2011, 《天体物理学杂志》,731, 67, doi: 10.1088/0004-637X/731/1/67 Petrovich, C. 2015a, 《天体物理学杂志》, 805,75, doi: 10.1088/0004-637X/805/1/75 —. 2015b, 《天体物理学杂志》, 799, 27, doi: 10.1088/0004-637X/799/1/27 Petrovich, C.,Tremaine,S., & Rafikov, R. 2014, 《天体物理学杂志》,786, 101, doi: 10.1088/0004-637X/786/2/101 Plummer,H. C. K. 1918,《动力天文学导论》（英国剑桥：剑桥大学出版社）Poincar´e, H. 1910, 《天文学通报》,第一辑, 27,321 Poisson, E., & Will, C. M.2014,《引力》（英国剑桥：剑桥大学出版社）Press, W. H., & Teukolsky, S. A. 1977, 《天体物理学杂志》, 213, 183, doi: 10.1086/155143 Rasio, F. A., Tout, C. A., Lubow, S. H., & Livio, M. 1996, 《天体物理学杂志》, 470, 1187, doi: 10.1086/177941 Rice, M., Wang, S., & Laughlin, G. 2022a, 《天体物理学杂志快报》, 926, L17, doi: 10.3847/2041-8213/ac502d Rice, M., Wang, S., Wang, X.-Y., et al. 2022b, 《天文杂志》, 164, 104, doi: 10.3847/1538-3881/ac8153 Rizzuto, A. C., Newton, E. R., Mann, A. W., et al. 2020, 《天文杂志》, 160, 33, doi: 10.3847/1538-3881/ab94b7 Rose, M. 1957, 角动量初等理论, 物质结构丛书（纽约：Wiley） Rosenthal, L.J., Howard, A. W., Knutson, H. A., & Fulton, B. J. 2024, 天体物理学杂志增刊, 270, 1, doi: 10.3847/1538-4365/acffc0 Sadeghi Ardestani, L., Guillot, T., & Morel, P. 2017, 《皇家天文学会月报》, 472, 2590, doi: 10.1093/mnras/stx2039 Savonije, G. J., & Papaloizou, J. C. B. 1997, 《皇家天文学会月报》, 291, 633, doi: 10.1093/mnras/291.4.633 Savvidou, S., & Bitsch, B. 2023, 《天文学与天体物理学》, 679, A42, doi: 10.1051/0004-6361/202245793 Schlaufman, K. C. 2010, 《天体物理学杂志》, 719, 602, doi: 10.1088/0004-637X/719/1/602 Schneider, A. D., & Bitsch, B. 2021, 《天文学与天体物理学》, 654, A71, doi: 10.1051/0004-6361/202039640 Schultz, K., Spalding, C., & Batygin, K. 2021, 《皇家天文学会月报》, 506, 2999, doi: 10.1093/mnras/stab1899 Sedaghati, E., Jord´an, A., Brahm, R., et al. 2023, 《天文杂志》, 166, 130, doi: 10.3847/1538-3881/acea84 Skumanich, A. 1972, 《天体物理学杂志》, 171, 565, doi: 10.1086/151310 Spalding, C., Batygin, K., & Adams, F. C. 2014, 《天体物理学杂志快报》, 797, L29, doi: 10.1088/2041-8205/797/2/L29 Stahler, S. W. 1983, 《天体物理学杂志》, 274, 822, doi: 10.1086/161495 Stassun, K. G., Mathieu, R. D., Mazeh, T., & Vrba, F. J. 1999, 《天文杂志》, 117, 2941, doi: 10.1086/300881 Stauffer, J., Rebull, L. M., Cody, A. M., et al. 2018, 《天文杂志》, 156, 275, doi: 10.3847/1538-3881/aae9ec Storch, N. I., Anderson, K. R., & Lai, D. 2014, Science, 345, 1317, doi: 10.1126/science.1254358 Storch, N. I., & Lai, D. 2014, 《皇家天文学会月报》, 438, 1526, doi: 10.1093/mnras/stt2292 Storch, N. I., Lai, D., & Anderson, K. R. 2017, 《皇家天文学会月报》, 465, 3927, doi: 10.1093/mnras/stw3018 Tremaine, S., Touma, J., & Namouni, F. 2009, 《天文杂志》, 137, 3706, doi: 10.1088/0004-6256/137/3/3706 Triana, S. A., Rekier, J., Trinh, A., & Dehant, V. 2019, 《国际地球物理学杂志》, 218, 1071, doi: 10.1093/gji/ggz212 Varshalovich, D. A., Moskalev, A. N., & Khersonskii, V. K. 1988, 角动量量子理论（World Scientific Publishing Company）, doi: 10.1142/0270

Vick, M., & Lai, D. 2020, 《皇家天文学会月报》, 496, 3767, doi: 10.1093/mnras/staa1784Wahl, S. M., Hubbard, W. B., & Militzer, B. 2017, 《伊卡洛斯》, 282, 183, doi:10.1016/j.icarus.2016.09.011Wahl, S. M., Parisi, M., Folkner, W. M., Hubbard, W. B., & Militzer, B. 2020, 《天体物理学杂志》, 891, 42, doi: 10.3847/1538-4357/ab6cf9Wang, X.-Y., Rice, M., Wang, S., et al. 2024, 《天体物理学杂志快报》, 973, L21, doi: 10.3847/2041-8213/ad7469Wigner, E. 1959, 群论：及其在原子光谱量子力学中的应用（纽约：学术出版社） Winn, J. N., Fabrycky, D., Albrecht, S., & Johnson, J. A. 2010, 《天体物理学杂志快报》, 718, L145, doi: 10.1088/2041-8205/718/2/L145Witte, M. G., & Savonije, G. J. 1999, 《天文学与天体物理学》, 350, 129, doi: 10.48550/arXiv.astro-ph/9909073

Wood, J. A. 2004,GeoCoA,68, 4007,doi: 10.1016/j.gca.2004.04.003Wu, S. C., Dewberry, J. W., & Fuller, J. 2024, 《天体物理学杂志》, 963, 34, doi: 10.3847/1538-4357/ad1e54Wu, Y., & Murray, N. 2003, 《天体物理学杂志》, 589, 605, doi: 10.1086/374598Zahn, J. P. 1975, 《天文学与天体物理学》, 41, 329 Zahn, J.-P. 1977, 《天文学与天体物理学》, 57, 383 Zanazzi, J. J.,De wberry, J., & Chiang, E. 2024, 《天体物理学杂志快报》, 967, L29, doi: 10.3847/2041-8213/ad4644Zhang, K., & Liao, X. 2017, 旋转流体理论与建模, 剑桥力学专著 (剑桥大学出版社).https://books.google.com/books?id=A9vFDgAAQBAJ

附录

A. 标准弱摩擦极限

在弱摩擦极限下，我们在以下公式中取 $\tau_{mn} = \tau$ （方程（35）–（40））。由于汉森系数（附录 B）和 Wigner-D矩阵（附录 C）的恒等式，这一过程十分直接。为简洁起见，我们仅列出 $\langle T_u \rangle_{\rm eq}$ （方程 53）的推导；其他运动方程的推导方式大体类似。

从方程式 (35) 出发，我们令 $\tau_{mn} = \tau$ 并将 $\tilde{\omega}_{mn} = n\Omega - m\Omega_\star$ 替换为：

$$\begin{aligned}\langle T_u \rangle_{\rm eq} = -\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2 R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\tau\Bigg\{&\Omega\sum_{mnpr} nW_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\mathrm{Re}\left\{D^{2*}_{p\mu}(\alpha\beta 0)D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0)b_r^{(-)} + D^{2*}_{p\mu}(\alpha\beta 0)D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0)b_r^{(+)}\right\}\\ &+\Omega_\star\sum_{mnpr} mW_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\mathrm{Re}\left\{D^{2*}_{p\mu}(\alpha\beta 0)D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0)b_r^{(-)} + D^{2*}_{p\mu}(\alpha\beta 0)D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0)b_r^{(+)}\right\}\Bigg\}\end{aligned} \tag{A1}$$

均匀时间滞后假设使我们能够显式地对 m 求和。利用方程式 (C19) 和 (C25)，并注意到 $W_{2p}W_{2,p\pm1}$ 始终为零，我们得到

$$\begin{aligned}\langle T_u \rangle_{\rm eq} =&\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2 R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\tau\sin\beta\cos\alpha\Omega_\star\sum_{npr} W_{2p}W_{2r}X_n^{-3,p}X_n^{-3,r}\left\{b_r^{(-)}b_{r-1}^{(-)}\delta_{r-2,p} + \left[b_r^{(-)}b_{r-1}^{(+)} + b_r^{(+)}b_{r-1}^{(-)}\right]\delta_{r,p}\right.\\ &\left.+ b_r^{(+)}b_{r+1}^{(+)}\delta_{r+2,p}\right\}\\ =&\frac{\mathcal{G}M_{\rm p}^2 R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\frac{5}{4\pi}\tau\sin\beta\cos\alpha\Omega_\star\sum_{np}(W_{2p})^2\left\{-[b_p^{(+)}]^2X_n^{-3,p}X_n^{-3,p+2} + [X_n^{-3,p}]^2\left[[b_p^{(-)}]^2 + [b_p^{(+)}]^2\right]\right.\\ &\left.-[b_p^{(-)}]^2X_n^{-3,p}X_n^{-3,p-2}\right\}\end{aligned} \tag{A2}$$

其中我们用到了恒等式 $W_{2,p\pm2} = -W_{2p}\left(b_p^{(\pm)}/b_{p\pm1}^{(\pm)}\right)$ 以及关系式 $b_p^{(-)} = b_{p-1}^{(+)}$。接下来，我们使用恒等式 (B7) 对 n 求和，然后根据 p 的定义对其求和，并利用 W_{2p} 和 $b_p^{(\pm)}$的定义，最终得到方程式 (53)：

$$\langle T_u \rangle_{\rm eq} = \frac{3\mathcal{G}M_{\rm p}^2 R_\star^5}{a_{\rm p}^6}\tau\sin\beta\cos\alpha\Omega_\star\frac{1}{2}\left(X_0^{-6,0} - X_0^{-6,2}\right)\ . \tag{A3}$$

其余方程式 (54)-(58) 的推导类似。

B. 汉森系数

B.1. 汉森系数的闭式

在第 2.4 节中，米兰科维奇形式的运动方程（19-20）表示为涉及汉森系数的四重求和（35-40）。在弱摩擦极限（第 2.5 节）下，所有汉森系数均具有以下形式： $X^{\alpha,\ m}_{\ \ 0}$。同样，出现在 $(m,\ n) = (1,\ 0)$ 潮汐分量（第 3 节）运动方程中的汉森系数，也都具有以下形式： $X^{\alpha,\ m}_{\ \ 0}$。利用高斯超几何函数及其相关的超几何级数，这些系数可以表示为闭式（Hughes 1981；Kozai 1973）：

$$X_0^{\alpha,m}(e) = \left(-\frac{e}{2}\right)^m\binom{\alpha+m+1}{m}\ {}_2F_1\left(\frac{m-\alpha-1}{2}, \frac{m-\alpha}{2}, m+1; e^2\right) \tag{B4}$$

无论 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 的符号如何，该式均成立。

重要的是，与本研究相关的 $\alpha < 0$ 汉森系数最终只包含有限项偏心率项。这是因为 ${}_2F_1(a,b,c;\ z)$ 的级数表示在 $a < 0$ 或 $b < 0$ 时会终止

（例如，Olver 等人（2010），§15.2）。利用 §15.3.3 中的恒等式，以及 Abramowitz &Stegun （1964年）中的级数表示 ${}_2F_1(a,\ b,\ c;\ z)$，我们得到

$$X_0^{-|\alpha|,m}(e)=\frac{(-e/2)^m}{(1-e^2)^{|\alpha|-3/2}}\binom{m-|\alpha|+m}{m}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-|\alpha|+2}{2}\rfloor}\frac{\left(\frac{m-|\alpha|}{2}+\frac{3}{2}\right)_j\left(\frac{m-|\alpha|}{2}+1\right)_j}{\left(\frac{m+|\alpha|}{2}\right)_j}\frac{e^{2j}}{j!},\quad\left(\frac{m-|\alpha|+2}{2}\in\mathbb{Z}_0^-\right) \tag{B5}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示下取整函数，$(x)_j=\Gamma(x+j)/\Gamma(x)$表示波赫哈默符号。对于负参数 $x=-a$ 且满足 $a\in\mathbb{Z}$ 的情况，当 $j>|a|$时，波赫哈默符号 $(-|a|)_j$ 中的值为零，这解释了级数会在有限的 j 处终止。例如，对于 $\alpha=-6$，$X^{-6,m}_0$ 将与 $(1-e^2)^{-9/2}$ 成正比，并乘以一个关于偏心率的多项式，其最低阶项和最高阶项分别为 $\mathcal{O}(e^m)$ 和 $\mathcal{O}(e^{|m-4|+m})$

我们使用公式（B5）计算 $X^{-|\alpha|,m}_0$，详见第 2.5 节和 3.1 节以及下文附录B.3 。请注意，我们没有使用 Hughes（1981）中的公式 11，因为该公式似乎是不正确的。

B.2. 汉森系数的矩

根据汉森系数的定义（方程 15），可以写成

$$\left(\frac{r_{\rm p}}{a_{\rm p}}\right)^{2\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-\nu)f}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}X_n^{\alpha,\mu}X_{n'}^{\alpha,-\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n')\mathcal{M}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n^{2\alpha,\mu-\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\mathcal{M}}\ , \tag{B6}$$

因此，对平近点角/时间取平均后可得到，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n^{\alpha,\mu}X_n^{\alpha,-\nu}=X_0^{2\alpha,\mu-\nu} \tag{B7}$$

其中一个特殊情形是汉森系数的“零阶矩”:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[X_n^{l,p}\right]^2=X_0^{2l,0} \tag{B8}$$

按照类似的步骤，可以证明汉森系数高阶矩的若干恒等式（见 Correia & Valente2022）。在本文中，我们将使用:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\left[X_n^{l,p}\right]^2=p\sqrt{1-e^2}X_0^{2l-2,0} \tag{B9}$$

and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2\left[X_n^{l,p}\right]^2=l^2\left[2X_0^{2l-3,0}-X_0^{2l-2,0}-(1-e^2)X_0^{2l-4,0}\right]+p^2(1-e^2)X_0^{2l-4,0} \tag{B10}$$

B.3. 用 *Hut* 的 f 函数表示汉森系数

在第 2.5 节中，我们得到了 Correia 等人 (2011) 的米兰科维奇形式弱摩擦方程。闭式汉森系数 $X^{k,m}_0$ 可以用 f_i 中定义的Hut (1981) 函数表示:

$$X_0^{-6,0}(e)=\frac{1+3e^2+\frac{3}{8}e^4}{(1-e^2)^{9/2}}=\frac{f_5(e^2)}{(1-e^2)^{9/2}}\ , \tag{B11}$$

$$X_0^{-6,1}(e)=\frac{3}{2}e\frac{1+\frac{3}{2}e^2}{(1-e^2)^{9/2}}=e\frac{3f_4(e^2)-f_5(e^2)}{(1-e^2)^{9/2}} \tag{B12}$$

$$X_0^{-6,2}(e)=\frac{3}{2}e^2\frac{1+\frac{1}{6}e^2}{(1-e^2)^{9/2}}=\frac{f_5(e^2)-f_4(e^2)}{(1-e^2)^{9/2}}\ , \tag{B13}$$

$$X_0^{-8,0}(e)=\frac{1+\frac{15}{2}e^2+\frac{45}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6}{(1-e^2)^{13/2}}=\frac{f_2(e^2)}{(1-e^2)^{13/2}}\ , \tag{B14}$$

$$X_0^{-9,0}(e) = \frac{1 + \frac{21}{2}e^2 + \frac{105}{8}e^4 + \frac{35}{16}e^6}{(1-e^2)^{15/2}}\ , \tag{B15}$$

$$X_0^{-10,0}(e) = \frac{1 + 14e^2 + \frac{105}{4}e^4 + \frac{35}{4}e^6 + \frac{35}{128}e^8}{(1-e^2)^{17/2}} = 3\frac{X_0^{-9,0}}{1-e^2} - \frac{2(1-e^2)f_2(e^2) + \frac{9}{2}e^2 f_3(e^2)}{(1-e^2)^{17/2}} \tag{B16}$$

C. Wigner D 矩阵的性质

C.1. 闭式表达式与对称性

Wigner D 矩阵 $D^l_{\mu m}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 定义了球谐函数在坐标旋转变换下的变换，该坐标旋转变换由 $\alpha\beta\gamma$ 欧拉角旋转 $z-y-z$ 约定（Rose 1957）给出：

$$Y_{lm}(\theta',\phi') = \sum_{m=-l}^{l} D^l_{\mu m}(\alpha\beta\gamma) Y_{l\mu}(\theta,\phi) \tag{C17}$$

欧拉角的依赖关系是可分离的，因此通过 $D^l_{\mu m}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\alpha} d^l_{\mu m}(\beta) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\gamma}$ 引入维格纳小 d 矩阵，其中 $d^l_{\mu m}(\beta) \in \mathbb{R}$。这些矩阵具有如下对称性：$d^l_{\mu m}(\beta) = d^l_{m\mu}(-\beta)$、$d^l_{\mu m}(\beta) = (-1)^{\mu-m} d^l_{m\mu}(\beta)$ 以及 $d^l_{\mu m}(\beta) = d^l_{-m,\ -\mu}(\beta)$；这些对称性还意味着 $d^l_{\mu m}(\beta) = (-1)^{\mu-m} d^l_{-\mu,\ -m}(\beta)$（Rose 1957）。等价地，$D^{l*}_{\mu m}(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{\mu-m} D^l_{-\mu,\ -m}(\alpha\beta\gamma)$ 以及 $D^{l*}_{\mu m}(\alpha\beta\gamma) = D^l{}_{m\mu}(-\gamma,-\beta,-\alpha)$，后者正是旋转变换的幺正性。

小 d 矩阵 $d^l_{\mu m}(\beta)$ 可用高斯超几何函数表示 ${}_2F_1$（Rose 1957，第 50–54 页）。聚焦于 $l=2$，我们写作

$$d^2_{\mu m}(\beta) = \left[\frac{(2-m)!(2+\mu)!)}{(2+m)!(2-\mu)!}\right]^{1/2} [(\mu-m)!]^{-1} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{4+m-\mu} \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{\mu-m} {}_2F_1(\mu-2,-m-2;\mu-m+1;-\tan^2\frac{\beta}{2}) \tag{C18}$$

这仅在 $\mu \geq m$ 时有效。如果 $m > \mu$，则可根据幺正性 $d^l_{\mu m}(\beta)$ $= d^l_{m\mu\ -\beta}$ 求得 $d^l_{\mu m}$ 的值。

C.2. *Recursion and Orthogonality Relations*

Wigner 矩阵的正交归一性为（Rose 1957）：

$$\sum_m D^{2^*}_{pm}(\alpha\beta 0) D^2_{rm}(\alpha\beta 0) = \delta_{pr} \in \mathbb{R} \tag{C19}$$

使用Varshalovich 等人(1988中的恒等式（4.8.17），我们写作

$$mD^2_{rm}(\alpha\beta 0) = r\cos\beta D^2_{rm}(\alpha\beta 0) + \sin\beta b^{(-)}_r D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \sin\beta b^{(+)}_r D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{C20}$$

由此我们还可以写出，

$$mD^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0) = (r-1)\cos\beta D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0) + \sin\beta b^{(-)}_{r-1} D^2_{r-2,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \sin\beta b^{(+)}_{r-1} D^2_{r,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{C21}$$

and

$$mD^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0) = (r+1)\cos\beta D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0) + \sin\beta b^{(-)}_{r+1} D^2_{r,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \sin\beta b^{(+)}_{r+1} D^2_{r+2,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{C22}$$

这意味着我们可以将 m 次第一恒等式写成

$$\begin{aligned}
m^2 D^2_{rm}(\alpha\beta 0) =& r\cos\beta m D^2_{rm}(\alpha\beta 0) + \sin\beta b^{(-)}_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} m D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0) + \sin\beta b^{(+)}_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} m D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0) \\
=& r^2\cos^2\beta D^2_{rm}(\alpha\beta 0) + r\cos\beta\sin\beta b^{(-)}_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0) + r\cos\beta\sin\beta b^{(+)}_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0) \\
&+ \sin\beta b^{(-)}_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\left[(r-1)\cos\beta D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0) + \sin\beta b^{(-)}_{r-1} D^2_{r-2,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \sin\beta b^{(+)}_{r-1} D^2_{r,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right] \\
&+ \sin\beta b^{(+)}_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left[(r+1)\cos\beta D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0) + \sin\beta b^{(-)}_{r+1} D^2_{r,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \sin\beta b^{(+)}_{r+1} D^2_{r+2,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right] \\
=& \left[r^2\cos^2\beta + \sin^2\beta b^{(-)}_r b^{(+)}_{r-1} + \sin^2\beta b^{(+)}_r b^{(-)}_{r+1}\right] D^2_{r,m}(\alpha\beta 0) \\
&+ \cos\beta\sin\beta\left[(2r-1)b^{(-)}_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0) + (2r+1)b^{(+)}_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0)\right] \\
&+ \sin^2\beta\left[b^{(-)}_{r-1} b^{(-)}_r \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha} D^2_{r-2,m}(\alpha\beta 0) + b^{(+)}_{r+1} b^{(+)}_r \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} D^2_{r+2,m}(\alpha\beta 0)\right]
\end{aligned} \tag{C23}$$

因此

$$\begin{aligned}
m^2 D^2_{rm}(\alpha\beta 0) =& \left[r^2\cos^2\beta + \tfrac{1}{2}(6-r^2)\sin^2\beta\right] D^2_{rm}(\alpha\beta 0) \\
&+ \cos\beta\sin\beta\left[(2r-1)b^{(-)}_r D^2_{r-1,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + (2r+1)b^{(+)}_r D^2_{r+1,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right] \\
&+ \sin^2\beta\left[b^{(-)}_r b^{(-)}_{r-1} D^2_{r-2,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha} + b^{(+)}_r b^{(+)}_{r+1} D^2_{r+2,m}(\alpha\beta 0)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right]
\end{aligned} \tag{C24}$$

结合正交条件，我们可以写成

$$\sum_m m D^{2^*}_{pm} D^2_{rm} = r\cos\beta\delta_{pr} + \sin\beta b^{(-)}_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\delta_{p,r-1} + \sin\beta b^{(+)}_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\delta_{p,r+1} \tag{C25}$$

and

$$\begin{aligned}
\sum_m m^2 D^{2^*}_{pm} D^2_{rm} =& \left[r^2\cos^2\beta + \tfrac{1}{2}(6-r^2)\sin^2\beta\right]\delta_{pr} \\
&+ \cos\beta\sin\beta\left[(2r-1)b^{(-)}_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\delta_{p,r-1} + (2r+1)b^{(+)}_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\delta_{p,r+1}\right] \\
&+ \sin^2\beta\left[b^{(-)}_r b^{(-)}_{r-1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}\delta_{p,r-2} + b^{(+)}_r b^{(+)}_{r+1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\delta_{p,r+2}\right]
\end{aligned} \tag{C26}$$

D. 前主序收缩的玩具模型

多方指数为 n 的多方体，其收缩光度为 $L_\star = -\frac{3}{5-n}\mathcal{G}M_\star^2/(2R_\star^2)\dot{R}_\star = 4\pi R_\star^2\sigma T^4_{\rm eff}$，等价地，

$$\frac{dR_\star}{dt} = -\left(\frac{5-n}{3}\right)\frac{8\pi\sigma T^4_{\rm eff}}{\mathcal{G}M_\star^2}R_\star^4 \tag{D27}$$

（例如，Hansen 等（1994））。假设有效温度沿林忠四郎轨迹保持不变，并取多方指数 $n = 1/(1-\gamma) = 3/2$，其中 $\gamma = 5/3$ 这对于完全对流天体而言是适用的，则方程D27的解为

$$R_\star(t) = R_{\star,0}\left[3\left(\frac{R_{\star,0}}{R_\odot}\right)^3\frac{t-t_0}{\tau_{\rm Hay}} + 1\right]^{-1/3} \quad \text{with} \quad \tau_{\rm Hay} \equiv \frac{1}{7}\tau_{\rm KH}\left(\frac{T_{\rm eff,0}}{T_{\rm eff,\odot}}\right)^{-4}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^2 \tag{D28}$$

假设 $T_{\rm eff} \approx 4400\,\mathrm{K}\,(M_\star/M_\odot)^{7/51}$，我们也可以写成 $\tau_{\rm Hay} = 0.423\tau_{\rm KH}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{74/51}$，如方程（89）所示。无需假设 $T_{\rm eff}$ =为常数，而采用质量-光度关系 $L_\star \propto M_\star^s T^m_{\rm eff}$，即可进行更一般的计算。对于 $M_\star \sim 1M_\odot$，$s = 4$和 $m = 2$是 Henyey 轨道的适当取值。在这种情况下，方程（D27）的解为

$$R_\star(t) = R_\odot\left[-\frac{t-t_{\rm min}}{\tau_{\rm Hen}} + \left(\frac{R_{\star,\rm min}}{R_\odot}\right)\right] \quad \text{with} \quad \tau_{\rm Hen} \equiv 1.2348(5-n)\tau_{\rm KH}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{-3.5172} \tag{D29}$$

其中 n 应取完全对流天体（$n = 3/2$）与具有明显辐射核心的天体（$n \approx 3$）对应取值之间的中间值；而 $t_{\rm min}$ 和 $R_{\star,\,\rm min}$ 是积分常数，此处分别取前主序恒星沿林忠四郎轨迹达到最小光度 $L_{\rm min}$ 时的时间和半径。我们可以直接由方程（D28）求出 $t_{\rm min}$

$$t_{\rm min} = \frac{\tau_{\rm Hay}}{3}\left(\frac{R_{\star,0}}{R_\odot}\right)^{-3}\left[\left(\frac{R_{\star,0}}{R_{\star,\rm min}}\right)^3 - 1\right] + t_0 \quad \text{with} \quad R_{\star,\rm min} = R_{\star,0}\left(\frac{L_{\rm min}}{L_{\star,0}}\right)^{1/2} \tag{D30}$$

并通过经验方法确定 $L_{\rm min}/L_\odot \approx 0.52(M_\star/M_\odot)^3$。同样，我们可以直接估算收缩时间 $t_{\rm contr}$ 以及辐射核心首次出现的时间 $t_{\rm rc}$：

$$t_{\rm contr} = \frac{\tau_{\rm Hay}}{3}\left(\frac{R_{\star,0}}{R_\odot}\right)^{-3}\left[\left(\frac{R_{\star,0}}{R_{\star,\rm final}}\right)^3 - 1\right] + t_0 \quad \text{and} \quad t_{\rm rc} = \frac{\tau_{\rm Hay}}{3}\left(\frac{R_{\star,0}}{R_\odot}\right)^{-3}\left[\left(\frac{R_{\star,0}}{R_{\rm rc}}\right)^3 - 1\right] + t_0 \tag{D31}$$

辐射核心首次出现的时间通过标准计算进行估算 Kippenhahn 等人 (2012)；在该计算中，我们求解以下条件 $\nabla_{\rm rad} > \nabla_{\rm ad}$，并假设核心处的不透明度遵循克拉默斯不透明度：

$$\nabla_{\rm rad,c} = \mathcal{F}_{\rm rad}\left(\frac{T_{\rm eff}}{900\ {\rm K}}\right)^{-1}\frac{Z(1+X)}{\mu^{7.5}}\left(\frac{L_\star}{L_\odot}\right)^{5/4}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{-5.5} > \nabla_{\rm ad,c} = \frac{2}{5} \tag{D32}$$

利用 Baraffe 等人 (2015) 的成分参数（$Z = 0.015$，$Y = 0.270$，$X = 0.715$），我们可以求得临界光度 $L_{\rm rc}$，高于该光度时辐射核心便可存在：

$$L_{\star,\rm rc} \equiv 1.62\mathcal{F}_{\rm rad}^{-4/5}\,L_\odot\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{22/5}\left(\frac{T_{\rm eff}}{4400\ {\rm K}}\right)^{4/5} \tag{D33}$$

据此可求得临界恒星半径 $R_{\star,\ rc}$ 假设 $L_{\star,\ \rm rc} = 4\pi\sigma R_{\star,\ \rm rc}^2 T_{\rm eff,\ 0}^4$ 因此

$$\frac{R_{\star,\rm rc}}{R_\odot} \approx 2.19\mathcal{F}_{\rm rad}^{-2/5}\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{11/5}\left(\frac{T_{\rm eff}}{4400\ {\rm K}}\right)^{-8/5} \approx 2.1\left(\frac{M_\star}{M_\odot}\right)^{1.38} \tag{D34}$$

其中在最后　　在这一步中，我们假设使用了 $\mathcal{F}_{\rm rad} \approx 1.12(M_\star/M_\odot)^{3/2}$ 和 $T_{\rm eff,\ 0} = 4400{\rm K}\,(M_\star/M_\odot)^{7/51}$　.