arXiv:2611.30856v1 [math.GN] 23 Nov 2026

Alexandroff 拟拓扑群中的类紧致性

Tayomara Borsich [a] 和 Pedro J. Chocano[a]

[a] 应用数学系，胡安·卡洛斯国王大学。电子邮箱：tayomara.gonzalez@urjc.es（T. Borsich），pedro.chocano（P.J. Chocano）

摘要

我们研究非紧 Alexandroff 拟拓扑群中的类紧致性和覆盖性质。我们根据与 Alexandroff 拓扑相关的序结构以及连通分支的数量刻画了若干性质。我们建立了 2-伪紧致性、可数 o-紧性、Baire 性质以及递增链的交性质之间的等价关系。我们还根据可数共尾子集的存在性，得到了 σ-局部紧性、 σ-紧性、Lindel¨of 性质和左 ω-预紧性的共同刻画。此外，我们通过连通分支的数量刻画了伪紧致性、 H-紧性、星紧致性、可数链条件以及弱 Lindel¨of 性质。最后，我们确定了所考察性质之间的进一步蕴含关系，并给出了一些例子和反例。

1 引言

近年来，Alexandroff 空间凭借其组合性质以及在解决广泛问题中的实用性，在数学的各个领域受到越来越多的关注。例如，在 [5], 有限拓扑空间中，有限拓扑空间构成了 Alexandroff 空间的一个特殊类别，人们利用它们发展出适用于 Conley 指标的理论，并将其应用于动力系统中的经典问题。另一个有趣的例子出现在形状理论中。形状理论是同伦论的推广，尤其适合研究局部性质较差的紧致度量空间。在 [10], 中，作者表明有限拓扑空间可用于描述紧致度量空间的形状范畴。这些只是文献中出现的众多 Alexandroff 空间应用的两个代表性例子；例如，参见 [3, 4, 8, 9, 11]。

本文聚焦于具有使乘法映射连续的 Alexandroff 拓扑的群，也就是 Alexandroff 拟拓扑群。我们对这类结构的兴趣源于 [12], ，在那里出现了一个赋有自然 Alexandroff

2020 年数学主题分类：54H11、22A15、06A11。

关键词：拟拓扑群、Alexandroff 空间、偏序集、拓扑群。本研究部分得到西班牙科学、创新与大学部项目 PID2024-156663NB-I00 以及胡安 · 卡洛斯国王大学 2025/SOLCON-159637 项目的资助

拓扑的群。文献 [6, 7] 证明，每个 Alexandroff 拓扑群都是平凡的。然而，若允许求逆映射不连续，则会产生非平凡的 Alexandroff 拟拓扑群。不过，每个紧 Alexandroff 拟拓扑群都是平凡的。因此，施加紧致性会使群结构与 Alexandroff 拓扑之间的相互作用受到过度限制，最终只得到平凡的例子。为此，文献 [6], 的作者将研究范围限定在非紧 Alexandroff 拟拓扑群上。在该文中，他们通过构造若干例子，证明了这类群的存在，并探究了它们的一些基本性质。

由于紧致性在 Alexandroff 拟拓扑群中是一项限制性很强的条件，本文对这类群中的类紧致性及其他相关概念进行了系统研究。我们刻画了其中若干性质，并确定了它们之间的蕴含关系与等价关系；对于相应蕴含关系不成立的情形，则给出反例。本文所讨论的部分定义受到 [1], 的启发；该文研究了一般拟拓扑群的若干性质及其相互关系。为帮助读者梳理全文讨论的大量概念及其关系，我们在引言中用蕴含图总结主要结果。尽管读者可能尚不熟悉这些图中出现的某些概念，但相关定义均会在对应章节中重述。

第 3 节安排如下。首先，我们分析并刻画 2-伪紧致性、可数 o-紧致性以及 Baire 性质。具体而言，我们根据与递增链相关联的极小闭集的交集，得到了这些性质的简明刻画。更准确地说，定理 3.9 给出了具有有限个连通分支的非紧 Alexandroff 拟拓扑群满足以下等价条件：

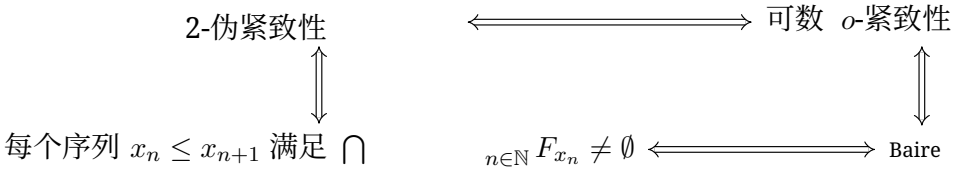

图 1：2-伪紧致性、可数 o-紧致性与 Baire 性质之间的等价性。

在第二部分中，我们建立了一般拓扑学中若干经典覆盖性质（例如 Lindel¨of 性质）与拟拓扑群特有概念（例如左 ω-预紧性）之间的若干等价关系。特别地，我们借助可数共尾子集的存在性，得到了本部分所考虑的全部性质的一个简单的共同刻画。这些结果总结于图 2。未标注的等价关系可由所指出的结果组合得到。

本节最后一部分考察图 1 和图 2 所示的两个类之间的关系。更确切地说，我们证明，具有有限个连通分支的非紧 Alexandroff 半拓扑群，不可能同时满足第一个图示（见图 1）中的等价性质和第二个图示中的性质

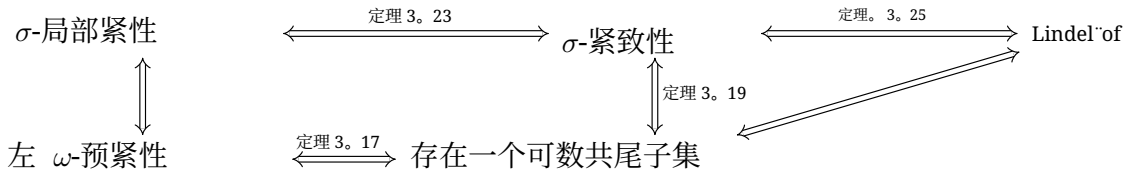

图 2： σ-紧致性、 σ-局部紧性、Lindel¨of 性与左 ω-预紧性之间的等价性。

（见图 2）。特别是，在这种情形下，2-伪紧致性与 σ-紧性互不相容。然而，这两个类并未涵盖所有情况，因为我们给出了一个既不属于这两个类的连通非紧 Alexandroff 半拓扑群的例子。

第 4 节致力于根据连通分支的数量对非紧 Alexandroff 拟拓扑群进行分类。特别地，我们通过这一基数不变量刻画了若干经典性质。按照惯例，我们用 $\pi_0(X)$ 表示拓扑空间 X的连通分支集合，因此 $|\pi_0(X)|$ 表示其连通分支的数量。在第一部分中，我们研究伪紧致性、H-紧致性和星紧致性等性质。所得结果总结于图 3 的示意图中，其中未标注的等价关系可通过结合所示结果得到：

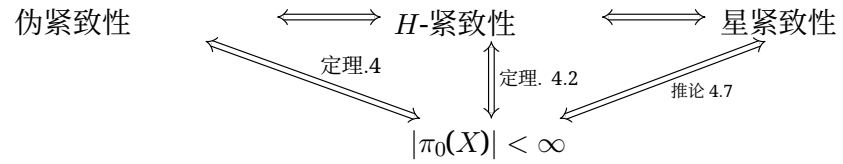

图 3：伪紧致性、 H-紧致性与星紧致性之间的等价关系。

在第二部分，我们研究可数链条件和弱林德洛夫性质。特别地，我们证明这两个性质都等价于具有可数多个连通分支。这些等价关系总结在图 4 的示意图中。

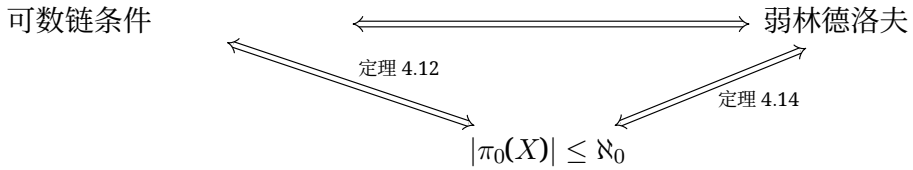

图 4：可数链条件与弱林德洛夫性质之间的等价性。

请注意，在我们的假设下，伪紧致性（以及图 3 中示意图所列任一等价性质）蕴含弱 Lindel¨of 性质，进而蕴含图 4 中所列的所有等价性质。

我们在图 5 的示意图中总结了第 6 节和第 7 节确立的一些其他关系。特别是，第 6 节着重讨论我们框架下的覆盖维数概念。为简便起见，我们从上述每个等价类中选取一个代表。

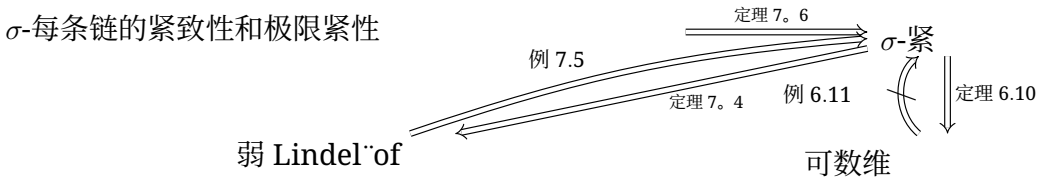

图 5：涉及 σ-紧致性的蕴含关系。

在第 5 节中，我们讨论若干在非紧 Alexandroff 拟拓扑群中不可能成立的经典性质。更具体地说，我们证明这类群不可能是 ω-有界的、全可数紧的、强局部紧的、序列弱紧的、预紧的或亚紧的。

我们以简要介绍本文的结构作为本引言的结尾。第 2 节专门介绍预备知识。我们回顾有关 Alexandroff 空间和拟拓扑群的基本概念与结果，以及文献 [6] 中确立的 Alexandroff 拟拓扑群的一些基本性质，这些内容将在全文中使用。后续各节包含上方图示所总结的结果。

2 预备知识

我们回顾 Alexandroff 拓扑空间理论中的主要定义，并说明后续各节将用到的记号。关于该理论的详细介绍，请参阅 [2, 13]。

定义 2.1。 Alexandroff空间 是指任意多个开集的交集仍为开集的拓扑空间。

给定 Alexandroff 空间 X 和 $x \in X$，将包含点 x的所有开（闭）集的交集定义为 U_x（分别为 F_x）。注意， U_x （分别为 F_x）是包含 x的最小开（分别为闭）集。考虑由 $x \leq y$ 定义在 X 上的关系 $\leq$ ，当且仅当 $U_x \subseteq U_y$时成立。容易验证，带有该关系的 X 是一个预序集。此外，若 X 是一个 T_0 空间，则 $(X, \leq)$ 是一个偏序集（简称 poset）。

给定一个预序集 $(X, \leq)$， X 的上集（分别为下集）构成 X上的 Alexandroff 拓扑的一组基。特别地，若 $(X, \leq)$ 是一个偏序集，则拓扑空间X 是 T_0。

这两种构造互为逆构造，并且我们还知道，两个 Alexandroff 空间之间的任意映射 $f: X \to Y$ 都是连续的，当且仅当 $f: (X, \leq_X) \to (Y, \leq_Y)$ 保序。由此，

定理2.2。 预序集（分别为偏序集）的范畴与 *Alexandroff* 拓扑空间（分别为 T_0 空间）的范畴同构。

从现在起，我们将不再区分 Alexandroff 空间或预序集，并结合这两种理论中的记号。例如， $U_x = \{y \in X : \ y \leq x\}$ 和$F_x = \{y \in X : \ y \geq x\}$。特别地，上集对应于闭集，而下集对应于开集。

给定一个 Alexandroff空间 X， X 的宽度 记作 width(X)，定义为 X 中极大反链的基数。我们通过证明一个关于紧致性的简单结果来结束本节这一部分。

定理 2.3。 设 X 是一个 *Alexandroff*空间。那么， X 是紧的，当且仅当 X 的极大点集是有限的。

证明。 设 X 是一个紧空间。反设 X 的极大点集是无限的。记该集合为 M 。于是

$$\mathcal{U} = \{U_x : x \in M\}$$

是 X 的一个开覆盖。由于不同的极大点互不属于对方的最小邻域， $\mathcal{U}$ 的任何有限子族都不能覆盖 X。这与 X 的紧致性矛盾。反过来，设 X 的极大点集有限，并设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖。对每个极大点 x，选取 $V_x \in \mathcal{U}$ 使得 $x \in V_x$。由于 x 是极大的，我们有 $U_x \subseteq V_x$。令 M 为 X 的极大点集。于是

$$\mathcal{V} = \{V_x : x \in M\}$$

是一个有限族。此外，

$$X = \bigcup_{x \in M} U_x \subseteq \bigcup_{x \in M} V_x.$$

因此， $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$的有限子覆盖，从而 X 是紧的。 □

推论 2.4。 设 X 是一个*Alexandroff*空间且 $x \in X$。则 U_x 是紧的。特别地，每个*Alexandroff*空间都是局部紧的。

定义 2.5。 设 G是一个赋予拓扑的群。若 G 满足以下条件，则称其为拓扑群：

1. 乘法映射 m: $G \times G \to G$ 是连续的，并且
2. 求逆映射 Inv: $G \to G$ 是连续的。

如果只要求第一个条件，我们称 G 为 半拓扑群 。

在 [6], 中，作者研究了赋予 Alexandroff 拓扑的拓扑群。该论文的主要结果之一表明，在满足 Alexandroff空间这一假设的情况下，只能得到平凡的拓扑群。相比之下，在非紧 Alexandroff 拟拓扑群中不存在平凡例子。因此，我们将研究限制在非紧情形。最后，我们通过回顾 [6] 中的一些基本术语和结果来结束本节，这些内容将在本文余下部分中贯穿使用。

命题 2.6. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。则以下性质成立：

1. X 没有极大点。*2.* 如果 U 是开（分别为闭）的，那么 U^{-1} 是闭（分别为开）的。*3.* 对于每个 $x \in X$, $U_x^{-1} = F_{x^{-1}}$。*4.* 每个连续映射 $f\colon X \to \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑，在 X 的每个连通分支上都是常值的。

定义 2.7。 如果拓扑空间 X 中任意两个非空开集（分别地，闭集）的交集都非空，则称其为超连通 （分别地，超连通）。等价地， X 中不存在两个不相交的非空开子集（分别地，闭子集）。

定理 2.8。 *[6,* 定理 *4.13]*每个连通非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群 X 都是超连通且超连通的。

定理 *2.9*。 *</style}*设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群，则 X 的每个开子集都是稠密的，当且仅当 X 是连通的。

证明。 我们用反证法。假设 X 的每个非空开子集都是稠密的，且 X 不连通。那么 X 存在一个分离 $X = U \cup V$，其中 U 和 V是 X中不相交的非空开子集。由于 U 稠密，且 V 非空且开，因此 $U \cap V \neq \emptyset$，矛盾。

假设 X 是连通的。根据定理 2.8， X 是超连通的，因此每个非空开集在 X 中都是稠密的。

□

推论 2.10。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则每个与 X 的每个连通分支都有交集的开集都是稠密的。

证明。 根据定理 2.9，证明是直接的。 □

下面的结果汇总了在这一背景下连通性的若干刻画。

定理 2.11。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则以下性质等价：

1. X 是连通的。*2.* X 是道路连通的。*3.* X 的每个开子集都是稠密的。*4.* X 是超连通的。*5.* X 是超连通的。*6.* X 是有向集。*7.* X 是余有向集。

回顾一下，有向（分别地，反向）集 X 是一个预序集，满足：对于任意 x， $y \in X$，存在 $z \in X$ 使得 x， $y \leq z$（分别地， x， $y \geq z$）。

注 2.12。 给定一个 Alexandroff 拟拓扑群 X 和 $x \in X$，可以简单地推得 U_x 是连通的、道路连通的、超连通的和超连通的。因此， X 是局部连通的、道路连通的、超连通的和超连通的。

作为本节的结尾，为了完整起见，我们研究这一背景下尚未讨论的经典连通性之一。

定义 2.13。 如果拓扑空间 X 中的任意两点都可以由一条弧连接，则称其为弧连通（或弧连通的）。回顾一下，连接 $x, y \in X$ 的弧是一 个连续映射 $f\colon [0,1] \to X$，它是到其像上的同胚，并满足 $f(0) = x$以及 $f(1) = y$。

命题 2.14。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则 X 不是弧连通的。

证明。 由 [7], 可立即得到：当 Y 是一个 T_1-空间时，每个连续映射 $f\colon X \to Y$ 都是常值映射。由此可推出所需结论。 □

3 Cla按共尾子集和递增序列分类

本节将根据类紧致性质，对连通的非紧 Alexandroff 拟拓扑群进行首次分类。特别地，我们研究 2-伪紧致性和 σ-紧性的概念，并证明它们在这一背景下互不相容。此外，我们还为这两个性质分别给出了若干等价条件。

3.1 2-伪紧性、可数 o-紧致性与 Baire 性质

在本小节中，我们刻画 o-紧致性、2-伪紧性和 Baire 性质。特别地，我们证明，在具有有限个连通分支的非紧 Alexandroff 拟拓扑群理论中，这些概念彼此等价。我们先回顾这些概念。

定义 3.1。 若拟拓扑群 X 满足：对于 X的每个非空开子集递减序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，都有

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n^{-1}} \neq \emptyset.$$

定义 3.2。 若拓扑空间 X 中的每个非空开集递减序列$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的交集 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$非空，则称该空间为可数 o-紧致。

定义 3.3。 若每个稠密开集递减序列的交集都是稠密集，则称拓扑空间 X 为$Baire$空间。

在转向非紧 Alexandroff 拟拓扑群的情形之前，我们先回顾并证明上述定义对于具有有限个连通分支的拟拓扑群所具有的一些性质。

定理 3.4。 设 X 是一个具有有限个连通分支的半拓扑群。那么

1. X 是2-伪紧，当且仅当每个连通分支都是2-伪紧。

2. X 是可数 o-紧的，当且仅当每个连通分支都是可数 o-紧的。*3.* X 是 *Baire* 的，当且仅当每个连通分支都是 *Baire* 的。

证明。1. 如果 X 是 2-伪紧的，那么结论显然成立。假设 X 的每个连通分支都是 2-伪紧的。设 X中有一个由非空开子集组成的递减序列。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{C}_n = \{C : C \text{ is a connected component of } X \text{ and } U_n \cap C \neq \emptyset\}.$$

每个 $\mathcal{C}_n$ 都是有限且非空的。此外，由于 $U_{n+1} \subseteq U_n$，我们有 $\mathcal{C}_{n+1} \subseteq \mathcal{C}_n$。因此，递减序列 $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 最终稳定，从而 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n \neq \emptyset$。取一个连通分支 $C \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$。那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$V_n = U_n \cap C$ 都是 C 中的非空开子集，并且序列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是递减的。由于 C 是 2-伪紧的，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n^{-1}} \neq \emptyset.$$

由于 $V_n \subseteq U_n$，我们对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $V_n^{-1} \subseteq U_n^{-1}$。因此，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n^{-1}} \neq \emptyset,$$

因此 X 是 2-伪紧的。

2. 关于可数 o-紧致性的相应结果可由类似的论证得出，因此略去证明。

3. 由于 X 有有限个连通分支，它们都是开集。因此， X 是其连通分支的拓扑和。由贝尔空间的每个开子空间都是贝尔空间，且贝尔空间的拓扑和仍是贝尔空间这一事实，即可得到该结果。

□

现在，我们得到一些有用的性质，这些性质将在后续的刻画中用到。

定理 3.5. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群，且 x、$y \in X$。那么， $x \leq y$ 当且仅当 $x^{-1} \geq y^{-1}$。

证明。 假设 $x \leq y$。由于乘法映射是连续的， $e \leq x^{-1}y$，其中 e 表示单位元，因此 $y^{-1} \leq x^{-1}$。另一个蕴含关系类似可得。

□

推论 3.6。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群，且 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$， $x_n \leq x_{n+1}$ 当且仅当，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$x_n^{-1} \geq x_{n+1}^{-1}$。

推论 3.7. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群，并且 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$。那么 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n^{-1}} \neq \emptyset$ 当且仅当 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x_n} \neq \emptyset$。

证明. 假设 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n^{-1}} \neq \emptyset$。若 $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n^{-1}}$，则对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $y \geq x_n^{-1}$。根据定理 3.5， $x_n \geq y^{-1}$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$都成立，由此可得 $y^{-1} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x_n}$。另一个方向的证明类似。

□

引理 3.8. 设 X 是一个连通非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。若 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$（分别地， $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$）是非空开（分别地，闭）集的递减序列，则存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x_n \in U_n$ 和 $x_n \geq x_{n+1}$（分别地， $x_n \in F_n$ 和 $x_n \leq x_{n+1}$）。

证明。我们递归地构造序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$。假设 x_n 已经构造完成。选取 $y_{n+1} \in U_{n+1}$（分别地， $y_{n+1} \in F_{n+1}$）。根据定理 2.11， X 是超连通的（分别地，超连通的），因此存在 $x_{n+1} \in X$，使得 $x_{n+1} \leq y_{n+1}$ 和$x_{n+1} \leq x_n$（分别地， $x_{n+1} \geq y_{n+1}$ 和 $x_{n+1} \geq x_n$）。由于 U_{n+1} 是开集（分别地， F_{n+1} 是闭集），因而是下集（分别地，上集），所以 $x_{n+1} \in U_{n+1}$（分别地， $x_{n+1} \in F_{n+1}$）。

□

定理 3.9。设 X 是一个具有有限个连通分支的非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则以下性质等价:

1. X 是2-伪紧的。
2. X 是可数 o-紧的。
3. X 是 *Baire* 的。
4. 对每个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$，使得 $x_{n+1} \leq x_n$（分别为 $x_{n+1} \geq x_n$），其中 $n \in \mathbb{N}$、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n^{-1}} \neq \emptyset$（分别为 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n} \neq \emptyset$）。
5. 对每个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$，使得 $x_{n+1} \leq x_n$（分别为 $x_{n+1} \geq x_n$），其中 $n \in \mathbb{N}$、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x_n} \neq \emptyset$（分别为 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x_n^{-1}} \neq \emptyset$）。

证明。只需证明连通情形下的结论，因为一般情形可由定理 3.4 立即推出。此后，我们假设 X 是连通的。

4 与 5 等价可由推论 3.7 立即得到。由引理 3.8 可知，5 推出 2。此外，2 与 3 等价可直接由定理 2.11 得到。

我们证明 2 推出 1。根据假设， X 中每个由非空开集组成的递减序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的交集 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 均非空。因此，存在 $t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$都有$t \in U_n$。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $t^{-1} \in U_n^{-1}$。根据命题 2.6， U_n^{-1}是闭集，并且我们有 $U_n^{-1} = U_n^{-1}$。因此， $t^{-1} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n^{-1}$。

最后，我们证明 1 与 4 等价。假设 X 是 2-伪紧的。取 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $x_{n+1} \leq x_n$。因此， $\{U_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X的非空开子集递减序列。根据命题 2.6， $U_{x_n}^{-1} = F_{x_n^{-1}}$。由于 X 是 2-伪紧的，我们推得 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n^{-1}} \neq \emptyset$。

现在证明另一个方向。假设对于每个满足 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 且对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n^{-1}} \neq \emptyset$的子集$x_{n+1} \leq x_n$，结论均成立。设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是非空开集的递减序列。根据引理 3.8，存在序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $x_n \in U_n$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $x_{n+1} \leq x_n$。此外，对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $U_{x_n} \subseteq U_n$。由命题 2.6， $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n^{-1}} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n^{-1}$。

□

注 3.10。 X 具有有限个连通分支这一假设是必要的。事实上，设 Y是一个连通的非紧 2-伪紧 Alexandroff 拟拓扑群，并令 $\mathbb{Z}$赋予离散拓扑。则 $Y\times\mathbb{Z}$是一个非紧 Alexandroff 拟拓扑群，其连通分支为集合 $Y\times\{m\}$、 $m\in\mathbb{Z}$。特别地，它具有无限多个连通分支，且每个连通分支都是 2-伪紧的。然而，非空开集的序列 $U_n=Y\times[n,\infty)$、 $n\in\mathbb{N}$是递减的，并满足

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{U_n^{-1}}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}Y\times(-\infty,-n]=\emptyset.$$

因此， $Y\times\mathbb{Z}$ 不是 2-伪紧的。同样，我们也可以使用相同的序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 来证明， $Y\times\mathbb{Z}$ 既非可数 o-紧的，也不是 Baire。

推论 3.11. 设 X 是一个具有有限个连通分支的非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。若 X 不是2-伪紧的，则存在一个非空真闭集（分别为开集）的递增序列$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ （分别为 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$），满足$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ （分别为 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$）。

证明. 根据定理 3.9，存在一个递减序列 $\{U_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中对每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $x_n\geq x_{n+1}$，且满足 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_{x_n}=\emptyset$。考虑其补集可得

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X\setminus U_{x_n})=X.$$

令 F_n 表示 $X\setminus U_{x_n}$。那么， $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由非空真闭子集构成的递增序列。证明的其余部分类似可得。 □

现在我们给出两个非平凡例子。第一个不是 2-伪紧的，而第二个是 2-伪紧的。

例 3.12. 考虑带有通常序的整数群 $(\mathbb{Z},+)$。这是一个非紧 Alexandroff 拟拓扑群。考虑 $\{-n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Z}$。显然， $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,-n]=\emptyset$。由定理 3.9 可推得， $\mathbb{Z}$ 不是 2-伪紧的。

例 3.13. 令 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 表示所有映射 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$构成的集合。在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上定义关系 $\leq$ 如下:

$$f\leq g\quad\Longleftrightarrow\quad\text{there exists } N\in\mathbb{N}\text{ such that } f(n)\leq g(n)\text{ for every } n\geq N.$$

不难验证，$(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\leq)$ 是一个预序集。在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上赋予逐点加法，其定义为

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n)$$

对每个 $f,g\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$和 $n\in\mathbb{N}$。则 $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},+)$ 是一个阿贝尔群，并且加法关于乘积预序是单调的。更精确地说，若 $f\leq f'$ 和 $g\leq g'$，则

$$f+g\leq f'+g'.$$

因此， $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 是一个非紧 Alexandroff 半拓扑群，且不是 T_0。我们将利用定理 3.9 所给出的刻画来证明 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 是 2-伪紧的。考虑点的序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $f_n \geq f_{n+1}$。定义 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ 为

$$g(n) = \min\{f_1(n), \ldots, f_n(n)\} - 1.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和任意 $n \geq k$，我们有

$$g(n) = \min\{f_1(n), \ldots, f_n(n)\} - 1 < f_k(n).$$

因此，对于任意 $k \in \mathbb{N}$， $g < f_k$。于是，对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $g \in U_{f_n}$，由此得出 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 是 2-伪紧的。

注 3.14. 例 3.13 也可以在非紧 T_0 亚历山德罗夫半拓扑群的背景下表述。事实上，将 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 中最终相等的两个元素视为相同，或者等价地，定义

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f \leq g \text{ and } g \leq f.$$

$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的加法在商集 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\sim$ 上诱导出良定义的群运算，且诱导出的偏序与该运算相容。此外，例 3.13 中的论证表明，商集中的每个序列都有一个严格下界，由此可知 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\sim$ 是 2-伪紧的。

3.2 左 ω-预紧性、 σ-紧性、 σ-局部紧性与林德洛夫性

我们重新回顾本小节的主要定义，然后给出刻画。

定义 3.15。若对单位元的每个邻域 U，都存在 G 的一个可数子集 C 使得 $CU = G$，则半拓扑群 G 称为左 ω- 预紧。

引理 3.16。设 X 为一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则，当且仅当存在一个集合 $C \subseteq X$ 使得 $X = CU_e$时， X 是左ω-预紧的，其中 e表示 X的单位元。

证明。由定义 3.15 以及每个<style id='?'> 包含单位元 e 的开集 U 都满足 $U_e \subseteq U$这一事实，结论立即可得。 □

回顾一下，对于任意预序集 X，共尾子集 $C \subseteq X$ 是满足以下条件的集合：对每个 $x \in X$，都存在 $c_x \in C$ 使得 $x \leq c_x$。

定理 3.17。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。当且仅当 X 中存在可数共尾子集时， X 是左 ω- 预紧的。

证明。设 e 表示 X 的单位元。若 C 是 X 中的可数共尾子集，则对于每个 $x \in X$，存在 $c_x \in C$ 使得 $x \leq c_x$。这表明 $c_x^{-1}x \leq e$，即 $c_x^{-1}x \in U_e$。因此， $x = c_x c_x^{-1} x \in CU_e$，从而我们得到 $CU_e = X$。最后，由引理 3.16 可得所需结果。

现在假设 X 是左 ω-预紧的。那么，根据引理 3.16，存在一个可数子集 C，使得 $CU_e = X$。下面验证 C 是 X的共尾子集。若 $x \in X$，则

存在 $c_x \in C$ 和 $z \in U_e$，使得 $x = c_x z$，或者等价地，$xc_x^{-1} = z$。由于 $z \in U_e$，我们有 $xc_x^{-1} \leq e$。由乘法映射的连续性可得 $x \leq c_x$。这证明了 C 是 X的共尾子集。

□

定义 3.18。若拓扑空间 X 是可数个紧集的并，则称其为 σ-紧 。

定理 3.19。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则 X 是 σ-紧的，当且仅当 X中存在一个可数共尾子集。

证明。假设 X 是 σ-紧的。则 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$，其中 C_n 对每个$n \in \mathbb{N}$都是紧的。由定理 2.3，C_n 有有限个极大点。令 M_n 表示 C_n的极大点集。则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ 是 X中的一个可数共尾子集。

若 X中存在一个可数共尾子集 M，则 $X = \bigcup_{x\in M} U_x$。由推论 2.4，U_x 是紧的，由此我们得出 X 是 σ-紧的。

□

推论 3.20。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。若 X 是可数的，则 X 是 σ-紧的。

例 3.21。考虑例 3.12 中的半拓扑群 $\mathbb{Z}$。由推论 3.20，$\mathbb{Z}$是 σ-紧的。

定义 3.22。称拓扑空间 X 为 σ-局部紧，如果它是 σ-紧的且局部紧。

定理 3.23。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则 X 是 σ-局部紧的，当且仅当 X 是 σ-紧的。

证明。这是推论 2.4 的直接推论。 □

定义 3.24。若每个开覆盖都有一个可数子覆盖，则称拓扑空间 X 为 林德尔¨夫空间。

定理 3.25。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。当且仅当 X 是 *Lindel¨of* 时，X 是 σ-紧的。

证明。设 X 是 σ-紧的。根据定理 3.19，X 具有一个可数共尾子集 M。设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖。对于每个点 $x \in M$，至少存在一个包含 x 的开集 $V_x \in \mathcal{U}$。考虑 $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x\in M}$。这是一个可数的子覆盖，正如所要求的。

现在，设 X 是 Lindel¨of 的。于是，$\mathcal{U}$ 的每个开覆盖 X 都包含一个可数子覆盖 $\mathcal{V}$。这表明，开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in X}$ 包含一个可数子覆盖，即 $\mathcal{V} = \{U_x\}_{x\in M}$，其中 M 是 X 的一个可数子集。根据覆盖和 U_x 的定义，我们可以得出，M 是 X 的一个可数共尾子集。因此，根据定理 3.19，X 是 σ-紧的。

□

结合定理 3.17、3.19、3.23 和 3.25，我们得到以下刻画：

定理 3.26。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。则以下性质等价：

1. X 是 σ-紧的。*2.* X 是 σ-局部紧的。*3.* X 是 *Lindel¨of* 的。*4.* X 是左 ω-预紧的。*5.* X 有一个可数共尾子集。

3.3 主要结果

本小节给出本节的主要结果，表明对于连通非紧 Alexandroff 拟拓扑群，2-伪紧性与 σ-紧性互不相容。

定理 3.27. 设 X 是一个连通非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么，X 不可能同时是2-伪紧的和 σ-紧的。

证明.假设 X 是 2-伪紧的。由定理 3.9，对于每个满足 $x_n \leq x_{n+1}$的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$，都有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n} \neq \emptyset$。反设 X 是 σ-紧的。由定理 3.19， X 含有一个可数共尾子集 $C = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。我们递归地构造一个递增序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $x_n \geq c_n$。首先，令 $x_1 = c_1$。假设已知 x_n。由定理 2.11， X 是超连通的。因此，存在 z_n 使得 $x_n, c_{n+1} \leq z_n$。此外， X 是非紧且连通的，因此， X 没有极大点（见命题 2.6），并且存在 x_{n+1} 使得 $z_n < x_{n+1}$。于是， $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $x_n < x_{n+1}$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$还有 $c_n \leq x_n$。由假设， $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n} \neq \emptyset$。令 $t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_n}$。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $t \geq x_n$。另一方面， C 是共尾的，这意味着存在 $c_m \in C$ 使得 $c_m \geq t$。然而，

$$c_m \leq x_m < x_{m+1} \leq t$$

因此 $c_m < t$，这与 $t \leq c_m$ 矛盾。因此， X 不能同时是 2-伪紧的和 σ-紧的。

□

推论 3.28. 设 X 是一个具有有限个连通分支的非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么， X 不能同时是2-伪紧的和 σ-紧的。

证明. 假设 X 是 2-伪紧的。由定理 3.4， X 的每个连通分支都是 2-伪紧的。由定理 3.27，每个连通分支都不是 σ-紧的。另一方面， X 是 σ-紧的，当且仅当每个连通分支都是 σ-紧的。如果我们假设 X 也是 σ-紧的，便会得到矛盾。

□

尽管前述定理表明，2-伪紧致性与 σ-紧性互不相容，但下面的例子表明二者并不构成二分。

例 3.29。 令 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 为从自然数集合 $\mathbb{N}$ 到实数集合的映射所构成的集合。规定

$$f \leq g \quad \text{if and only if} \quad f(n) \leq g(n) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N},$$

其中 f, $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$。该关系在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$上定义了一个偏序。显然, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是一个阿贝尔群，其运算定义为 $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$。此外，该群运算是连续的，并使 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 成为一个非紧的 T_0 Alexandroff 拟拓扑群。我们验证 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是超连通的。对于任意一对点 f 和 g，我们可以考虑由 $h(n) = \max\{f(n), g(n)\}$定义的$h$，它满足 f, $g \leq h$, 即 X是一个有向集。由定理 2.11 可知, X 是超连通的。假设存在一个可数共尾子集 $C = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。定义 $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 为

$$g(n) = f_n(n) + 1.$$

显然，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $g(n) > f_n(n)$，这意味着对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $g \not\leq f_n$。因此，根据定理 3.19, X 不是 σ-紧的。

现在考虑如下定义的序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$f_n(m) = n \text{ for every } m \in \mathbb{N}.$$

显然, $f_n < f_{n+1}$。此外, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{f_n} = \emptyset$。若存在 $h \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{f_n}$，则对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$h(m) \geq f_n(m) = n$，这是不可能的。根据定理 3.9, X 不是 2-伪紧的。

4 按连通分支数分类

4.1 H-紧致性、伪紧致性与星紧致性

我们根据连通分支的数量，对非紧 Alexandroff 拟拓扑群中的 H-紧致性、伪紧致性和星紧致性进行刻画。

定义 4.1。若拓扑空间 X 满足：对于任意开覆盖 $\mathcal{U}$, X 中都存在一个有限子族 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$，使得 $X = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$，则称 X 为 H-紧。

定理 4.2。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。当且仅当 X 有有限个连通分支时, X 是 H- 紧的。

证明。假设 X有有限个连通分支: $X_1, \ldots, X_n$。给定 X的一个开覆盖 $\mathcal{U}$，对每个 X_i，取一个元素 $U_i \in \mathcal{U}$，使得 $X_i \cap U_i \neq \emptyset$。令$\mathcal{V} = \{U_i\}_{i=1,\ldots,n}$。由定理 2.9, $X_i \cap U_i$在 X_i中稠密。因此, $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$。

假设 X 是 H-紧的。考虑开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in X}$。那么存在有限集 $M \subset X$，使得 $X = \bigcup_{x\in M} U_x$。显然，每个 $x \in M$ 只属于一个连通分支。此外，由定理 2.11, U_x 给出一个连通分支。由于$X = \bigcup_{x\in M} U_x$，连通分支至多有 $|M|$ 个。 □

定义 4.3。如果定义在拓扑空间 X 上的每个实值连续函数都有界，则称 X 为伪紧。

定理 4.4。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。当且仅当 X 有有限个连通分支时, X 才是伪紧的。

证明。根据命题 2.6，每个连续映射 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 X的连通分支上都是常值映射。由此，我们得出所需结论。 □

定义 4.5。设 X 是一个拓扑空间， $\mathcal{U}$ 是 X的一个子集族。对于每个 $A \subseteq X$， A 相对于 $\mathcal{U}$ 的星 定义为

$$\mathrm{St}(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}.$$

我们称 X 是星紧的，如果对于 X的任意开覆盖 $\mathcal{U}$ ，都存在一个有限子集$F \subseteq X$ 使得

$$\mathrm{St}(F,\mathcal{U}) = X.$$

定理 4.6。设 X 是一个连通非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群，且设$x \in X$。若 $\mathcal{U}$是一个开覆盖，则 $\mathrm{St}(\{x\},\mathcal{U}) = X.$。特别地， X 是星紧的。

证明。由定理 2.11， X 是超连通的。因此，对每个 $y \in X$，都存在z_y使得 $z_y \geq x$， y。此外， $\mathcal{U}$是一个开覆盖，因此存在 $U \in \mathcal{U}$使得 $z_y \in U$。由此可得 $x \in U$，因为 U 是一个下集。由此，我们推出所需结论。 □

推论 4.7。设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么， X 是星紧的，当且仅当 X 有有限个连通分支。

结合定理 4.2、定理 4.4 和推论 4.7，我们得到以下刻画。

定理 4.8. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。则以下条件等价:

1. X 是伪紧的。
2. X 是 H-紧的。
3. X 是星紧的。
4. X 有有限个连通分支。

4.2 极限紧性、弱 Lindel¨of 与可数链条件

与其他小节一样，我们先回顾所需的定义，然后给出相应的刻画。

定义 4.9. 如果拓扑空间 X 的每个无限子集X 都有一个属于 X的极限点，则称其为极限紧。如果包含点 p的每个开集都包含集合 A中至少一个不同于 p的点，则称点 p 是集合 A 的极限点。

定理 4.10. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么， X 是极限紧的，当且仅当宽度(X) $< \infty$。

证明. 假设 X 是极限紧的。我们用反证法，假设 width(X) $=\infty$。于是，可以考虑一个反链 A ，使得 $|A| = \infty$。对于每个 $a \in A$，都有$U_a \cap A = \{a\}$；否则便会与 A 是反链这一事实矛盾。因此，A在 X中没有极限点。

假设 width(X) $< \infty$。这意味着不存在包含无限多个点的反链。因此，如果 A 是一个无限子集，那么存在 a， $b \in A$ 使得 $a < b$。这意味着 b 是一个极限点。

□

定义 4.11。 若拓扑空间 X 的每个由两两不交的开子集组成的族都是可数的，则称该空间满足可数链条件 X 。

定理 4.12. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么， X 满足可数链条件，当且仅当 X 有可数个连通分支。

证明。 根据定理 2.11，每个连通分支都是一个超连通拓扑空间。若 $\mathcal{U}$ 是一族两两不相交的开子集，那么其中每个成员都只属于 X 的一个连通分支。据此，我们可以得出所需结论。 □

定义 4.13. 若拓扑空间 X 的弱 *Lindel¨*夫 数为 $\aleph_0$，则称其为弱 *Lindel¨*夫 空间；也就是说，X 的每个开覆盖都包含一个可数子族，其并集在 X 中稠密。

定理 4.14. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么， X 是弱 *Lindel¨*夫空间，当且仅当 X 有可数个连通分支。

证明。 连通非紧 Alexandroff 半拓扑群的每个开子集都是稠密的（见定理 2.11）。由此可以很容易地推出该结论。 □

结合定理 4.10、定理 4.12 和定理 4.14，我们得出以下结果：

定理 4.15。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。若 X 是极限紧的，则 X 是弱 *Lindel¨of*，并满足可数链条件。

证明。 我们采用反证法。假设 X 不是弱 Lindel¨of，或不满足可数链条件。那么 X 有不可数个连通分支 X_i ，且 $i \in I$（见定理 4.12 和定理 4.14）。对每个连通分支，选取 $x_i \in X_i$ 并令 $A = \{x_i\}_{i\in I}$。显然，集合 A 是一个无限反链，因此，width(X) $= \infty$，这与定理 4.10 矛盾。 □

定理 4.16. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则下列条件等价：

1. X 满足可数链条件。
2. X 是弱 *Lindelöf* 空间。
3. X 有可数个连通分支。

5 不成立的性质

在本小节中，我们将证明非紧 Alexandroff 半拓扑群不具备的一些性质。接下来先证明一个有用的引理。

引理 5.1。 设 X 是一个连通的非紧 *Alexandroff*空间，且 $A \subseteq X$，则 A 的闭包不是紧的。

证明。令 e 表示 X的单位元。根据假设，存在 $y \in X$ 使得$e < y$。由乘法映射的连续性，我们得到以下链:

$$e < y < y^2 < \cdots < y^n < y^{n+1} \cdots$$

另一方面，反设 F_A，即 A 的闭包是紧的。于是存在一个有限子集 $M \subseteq F_A$，使得对于每个 $y \in F_A$，都存在 $m_y \in M$，满足 $y < m_y$（见定理 2.3）。将前面的链乘以某个 $m \in M$ 对应的 m，我们得到:

$$m < my < my^2 < \cdots < my^n < my^{n+1} \cdots$$

显然，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $my^n \in F_A$，因为 A 的闭包是一个上集。这与 M 的有限性矛盾。

□

定义 5.2. 若拓扑空间 X 的每个可数子集的闭包都是紧的，则称 X 是-有界的。

定义 5.3. 若拓扑空间 X 的每个序列 X 都包含一个闭包紧的子序列，则称 X 是全可数紧的。

定义 5.4. 若每个点都包含在某个闭包紧的开集中，则称拓扑空间 X 是强局部紧的。

定理 5.5. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则

1. X 不是 ω-有界的。
2. X 不是全可数紧的。
3. 如果 X 没有单点连通分支， X 就不是强局部紧的。

证明。 1.-3. 如果 X 是连通的，这可由引理 5.1 直接得出。如果 X 不连通，则可将引理 5.1 应用于每个连通分支。

□

注 5.6。 请注意，若从定理 5.5 的第 3 条中去掉额外假设，结论便不成立。例如，考虑带有离散拓扑的整数群 $\mathbb{Z}$。此时 $\mathbb{Z}$显然是强局部紧的。

定义 5.7。 若拓扑空间 X 满足：对于 X 的任意非空开集序列$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，都存在一点 $x \in X$ 和一个无限集 $I \subseteq \mathbb{N}$，使得对于 x 的每个邻域 $O_x \subseteq X$，集合 $\{n \in I : O_x \cap U_n \neq \emptyset\}$ 都是有限的，则称 X 为序列弱紧。

命题 5.8. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么 X 不是序列弱紧的。

证明. 假设 X 是连通的，并令 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X的一个由非空开子集构成的序列。根据定理 2.8，$x \in X$ 的每个邻域 O_x 都与每个 U_n相交。也就是说，

$$O_x \cap U_n \neq \emptyset$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。如果 X 不连通，则同样的论证适用于 X的每个连通分支。

□

定义 5.9。 若半拓扑群 X 满足：对于 X的单位元的每个邻域 U，都存在 X 的一个有限子集 F，使得 $FU = X$，则称 X 为预紧 。

命题 5.10。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么 X 不是预紧的。

证明。 假设 X 是预紧的。那么存在 X 的一个有限子集 F，使得$FU_e = X$，其中 e 表示单位元。然而，由乘法映射的连续性可知，对每个 $x \in FU_e$，都存在 $y \in F$，使得 $y \geq x$。于是 $X = \bigcup_{x\in F} U_x$。这表明 X 是紧的，因为 X 会有有限个极大点（见定理 2.3），从而导出矛盾。

□

定义 5.11。 如果一个拓扑空间的每个（可数）开覆盖都有一个开点有限加细，则称其为（可数）亚紧。若覆盖中的每个点只属于有限多个集合，则称该覆盖为点有限覆盖。

命题 5.12。 设 X 是一个没有单点连通分支的非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么 X 不是（可数）亚紧的。

证明。 令 e 表示单位元，并假设 X 是连通的。对每个 $x \in X$，都存在 $d_x \in X$，使得 $d_x \geq x$， e 因为 X 是连通的（见定理 2.11）。考虑开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_{d_x}\}_{x\in X}$。反设 X 是亚紧的。因此，存在一个开点有限加细 $\mathcal{V}$。于是，单位元 e只属于覆盖中的有限多个集合。然而，$\mathcal{U}$ 的每个开集都包含单位元e。这意味着 $\mathcal{V}$ 是有限的，这与 X的非紧性矛盾（见定理 2.3）。如果 X 不连通，我们可以对包含单位元的连通分支采用相同的论证。

□

6 覆盖维数

本节回顾覆盖维数这一经典概念及其若干推广，并在本文所讨论的半拓扑群背景下研究这些概念。我们还将指出它们与前几节引入的概念之间的一些联系。

定义 6.1。 设 X 是一个拓扑空间。若 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖，且阶至多为 n，则称其具有此性质： X 中的每个点至多属于 $n+1$ 个 $\mathcal{U}$中的成员；等价地， $\mathcal{U}$ 中任意 $n+2$ 个两两不同成员的交集为空。若 X 具有*Lebesgue* 覆盖维数至多为 n，并记 $\dim(X) \leq n$，则称每个 X的开覆盖都存在一个阶至多为 n的开加细。 X 的*Lebesgue* 覆盖维数 是满足此性质的最小非负整数 n。若不存在这样的整数，则记 $\dim(X) = \infty$，并称 X 是无限维。

首先，我们在 Alexandroff 空间理论中建立一个一般性结果。

定理6.2。 设 X 是一个 *Alexandroff*空间。如果$\dim(X) < \infty$，那么 X 包含一个由极大点组成的子集 M，使得对每个 $x \in X$，都存在 $m \in M$ 满足 $x \leq m$。

证明。 设 $\dim(X) = n$ ，并通过假设不存在极大点来导出矛盾。考虑开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in X}$。那么 $\mathcal{U}$ 有一个开加细 $\mathcal{V}$，使得对每个 $x \in X$， x 至多包含在 $\mathcal{V}$的 $n+1$ 个成员中；也就是说，存在$M \subset X$，使得对每个 $y \in M$和 $|M| \leq n+1$， $x \leq y$。对于每个 $y \in M$，我们都能找到$z \in X$ 使得 $y < z$，因为 X中不存在极大点。由于 $\mathcal{V}$ 也是一个开覆盖，故某个 $z > y$ 满足 $U_z \in \mathcal{V}$。另一方面， $x \in U_z$。我们可以重复这一论证，直到得出与 $\dim(X) = n$这一事实相矛盾的结论。 □

下面这些例子的目的有两个。一方面，我们证明 $\dim(X) = n$ 并不意味着存在 n 个极大点。另一方面，我们证明定理 6.2 的逆命题不成立。

例 6.3. 令 $X = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得当 i 为奇数时 $x_i < x_{i+1}$，当 i 为偶数时 $x_i > x_{i+1}$。不难验证，$\dim(X) = 1$，且存在可数个极大点。

例 6.4. 令 $X = \mathbb{N}\cup\{*\}$，其中对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $* < n$。那么， $M = \mathbb{N}$ 是一个极大点集合，且对每个 $x \in X$，都存在 $m \in M$ 使得 $x \leq m$。然而，$\dim(X) = \infty$。

推论 6.5. 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么 X 是无限维的。

证明。 由定理 6.2 以及 X 中不存在极大点这一事实可直接得到（见命题 2.6）。

□

定义 6.6。 如果每个点 $x \in X$ 都有一个开邻域 U，使得 $\dim(U) \leq n$，则称拓扑空间 X 的局部覆盖维数至多为 n。

命题 6.7。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。则 X 的局部覆盖维数为0。特别地，对于每个 $x \in X$，$\dim(U_x) = 0$。

证明。 设 $x \in X$。则 U_x 是 U_x 的每个开覆盖 $\mathcal{U}_x$ 中的一个元素。因此， $\mathcal{V} = \{U_x\}$ 是 $\mathcal{U}_x$ 的一个开加细，其阶至多为 0。 □

注 6.8。 非紧 Alexandroff 拟拓扑群具有无限的 Lebesgue 覆盖维数，尽管其在每个点处的局部覆盖维数均为零。

定义 6.9。 若存在一个由有限维子空间组成的可数族 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 X，则称拓扑空间 X 为可数维。

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

定理 6.10。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。若 X 是 σ-紧的，则 X 是可数维的。

证明。 若 X 是 σ-紧的，则在 X 中存在一个可数共尾子集 M（见定理 3.19）。根据命题 6.7，对每个 $x \in M$，都有 $\dim(U_x) = 0$。因此， $\{U_x\}_{x\in M}$ 是 X 的一个由有限维子空间组成的可数族，满足 $X = \bigcup_{x\in M} U_x$。 □

下面的例子说明，定理 6.10 的逆命题不成立。

例 6.11。 考虑整数群 $\mathbb{Z}$ 上的非紧 Alexandroff 半拓扑群（见例 3.12）。令 $\mathbb{R}$ 为带离散拓扑的实数群。考虑由 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$的积得到的非紧 Alexandroff 半拓扑群 $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 。容易验证，$\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 不是 σ-紧的，因为不存在可数共尾子集（见定理 3.26）。令 $n\in\mathbb{N}$，考虑由 X_n 定义的

$$X_n=\bigcup_{a\in\mathbb{R}}U_{(n,a)}.$$

根据命题 6.7，$\dim(U_{(n,a)})=0$。此外，$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$，由此可得 $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 是可数维的。

定义6.12。 若拓扑空间 X 满足 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$，其中每个 F_n 都是 X的闭有限维子空间，则称其为强可数维 。

命题6.13。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。那么 X 不是强可数维的。

证明。 X 中的闭集没有极大点，因此 X 不是强可数维的（见定理6.2）。

□

7 推论与关系

本节旨在探讨前几节所述概念的推论及其相互关系。

定理7.1。 设 X 是一个具有无限多个连通分支的非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。那么 X 既不是 2-伪紧，也不是可数 o-紧，并且它不是贝尔空间。

证明。 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一组连通分支。考虑 $U_n=\bigcup_{i\geq n}X_i$。那么$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由非空开集构成的递减序列。然而，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ 是空集。这说明 X 不是可数 o-紧。我们可以考虑同一序列，以证明 X 既不是2-伪紧，也不是贝尔空间。

□

定理7.2。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。如果 X 有不可数个连通分支，那么

1. X 不是 σ-紧，也不是 σ-局部紧或 *Lindel¨of*
2. X 不是伪紧的，也不是 H紧或星紧的。
3. X 不是弱 *Lindel¨of* 空间，也不满足可数链条件。

定理 7.3。 设 X 是一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。如果 X 不是可数维的，那么

1. X 不是 σ紧的、 σ局部紧的，也不是 *Lindel¨of* 空间
2. X 具有一个不可数共尾子集。

定理 7.4。 设 X 为非紧 *Alexandroff* 半拓扑群。如果 X 是 σ-紧的，则它是弱 *Lindel¨of* 的。

证明。 根据定理 3.26，存在一个可数共尾子集，显然可以证明这意味着 X 有可数个连通分支。根据定理 4.14，证明得出。

□

例 7.5。 令 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 为例 3.13 中的半拓扑群，并令 $\mathbb{Z}$为带离散拓扑的整数群。那么，由于其有可数个连通分支， $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}$ 是弱 Lindel¨of。然而，可以立即验证 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}$不是 σ-紧的。

定理 7.6。 设 X 为一个非紧 *Alexandroff* 拟拓扑群。若 X 是极限紧的，且 X 中的每条链都是 σ-紧的，则 X 是 σ-紧的。

证明。 根据假设和定理 4.10，有 width(X) $= n < \infty$。根据 Dilworth 定理，X 可以划分为 n 条链。此外，这些链中的每一条都是 σ- 紧的，因此都具有一个可数共尾子集。令 M 为这些可数共尾子集的并。由于M 是可数集的有限并，所以它是可数的。此外， M 显然在 X 中是共尾的。因此， X 是 σ-紧的（见定理 3.26）。

□

通过以下例子，我们说明不能从定理 7.6 中去掉极限紧性的假设。

例 7.7。 考虑例 6.11 中的半拓扑群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$。显然， $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 中的每条链都是 σ-紧的。然而， $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 的宽度不可数，因此根据定理 4.10， $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 不是极限紧的。此外，这个群不是 σ-紧的。

注 7.8。 在定理 7.6 的证明中，我们使用了 Dilworth 定理。将极限紧性（因而也将宽度有限这一条件）替换为“空间具有可数无限宽度”的假设，从而寻求类似结果，似乎是很自然的做法。然而，Dilworth 定理通常无法沿此方向推广：宽度为可数无限的偏序集未必能划分为可数多个链。

参考文献

[1] T. Banakh 和 A. Ravsky. 关于弱紧半拓扑群. 《拓扑应用》, 284:107363, 2020年.[2] J. A. Barmak. 有限拓扑空间的代数拓扑及其应用. 《数学讲义》2032. Springer, 2011.[3] J. A. Barmak 和 E. G. Minian. 极小有限模型. 《同伦与相关结构杂志》, 2:127–140, 2007.[4] J. A. Barmak、M. Mrozek 和 T. Wanner. 有限空间多值映射的 Lefschetz 不动点定理. 《数学杂志》, 294:1477–1497, 2020.[5] J. A. Barmak、M. Mrozek 和 T. Wanner. 有限拓扑空间上多值映射的 Conley 指标. 《计算数学基础》, 2024.

[6] T. Borsich 和 P. J. Chocano. 关于 Alexandroff 拟拓扑群的存在性及其性质. *arXiv:2604.26730*, 2026年.[7] T. Borsich 和 P. J. Chocano. 关于从 Alexandroff 拟拓扑群到拓扑群的连续同态. 《数学科学通报》, 214, 2027年.[8] P. J. Chocano. 有限群作为等距变换群的实现及极小性问题.《数学新闻》, 298:419–426, 2025年.[9] P. J. Chocano. 从样本到形状：一种研究拓扑不变量的有限方法. 《巴勒莫数学学会汇刊》, *II.*, 75(193), 2026年.[10] P. J. Chocano、M. A. Mor´on 和 F. R. Ruiz del Portal. 形状理论的组合视角. 《日本数学会杂志》, 78(1):149–172, 2026年.[11] P. J. Chocano 和 L. F. Prieto-Mart´ınez. 通过序补矩阵的行列式计算偏序集欧拉示性数的公式. 2026年.[12] P. J. Chocano 和 L. P. Prieto-Mart´ınez. 通过连接幺半群的格罗滕迪克群构造负维单纯复形. *arXiv:2611.14300*, 2026年.[13] J. P. May. 有限空间与更大的语境. 未出版专著, 2016年.