可平滑化的亚历山德罗夫空间的边界猜想

Nina Lebedeva

摘要

我们证明，在 sec $\geq \kappa$ 的完备黎曼流形的非塌缩极限中，配备内蕴长度度量的紧致满维凸体的每个边界分支，其亚历山德罗夫曲率都至少为 κ。我们还研究了曲率至少为 κ 的亚历山德罗夫空间非塌缩序列的极限中的这类凸体。如果 $\kappa > 0$ 或该凸体的边界是强凸的，我们证明该凸体可以由给定序列中的凸体逼近。

arXiv:2611.30860v1 [math.MG] 23 Nov 2026

1 引言

Alexandrov 几何中的一个基本猜想，早在 Yuri Burago、Mikhail Gromov 和 Grigori Perelman [4, § 13.4]，就已提出。该猜想断言，亚历山德罗夫空间边界的每个分支在配备内蕴长度度量后，都具有与环境空间相同的曲率下界。

在本文中，我们称一个子集为凸 的，如果它包含任意两点之间的每条最短测地线。我们证明了黎曼流形非塌缩极限中的凸体满足边界猜想：

定理 1. 设 M_j^n, $n \geq 2$ 是无边界的完备光滑黎曼流形，满足$\sec M_j \geq \kappa$。假设 $M_j \to A^n$ 在非塌缩的 *Gromov–Hausdorff* 意义下收敛，必要时取基点收敛。设 $C \subset A$ 是一个紧致、满维的凸子集，且满足 $\partial C \neq \varnothing$。

那么， ∂C 的每个连通分支赋予其内蕴长度度量后，都是$\mathrm{CBB}(\kappa)$。

对于黎曼流形中的凸超曲面，Sergei Buyalo [5] 证明了局部曲率下界的存在性。Stephanie Alexander、Vitali Kapovitch 和 Anton Petrunin [2]得到了最优下界。Karsten Grove、Adam Moreno 和 Peter Petersen [7] 证明了轨道空间的边界猜想，并将其推广到奇异黎曼叶状结构的叶空间。

该猜想也推动了 Alexandrov 几何的发展。利用与 Perelman [15],共同发展起来的拟测地线和梯度曲线理论，Petrunin 证明了，内在边界度量中的每条最短路径都是环境空间中的拟测地线 [12, 定理 11]。此后，他提出通过凸超曲面的高斯公式[14, § 9]来研究该猜想。Nina Lebedeva 和 Anton Petrunin [16] 构造了适用于可平滑化的亚历山德罗夫空间的测度值曲率张量，作为这一方向上的一步。

在许多潜在应用中，环境 Alexandrov 空间是以下空间的非塌缩极限：
具有共同截面曲率下界的黎曼流形。定理 1 在这一情形下可能已经足够（参见第 6 节中的图构造）。

证明策略。 黎曼曲率界甚至适用于非光滑的凸超曲面[2]。因此，为证明定理 1，我们将适当的凸体提升到流形 M_j中。对于此处所考虑的满维凸体，豪斯多夫收敛会导致相应边界分支在其内在长度度量下收敛（第 5 节）。

Petrunin [14, 问题9.1.3’] 提出的问题是：在 Alexandrov 空间的非塌缩 Gromov–Hausdorff 极限中，一个凸超曲面是否可以由给定空间中的凸超曲面逼近。以下定理给出了我们所需的提升形式。

定理 2 (凸曲面的提升)。 设 X_j^n 是曲率不低于 κ 的完备 *Alexandrov* 空间，且无塌缩地收敛到一个无边界的 n 维 *Alexandrov* 空间 A^n 。设 $D \subset A$ 是一个紧致全维凸体。假设 $\kappa > 0$ 或 ∂D 具有正的强底角下界，定义见第*2*节。

那么，存在紧致全维凸体 $D_j \subset X_j$，沿指定序列在标记 *Hausdorff* 距离下收敛到 D。

对于 $\kappa \le 0$，任意凸体在每个边界点附近都与一个较小的凸体一致，且该凸体允许进行此类逼近；参见第4节。

在第2–3节中，我们为内平行体构造局部凸支撑。Anton Petrunin[14, 问题 7.3.6] 提出构造（$-2+\varepsilon$）-凹函数，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，使其在指定点处为零，且有下界，即该点到任意位置的距离平方的负值。Artem Nepechiy [10, 命题 1.2] 完成了这一构造，并得到了一些函数，这些函数还可以提升到指定的非塌缩逼近序列中。正是这一构造，使我们能够将距离比较所提供的二次裕度转化为凹支撑函数。与修正距离函数作适当的线性组合后，所得函数为凹函数，而二次下界确保其超水平集在接触点附近包含内平行体。这些支撑中的有限个便足以使内部逼近的凸包保持在相应内平行体附近。由此得到定理 2 中的凸逼近。

为完成定理 1 的证明，当 C 满足 $\kappa > 0$或底角条件时，我们直接应用提升定理。当 $\kappa \le 0$ 且 C 缺少这一界时，我们进行局部论证。我们利用强凹函数构造满足所需底角条件的凸体 D_ε，并使其收敛于一个体 $D_0 \subset C$；该体在选定边界点 p附近与 C 一致（第4节）。我们提升每个 D_ε，并在内在边界度量中取极限。这给出了 p附近的曲率下界，而整体化则完成证明（第5节）。

2 支撑函数

T在第2–3节中，令 $X_j \to A$ 和 $D \subset A$ 满足定理 2.

一个满维闭凸子集 $D \subset A$，赋予限制的环境度量后，是一个曲率至少为 κ的 Alexandrov 空间。其 Alexandrov边界与 A [9, 中的拓扑边界重合，见定理 1。1],且 D 是其内部的闭包。

对于具有 $\partial D \neq \varnothing$ 的体 D，记 $f = d_D(\cdot\ \partial D)$ 以及 $D_s = \{f \ge s\}$。我们采用 Stephanie Alexander 和 Richard Bishop [1, §4] 的底角条件。强底角下界$\lambda > 0$ 意味着：在每个 $q \in \partial D$ 处，对于任意 $0 < a < \lambda$，所有充分短的极小弦 qy,$y \in \partial D \setminus q\}$ 都满足

$$\angle(\uparrow_q^y, \Sigma_q \partial D) \ \ge\ a\, d(q,y)/2. \tag{1}$$

这里，$\Sigma_q \partial D$ 是边界的切向子集在 $T_q D$ 中的链接。半径可能取决于 q, a。在恢复过程中，只使用作为内点最近点的边界点。

2.1 二次裕度

为构造所需的提升，我们为内平行体 D_s 寻找局部凸支撑（见图1）。对于 $p \in \partial D_s$，选取一个最近点 $q \in \partial D$。开球 $B_s(q)$ 与 D_s 不相交，且其球面经过 p，因此对于每个 $x \in D_s$，$d(q,x) \ge d(q,p) = s$。

其思路是将修正距离函数与强凹修正项结合起来。距离项必须使 D_s 与接触点之间相隔一个正的二次量，而修正项则必须足够强，才能使所得函数保持凹性。下面的比较旨在说明这两个要求彼此相容。

记 $\mathrm{sn}_\kappa(r) = \sin(\sqrt{\kappa}\, r)/\sqrt{\kappa}$为 $\kappa > 0$，$\mathrm{sn}_\kappa(r) = r$为 $\kappa = 0$，$\mathrm{sn}_\kappa(r) = \sinh(\sqrt{-\kappa}\, r)/\sqrt{-\kappa}$为$\kappa < 0$。令 $\mathrm{cs}_\kappa = \mathrm{sn}_\kappa'$，且 $m_\kappa(r) = \int_0^r \mathrm{sn}_\kappa(v)\, dv$。记 $d_q = d(q,\ \cdot)$。沿单位速最短线段，以下比较不等式在割迹 [1, 两侧成立(1.1)],

$$(m_\kappa \circ d_q)'' \le \mathrm{cs}_\kappa(d_q). \tag{2}$$

对于 $\kappa > 0$，我们取 $0 < s < \pi/(4\sqrt{\kappa})$。

引理 3（两个距离与一个垂足）。 固定 p，使其满足 $f(p) = s > 0$，并固定任意 满足$d(p, q) = s$的 $q \in \partial D$ 。假设(1) 在 q 处成立，系数为 a。选择 $a = 0$ 无需额外假设。于是

$$\liminf_{\substack{x\to p,\ x\in D_s\\ x\neq p}} \frac{m_\kappa(d(q,x)) - m_\kappa(s)}{d(p,x)^2} \ \geq\ L_s, \qquad L_s = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{cs}_\kappa(s) + \tfrac{a}{2}\operatorname{sn}_\kappa(s). \tag{3}$$

证明。 令 $x \in D_s \setminus \{p\}$ 趋于 p。记 $r = d(p, x)$ 和 $\ell = d(q, x)$。 pqx 的周长至多为 $2s + 2r$。由于 $x \in D_s$, $\ell \geq s$。只需考虑左侧商在 (3) 中有上界的一个序列。于是，当 $m'_\kappa(s) > 0$时，$\ell - s = O(r^2)$。令 β 为 pqx 中 q 处的比较角。模型余弦定律给出

$$m_\kappa(r) = m_\kappa(\ell - s) + \operatorname{sn}_\kappa(s)\operatorname{sn}_\kappa(\ell)(1 - \cos\beta).$$

由此可得 $\beta \to 0$，且 $\operatorname{sn}_\kappa(s) \sin \beta/r \to 1$。特别地， $\beta > 0$ 最终成立。

双重空间中连接 p 的两个副本的每条路径都经过 ∂D，因此经过选定的垂足 q 的路径是最短路径，其长度为 $2s$。这给出 $T_qD = \mathbb{R}_+ \times T_q\partial D$，其中 qp 沿着法向因子 [14, 。在定理 3.3.1 的证明中，注意 19]。对于任意选定的 qx，分解给出 $B = \angle pqx \leq \pi/2$。铰链比较给出 $B \geq \beta$。取一个子列，使这些方向的归一化切向投影趋于单位向量 ξ。为了用 ∂D 中的点实现 ξ，取极值子集中的一条单位速拟测地线，从 q 出发，方向为 ξ [14, （§5.1，性质 1、2 和 4]）。在参数 u 处，它到 q 的距离为 $u + o(u)$。由连续性可知，它包含一个点 y，该点到 q 的距离恰为 r，对应的参数介于 $r/2$ 与 $2r$ 之间。这些方向 qy 趋于 ξ。它们相对于切向因子的仰角 ϕ 趋于零，两个切向投影之间的角 δ 也趋于零。由 (1)， $\phi \geq ar/2$。

对于 $\theta = \angle xqy$，乘积度量给出

$$\cos\theta = \cos B \sin\phi + \sin B \cos\phi \cos\delta.$$

作为 B 在 $[\beta, \pi/2]$ 上的函数，右侧对于所有充分小的 r 都是凹函数。它在两个端点处的取值分别趋于 0 和 1，因此其最小值出现在 β。在 $B = \beta$ 处，它关于 ϕ 在 $ar/2$ 与实际高度之间单调递增，因为 β, $\phi \to 0$。代入可得

$$\cos\theta \geq \sin\beta + ar/2 + o(r). \tag{4}$$

事实上，角度偏差会乘以 $\sin\beta = O(r)$。因此， $\delta \to 0$ 已足够，而且不需要对 B 趋近极限的速率作任何限制。

现在 $s \leq f(x) \leq d(x,\ y)$。由于 $d(q,\ y) = r$， qxy 的周长至多为 $2s + 4r$。对于 $\kappa > 0$，当 r 足够小时，两个周长都小于 $2\pi/\sqrt{\kappa}$，且边长处于 $\bar{m}_\kappa$ 的递增区间内。对 $qx,\ qy$ 使用铰链比较和模型余弦定律，可得

$$m_\kappa(s) \leq m_\kappa(d(x,y)) \leq m_\kappa(\ell) + \operatorname{cs}_\kappa(\ell)m_\kappa(r) - \operatorname{sn}_\kappa(\ell)\operatorname{sn}_\kappa(r)\cos\theta.$$

代入 (4)，使用 $m_\kappa(r) = r^2/2 + O(r^4)$ 和 $\operatorname{sn}_\kappa(r) = r + O(r^3)$，再除以 r^2。所得下界为 L_s。取一个达到任何假定存在的更小下极限的子列，即可证明上述方向子列的选取合理。

□

如果强底角假设以 $\lambda > 0$ 为界成立，固定 $0 < a < \lambda$。否则 $\kappa > 0$，并取 $a = 0$。存在一个小于 $\max f$ 的 $s_* > 0$，使得对每个 $0 < s < s_*$

$$2L_s - \operatorname{cs}_\kappa(s) = 2(1 - \operatorname{cs}_\kappa(s)) + a\operatorname{sn}_\kappa(s) > 0, \qquad \operatorname{cs}_\kappa(s) > 0. \tag{5}$$

对于正曲率 $1 - \cos(\sqrt{\kappa}\, s) > 0$。对于 $\kappa = 0$，差距为 as。对于 $\kappa = -k^2 < 0$，当且仅当 $a > 2k\tanh(ks/2)$ 时，它为正。特别地，只需要考虑浅层。

引理 4. 对于 $0 < t < s_*$，内平行体 D_t 是凸的。

证明。 根据Petrunin关于测地线切锥等距性的定理 [13, 定理 1.1(A)]，在 D 中与 ∂D 相交于一个内点的最短测地线完全位于 ∂D中。特别地，一个端点位于内部的弦，其开线段位于 Int D中。

D_t 中两点之间的最短弦由于凸性而始终留在 D 中。由于两个端点的深度都至少为 $t > 0$，整条弦的深度均为正。若其最小深度为 $s < t$，则该最小值会在单位速度参数化的内点 $p = \gamma(0)$ 处取得。固定 p的一个垂足 q。两点 $\gamma(\pm h)$都属于 D_s。根据（3），$m_\kappa(d_q \circ \gamma)$的中心二阶差分除以 h^2后的下极限至少为 $2L_s$。根据（2），其上极限至多为 $\mathrm{cs}_\kappa(s)$。这与（5）矛盾。 □

2.2 凹支撑函数的构造

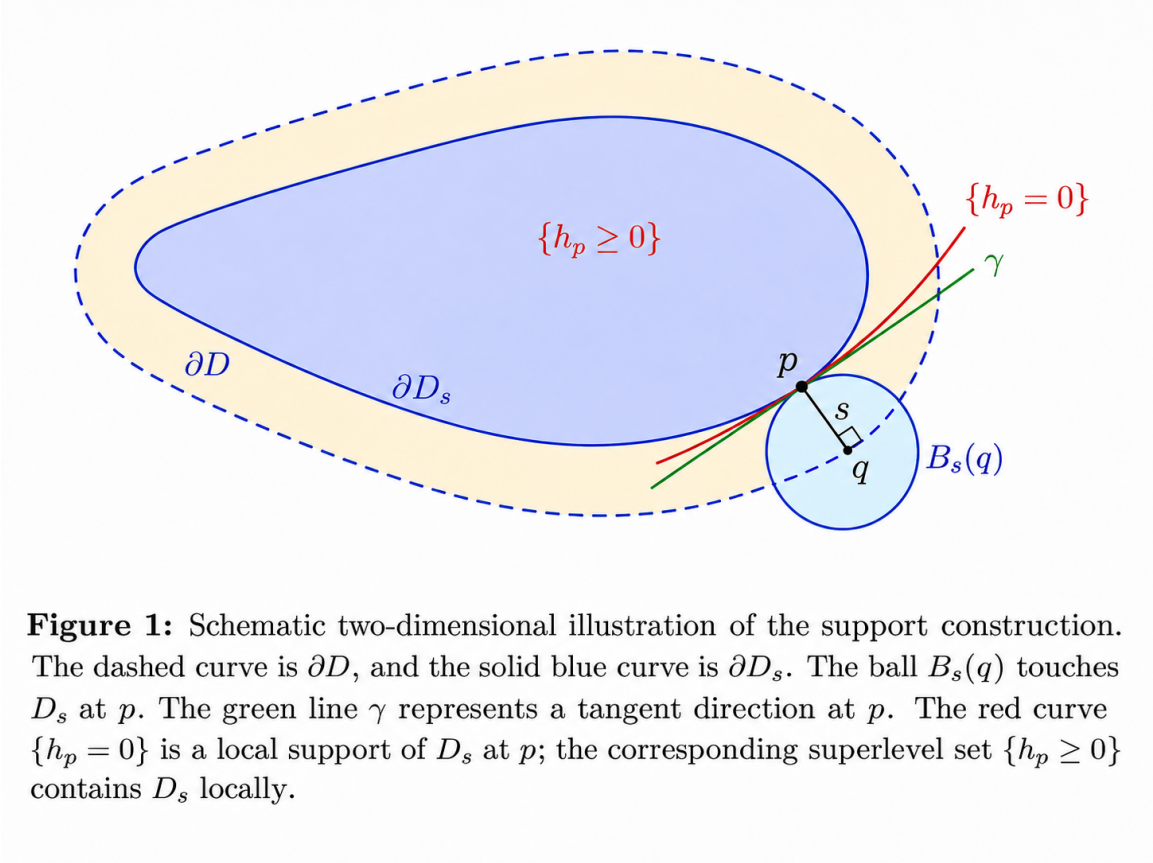

Figure 1: Schematic two-dimensional illustration of the support construction. The dashed curve is ∂D, and the solid blue curve is ∂D_s. The ball $B_s(q)$ touches D_s at p. The green line γ represents a tangent direction at p. The red curve $\{h_p = 0\}$ is a local support of D_s at p; the corresponding superlevel set $\{h_p \geq 0\}$ contains D_s locally.

现在我们转而讨论支撑函数的构造，所使用的是上一小节得到的二次余量。

构造这类支撑函数有两个困难：它们的超水平集必须是凸的，而且必须与体相切而不能切入其中。

距离函数是 Alexandrov 空间中半凹函数的自然构件，但其超水平集未必是凸的。此外，与凸体相切的球仍可能在附近切入该体，因此相应的距离超水平集未必能支撑该体。

这就是我们要为内平行体 D_s构造支撑的原因。根据定义，D_s 与每个以 ∂D为中心、半径为 s 的开球都不相交，而 ∂D_s 中的每个点至少位于相应球面中的一个上。因此，在每个这样的点处，我们都有一个包含 D_s 并在该点与其相切的距离超水平集。接下来需要在保留这一支撑的同时，使该上水平集成为凸集。

Perelman的构造 [11, §3.6] 提供了强凹函数，其在选定点处的一阶行为可以在任意小的误差范围内预先指定。然而，它们的超水平集也未必能支撑给定的体：它们可能弯曲得过于剧烈，从而截入其中。为回答 Petrunin [14, 第7.3题，Nepechiy [10, 命题1构造了 $(-2+\eta)$-凹函数，其中 $\eta > 0$可任意小，且这些函数以下界为负的距离平方。与 Perelman的构造所提供的一阶控制不同，这给出了函数低于其最大值的幅度的定量界。

这正是我们所需要的二次控制，以保留第 2.1 节中获得的余量。然而，Nepechiy 的函数在其中心处取最大值，本身并不能确定一个支撑方向。

粗略地说，距离项提供了接触以及支撑的向内方向，而 Nepechiy 的函数则弥补了距离超水平集凸性的不足。第 2.1 节所建立的二次裕度确保这一修正不会切入 D_s。

Nepechiy 的构造。 Nepechiy 的定理 B [10] 给出了具有二次下界的 $(-2+\eta)$-凹函数，且 $\eta > 0$ 可任意小。命题 1.2 （情形 $k = 0$）通过构造在 [10, 定义 1.1] 意义下 η- 可构造的函数，加强了这一结果。特别地，这些函数可以提升到预先给定的非塌缩逼近序列上，同时保留下文所需的估计。

设 A 是一个无边界的 n 维 Alexandrov 空间，并设 $p \in A$。对每个$\eta > 0$，存在 $R > 0$ 以及 $B_R(p)$ 上的函数 b_p，使得

$$b_p(p) = 0, \qquad \operatorname{Lip} b_p \le 2R, \qquad b_p'' \le -2+\eta, \qquad -d(p,x)^2 \le b_p(x) \le 0.$$

此外，对于任意给定的、具有共同曲率下界且收敛到 A 的 n 维非塌缩 Alexandrov 空间序列，以及任意选取的点 $p_j \to p$，对所有充分大的 j，都存在定义在 $B_R(p_j)$ 上的函数 $b_{p,\,j}$，满足

$$b_{p,j}(p_j) = 0, \qquad \operatorname{Lip} b_{p,j} \le 2R, \qquad b_{p,j}'' \le -2+\eta,$$

and

$$b_{p,j}(x) \ge -d(p_j,x)^2 \quad \text{for } d(p_j,x) \ge \varepsilon_j R, \qquad \varepsilon_j \to 0.$$

固定 $0 < s < s_*$，并取一点 p，使得 $f(p) = s$。令 $q \in \partial D$ 为 p 的任意一个最近边界点。由 (5)，选取

$$\operatorname{cs}_\kappa(s) < \alpha < 2L_s, \qquad 0 < \eta < 1, \qquad \alpha(1-\eta/2) > \operatorname{cs}_\kappa(s), \qquad \alpha/2 < d_0 < L_s.$$

对于这个 η 的选取，取上述的 b_p，并令

$$h_p = m_\kappa(d_q) - m_\kappa(s) + \tfrac{\alpha}{2} b_p. \tag{6}$$

由 (2) 以及 b_p 的 $(-2+\eta)$-凹性，在以 p 为中心的充分小球内，

$$h_p'' \le \operatorname{cs}_\kappa(d_q) - \alpha(1-\eta/2) < 0.$$

另一方面，由 (3) 和 $b_p \ge -d_p^2$，缩小球之后可得，

$$h_p(x) \ge (d_0 - \alpha/2) d(p,x)^2 > 0 \qquad (x \in D_s \setminus \{p\}).$$

这里 $h_p(p) = 0$，且沿着 q 的方向立即在 pq 上有 $h_p < 0$，其中 $d_q < s$。任意两端点都充分靠近 p 的极小化子，由其长度可知都会留在凹性球内。因此，该上水平集是局部凸的，并且在 p 处支撑 D_s。

备注 （欧几里得解释）。在欧几里得空间中，两个平方距离函数之差是仿射的。在 Alexandrov 空间中，类似的差在局部是半凹函数之差，但未必是凸函数或凹函数。我们的构造可以看作是用 Nepechiy 的近似二次凹函数替代负平方距离项。

3 原序列上的有限截断

子集 $E \subset X$ 的闭凸包是所有包含 E 的 X 闭凸子集的交集。

固定深度 $0 < t < s_*$。考虑满足以下条件的集合：它们在 Gromov–Hausdorff 逼近 F_j 下的像 $E_j \subset X_j$ 位于 D_t的 $o(1)$ 内。为了控制它们在 X_j中的凸包，我们提升有限多个局部

支撑面，这些支撑面来自较大的体 D_s的边界，其中 $0 < s < t$。对于所有充分大的 j，这些截集给出一个紧致凸集 $K_j \subset X_j$，其

$$E_j \subset K_j, \qquad F_j(K_j) \subset D_s.$$

根据定义， E_j 的整体凸包包含在 K_j 中。因此，其标记像包含在 D_s中，并且紧集 D_s 递减至 D_t，当 $s \uparrow t$时。

引理 5 (固定深度的凸包)。 假设 $\partial D \neq \varnothing$ 和 $0 < t < s_*$。选取标记基点 $o_j \to o$、满足 $D \subset B_{R/2}(o)$的半径 R，以及 $B_{4R}(o_j)$上的 ***Gromov–Hausdorff*** 标记 F_j，其畸变为 $\epsilon_j \to 0$。设 $E_j \subset B_R(o_j)$ 为紧集，满足

$$\sup_{e \in E_j} \operatorname{dist}_A(F_j e, D_t) \longrightarrow 0.$$

那么，它们的闭凸包 H_j 最终是紧致的，包含于 $B_R(o_j)$中，并且满足

$$\sup_{x \in H_j} \operatorname{dist}_A(F_j x, D_t) \longrightarrow 0.$$

如果 E_j 在标记 ***Hausdorff*** 距离下收敛至 D_t，那么 H_j也如此。

证明。固定 $0 < s < t$。

提升支撑。 将 f通过 $f(x) = d_A(x, A \setminus D)$扩展为 A。这是 1-Lipschitz 的，在 D上与深度一致，并在外部为零。在标记球上定义

$$u_j(x) = \inf_z \{ f(F_j z) + d_j(x, z) \}, \qquad f(F_j x) - \epsilon_j \le u_j(x) \le f(F_j x).$$

下确界取遍标记球。即使标记不连续，它仍给出一个连续函数。在该处，其 s上水平集对所有足够大的 j 都包含于 $B_R(o_j)$中。若极小化子的两个端点都在那个较小的球内，则该极小化子包含于 $B_{3R}(o_j)$中。

对于这个 s，按照第 2.2 节，选取 α， η， d_0。对于每个满足 $f(p) = s$的 p，选取一个垂足 q和提升 p_j， q_j。应用第 2.2 节回顾的可构造性陈述，我们得到定义在球 $B_{R_p}(p_j)$ 上的函数b_j，其中 $R_p > 0$ 与 j 无关，并满足该节中所述的估计。特别地，在 $B_{e_{p,j} R_p}(p_j)$之外，二次下界成立，其中 $e_{p,j} \to 0$。定义

$$h_{p,j} = m_\kappa(d_j(q_j, \cdot)) - m_\kappa(s) + (\alpha/2) b_j.$$

我们需要这些函数在p_j 附近足够小，并且在满足$u_j \ge s$的一个固定环域上一致为正。这样，选取一个正的截断水平，就能去除 p_j 的一个邻域，同时不触及径向边界。归一化给出 $h_{p,j}(p_j) \to 0$，且这些函数在一个固定球上的 Lipschitz 常数有界。由 (2)，在将 $2r_p < R_p$取得足够小、再将 j 取得足够大之后，$h''_{p,j} \le \mathsf{cs}_\kappa(d_j(q_j, \cdot)) - \alpha(1 - \eta/2) < 0$ 在 $B_{2r_p}(p_j)$上成立。

对于环域下界，使用 (3) 减小 r_p，直到其中的分子至少为$d_0 d(p, x)^2$，适用于 $x \in D_s \cap B_{2r_p}(p)$。还要求 $r_p < (t - s)/4$和 $2r_p < s$。在 $r_p/2 \le d_j(x, p_j)$ 上，最终会排除该球。在满足 $u_j(x) \ge s$ 的点处，包含关系 $F_j x \in D_s$ 在这个固定环域上一致地给出，

$$h_{p,j}(x) \ge (d_0 - \alpha/2) d(p, F_j x)^2 - o_j(1) \ge 4 a_p$$

对于固定的 $a_p > 0$ 以及所有充分大的 j。事实上， $d(p, F_j x) \ge r_p/3$ 最终成立。

利用利普希茨界和中心处的值，选取 $0 < \tau_p < r_p/10$，使得在 $B_{\tau_p}(p_j)$ 上有 $h_{p,j} < a_p/2$。用 $B_{\tau_p/3}(p)$ 覆盖 $\{f = s\}$，取有限子覆盖，其中心为 p_i，然后再最终选定 j。

有限截集。在标记球上构成闭集

$$K_j = \{u_j \ge s\} \setminus \bigcup_i V_{i,j}, \qquad V_{i,j} = \{d_j(x, p_{i,j}) < r_i,\ h_{i,j}(x) < a_i\}.$$

E_j 中的每个点的标记深度至少为 $t - o(1)$，并且到每个中心的距离至少为 $t - s - o(1)$，且对 E_j 一致。因此 $E_j \subset K_j$。集合 K_j 是紧致的，因为它们是标记紧球中的闭集，并且包含于其内部。

有限覆盖还给出了一个固定的 $\delta > 0$，其满足 $s + \delta < s_*$，使得 $u_j \geq s + \delta$ 最终位于 K_j 上。否则，深度趋于 s 的 K_j 中的点会有一个标记极限落在有限覆盖中某个成员内的 $\{f = s\}$ 上。它们最终会落入相应被移除的开集。

凸性。我们首先证明，每条端点位于 K_j 的最短弦都留在 $\{u_j > s\}$ 内。如果这类弦对无穷多个 j 都能到达 $u_j \leq s$，那么对每个这样的 j，取一条违反此性质的弦。它们的长度有界。取一个子列后，它们收敛到一条端点位于 $D_{s+\delta}$ 且与 $\{f \leq s\}$ 相交的极小化弦，这与引理 4 矛盾。

这样的弦 γ 也不能进入任何 $V_{i,\,j}$。若进入其中，则取 $\gamma^{-1}(V_{i,\,j})$ 的一个连通分支。在分支端点处，该弦不可能与径向边界 $d_j(x,\ p_{i,\,j}) = r_i$ 相交，因为 $h_{i,\,j} \geq 4a_i$ 在那里。于是两个端点都具有 $h_{i,\,j} = a_i$，即使某个端点本身是弦的端点也如此。两者之间的子弦段位于凹性定义域内，且具有 $h_{i,\,j} < a_i$，矛盾。因此，K_j 在 X_j 中是凸的。

根据凸包的交集定义，

$$E_j \subset H_j \subset K_j, \qquad F_j(K_j) \subset D_s.$$

特别地，H_j 是紧致的。对于每个固定的 $s < t$，这些包含关系最终都成立。递减的紧集 D_s 收敛到 D_t，当 $s \uparrow t$ 时，这就给出了所断言的估计。反向的豪斯多夫包含由集合 E_j 在它们收敛到 D_t 时得出。□

定理 2 的证明。若 $\partial D = \varnothing$，则 $D = A$ 是紧致的。取 $R > \operatorname{diam} A + 1$。基点收敛排除了在 X_j 中存在与标记基点距离为 R 的点，对所有充分大的 j 均如此；否则，通往更远点的最短线段会经过这样的点。因此，X_j 是紧致的，并且全局收敛到 A，于是对所有充分大的 j，我们取 $D_j = X_j$。有限个初始指标由下文构造的超水平集体处理。因此，我们假设 $\partial D \neq \varnothing$。

取 $t_m \downarrow 0$，使得 $t_m < s_*$。对于固定的 m，将 D_{t_m} 中越来越精细的网提升上去，并添加一个小的闭源球，该球以一个深度大于 t_m 的内点的一个提升为中心。其半径可以趋于零。根据引理 5，它们的闭凸包最终是紧致的，并收敛到 D_{t_m}。添加的球使这些凸包成为满维的。由 $\operatorname{Int}_A D$ 的稠密性，$D_{t_m} \to D$。

选取递增的指标 J_m，使得在层级 t_m 处，凸包误差为 $< 1/m$，对所有 $j \geq J_m$ 均成立。在 $J_m \leq j < J_{m+1}$ 上使用层级 t_m。这样便可沿整个尾段得到恢复。根据标记豪斯多夫收敛，闭体 D 外固定点的一个提升，在充分大的 j 时位于这些凸包之外。

对于有限个较早的指标，分别选取 $z \in \operatorname{Int} X_j$，以及定义在 $B_r(z)$ 上、具有孤立极大值 $b(z)$ 的强凹函数 b，依据定理 B 和推论 2.3]。缩小 r，使得 $b < 0$ 在 z 之外成立。选取 $c > 0$，使其在 $r/4 \leq d_j(z,\ \cdot)$ 上满足 $b < -c \leq r/2$。然后

$$Q = \{x \in \overline{B}_{r/2}(z) : b(x) \geq -c\} \subset B_{r/4}(z)$$

它是紧致且满维的。其点之间的每条最短弦都因其长度而留在 $B_r(z)$ 内；凹性和环域不等式则保证它留在 Q 内。在较早的指标处使用这些体。

□

4 使局部边界片严格凸

在定理 1 中，极限 A 根据 [6, 定理 6，4], 具有空边界，因为完备源流形具有空边界，且收敛保持维数不变。

命题 6。对于每个 $p \in \partial C$，都存在一个紧致的满维凸体 $D_0 \subset C$，它在 p 附近与 C 一致。体 D_0 是具有正的强底角下界的紧致凸体 D_ε 的递增的豪斯多夫极限。

证明。 取一个利普希茨函数 ψ，使得 $\psi(p) = 0$，在 p处有孤立极大值，并且 $\psi'' \le -b < 0$ 在$B_{2R}(p)$ [10, 命题 1.2(i)–(ii)]。缩小 R，使其在 p 之外满足 $\psi < 0$。在紧环带 $R/8 \le d(p,\ \cdot\ ) \le R/2$ 上，其最大值为负。选取足够小的 $c > 0$，使得

$$Q = \{x \in \overline{B}_{R/2}(p) : \psi(x) \ge -c\} \ \subset B_{R/8}(p).$$

每条端点位于 Q 中的最短弦，按其长度都留在 $B_{R/2}(p)$中，并因凹性而留在 Q 中。特别地， Q是紧致、凸的，并包含 p的一个环境邻域。

令 $K = \max(0, -\kappa)$。如有需要，缩小 c，并选择满足 $b > K(\tau + c)$的 $\tau > 0$。记$f = d_C(\cdot\ , \partial C)$。在 Int C上，沿单位速测地线有 $f'' \le Kf$。当 $K = 0$时，这就是边界距离的凹性。当 $K > 0$时，定理 3.3.1] 给出 $(\sinh(\sqrt{K}f))'' \le K\sinh(\sqrt{K}f)$。记作$k = \sqrt{K}$，由一维链式法则可得 $D^2(\sinh(kf)) = k\cosh(kf)D^2 f + k^2\sinh(kf)(f')^2\,dt$。除以 $D^2 f$的正系数，得到 $f'' \le \sqrt{K}\tanh(\sqrt{K}f)(1 - (f')^2) \le Kf$。这些不等式沿每条测地线都在弱意义下成立。

在 Int $C \cap B_R(p)$ 上定义

$$H_\varepsilon = \varepsilon\psi + \min\{f - \varepsilon\tau, \varepsilon c\}, \qquad D_\varepsilon = \{x \in C \cap Q : f(x) \ge \varepsilon(\tau - \psi(x))\}.$$

在 $B_{R/2}(p)$ 中，$\cap$ Int C 这是上水平集 $H_\varepsilon \ge 0$。在 D_ε 上，我们有 $f \ge \varepsilon\tau > 0$。第一支仅在 $f \le \varepsilon(\tau + c)$ 的区域内可能起作用。在那里，加上 $\varepsilon\psi$ 后，其二阶导数至多为$-\varepsilon[b - K(\tau + c)]$。另一支的上界为 $-\varepsilon b$。在等号成立处，由于 f 的连续性，第一支的上界在局部仍成立，且余量减半。在第一支严格不起作用的区域，只需考虑第二支。具有相同凹性界的函数的最小值仍保有该界。因此，在局部成立，从而沿工作区域内的每条弦也成立，

$$H_\varepsilon'' \le -b_\varepsilon, \qquad b_\varepsilon = \tfrac{\varepsilon}{2}[b - K(\tau + c)] > 0.$$

D_ε 的所有极小弦都留在 Q 和 Int C 内，因此也留在这个上水平集中。取靠近 p 且满足 $\psi(z) > -c$ 的 $z \in$ Int C。对于所有充分小的 ε，以 z 为中心的一个固定小球都严格满足这两个定义不等式。因此这些体是满维的。每个实际边界点都满足 $H_\varepsilon = 0$，因为外球约束并未起作用。反过来，体内的一个零点存在一个方向，使得沿该方向朝 z 的微分为正。在开环境区域上，存在一个支撑向量 v，满足 $dH(w) \le -\langle v, w\rangle$，对所有 w [14, Lemma 1.3.7] 均成立。它非零，且 $dH(v) < 0$。因此，零点不可能位于上水平集的内部。

对于长度为 ℓ、在 x处初始单位向量为 u 的边界弦，弦上的强凹性意味着 $d_x H_\varepsilon(u) \ge b_\varepsilon\ell/2$。对于每个 $\zeta \in \Sigma_x\partial D_\varepsilon$，同一微分在 ζ处也为零，因为边界割线在边界点对 [6, 的放大中收敛到它（推论 6.5], ），且 H_ε在所有这些割线的端点处都为零。因此，它们经过缩放的差商为零（定义 1.3.1]）。等距嵌入 $D_\varepsilon \subset A$ 将其切锥识别为 $T_x A$的一个子锥。放大后的微分是 L_ε-利普希茨的，$L_\varepsilon = 1 + \varepsilon\,\mathrm{Lip}\,\psi$。对于单位向量，锥距离为 $2\sin(\angle(u,\ \zeta)/2) \le \angle(u,\ \zeta)$。对 ζ取下确界，即可证明（1），其中 $a = b_\varepsilon/L_\varepsilon > 0$，且对 x一致成立。

设定 $D_0 = C \cap Q$。D_ε 随 $\varepsilon \downarrow 0$增加。从任意 $x \in D_0$出发，通往 z 的开弦位于 Int C中，并具有 $\psi > -c$。对于所有足够小的 ε，其每个点都位于 D_ε 中。这证明了稠密性，从而得到对 D_0的豪斯多夫收敛。此前选取的内切球始终适用。由于$\psi(p) = 0$，定义 Q 的截集在 p附近不起作用。 □

备注。 即使是接近恒等映射的光滑标记，在 C^1 中也可能破坏图的凸性。在欧几里得平面上考虑 $F_j(u,\ v) = (u,\ v + j^{-2}\sin(ju))$。上图 $bu^2/2$,$0 < b < 1$ 的像具有下图，其二阶导数为 $b - \sin(ju)$，在 $u = \pi/(2j)$处为负。定理 2 中的截集直接在源度量中得到凸性。

5 定理 1 的证明

在具有共同曲率下界的非塌缩 Gromov–Hausdorff 收敛的紧致 Alexandrov 空间中，只要极限空间具有非空边界，相应的边界分支就以内在长度

度量收敛。事实上，边界作为极值子集收敛 [6, 定理 6.4 和 6.8], 其边界分支通过相对稳定性一一对应 [8, 定理 9.2]„ 且其内在度量通过 [12, 定理 1.2]收敛。我们将此应用于在限制的环境度量下豪斯多夫收敛的满维凸体；它们的亚历山德罗夫边界与周围无边界空间中的拓扑边界重合 [9, 定理 1.1]。

对于应用定理 2 并取 $X_j = M_j$所恢复的体，每个逼近边界在光滑 M_j中局部都是凸超曲面。事实上，在边界点 x的强凸正规邻域中，从一个附近的内点向 x的邻域内各点作射线。对于经过 x 的射线，根据开弦性质， x 之前的点是内部点，之后的点则在外部。这两个严格条件在附近的射线上仍然成立。由凸性可知，每条射线上都有唯一的出射点；由于内部和外部都是开集，出射时间是连续的。这便给出了局部图像。Alexander–Kapovitch–Petrunin [2,的定理 1]表明，内蕴曲率至少为 κ，对非光滑凸超曲面也成立。根据边界分支的内蕴收敛性以及四点比较的 GH闭性，所恢复的体的边界具有相同的曲率下界。这已经证明了 $\kappa > 0$时的定理。

对于 $\kappa \le 0$ ，先将此论证应用于命题 6 中每个固定的 D_ε 。然后令 $\varepsilon \downarrow 0$趋于极限，并利用边界分支关于 $D_\varepsilon \to D_0$的内蕴收敛性。因此， D_0 的每个内蕴边界分支都是 CBB(κ)。两个边界集合 ∂D_0 和 ∂C 在某个 B_ρ（p）中相同。它们的内蕴度量芽也相同。事实上，这两个极值边界上的内蕴拓扑都是其子空间拓扑（引理 9）。8]在 p的一个充分小的公共邻域中，到 p 的内蕴距离在两个边界上均为 $< \rho/8$ ，而环境距离均为 $< \rho/8$。这两个点之间存在长度为 $< \rho/2$ 的路径，且路径可取在任一边界内；而离开B_ρ（p）的代价至少为 $7\rho/8$。因此，在公共集合中对路径取下确界，所得距离相同。

∂C 的每个分支在其内蕴拓扑下都是紧致的，因此是完备长度空间。它在每一点附近都是局部 CBB(κ) 的。整体化定理 [3,Thm. 8.31] 证明了这一断言。

当 $n = 2$ 和 $\kappa > 0$时，由 [14, §3.3.5],可知，每个边界分支的长度至多为 $2\pi/\sqrt{\kappa}$ ，因此在维数为一时采用施加直径界的约定，结论同样成立。

□

6 进一步说明

函数的提升与变动。 函数的提升是凸体提升的自然对应：局部凸函数的上图，或局部凹函数的下图，在 $A \times \mathbb{R}$中都是局部凸的。经过局部严格化后，可以对这些集合的紧致部分应用提升构造。在较小的定义域上读取其垂直纤维，便可得到收敛到原函数的函数。类似地，在保持垂直截面为射线的同时改变上图或下图本身，也能得到函数的变动。对于 λ-凹函数，可采用抛物型扭曲积，如 [14, p. 159], 中所示，并改变高度坐标，同时保持λ不变。这为 [14, Question 9.1.3]提供了一个局部解答。在紧致无边界极限上，也可以将局部提升拼接起来，得到全局提升：对于 $\lambda > 0$，取有限个函数的最小值会导致凹性略有损失，但可通过重新缩放消除这种损失。 $\lambda = 0$ 的情形是常数。根据 [14,§2.2]，提升后的函数也逼近原函数的局部梯度流。

凸体的变动。 第3节中采用有限支撑切割的构造，也允许在不假设可光滑化性的情况下改变 Alexandrov 空间中的凸体。通过在内平行体上选择不同的支撑点，并独立改变截断水平，可以得到介于 D_t 和 D_s之间的凸体族，其中 $0 < s < t$ 足够小。这些截集可以在互不相交的邻域内进行，因此可以独立改变边界的不同部分。

极限的变形及其近似。 亚历山德罗夫空间也会在黎曼几何中出现，作为猜想命题的可能反例序列的极限。改变这样的极限，或许有助于我们理解邻近几何。此外，在可光滑化的情形下，

下文所述的构造使我们不仅能够改变极限，还能改变预先指定的流形近似序列。关于边界猜想，Petrunin 建议按如下方式改变亚历山德罗夫空间 [14]。对于凸邻域 $U \subset A$ 上的凹函数 f，考虑其图像

$$\Gamma_t = \{(x, tf(x)) : x \in U\} \subset A \times \mathbb{R}, \qquad t \geq 0,$$

配备其内在度量。若 A 可光滑化，定理 1 表明这些图的局部曲率至少为 $\kappa_0 = \min\{\kappa, 0\}$，并且当 $t \to 0$时，它们局部收敛到 U。这一构造也可沿指定的光滑化序列 $M_j \to A$进行：提升 f，加入一个趋于零的严格凹修正项，并利用 [2, 引理 4]在更小的定义域上进行光滑化。对每个固定的 t，所得光滑图度量收敛到 Γ_t的内在度量，并具有相同的曲率下界κ_0。对于紧空间，也可以改用半凹函数和抛物构造。若这些函数能沿指定序列提升，且具有一致的半凹性和 Lipschitz 界，则所得图度量的曲率至少为 $\kappa - O(t^2)$。对于 $\kappa \neq 0$，随后施加一个趋于恒等映射的位似变换，即可恢复曲率下界 κ。

凸包的稳定性。 我们的方法也可以从 Gromov–Hausdorff 收敛下凸包稳定性的角度来理解。我们从极限凸体中提升有限网，并在逼近空间中取其凸包。主要难点在于，如何使整个凸包都接近希望恢复的体。Alexander Lytchak 和 Anton Petrunin [17]证明，对于维数至少为三的 C^2-一般黎曼度量，连通凸集除非包含于一条测地线中，否则都有内部。在定理 2 的假设下，我们的支撑切割为内逼近提供了所需的控制；参见引理 5。

如果去掉定理 2 中的附加假设，即使在 $\kappa = 0$ 处，这种稳定性也可能失效。例如，长实心圆柱内在边界曲面上的一条狭窄中央带是凸的，但在略微收窄的带端盖的截锥上无法实现紧致凸恢复。

致谢与披露

我谨向 Anton Petrunin 致谢，感谢他让我接触 Alexandrov 几何，尤其是边界猜想，并感谢他多年来与我进行的诸多讨论。

本文是在与 ChatGPT（OpenAI）的合作中构思并撰写的。我完全理解文中提出的所有数学论证，并对本文内容承担全部责任。

参考文献

[1] S. B. Alexander 和 R. L. Bishop，《Alexandrov 几何中半凸子空间的外在曲率》，*Ann. Global Anal. Geom.* 37 (2010), 241–262. doi:10.1007/s10455-009-9182-8.[2] S. Alexander、V. Kapovitch 和 A. Petrunin，《黎曼流形中凸超曲面的最优曲率下界》，*Illinois J. Math.* 52 (2008), 1031–1033. arXiv:1303.5884.[3] S. Alexander、V. Kapovitch 和 A. Petrunin，《*Alexandrov* 几何：基础》，第 8 章。`https://anton-petrunin.github.io/book/arXiv.pdf`.[4] Yu. Burago、M. Gromov 和 G. Perelman，《曲率下界的 A. D. 亚历山德罗夫空间》，*Russian Math. Surveys* 47 (1992), 第 2 期，1–58.[5] S. V. Buyalo，《黎曼空间凸超曲面上的最短路径》，*J. Soviet Math.*12 (1979), 73–85.[6] Q. Deng 和 V. Kapovitch，《亚历山德罗夫空间边界体积的尖锐界与刚性》，§6。arXiv:2308.14668。

[7] K. Grove、A. Moreno 和 P. Petersen，《叶空间的边界猜想》，*Ann. Inst.Fourier* 69 (2019), 第 7 期，2941–2950.[8] V. Kapovitch，《Perelman 的稳定性定理》，*Surveys in Differential Geometry* XI (2007), 103–136. arXiv:math/0703002.[9] V. Kapovitch 和 X. Zhu，《具有曲率下界的度量测度空间的内在边界与外在边界》。arXiv:2210.07405.[10] A. Nepechiy，《亚历山德罗夫空间中的典范凸函数》，2019。arXiv:1910.00253.[11] G. Perelman，《亚历山德罗夫空间上的莫尔斯理论要素》，*St. Petersburg Math. J.* 5 (1994), 205–213。MathNet: aa374.[12] A. Petrunin，《拟测地线与梯度曲线的应用》，载于比较几何, MSRI Publications 30 (1997), 203–219. `https://library.slmath.org/books/Book30/files/petrunin.pdf`.[13] A. Petrunin，《曲率下界亚历山德罗夫空间中的平行移动》，*Geom. Funct. Anal.* 8 (1998), 123–148. `https://anton-petrunin.github.io/papers/petrunin-parallel.pdf`.[14] A. Petrunin，《亚历山德罗夫几何中的半凹函数》，*Surveys in Differential Geometry* XI (2007), 137–201. doi:10.4310/SDG.2006.v11.n1.a6.[15] G. Perelman 和 A. Petrunin，《亚历山德罗夫空间中的拟测地线与梯度曲线》，伯克利预印本（1994）。[16] N. Lebedeva 和 A. Petrunin，《可平滑化的亚历山德罗夫空间的曲率张量》，*Geom.Topol.* 28 (2024), 3869–3907.[17] A. Lytchak 和 A. Petrunin，《关于一般黎曼流形中的任意凸集》，*J.Reine Angew. Math.* 782 (2022), 235–245. doi:10.1515/crelle-2021-0058。