arXiv:2611.30870v1 [math.CA] 23 Nov 2026

$T1$ 定理在 Dini 正则性下

KANGWEI LI

摘要。我们证明了在核满足经典 Dini 正则性条件下 Calderón-Zygmund 算子的 $T1$ 定理，从而解决了奇异积分理论中一个长期悬而未决的问题。

1. 引言

给定一个奇异积分算子 T，一个基本问题是如何刻画其 L^2有界性。Calderón 和 Zygmund 的经典理论 [3] 为这一问题提供了解析框架。David 和 Journé 的 $T1$ 定理 [4] 为非卷积算子给出了一个特别有效的答案：对于标准 Hölder 连续核，在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上有界等价于弱有界性以及条件 $T1$，$T^*1 \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$。

我们关注这一判据所需的正则性程度。设 $K\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x,x)\colon x \in \mathbb{R}^d\} \to \mathbb{C}$ 满足

$$|K(x,y)| \le C_K |x-y|^{-d} \tag{1.1}$$

and

$$\begin{aligned} &|K(x+h,y) - K(x,y)| + |K(y,x+h) - K(y,x)| \\ &\qquad \le |x-y|^{-d}\omega\left(\frac{|h|}{|x-y|}\right), \qquad |h| \le \frac{1}{2}|x-y|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $C_K > 0$ 和 $\omega\colon [0,1] \to [0,\infty)$ 单调且次可加，并且 $\omega(0) = 0$。记

$$\|\omega\|_{\mathrm{Dini}_\alpha} = \int_0^1 \omega(t)\left(1 + \log\frac{1}{t}\right)^\alpha \frac{dt}{t}, \qquad \alpha \ge 0.$$

Dini 条件是 $\|\omega\|_{\mathrm{Dini}} < \infty$，其中 $\mathrm{Dini} = \mathrm{Dini}_0$。

标准的 Hölder 连续核满足 $\omega(t) = t^\gamma$，其中某个 $\gamma \in (0,1]$。弱化 $T1$ 定理中的 Hölder 条件由来已久。$\omega \in \mathrm{Dini}^{1/2}$ 条件隐含于 Figiel 的工作 [6] 中，并由 Deng、Yan 和 Yang [5]明确提出。Grau de la Herrán 和 Hytönen [7] 通过二进表示重新得到了这一临界条件，并将其推广到非齐次空间。他们的表示公式包含模型算子，其 L^2 界的阶为复杂度的平方根。将这些界与 $\omega(2^{-k})$相乘求和，可得条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\,\omega(2^{-k}) < \infty,$$

2020数学学科分类。 42B20。关键词与短语。 Calderón–Zygmund 算子， $T1$ 定理，Dini 连续性。

这恰好就是条件 $\omega \in \mathrm{Dini}^{1/2}$。值得一提的是，这一思路后来在 [1], 中得到了进一步完善，甚至推广到了多线性和向量值情形。

我们预期，Dini 正则性条件足以保证 $T1$ 定理成立，因为它与 Calderón–Zygmund 理论十分契合。特别是，假设已知L^2 有界性，那么在这一正则性水平下，逐点稀疏控制及其加权推论均可获得 [8, 9]。在 [10, 第 4], 节中，Lerner 和 Ombrosi 明确提出了一个问题： $T1$ 定理在 Dini 条件下是否成立。本文旨在欧几里得空间中确立这一判据。因此，从 $T1$ 假设推出有界性所需的正则性，与后续估计中采用的正则性一致。

我们的主要结果如下。

1.3. **定理**。 设 $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 是一个连续线性算子，其核 K满足 (1.1) 和 (1.2)。假设 ω 满足 ***Dini*** 条件，则 T 可延拓为 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的有界算子，当且仅当它具有弱有界性，并且 $T1$， $T^*1 \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$。更准确地说，

$$\|T\|_{L^2\to L^2} \le C_d\big(C_K + \|\omega\|_{\mathrm{Dini}} + C_{\mathrm{WBP}} + \|T1\|_{\mathrm{BMO}} + \|T^*1\|_{\mathrm{BMO}}\big), \tag{1.4}$$

其中， C_{WBP} 是弱有界性中的常数。

证明的要点是进行分解

$$T = S + E. \tag{1.5}$$

误差项 E 在 L^2上可直接得到有界性，其界只取决于核。随后，光滑部分 S 由经典的 $T1$ 定理处理。下面的结果给出了这一思想的精确形式。

1.6. **定理**。 设 K 满足 (1.1) 和 (1.2)，其中 ω 满足 ***Dini*** 条件。则存在一个算子 E 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上有界，以及一个核 $H \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x,x)\colon x \in \mathbb{R}^d\})$，使得 $K - H$ 是 E的核，

$$\|E\|_{L^2\to L^2} \le C_d(C_K + \|\omega\|_{\mathrm{Dini}}), \tag{1.7}$$

并且，对于任意一对多重指标 α、 $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta H(x,y)| \le C_{d,\alpha,\beta}(C_K + \|\omega\|_{\mathrm{Dini}})|x-y|^{-d-|\alpha|-|\beta|}. \tag{1.8}$$

设 T 如定理 1.3 中所述，并定义 $S := T - E$。容易验证， H 是 S的核。由（1.7）可立即知，弱有界性传递到 S。此外，根据（1.8）， E的核，即 $K - H$，满足 Dini 条件。因此，由标准论证可得 $E1$、 E^*1 属于 BMO，其范数至多为 $C_d(C_K + \|\omega\|_{\mathrm{Dini}})$。于是， S继承了 T的全部 $T1$ 假设。注意，在这里，关于 E的核信息同样十分重要；仅凭（1.7）并不能推出所需的 BMO 结论。

我们应当指出，将奇异积分化归为一个较简单的算子（模去一个有界误差项）的思想在文献中早已出现。例如，Auscher 和 Yang 基于 BCR 的构造 [2] 在对完整核附加局部有界性假设的条件下，为 Hölder 核构造了一个完美二进算子。

现在我们简要说明如何得到误差算子 E。首先，我们将 K局部化到 $|x-y| \simeq 2^{-j}$，这意味着我们写作

$$K(x,y) = \sum_j K_j(x,y), \qquad \operatorname{spt} K_j \subseteq \big\{(x,y)\colon |x-y| \simeq 2^{-j}\big\}.$$

用 T_j 表示与 K_j相关联的积分算子。设 P_j 是一个傅里叶乘子，其符号为 $\rho(2^{-j}\xi)$，其中 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$是一个径向函数，满足在 $\{|\xi| \le 1\}$上有 $0 \le \rho \le 1$、在 $\{|\xi| \ge 2\}$上有 $\rho = 0$。形式上，我们写作

$$T_j = (I-P_j)T_j(I-P_j) + P_jT_j(I-P_j) + (I-P_j)T_jP_j + P_jT_jP_j.$$

我们将证明

$$\sum_j (I-P_j)T_j(I-P_j)$$

在 L^2（引理 3.4）中强收敛。部分 $\sum_j (I-P_j)T_jP_j$ 需要额外的修正。我们将引入一个光滑抛物积Π_{b_j} 并证明

$$\sum_j \left((I-P_j)T_jP_j - \Pi_{b_j}\right)$$

在 L^2（引理3.4）中强收敛。由于

$$((I-P_j)T_jP_j)^* = P_jT_j^*(1-P_j)$$

this 可以用类似的方式处理。这三项将构成误差算子 E。

为了直观了解我们为何能够达到 Dini 正则性，我们还提及以下内容：

$$\sum_{q=1}^{\infty} 2^q\omega(2^{-2^q}) \lesssim \sum_{q=1}^{\infty}\int_{2^{q-1}}^{2^q}\omega(2^{-t})\,\mathrm{d}t = \int_1^{\infty}\omega(2^{-t})\,\mathrm{d}t \simeq \int_0^1 \omega(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

上述展示式左端的和正是我们将要使用的内容，参见定理1.6的证明。

本文的结构安排如下。第2 节将详细介绍我们对核的分解，并给出一些辅助结果。第3 节将着重证明主要结果。

致谢。本研究得到国家自然科学基金项目（编号12671125和12222114）的资助。

AI 使用声明。证明策略是在 GPT-6-Astra ultra 的帮助下制定的。本文由作者撰写，作者将承担全部责任。

2. 预备知识

本节旨在记录后续各节所需的基本符号和初步估计。

2.A. 经典奇异积分理论。 按照惯例，我们用 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$表示Schwartz类，并将其对偶空间记为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$。奇异积分算子最初是一个连续线性映射

$$T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

其对偶空间定义为 $\langle T^*f,\ g\rangle = \langle f,\ Tg\rangle$。我们称 $K\colon\ \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \setminus \{(x,\ x)\colon x \in \mathbb{R}^d\} \to \mathbb{C}$是 T 的核，如果我们有核表示

$$\langle Tf, g\rangle = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)g(x)\,dy\,dx \tag{2.1}$$

只要 f, $g \in C_c^\infty$（$\mathbb{R}^d$）具有不相交的支集。全文中，我们假设 K满足大小条件（1.1）和正则性条件（1.2，其中 ω： $[0,1] \to [0,\infty)$）满足 ω（0） $= 0$ 且

$$\|\omega\|_{\mathrm{Dini}} := \int_0^1 \omega(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty.$$

特别地，次可加性和单调性给出

$$\omega(st) \le (1+s)\omega(t) \tag{2.2}$$

只要 t, $st \in [0,1]$，这一事实将在后文中频繁使用。

现在陈述 $T1$ 假设。设 Q 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个立方体，其边平行于坐标轴；如果 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足以下条件，我们称其为适配的归一化凸起函数：

$$\operatorname{spt}\phi \subset Q, \qquad \ell(Q)^{|\alpha|}\left\|\partial^\alpha \phi\right\|_\infty \le 1 \quad (|\alpha| \le d+2).$$

如果 T 具有弱有界性，我们称其满足弱有界性条件：

$$|\langle T\phi, \psi\rangle| \le C_{\mathrm{WBP}}|Q| \tag{2.3}$$

对于每个立方体 Q 以及任意一对这样的凸起函数 ϕ, ψ。这就是通常的有限阶凸起函数表述。我们还假设 $T1$, $T^*1 \in$ BMO，回顾可知

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |b - b_Q|, \qquad b_Q := \frac{1}{|Q|}\int_Q b.$$

回顾一下，在引言中我们提到，主要目标是证明分解 $T = S + E$，其中 E 在 L^2 上是有界的，并且我们将对光滑算子 S应用经典的 $T1$ 定理。但是， $T1$ 的假设是施加在T上的，因此我们必须证明 S能够从 T继承 $T1$ 的假设。

S 的弱有界性是显然的。对于其余部分，我们记录如下结果

2.4. **引理**。 设 E 是一个奇异积分算子，其核满足 (1.1) 和 (1.2)，且具有 *Dini* 模 θ。假设 E 在 L^2上有界，则

$$\|E1\|_{\mathrm{BMO}} + \|E^*1\|_{\mathrm{BMO}} \le C\big(\|E\|_{L^2\to L^2} + \|\theta\|_{\mathrm{Dini}}\big).$$

证明是标准的，因为 Dini 条件蕴含经典 Hörmander 条件；在这种情况下，我们已经知道奇异积分将 L^∞ 映射到 BMO。接下来我们记录经典的 David–Journé $T1$ 定理。

2.5. **定理**。 设 S： $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 连续，且相应的核 H 满足

$$|H(x,y)| \le C_H|x-y|^{-d}, \qquad |\nabla_x H(x,y)| + |\nabla_y H(x,y)| \le C_H|x-y|^{-d-1}.$$

若 S 满足 (2.3) 且 $S1, S^*1 \in$ BMO，则 S 可唯一有界延拓至 $L^2(\mathbb{R}^d)$，并且

$$\|S\|_{L^2\to L^2} \le C_d\big(C_H + C_{\mathrm{WBP}} + \|S1\|_{\mathrm{BMO}} + \|S^*1\|_{\mathrm{BMO}}\big).$$

2.B. **核的环形分解**。 现在我们详细讨论核的环形分解。取一个光滑径向函数 χ_0，使得在$\{|u| \le 1\}$ 上 $\chi_0 = 1$，并且在 $\{|u| \ge 2\}$上 $\chi_0 = 0$，并设 $\eta(u) = \chi_0(u) - \chi_0(2u)$。于是，$\eta$ 的支集包含于$\{1/2 \le |u| \le 2\}$中，作望远镜求和可得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta(2^j u) = 1, \qquad u \ne 0.$$

然后定义

$$K_j(x,y) = \eta(2^j(x-y))K(x,y), \qquad T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x,y) f(y)\, dy. \tag{2.6}$$

每个 T_j 都是一个真正的积分算子，不论 T 是否有界。大小估计（1.1）和环形支撑给出

$$|T_j f| \lesssim C_K M f,$$

其中 M 表示 Hardy-Littlewood 极大算子。因此，我们很容易得到$\|T_j\|_{L^2\to L^2} \le C_K$。对于每个 $x \neq y$,

$$K(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} K_j(x,y),$$

并且当 $x \neq y$时，这个和只有有限个非零项。由此可知，如果f，$g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$的支撑互不相交，那么

$$\langle Tf, g\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle T_j f, g\rangle \qquad (\operatorname{spt} f \cap \operatorname{spt} g = \varnothing), \tag{2.7}$$

其中该公式中的和是有限的。接下来，我们将详细进行引言中提到的对 T_j的进一步分解。

设 P_j 是一个傅里叶乘子，其符号为 $\rho(2^{-j}\xi)$，其中 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$是一个径向函数，满足 $0 \le \rho \le 1$、 $\rho = 1$ 在 $\{|\xi| \le 1\}$上，以及 $\rho = 0$ 在 $\{|\xi| \ge 2\}$上。定义 $Q_j = P_j - P_{j-1}$。我们还定义相应的非光滑对应物。具体而言，设 L_j 是一个球形傅里叶乘子，其符号为 $1_{\{|\xi|\le 2^j\}}$，并定义 $H_j = I - L_j$，其中 I 表示恒等算子。根据定义，

$$\operatorname{spt} \widehat{Q_j f} \subset \{\xi : 2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\}.$$

于是，Plancherel 定理和有界重叠给出

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|Q_j f\|_2^2 \le C\, \|f\|_2^2 . \tag{2.8}$$

有了这些结果，我们将其分解为

$$T_j = (I-P_j)T_j(I-P_j) + (I-P_j)T_jP_j + P_jT_j(I-P_j) + P_jT_jP_j.$$

由于 T_j， P_j 在 L^2 函数上都有良好定义，右侧的所有项也都有良好定义。为处理这些项，下面的结果将被频繁使用。

2.9. **命题**。设 F_j 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的一列有界算子，满足 $\|F_j\|_{L^2\to L^2} \le C_0$。假设对于每个整数 $N \ge 10$,

$$\|(I - B_{j,N})F_j\|_{L^2\to L^2} + \|F_j(I - B_{j,N})\|_{L^2\to L^2} \le a_N,$$

其中 $B_{j,\ N} = L_{j+N} - L_{j-N}$ 且 $a_N \ge 0$ 在 $N \ge 10$上递减且可求和。于是

$$\Big\| \sum_j F_j \Big\|_{L^2\to L^2} \le CC_0 + C \sum_{N\ge 6} a_N.$$

证明。由于

$$\begin{aligned}\|F_j - B_{j,N}F_jB_{j,N}\|_{L^2\to L^2} &\le \|F_j - B_{j,N}F_j\|_{L^2\to L^2} + \|B_{j,N}F_j - B_{j,N}F_jB_{j,N}\|_{L^2\to L^2}\\ &\le \|(I-B_{j,N})F_j\|_{L^2\to L^2} + \|F_j(I-B_{j,N})\|_{L^2\to L^2} \le a_N,\end{aligned}$$

并且 $a_N \to 0$当 $N\to\infty$时，我们可以写成

$$F_j = B_{j,10}F_jB_{j,10} + \sum_{q=1}^{\infty}\big(B_{j,10\cdot 2^q}F_jB_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}}F_jB_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big).$$

那么对于任意有限的 $\mathcal{J}\subset\mathbb{Z}$，我们有

$$\Big\|\sum_{j\in\mathcal{J}} B_{j,10}F_jB_{j,10}f\Big\|_{L^2} \le \sum_{r=0}^{19}\Big\|\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\equiv r(\mathrm{mod}\,20)}} B_{j,10}F_jB_{j,10}f\Big\|_{L^2}.$$

根据Plancherel定理，并将$B_{j,\ 10}$到$U_{j,\ 10}$的傅里叶支撑设为，其中我们定义

$$U_{j,N} := \{\xi : 2^{j-N}\le|\xi|\le 2^{j+N}\},$$

我们有

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\equiv r(\mathrm{mod}\,20)}} B_{j,10}F_jB_{j,10}f\Big\|_{L^2} &= \Big(\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\equiv r(\mathrm{mod}\,20)}} \|B_{j,10}F_jB_{j,10}f\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}\\ &\le C_0\Big(\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\equiv r(\mathrm{mod}\,20)}} \|B_{j,10}f\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}\\ &\le C_0\|\widehat{f}\,1_{\cup_{j\in\mathcal{J}}U_{j,10}}\|_{L^2} \le C_0\|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

这表明

$$\Big\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} B_{j,10}F_jB_{j,10}f\Big\|_{L^2} \lesssim C_0\|f\|_{L^2}.$$

接下来，我们估计.....的范数

$$\sum_{j\in\mathcal{J}}\sum_{q=1}^{\infty}\big(B_{j,10\cdot 2^q}F_jB_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}}F_jB_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big), \tag{2.10}$$

其中 $\mathcal{J}$ 仍是一个有限集。然后，我们可以交换求和次序，并将上式改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j\in\mathcal{J}}\big(B_{j,10\cdot 2^q}F_jB_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}}F_jB_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big)\\ &=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{20\cdot 2^q-1}\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\equiv r(\mathrm{mod}\,20\cdot 2^q)}}\big(B_{j,10\cdot 2^q}F_jB_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}}F_jB_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big).\end{aligned}$$

与之前类似，我们得到

$$\Big\|\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j\in\mathcal{J}}\big(B_{j,10\cdot 2^q}F_jB_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}}F_jB_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big)f\Big\|_{L^2}$$

$$\leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{20\cdot 2^q-1} \Big(\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\equiv r(\mathrm{mod}\, 20\cdot 2^q)}} \big\| \big(B_{j,10\cdot 2^q} F_j B_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}} F_j B_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big) f \big\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

此时，我们注意到

$$\begin{aligned} &\big(B_{j,10\cdot 2^q} F_j B_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}} F_j B_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big) f \\ &\qquad = \big(B_{j,10\cdot 2^q} F_j B_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}} F_j B_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big)(B_{j,10\cdot 2^q} f) \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} &\|B_{j,10\cdot 2^q} F_j B_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}} F_j B_{j,10\cdot 2^{q-1}}\|_{L^2\to L^2} \\ &\leq \|B_{j,10\cdot 2^q} F_j B_{j,10\cdot 2^q} - F_j\|_{L^2\to L^2} + \|F_j - B_{j,10\cdot 2^{q-1}} F_j B_{j,10\cdot 2^{q-1}}\|_{L^2\to L^2} \\ &\leq a_{10\cdot 2^q} + a_{10\cdot 2^{q-1}} \leq 2a_{10\cdot 2^{q-1}}. \end{aligned}$$

结合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j\in\mathcal{J}} \big(B_{j,10\cdot 2^q} F_j B_{j,10\cdot 2^q} - B_{j,10\cdot 2^{q-1}} F_j B_{j,10\cdot 2^{q-1}}\big) f \Big\|_{L^2\to L^2} \\ &\leq C \sum_{q=1}^{\infty} 2^q a_{10\cdot 2^{q-1}} \|\widehat{f}\, 1_{\cup_{j\in\mathcal{J}} U_{j,10\cdot 2^q}}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

这表明（2.10）收敛，并且其极限在 L^2 上有界，范数为

$$\sum_{q=1}^{\infty} 2^q a_{10\cdot 2^{q-1}} \leq \frac{2}{5} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=10\cdot 2^{q-2}+1}^{10\cdot 2^{q-1}} a_s = \frac{2}{5} \sum_{q\geq 6}^{\infty} a_q.$$

证明完毕。 □

命题 2.9 对我们至关重要。我们将把它应用于 $F_j = (I - P_j) T_j (I - P_j)$ 和 $F_j = (I - P_j) T_j P_j - \Pi_{b_j}$，其中 $b_j = (I - P_j) T_j 1$ 以及

$$\Pi_{b_j} f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (Q_n b_j) P_{n-6} f.$$

我们依次给出一些观察。首先，由于 $T_j 1$ 有界， b_j 也有界。其次，根据 Q_n 和 b_j 的定义，当 $n \leq j - 1$时， $Q_n b_j = 0$ 。最后，当 f 在 $\{\xi$ 处具有傅里叶支撑时：对于 $N \geq 6$， $|\xi| \leq 2^{j-N}\}$ ，我们有

$$\Pi_{b_j} f = \sum_{n\geq j} (Q_n b_j) P_{n-6} f = \sum_{n\geq j} (Q_n b_j) f = b_j f. \tag{2.11}$$

(2.11) 说明了我们为何要进行这样的修正，因为这样一来，当作用于具有适当傅里叶支撑的函数时，我们就能在$(I - P_j)T_j P_j - \Pi_{b_j}$ 的核中得到一些消去性。注意， $P_j T_j (I - P_j)$ 可以视为$(1 - P_j)T_j^* P_j$的对偶空间，因此可以用类似的方法处理。此外， $P_j T_j P_j$ 是光滑部分的一个分量，我们将在下一节讨论这一点。

我们以如下（众所周知的）引理结束本节。

2.12. **引理**。 设 $b \in L^\infty$ 和 Π_b 由下式定义(2.11)。则有

$$\|\Pi_b\|_{L^2 \to L^2} \leq C\|b\|_{L^\infty}. \tag{2.13}$$

此外，相应的核 $\pi(x,y)$ 满足：对于所有多重指标 α, β,

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \pi(x,y)| \leq C_{\alpha,\beta}\|b\|_{L^\infty}|x-y|^{-d-|\alpha|-|\beta|}, \qquad x \neq y. \tag{2.14}$$

证明。 估计式（2.13）众所周知，为了完整起见，我们在此简述证明。首先，注意到求和项的傅里叶支撑$(Q_n b)P_{n-6}f$ 是

$$\{\xi : (2^{-1}-2^{-5})2^n \leq |\xi| \leq (2+2^{-5})2^n\},$$

于是我们可以将抛物积分解为

$$\Pi_b f = \sum_{r=0}^{4} \sum_{n \equiv r \,(\mathrm{mod} 5)} (Q_n b)P_{n-6}f =: \sum_{r=0}^{4} \Pi_b^r f.$$

由三角不等式，我们只需估计 $\Pi_b^r f$；此时 $\Pi_b^r f$ 中的求和项具有互不相交的傅里叶支撑。根据 Plancherel公式，我们只需估计对角项

$$\sum_{n \equiv r \,(\mathrm{mod} 5)} \int_{\mathbb{R}^d} |Q_n b|^2 |P_{n-6}f|^2 = \sum_{n \equiv r \,(\mathrm{mod} 5)} \sum_{Q \in \mathcal{D}_n} \int_Q |Q_n b|^2 |P_{n-6}f|^2,$$

其中 $\mathcal{D}_n$ 表示边长为 2^{-n} 的标准二进方块集合。另一方面，对于 $x \in Q \in \mathcal{D}_n$,

$$\begin{aligned} |P_{n-6}f(x)| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2^{(n-6)d}}{(1+2^{n-6}|x-y|)^{100d}} |f(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\lesssim \inf_{z \in Q} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2^{(n-6)d}}{(1+2^{n-6}|z-y|)^{100d}} |f(y)|\,\mathrm{d}y \lesssim \inf_{z \in Q} Mf(z). \end{aligned}$$

另一方面，不难建立 Carleson估计

$$\sum_{n \equiv r \,(\mathrm{mod} 5)} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_n \\ Q \subset Q_0}} \int_Q |Q_n b|^2 \leq \sum_{n \equiv r \,(\mathrm{mod} 5)} \int_{Q_0} |Q_n b|^2 \lesssim \|b\|_{L^\infty}^2 |Q_0|, \tag{2.15}$$

其中 $r \in \{0,1,\ldots,4\}$ 为固定值。事实上，将 $b = b\mathbf{1}_{4Q_0} + b\mathbf{1}_{(4Q_0)^c}$分解为 $4Q_0$ 是 Q_0的同心膨胀。对于第一部分，利用（2.8）可得

$$\sum_{n \equiv r \,(\mathrm{mod} 5)} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_n \\ Q \subset Q_0}} \int_Q |Q_n(b1_{4Q_0})|^2 \leq \sum_n \|Q_n(b\mathbf{1}_{4Q_0})\|_2^2 \leq C\,\|b\mathbf{1}_{4Q_0}\|_2^2 \leq C\|b\|_{L^\infty}^2 |Q_0|.$$

对于第二部分，利用核（例如 Q_n 的核 q_n）的快速衰减，可得

$$|Q_n(b\mathbf{1}_{(4Q_0)^c})(x)| \leq C\|b\|_{L^\infty}(2^n \ell(Q_0))^{-99d}, \qquad x \in Q_0, \quad n \geq n_0,$$

其中 n_0 是 Q_0 的代，即我们假设 $Q_0 \in \mathcal{D}_{n_0}$。事实上，将估计式$|q_n(z)| \leq C2^{nd}(1+2^n|z|)^{-100d}$ 在 $|z| \geq c\ell(Q)$上积分。对所得的等比级数平方并求和，即可证明（2.15）。

现在有了（2.15），我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\equiv r\,(\mathrm{mod}5)}\sum_{Q\in\mathcal{D}_n}\int_Q|Q_nb|^2|P_{n-6}f|^2 &\lesssim \sum_{n\equiv r\,(\mathrm{mod}5)}\sum_{Q\in\mathcal{D}_n}\int_Q|Q_nb|^2(\inf_Q Mf)^2\\ &=2\int_0^\infty\sum_{n\equiv r\,(\mathrm{mod}5)}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}_n\\ \inf_Q Mf>\lambda}}\int_Q|Q_nb|^2\lambda\,\mathrm{d}\lambda\\ &\le 2\int_0^\infty\sum_{n\equiv r\,(\mathrm{mod}5)}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}_n\\ Q\subset\{Mf>\lambda\}}}\int_Q|Q_nb|^2\lambda\,\mathrm{d}\lambda\\ &\lesssim\|b\|_{L^\infty}^2\int_0^\infty\lambda|\{Mf>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\ &\simeq\|b\|_{L^\infty}^2\|Mf\|_{L^2}^2\lesssim\|b\|_{L^\infty}^2\|f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

尚需证明 (2.14)。注意， $\pi(x,\ y)$ 的每个求导后的项都可以估计为

$$C_{\alpha,\beta,N}\|b\|_{L^\infty}2^{n(d+|\alpha|+|\beta|)}(1+2^n|x-y|)^{-N}.$$

接着直接写为

$$\sum_n=\sum_{n:2^n\ge|x-y|^{-1}}+\sum_{n:2^n<|x-y|^{-1}}$$

即可得到所需的估计。 □

3. Proof of the main results

我们先证明定理1.6。首先给出以下核估计

3.1.**引理**。分别将 T_jP_j 和 $P_jT_jP_j$ 的核记为 $K_j^{(1)}$ 和 $K_j^{(2)}$ 。则有

$$|K_j^{(1)}(x,y)|\le CC_K2^{jd}(1+2^j|x-y|)^{-100d}\tag{3.2}$$

并且对所有多重指标 α、 $\beta\in\mathbb{N}^d$,

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K_j^{(2)}(x,y)|\le C_{\alpha,\beta}C_K2^{j(d+|\alpha|+|\beta|)}(1+2^j|x-y|)^{-100d}.\tag{3.3}$$

证明。 我们首先证明（3.2）。根据定义，我们可以写成

$$K_j^{(1)}(x,y):=\int K_j(x,v)p_j(v-y)\,\mathrm{d}v,$$

其中 p_j 由 $\widehat{p_j}(\xi)=\rho(2^{-j}\xi)$ 定义。于是，由于 $|x-v|\sim2^{-j}$ ，我们有

$$|p_j(v,y)|\lesssim2^{jd}(1+2^j|v-y|)^{-100d}\sim2^{jd}(1+2^j|x-y|)^{-100d}.$$

因此，3.2）得证。接下来我们证明（3.3）。同样， $P_jT_jP_j$ 的核可写为 s

$$K_j^{(2)}(x,y)=\iint p_j(x-u)K_j(u,v)p_j(v-y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Then

$$\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K_j^{(2)}(x,y)=2^{j(|\alpha|+|\beta|)}\iint2^{jd}(\partial^\alpha p)(2^j(x-u))K_j(u,v)2^{jd}(\partial^\beta p)(2^j(v-y))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

和之前一样，我们有

$$|(\partial^\alpha p)(2^j(x-u))| \lesssim (1+2^j|x-u|)^{-100d}$$

and

$$|(\partial^\beta p)(2^j(v-y))| \lesssim (1+2^j|v-y|)^{-100d}.$$

由于 $|u-v| \sim 2^{-j}$，我们有

$$1+2^j|x-u| \sim 1+2^j|x-v|.$$

然后将积分拆分为 v、$|x-v| \geq |x-y|/2$ 和 $|x-v| < |x-y|/2$；在后一种情况下，我们必须有 $|y-v| \geq |x-y|/2$。因此我们得出

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_j^{(2)}(x,y)| \lesssim C_K 2^{j(|\alpha|+|\beta|)} 2^{jd}(1+2^j|x-y|)^{-100d}.$$

□

接下来我们证明以下结论，这对主要结果至关重要。

3.4.**引理**。设

$$F_j \in \big\{(I-P_j)T_j(I-P_j), (I-P_j)T_jP_j - \Pi_{b_j}\big\}.$$

于是有

$$\Big\| \sum_j F_j \Big\|_{L^2\to L^2} \leq C(\|\omega\|_{\mathrm{Dini}} + C_K).$$

*P*证明。 由命题 2.9 可知，只需证明对每个整数 $N \geq 10$ ，

$$\|(I-B_{j,N})F_j\|_{L^2\to L^2} + \|F_j(I-B_{j,N})\|_{L^2\to L^2} \leq C\nu(C2^{-N}),$$

其中 $\nu(t) = \omega(\min\{ct,1\}) + C_K t$，且 c, C 是一些绝对常数。

我们先考虑 $F_j = (I-P_j)T_j(I-P_j)$ 的情形。注意，在这种情况下，我们有

$$(I-B_{j,N})F_j = H_{j+N}F_j = (I-P_j)H_{j+N}T_j(I-P_j)$$

and

$$F_j(I-B_{j,N}) = F_jH_{j+N} = (I-P_j)T_jH_{j+N}(I-P_j).$$

因此，只需证明

$$\|H_{j+N}T_j\|_{L^2} + \|T_jH_{j+N}\|_{L^2} \leq C\nu(C2^{-N}).$$

我们只关注 $H_{j+N}T_j$，因为另一种情况类似（注意 $(T_jH_{j+N})^* = H_{j+N}T_j^*$）。现在一个关键技巧是，利用 Plancherel定理，我们有

$$\|H_{j+N}T_j\|_{L^2} \leq \|(1-P_{j+N-1})T_j\|_{L^2}.$$

这一点很重要，因为 $(1-P_{j+N-1})T_j$ 的核为

$$\int (K_j(x,y) - K_j(x-h,y))2^{(j+N-1)d}(\mathcal{F}^{-1}\rho)(2^{j+N-1}h)\,\mathrm{d}h,$$

其中 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示傅里叶逆变换，光滑截断使处理更为容易。根据舒尔检验，只需控制

$$\begin{aligned}
&\sup_x \int \Big| \int (K_j(x,y) - K_j(x-h,y))2^{(j+N-1)d}(\mathcal{F}^{-1}\rho)(2^{j+N-1}h)\,\mathrm{d}h\Big|\,\mathrm{d}y \\
&\qquad \leq \int \sup_x \int |K_j(x,y) - K_j(x-h,y)|\,\mathrm{d}y 2^{(j+N-1)d}|(\mathcal{F}^{-1}\rho)(2^{j+N-1}h)|\,\mathrm{d}h
\end{aligned}$$

and

$$\sup_y \int \Big| \int (K_j(x,y) - K_j(x-h,y)) 2^{(j+N-1)d} (\mathcal{F}^{-1}\rho)(2^{j+N-1}h)\,\mathrm{d}h \Big|\,\mathrm{d}x$$
$$\le \int \sup_y \int |K_j(x,y) - K_j(x-h,y)|\,\mathrm{d}x 2^{(j+N-1)d} |(\mathcal{F}^{-1}\rho)(2^{j+N-1}h)|\,\mathrm{d}h.$$

首先，写作

$$\begin{aligned} |K_j(x,y) - K_j(x-h,y)| &= |\eta(2^j(x-y))K(x,y) - \eta(2^j(x-y-h))K(x-h,y)| \\ &\le |\eta(2^j(x-y)) - \eta(2^j(x-y-h))| \cdot |K(x,y)| \\ &\quad + |\eta(2^j(x-y-h))| \cdot |K(x,y) - K(x-h,y)|. \end{aligned}$$

每当 $|h| \le 2^{-j-5}$ 时，如果 $\eta(2^j(x-y)) - \eta(2^j(x-y-h))$ 非零，则必有$|x-y| \sim 2^{-j}$，于是

$$|\eta(2^j(x-y)) - \eta(2^j(x-y-h))| \cdot |K(x,y)| \lesssim C_K 2^j |h| 2^{jd}.$$

另一方面，$\eta(2^j(x-y-h))$ 非零也意味着 $|x-y| \sim 2^{-j}$，由核的正则性（1.2），可得

$$|\eta(2^j(x-y-h))| \cdot |K(x,y) - K(x-h,y)| \lesssim \omega(c2^j|h|) 2^{jd}.$$

因此我们有

$$\int |K_j(x,y) - K_j(x-h,y)|\,\mathrm{d}y + \int |K_j(x,y) - K_j(x-h,y)|\,\mathrm{d}x \lesssim \nu(2^j|h|).$$

现在考虑 $|h| > 2^{-j-5}$，那么由大小估计（1.1）还可得

$$\int |K_j(x,y) - K_j(x-h,y)|\,\mathrm{d}y + \int |K_j(x,y) - K_j(x-h,y)|\,\mathrm{d}x \lesssim C_K \lesssim \nu(2^j|h|).$$

于是我们看到，Schur 判别法中的两个对象都由以下量控制

$$\int 2^{(j+N-1)d} \nu(2^j|h|) |(\mathcal{F}^{-1}\rho)(2^{j+N-1}h)|\,\mathrm{d}h$$
$$= \int \nu(2^{1-N}|h|) |(\mathcal{F}^{-1}\rho)(h)|\,\mathrm{d}h \le \nu(2^{1-N}) \int (|h|+1) |(\mathcal{F}^{-1}\rho)(h)|\,\mathrm{d}h,$$

其中我们用到了（2.2）。至此，情形 $F_j = (I-P_j)T_j(I-P_j)$ 得证。

接下来讨论情形 $F_j = (I-P_j)T_jP_j - \Pi_{b_j}$。同样，注意以下

$$(I - B_{j,N})F_j = (I-P_j)H_{j+N}T_jP_j - H_{j+N}\Pi_{b_j}$$

and

$$F_j(I - B_{j,N}) = \big((I-P_j)T_jL_{j-N} - \Pi_{b_j}L_{j-N}\big) - \Pi_{b_j}H_{j+N}.$$

显然，

$$\|(I-P_j)H_{j+N}T_jP_j\|_{L^2\to L^2} \le \|H_{j+N}T_j\|_{L^2\to L^2} \le C\nu(C2^{-N}).$$

另一方面，由于 $(Q_nb_j)P_{n-6}f$ 的傅里叶支撑，我们知道 $H_{j+N}((Q_nb_j)P_{n-6}f)$ 非零，除非 $n \ge j+N-2$。因此

$$H_{j+N}\Pi_{b_j} = H_{j+N}\Pi_{(1-P_{j+N-4})b_j}$$

由此可得

$$\|H_{j+N}\Pi_{b_j}\|_{L^2\to L^2} \le \|\Pi_{(I-P_{j+N-4})b_j}\|_{L^2\to L^2} \le \|(I-P_{j+N-4})b_j\|_{L^\infty} = \|(I-P_{j+N-4})T_j1\|_{L^\infty}.$$

与上述类似（对 $(I-P_{j+N-1})T_j$ 核的估计），我们可以得出结论 at

$$\|H_{j+N}\Pi_{b_j}\|_{L^2\to L^2}\le C\nu(C2^{-N}).$$

至此，我们完成了对（$I-B_{j,\ N}$）F_j的估计。然后注意到，以类似的方式，$P_{n-6}H_{j+N}\neq 0$意味着 $n\ge j+N+5$。因此

$$\Pi_{b_j}H_{j+N}=\Pi_{(1-P_{j+N+3})b_j}H_{j+N}$$

我们仍有

$$\|\Pi_{b_j}H_{j+N}\|_{L^2\to L^2}\le C\nu(C2^{-N}).$$

接下来只需估计

$$\|(I-P_j)T_jL_{j-N}-\Pi_{b_j}L_{j-N}\|_{L^2\to L^2}=\|(I-P_j)T_jP_jL_{j-N}-\Pi_{b_j}L_{j-N}\|_{L^2\to L^2}.$$

回顾一下，$\Pi_{b_j}L_{j-N}f=b_jL_{j-N}f$，我们将估计归结为 L^2范数

$$\int (K_j^{(1)}(x,y)-K_j^{(2)}(x,y))(L_{j-N}f(y)-L_{j-N}f(x))\,\mathrm{d}y,$$

wh这里回顾一下，$K_j^{(1)}-K_j^{(2)}$ 是$(I-P_j)T_jP_j$的核。利用（3.2）和（3.3），可得

$$|K_j^{(1)}(x,y)-K_j^{(2)}(x,y)|\le CC_K2^{jd}(1+2^j|x-y|)^{-100d}.$$

因此，经过变量替换 $y\to x-h$，再利用闵可夫斯基不等式，可知该对象受控于

$$\int CC_K2^{jd}(1+2^j|h|)^{-100d}\Big(\int |L_{j-N}f(x-h)-L_{j-N}f(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\mathrm{d}h$$

由Plancherel定理

$$\|L_{j-N}f(x-h)-L_{j-N}f(x)\|_{L^2}\le \sup_{|\xi|\le 2^{j-N}}|e^{-2\pi ih\cdot\xi}-1|\|f\|_{L^2}\le 2^{j-N+1}\pi|h|\|f\|_{L^2}.$$

于是最终得到

$$\|(I-P_j)T_jP_jL_{j-N}-\Pi_{b_j}L_{j-N}\|_{L^2\to L^2}\le CC_K2^{-N}\|f\|_{L^2}.$$

证明至此完成。 □

现在我们准备证明定理 1.6。

定理 *1.6* 的证明。 如上所述，在我们的分解中

$$E=\sum_j(I-P_j)T_j(I-P_j)+\sum_j\big((I-P_j)T_jP_j-\Pi_{b_j}\big)+\sum_j\big(P_jT_j(I-P_j)-\Pi_{\widetilde{b}_j}^*\big),$$

~其中 $b_j:=(I-P_j)\ T_j^*1$。引理 3.4 已经给出了右侧前两项的有界性，而第三项实际上也类似，因为

$$P_jT_j(I-P_j)-\Pi_{\widetilde{b}_j}^*=\big((I-P_j)T_j^*P_j-\Pi_{\widetilde{b}_j}\big)^*.$$

剩下的任务是证明核估计。我们将采用间接的方法来证明。事实上，令 $S=T-E$，当 f, $g\in C_c^\infty$ 的支集不相交时，我们有

$$\begin{aligned}\langle Tf,g\rangle=\iint K(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x&=\Big\langle\sum_j T_jf,g\Big\rangle\\&=\langle Sf,g\rangle+\langle Ef,g\rangle.\end{aligned}$$

于是显然有

$$\langle Sf, g\rangle = \Big\langle \sum_j (P_j T_j P_j + \Pi_{b_j} + \Pi^*_{\tilde{b}_j}) f, g \Big\rangle.$$

由（3.3）可知， $\sum_j P_j T_j P_j$ 具有光滑的 Calderón-Zygmund核。然而，引理 2.12 只能说明每一项 $\Pi_{b_j} + \Pi^*_{\tilde{b}_j}$ 都具有光滑的 Calderón-Zygmund核，但遗憾的是，我们并没有 $\sum_j \|b_j\|_{L^\infty}$的可求和性。因此，这里需要作出一些论证。事实上，由于 Π_{b_j} 的核是

$$\pi_j(x,y) = \sum_{n\geq j} (Q_n b_j)(x) p_{n-6}(x-y),$$

其中回顾一下， p_n 通过 $\widehat{p_n}(\xi) = \rho(2^{-n}\xi)$ 定义。对于任意有限的 $\mathcal{J}$，我们有

$$\pi_{\mathcal{J}}(x,y) := \sum_{j\in\mathcal{J}} \pi_j(x,y) = \sum_n \sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\leq n}} (Q_n b_j)(x) p_{n-6}(x-y).$$

关键是，在引理 3.4 的证明中，我们已经证明了

$$\|T_j 1(\cdot - h) - T_j 1\|_{L^\infty} \leq C\nu(2^j|h|).$$

然后利用 Q_n 的核的消去性以及（2.2），可得

$$\|Q_n b_j\|_{L^\infty} \leq C\nu(2^{j-n}),$$

其中 $n \geq j + 10$。对于 $j \leq n < j + 10$，我们使用初等估计

$$\|Q_n b_j\|_{L^\infty} \leq CC_K.$$

因此，对任意 n，我们有

$$\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\leq n}} \|Q_n b_j\|_{L^\infty} \leq CC_K + \sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\leq n}} C\nu(2^{j-n}).$$

由于 $Q_n b_j$ 的傅里叶支撑位于半径与 2^n可比的环域内，Bernstein不等式给出

$$\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\leq n}} \|\partial^\alpha Q_n b_j\|_{L^\infty} \leq 2^{n|\alpha|}\Big(C_\alpha C_K + \sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\leq n}} C_\alpha \nu(2^{j-n})\Big).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha \partial_y \pi_{\mathcal{J}}(x,y)| &\lesssim \sum_n 2^{n(d+|\alpha|+|\beta|)}\Big(C_\alpha C_K + \sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\leq n}} C_\alpha \nu(2^{j-n})\Big)(1+2^n|x-y|)^{-100d-|\alpha|-|\beta|}\\ &\leq (C_K + \|\omega\|_{\mathrm{Dini}})|x-y|^{-d-|\alpha|-|\beta|}.\end{aligned}$$

由于我们实际上已经证明了双重求和绝对收敛，因此同一估计对 $\mathcal{J} = \mathbb{Z}$ 也成立。$\Pi^*_{\tilde{b}_j}$ 的核估计类似。这表明 S 具有光滑的Calderón-Zygmund核，因此 E 继承了 T的核估计。□

现在我们证明定理1.3。

定理1.3的证明。 必要性如今已是标准结论，细节从略。

为证明充分性，利用定理 1.6 ，我们看到 $S = T - E$ 继承了弱有界性。 furthermore，标准的 Calderón-Zygmund 理论表明 $E1$， $E^*1 \in \mathrm{BMO}$，因此 $S1$， $S^*1 \in \mathrm{BMO}$。然后应用经典的 $T1$ 定理可得 S 在 L^2上有界。因此 T 在 L^2上有界。证明完毕。

□

参考文献

[1] E. Airta、H. Martikainen 和 E. Vuorinen，具有温和核正则性的 Calderón–Zygmund 算子的 UMD 扩张，J. Fourier Anal. Appl. 28（2022），第 64 号论文。2[2] P. Auscher 和 Q. X. Yang，BCR 算法与 $T(b)$ 定理，Publ. Mat. 53（2009），第 1 期，179–196。2[3] A. P. Calderón 和 A. Zygmund，关于某些奇异积分的存在性，Acta Math. 88（1952），85–139。1[4] G. David 和 J.-L. Journé，广义 Calderón–Zygmund 算子的有界性判据，Ann. of Math.（2）120（1984），第 2 期，371–397。1[5] D. Deng、L. Yan 和 Q. Yang，阻塞分析与 $T(1)$ 定理，Sci. China Ser. A 41（1998），第 8 期，801–808。1[6] T. Figiel，奇异积分算子：一种鞅方法，载于《Banach 空间的几何》（Strobl，1989），London Math. Soc. Lecture Note Ser.，第 158 卷，Cambridge Univ. Press，Cambridge，1990，95–110 页。1[7] A. Grau de la Herrán 和 T. Hytönen，具有温和核正则性的非齐次 Calderón–Zygmund 箩子的二进表示与有界性，Michigan Math. J. 67（2018），第 4 期，757–786。1[8] M. T. Lacey， A_2 界的一个初等证明，Israel J. Math. 217（2017），第 1 期，181–195。2[9] A. K. Lerner，关于涉及稀疏算子的逐点估计，New York J. Math. 22（2016），341–349。2[10] A. K. Lerner 和 S. Ombrosi，关于逐点稀疏控制的一些评论，J. Geom. Anal. 30（2020），第 1 期，1011–1027。2

(K.L.)浙江师范大学数学科学学院，中国金华 321004电子邮箱地址：kangwei.li@zjnu.edu.cn