arXiv:2611.30871v1 [math.GT] 23 Nov 2026

A 双曲7-流形纤维化到圆上 E

LIZI GUO

Abstract. 我们构造了一个具体的、可定向的有限体积双曲7-流形 M，它纤维化到圆上。该流形由256个直角双曲多胞体 P^7 镶嵌而成，并有252个尖点。其纤维是一个紧致无球面的6流形的内部，该流形的边界由256个五维环面组成。此纤维化源自戴维斯复形上的一个 Bestvina–Brady 莫尔斯函数。Bestvina–Brady理论表明，相关特征的核是有限表示的。通过整系数 Novikov环上的扰动论证可知，无限循环覆盖是有限支配的。随后，Farrell的纤维化定理结合 Whitehead群的消失性，给出了这一纤维化。

1. Introduction

闭流形或带尖点流形纤维化到圆上，是指它是以 S^1为底空间的光滑纤维丛的总空间。根据 Agol 和 Wise 的工作 [Ago13, Wis21]，每个有限体积双曲3-流形都有一个有限覆盖空间纤维化到圆上。在偶数维中，有限体积双曲流形的欧拉示性数非零，因此这一问题在奇数维中值得关注。Italiano、Martelli 和 Migliorini 构造了一个有限体积双曲5-流形，使其纤维化到圆上 [IMM23]。有人猜想，每个奇数维有限体积双曲流形都虚拟纤维化 [Kie25, 猜想4.8]。在7维中，代数纤维化，即核为有限生成或有限表示的满同态 $\pi_1 M \to \mathbb{Z}$，已见于 [IMM24, Fis23]。有限体积双曲7-流形存在纤维化这一问题，在 [Kie25, 第 4],节中作为一个开放问题进行了讨论；另见 [IMN26]。

本说明旨在给出一个具体的例子。

定理 1.1。 存在一个具有以下性质的可定向、完备、有限体积双曲7流形 M 。

(1) M 由256 个直角多面体 P^7镶嵌而成。它有252 个尖点，每个尖点的横截面是一个平6环面。(2) M 是一个光滑纤维丛 $M \to S^1$的总空间。(3) 纤维与一个紧致、连通、可定向、无球面的6流形 F 的内部微分同胚，其边界是256 个 T^5的副本的不交并。

这里的 $M = \mathbb{H}^7/\Gamma$ 中，Isom($\mathbb{H}^7$) 是第2节中定义的群。该纤维丛表示第3节中定义的本原类 $\varphi \in H^1(M; \mathbb{Z})$。

策略。 该构造遵循 [JNW21、IMM23、IMM24]的方法。该流形 M 是反射轨道空间 $\mathbb{H}^7/W$ 的有限覆盖，其中 W 是 Agol、Long 和 Reid [ALR01] 引入的多胞体 P^7 的直角 Coxeter 群。该覆盖由 $\mathbb{F}_2^{56}$ 中的一组“移动”确定。特征 φ 由一个状态以及对各个面的正整数权重的选择定义，并且它在 W 的戴维斯复形 Σ 上配有一个 φ-等变莫尔斯函数。定理 1.1 的证明分为三个步骤。首先，所有上升和下降

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 57N16、57R22。次要分类号 20F55、20F65、57Q10。
*Key words and phrases.*双曲流形、圆上的纤维化、直角 Coxeter 群、Bestvina–Brady Morse 理论、诺维科夫同调。

链接都是单连通的。根据 Bestvina–Brady理论 [BB97], $K = \ker \varphi$ 是有限表示的（第 4 节）。其次，某些下降链接与 S^2 或 S^3 同伦等价，因此 Bestvina–Brady 理论无法保证 K 具有更高阶的有限性。我们转而证明，Σ 的胞腔链$\widehat{\ }$复形在两个 Novikov环 $\mathbb{Z}\Gamma_{\pm\varphi}$ 上都变得无环（第 5 节）。该复形可约化为一个单个微分 D: $R^{24} \to R^{24}$，并通过首项论证证明 D 可逆。第三，根据 Ranicki 和 Sch¨utz [Ran95, Sch06], ，无限循环覆盖是有限支配的。 Γ 的 Whitehead群 消失 [BL12], ，而 Farrell纤维化定理 [Far71, Far72], 的 Siebenmann [Sie70], 相对形式给出了该纤维化（第 6 节）。

证明使用了两次关于整数的有限计算：计算 256 个下降链接（命题 4.3），以及计算 D 的首项（命题5.2）。两者均在附录 B 中说明。陈述这些结果所需的所有数据均列于附录A。

2. The polytope and the manifold

2.1. 多胞体 P^7。设 $\ell_n = \{n, n+1, n+3\} \subset \mathbb{Z}/7$, $n \in \mathbb{Z}/7$ 为 Fano平面中的直线（图1）。$\mathbb{R}^7$ 上的坐标由 $\mathbb{Z}/7 = \{0, \dots, 6\}$ 编号。对于 $0 \le n \le 6$ 和 $0 \le r \le 7$，令 $p_{8n+r} \in \mathbb{R}^7$ 为支撑集为 ℓ_n 的向量，其三个非零项按坐标递增顺序排列后，是列表中的第 r 个符号模式

$$(++\!+),\ (++\!-),\ (+-\!+),\ (+--),\ (-++),\ (-+\!-),\ (--\!+),\ (---).$$

在 Klein模型 $\mathbb{H}^7 = \{x \in \mathbb{R}^7$ 中: $|x| < 1\}$ put

$$P^7 = \{x \in \mathbb{H}^7 : \langle p_j, x\rangle \le 1 \text{ for } j = 0, \dots, 55\}.$$

它的面 F_j 具有类空单位法向量 $e_j = (1, p_j)/\sqrt{2}$，位于 Minkowski空间 $\mathbb{R}^{1,7}$中。对于 $i \ne j$，有 $\langle p_i, p_j\rangle \in \{1, -1, -3\}$，因此 $2\langle e_i, e_j\rangle = -1 + \langle p_i, p_j\rangle \in \{0, -2, -4\}$。于是，两个面彼此正交、在无穷远处相切或超平行。若 $\langle p_i, p_j\rangle = 1$，我们记作 $i \sim j$；而 $\bar{\jmath}$ 表示满足 $p_{\bar{\jmath}} = -p_j$的指标。

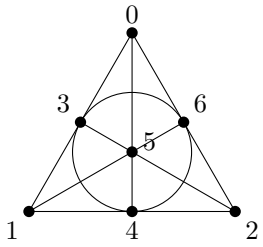


FIGURE 1.Fano平面上的$\mathbb{Z}/7$。它的七条直线是三元组$\ell_n = \{n, n+1, n+3\}$，即三条边、三条中线和内切圆。 P^7的面 $F_{8n}, \dots, F_{8n+7}$的法向量支撑在 ℓ_n上。

引理 2.1 ([ALR01, ERT12, IMM24], 另见 [PV05])。 P^7 是一个有限体积的直角多面体，具有 56 个面。当且仅当 $i \sim j$时，两个面 F_i、F_j 相交，且此时它们正交。每个面与其他27 个面相交。P^7 有576 个有限顶点和126 个理想顶点。理想顶点是满足 $\langle p_i$和 $p_j\rangle = -1$的点$_{1\,2}(p_i + p_j)$。每个理想顶点都位于12 个面上，这些面构成6对在无穷远处相切的面，其链接是一个欧几里得6维立方体。

所有这些陈述都可以直接根据定义验证。设 W 为由生成元 r_0、.....、r_{55} 以及关系 $r_j^2 = 1$ 和 $(r_i r_j)^2 = 1$（其中 $i \sim j$）定义的直角 Coxeter 群。根据 Poincar´e 多面体定理, [Vin85], W 是由 P^7各个面的反射生成的群，而 P^7 是该群作用于 $\mathbb{H}^7$上的一个基本域。 W的神经复形 L 是图 ([56], $\sim$) 的旗复形。其单纯形，即团，在维数 0、.....、6 中的数量分别为 56、756、4032、10080、12096、6048、576。

2.2. 移动与覆盖空间。 流形 M 将通过沿各个面粘合 256 个 P^7副本得到。粘合方式由向量 m_0、……、$m_{55} \in \mathbb{F}_2^{56}$决定，每个面对应一个向量，其坐标由各个面索引。$m_j$ 的第 k 个坐标在 $k = j$ 或 F_k 与 F_j 在无穷远处相切时为 1；若 F_k 与 F_j正交或超平行，则为 0。由于 F_j 与 27 个面相切，m_j 有 28 个非零坐标。这些向量按照 [JNW21]的说法称为移动 。我们将反复使用以下事实：m_j 的第 j 个坐标为 1；只要满足 $k \sim j$，m_j 的第 k 个坐标就为 0。

令 $V \subset \mathbb{F}_2^{56}$ 为移动所张成的空间。由于 V 是阿贝尔的，且其所有元素的阶至多为二，关系 $r_j^2 = 1$ 和 $(r_i r_j)^2 = 1$ 在 W 中成立，只需用 m_j 替代 r_j。因此存在一个同态 $\rho\colon\ W \to V$，满足 $\rho(r_j) = m_j$，于是我们令

$$\Gamma = \ker \rho, \qquad M = \mathbb{H}^7/\Gamma.$$

具体来说，用向量 $\rho(w)$ 标记 $\mathbb{H}^7$ 的镶嵌中的铺砖 wP^7 。相邻瓦片 wP^7 和 wr_jP^7 的标记相差 m_j；当且仅当两个铺砖的标记一致时，它们在 M 中的像才相同。因此， M 由 P^7 的一个副本 P_v（每个 $v \in V$ 对应一个）组成，而 P_v 沿着面 F_j 与 P_{v+m_j} 粘合（图2）。

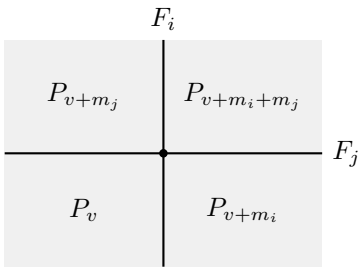


FIGURE 2. M 中余维二面 $F_i \cap F_j$ 周围的 P^7 个副本，其中 $i \sim j$。穿过 F_i 会将 m_i 加到标记上，而穿过 F_j 会加上 m_j。

在 $\mathbb{F}_2$ 上进行线性代数可得 $\dim V = 8$，因此共有 $2^8 = 256$ 个副本。我们固定附录 A中列出的 V 的基 b_1，……，b_8，并将 V 中的元素 $q_1b_1 + \cdots + q_8b_8$ 写成二进制词 $q_1q_2\cdots q_8$。例如，11000000 表示 $b_1 + b_2$。表1以这种记法列出了移动。于是，从 P_v 穿过 F_j 到达的副本，可通过将 v 和 m_j 的二进制词逐位相加得到。所有坐标均为 1 的 $\mathbb{F}_2^{56}$ 向量属于 V。它等于 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 =$ 11110000，我们将其记作 **1**。

命题2.2。 (1) Γ 是 W 的无挠正规子群，指数为 256 ，且 $\Gamma <$同构于$^+(\mathbb{H}^7)$。(2) M 是一个可定向、完备、有限体积的双曲 7 流形，由 P^7 的 256 个副本镶嵌而成。(3) M 有 252 个尖点。每个尖点群都是一个格 $\mathbb{Z}^6$ ，通过欧氏平移作用，因此每个尖点截面都是平坦的 6 维环面。

证明。 (1) 根据定义， ρ 是满射，因此 $[W\colon \Gamma] = |V| = 256$。设 S 是一个团。对于 $i \in S$，将 m_i 限制在 S 中的坐标上，得到的就是 i的指示函数。因此， ρ 在有限特殊子群 $W_S \cong (\mathbb{Z}/2)^{|S|}$上是单射。 W 的每个有限子群都共轭包含于某个W_S [（Dav08，第 12]章）。由于 V 是阿贝尔的，ρ在每个有限子群上都是单射，因此 Γ 是无挠的。将第一和第四个坐标相加的线性形式 ℓ: $V \to \mathbb{F}_2$ 满足$\ell(m_j) = 1$ ，对所有 j均如此，这可由表 1 看出。因此，定向特征 $W \to \mathbb{Z}/2, r_j \mapsto 1$ 可经由 ρ因子化，且 Γ 保持定向。

(2) 由 (1) 可知这一点，因为 P^7 是 W的基本域。

(3) 设 ξ 是 P^7 的一个理想顶点，其相切对为 $(F_{\alpha_k},\ F_{\beta_k})$，$k=1,\ \ldots\ldots,\ 6$。其稳定子为 $W_\xi=\prod_{k=1}^{6}\langle r_{\alpha_k},\ r_{\beta_k}\rangle\cong D_\infty^6$。平移子群为 $\mathbb{Z}^6=\langle t_1,\ \ldots\ldots,\ t_6\rangle$，其中 $t_k=r_{\alpha_k}r_{\beta_k}$。对全部 126 个理想顶点进行直接计算，得出两个事实。首先，$m_{\alpha_k}+m_{\beta_k}=\delta_\xi$ 是一个非零向量，且与 k 线性无关。其次，$m_{\alpha_1},\ \ldots\ldots,\ m_{\alpha_6},\ \delta_\xi$ 线性无关。因此

$$\rho\Big(\prod_k t_k^{z_k}\, r_{\alpha_k}^{\epsilon_k}\Big)=\Big(\sum_k z_k\Big)\delta_\xi+\sum_k \epsilon_k m_{\alpha_k}$$

当且仅当每个 $\epsilon_k=0$ 和 $\sum_k z_k$ 都是偶数时，它才为零。因此，$\Gamma\cap W_\xi$ 是 $\mathbb{Z}^6$ 中坐标和为偶数的指数二子格，并且 $|\rho(W_\xi)|=2^7$。由于 Γ 是正规群，对 W_ξ 的每个共轭也同样成立。位于 ξ 上方的 M 的尖点对应于 $\Gamma\backslash W/W_\xi\cong V/\rho(W_\xi)$，其中有 2 个元素。这给出了 $2\cdot 126=252$ 个尖点。□

3. The height function

Σ 的戴维斯复形 是一个立方复形，其顶点集为 W，立方体是陪集 wW_S，其中 S 是一个团。它与 $\mathbb{H}^7$ 的镶嵌对偶，该镶嵌由铺砖 wP^7构成：顶点 w对应铺砖 wP^7，连接 w 和wr_j 的边对应 wP^7与 wr_jP^7共有的面。 Σ的顶点链接是旗复形 L的副本，因此 Σ是一个CAT(0)立方复形，特别地是可缩的 [Dav08，第 12]章。群 Γ 余紧地作用于 Σ上，且作用是自由的，因为立方体的稳定子是有限群，而 Γ是无挠的。因此，$X=\Sigma/\Gamma$ 是一个有限的 $K(\Gamma,\ 1)$，特别地 $\pi_1X=\Gamma$。

具体而言，X 是一个顶点集为 V的立方复形。对于每个 $v\in V$和 j，都有一条标签为 j、连接 v和 $v+m_j$的边。对于每个团 S和每个 v，都有一个由 v 处标签属于 S的边张成的 $|S|$-立方体。

固定附录A中列出的状态[1] $\mathfrak{s}\in\mathbb{F}_2^{56}$和权重 a_0、……、$a_{55}\in\mathbb{Z}_{>0}$ $9904\le a_j\le 10100$。我们利用它们规定：从 P^7 的一个副本经过到相邻副本时，高度如何变化。权重a_j 是穿过面 F_j时高度变化的量，而状态决定高度上升还是下降。对于 $v\in V$，令

$$D(v)=\operatorname{supp}(\mathfrak{s}+v)\subset\{0,\ldots,55\}.$$

因此，$D(v)$由在 $\mathfrak{s}+v$ 中的坐标为 1 的面组成。这些面是副本 P_v 的面，穿过它们时高度会下降。因此，在从 v 到 $v+m_j$ 的边上，我们置

$$\alpha(v,j)=\begin{cases}-a_j, & j\in D(v),\\ a_j, & j\notin D(v).\end{cases}$$

换言之，从 P_v 穿过 F_j 时，若 $j\in D(v)$，高度降低a_j；否则高度升高a_j 。

引理 3.1。 α 是 X上的一个整数胞腔1-余圈。

证明。m_j 的第 j 个坐标为 1，因此 $\alpha(v+m_j,j)=-\alpha(v,j)$。由此可知，$\alpha$ 在带有方向反转的无向边上定义良好。若 $i\sim j$，则 m_i 的第 j 个坐标为 0，因此$\alpha(v+m_i,j)=\alpha(v,j)$。因此，$\alpha$在每个正方形周围的总和为零。□

[1]状态 $\mathfrak{s}$ 是通过计算机搜索找到的，其目标是使 $E(\mathfrak{s})=1000\sum_v(b_0(L_v)-1)+100\sum_v b_1(L_v)+\sum_v b_2(L_v)$尽可能小，其中 L_v、$v\in V$是第 4 节中的下降链接，b_i 是以 $\mathbb{F}_2$为系数的贝蒂数。搜索未达到 $E=0$，但所找到状态的所有链接都是单连通的（命题 4.3）。

令 $\varphi\colon \Gamma = \pi_1 X \to \mathbb{Z}$ 为由 α定义的同态。等价地，存在一个函数$f\colon W \to \mathbb{Z}$，使得 $f(1) = 0$，且 $f(wr_j) - f(w) = \alpha(\rho(w)\ j)$。它满足 $f(\gamma w) = \varphi(\gamma) + f(w)$，其中$\gamma \in \Gamma$。这个函数就是高度： $f(w)$是铺砖 wP^7的高度，而 $\varphi(\gamma)$是沿着 γ的高度变化。

引理 3.2. (1) φ是满射。

(2) φ 在每个252 个尖点群上的限制均非零。其像在248个尖点上为 $\mathbb{Z}$ ，在4 个尖点上为 $2\mathbb{Z}$。(3) 设 $\tau \in W$满足 $\rho(\tau) = 1$。那么，对所有 $\gamma \in \Gamma$，都有 $\varphi(\tau\gamma\tau^{-1}) = -\varphi(\gamma)$。

证明。(1) 和 (2) 是有限次计算（附录 B）。对于 (1)，在 X 的 1-骨架中选取一棵生成树。由剩余边确定的闭环上 α 的取值生成 $\varphi(\Gamma)$，且它们的最大公约数为 1。对于 (2)，对 X 中承载每个尖点环面的 128 顶点子复形进行同样的计算。

对于 (3)，注意到 $D(v+1)$ 是 $D(v)$ 的补集，因此 $\alpha(v+1, j) = -\alpha(v, j)$。所以，$w \mapsto -f(\tau w)$ 和 f 沿每条边的增量都相同，并且对于某个常数 c， $f(\tau w) = -f(w) + c$。对于 $\gamma \in \Gamma$ ，这给出

$$\varphi(\tau\gamma\tau^{-1}) + f(\tau w) = f(\tau\gamma w) = -f(\gamma w) + c = f(\tau w) - \varphi(\gamma). \qquad \square$$

4. Morse theory and finite presentability

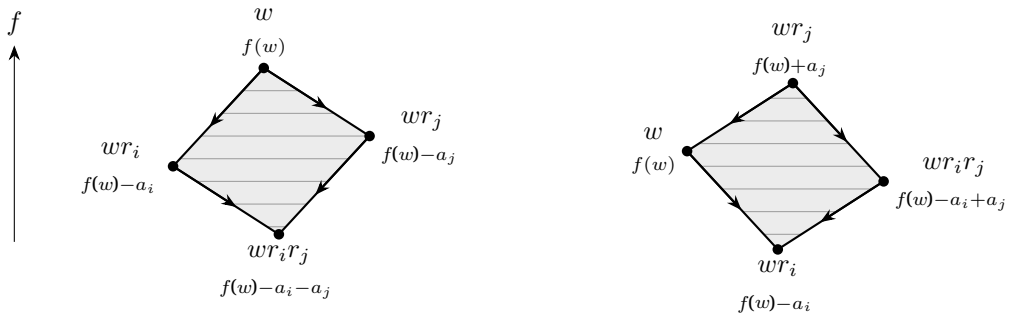
设 Y 是一个仿射胞腔复形，也就是说，是一种其胞腔以凸多面体胞腔为模型且与面相容的 CW复形 [BB97，定义 2.1]。立方复形就是这类复形的例子。若映射 $f\colon Y \to \mathbb{R}$ 是一个 莫尔斯函数，则它在每个正维胞腔上都是仿射且非常值，并且 0-骨架的像在 $\mathbb{R}$ 中是离散的。这样的函数在每个胞腔上恰好于一个顶点处取得最大值，最小值亦然。顶点 y 的 下降链接 是 y 的链接中由满足 f 在 y 处取得最大值的胞腔构成的子复形。上升链接 的定义类似，只需将最大值换为最小值 [BB97，定义 2.2 和 2.4]。

定理 4.1 (Bestvina–Brady [BB97，定理 4.1(3)])。 设群 G 在一个可缩仿射胞腔复形 Y 上自由、正常、余紧地且胞腔地作用，并保持仿射结构。设 $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}$ 是一个满同态，并设 $f\colon Y \to \mathbb{R}$ 是一个莫尔斯函数，且对所有 $g \in G$ 和 $y \in Y$，都有 $f(gy) = f(y) + \varphi(g)$ 。若每个上升链接和每个下降链接都是单连通的，则 核 φ 有限表示。

我们将此定理应用于戴维斯复形 Σ 以及第3节的高度函数 f 。到目前为止，该函数定义在 Σ 的顶点上。考虑一个立方体 wW_S。对于不同的 i， $j \in S$ ， m_i 的第 j个坐标为 0，因此穿过 F_i 不会改变 F_j的状态。因此，沿着立方体中所有标记为 j 的边，高度都朝同一方向变化 a_j 。由此可知， f 在立方体各顶点上的取值可延拓为立方体上的唯一仿射函数。这些延拓在公共面上相互一致，并共同定义了 $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ （图3）。对于 $v \in V$，令 L_v 为神经复形 L 中由 $D(v)$ 张成的全子复形。

引理 4.2。 函数 $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个莫尔斯函数，并且对所有$\gamma \in \Gamma$ 和 $x \in \Sigma$，都有 $f(\gamma x) = f(x) + \varphi(\gamma)$ 。令 $w \in W$ 和 $v = \rho(w)$。在立方体 wW_S上，函数 f 在 w 处取得最大值，当且仅当 $S \subseteq D(v)$；在 w 处取得最小值，当且仅当 $S \cap D(v) = \emptyset$。因此， w 的下降链接是 L_v，而 w 的上升链接是 L_{v+1}。

证明。 根据构造， f 在每个立方体上都是仿射的，并且一条标记为 j 的边的两个端点处的取值相差 $a_j \neq 0$。因此， f 在每个正维数的面上都不是常值函数，并且在每个立方体上都有唯一的最大值和唯一的最小值。 f 在顶点处的取值



(a) $i,\ j \in D(v)$ (b) $i \in D(v),\ \ j \notin D(v)$

FIGURE 3. 将 f 延拓到一个正方形 wW_S 上，其中 $S = \{i, j\}$，并绘制为高度向上增加。水平线段是 f的水平集，箭头指向每条边的下端点。这里 $v = \rho(w)$。（a）如果 $i,\ j \in D(v)$，则 f 在该正方形上的最大值于 w处取得。（b）如果 $i \in D(v)$且 $j \notin D(v)$，则最大值在wr_j 处，最小值在 wr_i处。

都是整数。因此， f 是一个莫尔斯函数。根据第3节，恒等式 $f(\gamma x) = f(x) + \varphi(\gamma)$在顶点处成立。由于 γ 将每个立方体仿射地映射到一个立方体，因此该恒等式在整个 Σ上成立。

设 $j \in S$。根据 α的定义，从 w 到wr_j 的边上高度递减，当且仅当$j \in D(v)$；否则高度递增。由于 f 在 wW_S上是仿射的，当且仅当从 w出发的立方体所有边上函数都递减时，它在w 处取得最大值，也就是说，当$S \subseteq D(v)$时取得最大值。同理，当且仅当 $S \cap D(v) = \emptyset$时，最小值在 w 处取得。

包含 w 的立方体是立方体 wW_S，它们对应于 w的链接 L 中的单纯形 S。因此， w 的下降链接由 L中包含在 $D(v)$内的单纯形组成。由于 L_v 是全子复形，这就是 L_v。类似地，上升链接由包含在 $D(v)$的补集中的单纯形组成。该补集是 $D(v+\mathbf{1})$，因此上升链接是$L_{v+\mathbf{1}}$。
□

因此，每个上升链接或下降链接都是 256 个复形 L_v, $v \in V$之一。图 4 展示了一个二维例子中的下降链接。

命题 4.3。 对于每个 $v \in V$，复形 L_v 都是单连通的，并且

$$\widetilde{H}_k(L_v;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 2 \text{ and } v \in \{y_1, \dots, y_{24}\}, \\ \mathbb{Z}, & k = 3 \text{ and } v \in \{x_1, \dots, x_{24}\}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里，x_j 和 y_i 是表3中列出的向量。因此，当 $v = y_i$时， L_v 与S^2 同伦等价；当 $v = x_j$时，L_v 与 S^3 同伦等价；对于 v的其他 208 个取值， L_v 则是可缩的。

证明。 固定 $v \in V$。为求基本群，取 L_v的 1-骨架的生成树 T。 L_v 的边路径群具有如下表示

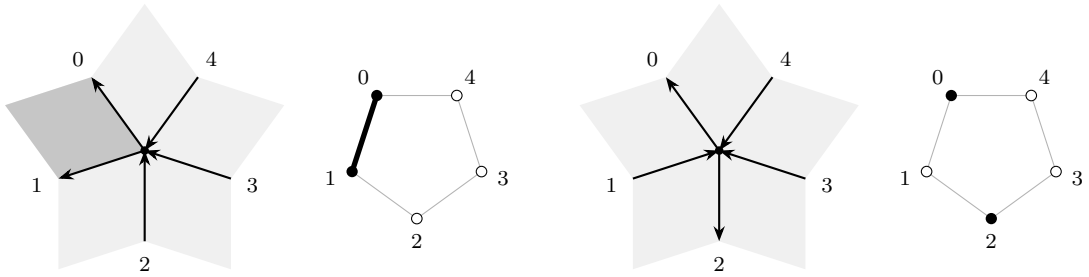
$$\pi_1(L_v) \cong \left\langle g_{ij}\ (\{i<j\} \in L_v) \ \middle|\ g_{ij} = 1\ (\{i,j\} \in T),\ \ g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik}\ (\{i<j<k\} \in L_v) \right\rangle.$$

Tietze 变换将这个表示化简为平凡表示，因此 $\pi_1(L_v) = 1$.

~对于同调，令 $C_*(L_v)$ 为增广单纯链复形

$$0 \to \widetilde{C}_6(L_v) \xrightarrow{\partial} \widetilde{C}_5(L_v) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \widetilde{C}_0(L_v) \xrightarrow{\partial} \widetilde{C}_{-1}(L_v) = \mathbb{Z} \to 0.$$

如果单纯形 σ 和 τ 满足 $\langle \partial\sigma,\ \tau \rangle = \pm 1$，那么 $\mathbb{Z}\sigma \oplus \mathbb{Z}\,\partial\sigma$ 是此复形的一个无环直和项（第 5.2 节）。依次拆出这样的直和项，直到微分变为



(a) $D(v) = \{0,1\}$ (b) $D(v) = \{0,2\}$

FIGURE 4. 二维例子中的下降链接，其中 W 是一个直角五边形的反射群，其边为 0,...,4，且神经复形L 是一个 5-循环。每个图板展示戴维斯复形中一个顶点 w 的星形，箭头指向每条边的下端点，以及 w 的链接，其中 $D(v)$ 中的方向以黑色绘出。当正方形的两个方向都为下降方向时，该正方形恰好位于下降链接中（深色正方形）。(a) 如果 $D(v) = \{0,1\}$，下降链接是一条边。(b) 如果 $D(v) = \{0,2\}$，下降链接由两个点组成。

零，我们得到

$$\widetilde{C}_*(L_v) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}[2], & v \in \{y_1, \dots, y_{24}\}, \\ \mathbb{Z}[3], & v \in \{x_1, \dots, x_{24}\}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中 $\mathbb{Z}[n]$ 表示在次数 n 上为 $\mathbb{Z}$、在其他次数上为 0 的复形。对于 256 个复形中的每一个，Tietze 变换和这些对 (σ, τ) 均由计算机求得（附录 B）。□

推论 4.4. $K =$ 核 φ 是有限表示的。

证明。</style}这由定理 4.1 得出：将其应用于 Γ 在 Σ 上的作用以及莫尔斯函数 f，再结合引理 4.2 和命题 4.3。□

由于 48 个链接是维数为 2 或 3 的球面，定理 4.1 无法给出关于 K 的更多有限性性质。下一节我们将转而研究这些球面之间如何相互作用。

5. NOVIKOV HOMOLOGY

$\widehat{\ }$Novikov环 $\mathbb{Z}\Gamma_\varphi$ 由形式和 $x = \sum_{g\in\Gamma} x_g\, g$ 组成，其中 $x_g \in \mathbb{Z}$ 满足：$\widehat{\ }$对于每个 $c \in \mathbb{R}$，只有有限多个 g 满足 $x_g \neq 0$ $\varphi(g) > c$。因此， $\mathbb{Z}\Gamma_\varphi$ 中的元素是一个级数，它可以在高度递减的方向上无限延伸；而一个圈在 $\mathbb{Z}\Gamma_\varphi$ 上成为$\widehat{\ }$边界，当且仅当它是某条链的边界，且该链允许无限向下延伸。对于$\frown x \in \mathbb{Z}\Gamma_\varphi$，定义 $\nu_\varphi(x) = \max\{\varphi(g) : x_g \neq 0\}$，其中 $\nu_\varphi(0) = -\infty$。则 $\nu_\varphi(xy) \leq \nu_\varphi(x) + \nu_\varphi(y)\widehat{\ }$，并且 $\nu_\varphi(x+y) \leq \max\{\nu_\varphi(x)\nu_\varphi(y)\}$。环 $\mathbb{Z}\Gamma_{-\varphi}$ 以相同方式定义，只需用 $-\varphi$ 替换 φ。

定理 5.1。令 $C = C_*(\Sigma)$ 为 Σ 的胞腔链复形，即一个有限自由的左 $\mathbb{Z}\Gamma$-模复形。那么

$$H_*\big(\widehat{\mathbb{Z}\Gamma}_\varphi \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C\big) = 0 = H_*\big(\widehat{\mathbb{Z}\Gamma}_{-\varphi} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} C\big).$$

本节其余部分将证明定理 5.1。

5.1. **分解边界算子**。 现在我们明确描述胞腔链复形 $C = C_*(\Sigma)$。群 Γ 自由地置换 Σ 的立方体，因此 C 是一个自由的 $\mathbb{Z}\Gamma$-模，而通过在每个 Γ-轨道中选取一个立方体即可得到一组基。我们按立方体的最高顶点对其进行归类。

基。 根据引理 4.2， Σ 的每个立方体都有一个唯一的顶点，使得 f 在该顶点处取最大值。我们称它为该立方体的**顶点** 。顶点为 w 的立方体就是立方体 wW_S，其中 S 是包含于 $D(\rho(w))$ 中的团。 Γ 在 Σ的顶点上的轨道与 V的元素相对应。对于每个 $v \in V$，我们选取一个顶点 $w_v \in W$，使得 $\rho(w_v) = v$，并将其高度记为 $\eta_v = f(w_v)$。对于团 $S \subseteq D(v)$，令

$$e_{v,S} = w_v W_S.$$

这是一个维数为 $|S|$ 的立方体，它从 w_v 沿着 S的方向向下延伸。对于 $S = \emptyset$，它就是顶点 w_v 本身。 Σ 的每个立方体都可以唯一地写成 $g\, e_{v,S}$ ，其中有唯一的 $g \in \Gamma$、唯一的$v \in V$ 以及唯一的团 $S \subseteq D(v)$。因此，立方体 $e_{v,S}$ 构成了 C 在 $\mathbb{Z}\Gamma$上的一组基，其中$e_{v,S}$ 的次数为 $|S|$。这样的立方体共有 468,224 个。

边界。 一个立方体 $e_{v,\ S}$ 在每个方向上都有两个面 $s \in S$，一个上面和一个下面。图 5 展示了正方形的情形。上面包含顶点 w_v。它是立方体$e_{v,\ S\setminus s}$，而且在 w_v处仍是一个基元素。下面是通过穿过面 F_s得到的，它是立方体 $w_v r_s W_{S\setminus s}$。穿过 F_s 不会改变 S中其他面的状态。因此， $S \setminus s$ 中的方向在 $w_v r_s$处仍然是下降的，而 $w_v r_s$ 是下面的顶点。这个顶点属于所选顶点 w_{v+m_s}的 Γ-轨道，但一般来说它不同于 w_{v+m_s}。这两个顶点相差一个元素

$$\gamma(v,s) = w_v\, r_s\, w_{v+m_s}^{-1} \in \Gamma,$$

也就是说， $w_v r_s = \gamma(v,\ s)\ w_{v+m_s}$。因此，下面是立方体 $\gamma(v,\ s)\, e_{v+m_s,\ S\setminus s}$。

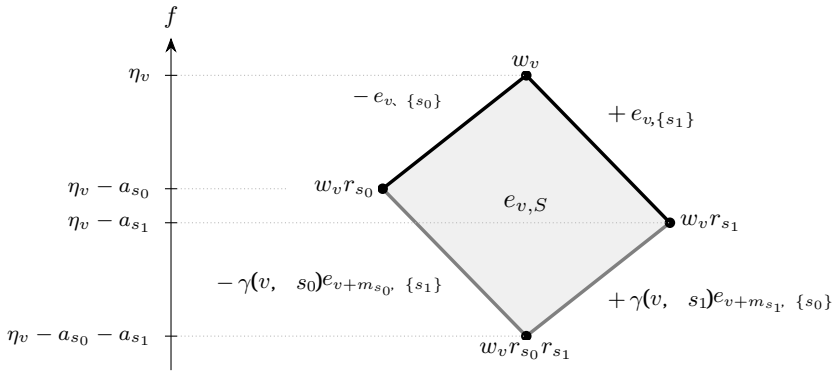


FIGURE 5. 一个正方形 $e_{v,\ S}$ 其高度向上递增，并绘有 $S = \{s_0 < s_1\}$。上方的两条边包含顶点 w_v 并构成$d_0\, e_{v,\ S}$（黑色）。下方的两条边构成$d_1\, e_{v,\ S}$ （灰色）。它们的顶点 $w_v r_{s_0}$ 和$w_v r_{s_1}$ 比 w_v 低 a_{s_0} 和 a_{s_1}。

现在按此顺序写出 $S = \{s_0 < \cdots < s_{n-1}\}$ 并为 $e_{v,\ S}$定向。收集上面和下面，并使用立方体边界的通常符号，我们得到 $\partial = d_0 + d_1$

with

$$d_0\, e_{v,S} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, e_{v,S\setminus s_k},$$
$$d_1\, e_{v,S} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\, \gamma(v,s_k)\, e_{v+m_{s_k},\,S\setminus s_k}.$$

高度。 立方体的高度 $g\, e_{v,\ S}$ 是其顶点处 f 的值，即 $f(gw_v) = \varphi(g) + \eta_{v\circ}$ 上面与立方体具有相同的顶点，因此 d_0 保持高度不变。方向 s 上的下面的顶点在跨过 F_s后低一步，因此 d_1的每一项都会使高度降低 $a_s \geq 9904$。

总之， d_0 不涉及任何群元素，也不会离开顶点 v；而 d_1 会严格降低高度。在接下来的两个小节中，我们先收缩 d_0 ，然后将 d_1 视为扰动。

5.2. **局部收缩**。对于 $v \in V$ 令

$$C(v) = \bigoplus_S \mathbb{Z}\, e_{v,S},$$

其中 S 遍历包含在 $D(v)$ 中的团，且$e_{v,\ S}$ 的次数为 $|S|$。 d_0的公式表明， $d_0\, C(v) \subseteq C(v)$。由于这些 $e_{v,\ S}$ 构成了 C 在 $\mathbb{Z}\Gamma$上的一组基，我们得到

$$(C, d_0) = \bigoplus_{v\in V} \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \big(C(v), d_0\big). \tag{5.1}$$

~包含在 $D(v)$ 中的非空团就是 L_v的单形。令 $C_*(L_v)$ 为 L_v的增广~单纯链复形，其中 $C_{-1}(L_v) = \mathbb{Z}$ 由空单形生成。 d_0 的公式就是单纯边界的公式，因此 $e_{v,\ S} \mapsto S$ 是链复形同构

$$C_k(v) \cong \widetilde{C}_{k-1}(L_v).$$

用 $H(v)$ 表示 $(C(v),\ d_0)$ 的同调，用 H 表示 (C, d_0) 的同调。根据命题 4.3,

$$H_k(v) \cong \widetilde{H}_{k-1}(L_v;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 3 \text{ and } v \in \{y_1,\dots,y_{24}\},\\ \mathbb{Z}, & k = 4 \text{ and } v \in \{x_1,\dots,x_{24}\},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由于 $\mathbb{Z}\Gamma$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的自由模，分解 (5.1) 给出

$$H = \bigoplus_{v\in V} \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} H(v), \qquad H_3 = \bigoplus_{i=1}^{24} \mathbb{Z}\Gamma\, \mathbf{f}_i, \qquad H_4 = \bigoplus_{j=1}^{24} \mathbb{Z}\Gamma\, \mathbf{e}_j,$$

以及 $H_k = 0$ 对应于 $k \neq 3,4$。这里 $\mathbf{f}_i$ 是 $H_3(y_i)$ 的一个生成元，而 $\mathbf{e}_j$ 是 $H_4(x_j)$ 的一个生成元。

我们现 在将 $(C(v),\ d_0)$ 收缩到其同调上。这意味着我们构造一个 $\mathbb{Z}$-线性 映射 s

$$\iota_v \colon H_k(v) \to C_k(v), \qquad \pi_v \colon C_k(v) \to H_k(v), \qquad \kappa_v \colon C_k(v) \to C_{k+1}(v)$$

使得

$$\begin{gathered} d_0\,\iota_v = 0, \qquad \pi_v\, d_0 = 0, \qquad \pi_v\,\iota_v = 1, \qquad d_0\,\kappa_v + \kappa_v\, d_0 = 1 - \iota_v\,\pi_v,\\ \kappa_v^2 = 0, \qquad \kappa_v\,\iota_v = 0, \qquad \pi_v\,\kappa_v = 0. \end{gathered} \tag{5.2}$$

这样的三元组 $(\iota_v, \pi_v, \kappa_v)$ 称为 $(C(v),\ d_0)$ 到 $(H(v),0)$ 的强变形收缩 。

这些映射是通过从 $C(v)$ 中分离出无环直和项得到的。对于一个基元素τ，用 $\langle x,\tau\rangle$ 表示 τ在 x中的系数。选取基元素 σ和 τ，使得 $\langle d_0\sigma,\tau\rangle=\theta=\pm1$；令 $C'(v)$ 为其他基元素张成的空间，并令

$$\begin{aligned}
\iota'(x)&=x-\theta\,\langle d_0x,\tau\rangle\,\sigma && (x\in C'(v)),\\
\pi'(x)&=x-\langle x,\sigma\rangle\,\sigma-\theta\,\langle x,\tau\rangle\,d_0\sigma && (x\in C(v)),\\
\kappa'(x)&=\theta\,\langle x,\tau\rangle\,\sigma && (x\in C(v)),
\end{aligned}$$

和 $d_0'=\pi' d_0\,\iota'$。于是 $(C'(v),\ d_0')$ 是一个链复形，ι' 和 π' 是链映射，满足 $\pi'\iota'=1$，并且

$$\big(C(v),d_0\big)=\big(\mathbb{Z}\,\sigma\xrightarrow{\ d_0\ }\mathbb{Z}\,d_0\sigma\big)\oplus\iota'\big(C'(v),d_0'\big).$$

第一个直和项是无环的，κ' 是它的收缩 $d_0\sigma\mapsto\sigma$，并将其延拓为在第二个直和项上为零。我们称这一步消去了这一对 $(\sigma,\ \tau)$。我们用 $(C'(v),\ d_0')$ 替代 $(C(v),\ d_0)$，重复这一步，并继续进行，直到微分为零。对于每个$v\in V$，这都是可行的（附录 B）。经过 N 步后，我们得到一个链复形同构

$$\big(C(v),d_0\big)\cong\big(H(v),0\big)\oplus\bigoplus_{n=1}^{N}\big(\mathbb{Z}\xrightarrow{\ \pm1\ }\mathbb{Z}\big).$$

设 $(\iota^{(n)},\ \pi^{(n)},\ \kappa^{(n)})$ 是第 n 步的映射，其中 $n=1,\ \ldots\ldots,\ N$，并令

$$\iota_v=\iota^{(1)}\cdots\iota^{(N)},\qquad \pi_v=\pi^{(N)}\cdots\pi^{(1)},\qquad \kappa_v=\sum_{n=1}^{N}\iota^{(1)}\cdots\iota^{(n-1)}\,\kappa^{(n)}\,\pi^{(n-1)}\cdots\pi^{(1)}.$$

于是，ι_v 是直和项 $H(v)$ 的包含映射，π_v 是到该项上的投影，而 κ_v 是其他直和项的收缩之和。因此，这些映射满足 (5.2)（另见 [Sk¨o06]）。它们取决于消去各对的顺序，我们固定采用附录 B 中描述的顺序。根据 (5.1)，这些 $\mathbb{Z}\Gamma$-线性映射

$$\iota=\bigoplus_{v\in V}1\otimes\iota_v,\qquad \pi=\bigoplus_{v\in V}1\otimes\pi_v,\qquad \kappa=\bigoplus_{v\in V}1\otimes\kappa_v$$

构成从 (C,d_0) 到 $(H,0)$ 的强变形收缩。对于立方体，$g\,\mathbf{f}_i$ 的高度是 $\varphi(g)+\eta_{y_i}$，而 $g\,\mathbf{e}j$ 的高度是 $\varphi(g)+\eta_{x_j}$。映射 ι、π 和 κ 是 $\mathbb{Z}\Gamma$-线性的，并且保持 (5.1) 中的每个直和项，因此也保持高度。

5.3. 扰动。 令 $R=\mathbb{Z}\Gamma_\varphi$，并记 $C=R\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}C$ 和 $H=R\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}H$。我们使用基本扰动引理 [Bro65, Cra04]。假设 (ι,π,κ) 是从 (C,d_0) 到 $(H,0)$ 的强变形收缩，并且 δ 是一个满足 $(d_0+\delta)^2=0$ 的扰动，使得 $1+\kappa\delta$ 可逆。那么

$$D=\pi\,\delta\,(1+\kappa\delta)^{-1}\iota$$

是 H 上的微分，并且 (H,D) 与 $(C,d_0+\delta)$ 链同伦等价。

我们将此应用于 R，其中 $\delta=d_1$。在基 $e_{v,S}$ 下，$(\kappa d_1)^n$ 的矩阵的每一项都会使高度至少降低 $9904n$。因此，$\sum_{n\geq0}(-\kappa d_1)^n$ 在 R 中逐项收敛，并且它是 $1+\kappa d_1$ 的双侧逆。因此

$$\widehat{C}\ \simeq\ \big(0\longrightarrow R^{24}\xrightarrow{\ D\ }R^{24}\longrightarrow0\big),$$

其中两项分别为 H_4 和 H_3，并且

$$D=\sum_{r\geq1}(-1)^{r-1}D^{(r)},\qquad D^{(r)}=\pi\,d_1(\kappa d_1)^{r-1}\iota.$$

因此，

$$H_4(\widehat{C}) \cong \ker D, \qquad H_3(\widehat{C}) \cong \operatorname{coker} D, \qquad H_k(\widehat{C}) = 0 \quad (k \neq 3, 4). \tag{5.3}$$

现在我们计算 D 的各项。写作 $D(\mathbf{e}_j) = \sum_i D_{ij}\mathbf{f}_i$，对于 $D^{(r)}$ 也同样处理。映射 ι、π 和 κ 不离开顶点 v，也不涉及任何群元素。根据 d_1 的公式，应用一次 d_1 会从顶点 v 导向具有 $F \in D(v)$ 的顶点 $v + m_F$，并乘以 $\pm\gamma(v,\ F)$。因此，$D_{ij}^{(r)}$ 的各项由以下序列标记

$$x_j = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_r = y_i, \qquad v_k = v_{k-1} + m_{F_k}, \quad F_k \in D(v_{k-1}),$$

而此类项的群元素为

$$\gamma_w = \gamma(v_0, F_1)\,\gamma(v_1, F_2)\cdots\gamma(v_{r-1}, F_r) = w_{x_j}\, w\, w_{y_i}^{-1}, \qquad w = r_{F_1}\cdots r_{F_r}. \tag{5.4}$$

这里我们使用了 $\gamma(v,\ F) = w_v\, r_F\, w_{v+m_F}^{-1}$。由于 $\gamma_w\, w_{y_i} = w_{x_j} w$，且 w 的第 k 个字母使高度降低 a_{F_k}，我们得到

$$\varphi(\gamma_w) = f(w_{x_j} w) - f(w_{y_i}) = \eta_{x_j} - \eta_{y_i} - a(w), \qquad a(w) = \sum_{k=1}^{r} a_{F_k} \geq 9904\, r. \tag{5.5}$$

Thus

$$D_{ij}^{(r)} = \sum_{w} n_w\, \gamma_w, \qquad n_w \in \mathbb{Z},$$

其中 w 遍历由此类序列产生的词 $r_{F_1}\cdots r_{F_r}$。我们称它们为从 x_j 到 y_i 的下降词。下降词是约化的。否则，根据删除条件，某个 r_F 的两个出现位置之间只会被与 r_F 对易的字母隔开。穿过 F 会改变 $\mathfrak{s} + v$ 的第 F 个坐标，而穿过与 F 相邻的面则不会改变该坐标，因此第二次穿过 F 时将是上升的。于是，根据 Tits的字问题解，两个下降词给出 W 中同一个元素，当且仅当它们可通过交换相邻的对易字母而相互得到。

5.4. 首项。 表3列出了一个双射 β of $\{1, \ldots, 24\}$，对于每个 j，从 x_j 到 $y_{\beta(j)}$、长度为 1 或 2、代价为 $c_j = a(w_j)$ 的下降词 w_j，以及整数 $u_1, \ldots, u_{24}$。

命题5.2。 对于上述固定的收缩映射，以下结论成立。

(1) 对于每个 j，γ_{w_j} 在 $D_{\beta(j)j}$ 中的系数为 ±1。(2) 对于每个 i、j 以及每个长度为 $r \leq 2$ 的词 w，只要 γ_w 在 $D_{ij}^{(r)}$ 中的系数非零，但不包括 $(i, w) = (\beta(j), w_j)$，

$$c_j - a(w) + u_i - u_{\beta(j)} \leq -1.$$

(3) $B := \max_{i,\ j}\big(c_j + u_i - u_{\beta(j)}\big) = 20002$。

这是一次有限计算（附录 B）。现在我们推导出定理 5.1。

定理 *5.1* 的证明。 根据 (5.3)，只需证明 D 是一个同构。设 $\epsilon_j = \pm1$ 为命题5.2(1)中的系数。定义一个同构 $Q\colon R^{24} \to R^{24}$ 和一个映射 T，使得

$$Q(\mathbf{e}_j) = \epsilon_j\, \gamma_{w_j}\, \mathbf{f}_{\beta(j)}, \qquad T = D \circ Q^{-1},$$

满足 $T(\mathbf{f}_{\beta(j)}) = \epsilon_j \gamma_{w_j}^{-1} D(\mathbf{e}_j)$。赋予 $\mathbf{f}_i$ 权重 $\mu_i = \eta_{y_i} + u_i$。对于满足$A(\mathbf{f}_k) = \sum_i A_{ik}\mathbf{f}_i$的自同态 A，令

$$\|A\| = \max_{i,k}\big(\nu_\varphi(A_{ik}) + \mu_i - \mu_k\big).$$

于是 $\|A \circ A'\| \leq \|A\| + \|A'\|$。

令 $k=\beta(j)$。 $D(\mathbf{e}_j)$ 中的一项 $n_w\gamma_w\mathbf{f}_i$ 对 $T(\mathbf{f}_k)$ 的贡献为 $\epsilon_j n_w\gamma_{w_j^{-1}}^{-1}\gamma_w\mathbf{f}_i$。根据（5.5），

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma_{w_j^{-1}}^{-1}\gamma_w)+\mu_i-\mu_k &= -(\eta_{x_j}-\eta_{y_k}-c_j)+(\eta_{x_j}-\eta_{y_i}-a(w))+(\eta_{y_i}+u_i)-(\eta_{y_k}+u_k)\\ &= c_j-a(w)+u_i-u_{\beta(j)}.\end{aligned}$$

含有 $(i,\ w)=(\beta(j)^{w_j})$ 的项恰好贡献 $\mathbf{f}_k$。因此 $T=1+E$，其中 E 汇集了其他项。根据命题5.2(2)，E 中来自 $D^{(1)}$ 或 $D^{(2)}$ 的每一项都具有$\|\cdot\|\le -1$。根据命题5.2(3) 和 (5.5)，来自 $D^{(r)}$ 且满足 $r\ge 3$ 的每一项都满足

$$c_j-a(w)+u_i-u_{\beta(j)}\le B-3\cdot 9904=-9710.$$

因此 $\|E\|\le -1$ 和 $\|E^n\|\le -n$。由于权重 μ_i 有界，$\sum_{n\ge 0}(-E)^n$ 在 R中逐项收敛，并且

$$D^{-1}=Q^{-1}\sum_{n\ge 0}(-E)^n.$$

所以 D 是一个同构，并且根据 (5.3)，$H_*(C)=0$。

对于 $-\varphi$，令 τ如引理 3.2(3) 中所述，并令 $c_\tau(\gamma)=\tau\gamma\tau^{-1}$对 $\gamma\in\Gamma$成立。于是 $\varphi\circ c_\tau=-\varphi$，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，因此 c_τ 扩张为一个环同构 $c_\tau\colon \mathbb{Z}\Gamma_{-\varphi}\to\mathbb{Z}\Gamma_{\varphi}$。由 τ 的左平移是 C的链自同构，且 $\tau(\gamma c)=c_\tau(\gamma)\,\tau c$。因此

$$\widehat{\mathbb{Z}\Gamma}_{-\varphi}\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}C\longrightarrow\widehat{\mathbb{Z}\Gamma}_{\varphi}\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}C,\qquad x\otimes c\longmapsto c_\tau(x)\otimes\tau c,$$

是阿贝尔群链复形的同构，并且

$$H_*\big(\widehat{\mathbb{Z}\Gamma}_{-\varphi}\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}C\big)\cong H_*\big(\widehat{\mathbb{Z}\Gamma}_{\varphi}\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}C\big)=0.\qquad\square$$

注记 5.3。根据命题5.2(3)，只需精确计算 $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$。对于第 5.2 节中固定的收缩，这两个算子分别有 16 项和 168 项非零项。作为额外检验，计算得算子 $D^{(3)}$有 998 项。所有系数均为 ±1。(2) 中的界达到了：左侧的最大值为 -1。

6. Proof of Theorem 1.1

令$\overline{M}\subset M$ 为紧核心，即去掉 252 个尖点处两两不交的开 horoball 邻域后所得的补集。它是一个带边界的紧致光滑 7-流形

$$\partial\overline{M}=\bigsqcup_{c=1}^{252}T_c,\qquad T_c\cong T^6,$$

并且 M与 $\overline{M}$的内部微分同胚。令 $K=$为 $\ker\overline{\varphi}$，并令 M_φ为M 的无限循环覆盖空间，其基本群为 K。

该纤维化由 Farrell纤维化定理构造而成。回想一下，若存在一个有限 CW 复形 Z以及映射 $i\colon Y\to Z$和 $r\colon Z\to Y$，使得$r\circ i$ 与恒等映射同伦，则称空间 Y 为有限支配。

定理 6.1 (Farrell, Siebenmann [Sie70, 定理 4.1])。设 N 是一个维数至少为6的紧致连通光滑流形。设 $g\colon N\to S^1$ 是一个光滑映射，它在基本群上诱导满射，且其对 ∂N 的限制是一个光滑纤维丛。假设由$\ker g_*$ 确定的 N 的无限循环覆盖是有限支配的，并且$\mathrm{Wh}(\pi_1N)=0$。那么， g 相对于 ∂N 同伦于一个光滑纤维丛。

对于闭流形，这就是 Farrell纤维化定理 [Far71, Far72]。此处陈述的相对形式归功于 Siebenmann。对于上述每一对 $(N,\ g)$，即使不假设 Whitehead群条件，他也定义了一个取值于 $\mathrm{Wh}(\pi_1 N)$ 的障碍，并证明若该障碍消失，则 g 在固定 $g|_{\partial N}$的条件下同伦于一个光滑纤维化。边界 ∂N 不要求是连通的。这一点在此处很重要，因为 ∂M 有 252 个分支。

我们将定理 6.1 应用于 $N = M$。需要证明三件事：存在一个表示 φ 的映射，它在边界上是纤维丛（引理6.2）；覆盖空间 M_φ 有限支配（引理 6.4）；以及 $\mathrm{Wh}(\Gamma) = 0$ （引理6.6）。

引理 6.2。存在一个光滑映射 $f_1\colon M \to S^1$，它在基本群上诱导 φ，并且其在每个边界环面 T_c 上的限制都是光滑纤维丛。$f_1|_{T_c}$ 的纤维由 d_c 个 T^5 的副本组成，其中对于环面中的 248 个，$d_c = 1$；对于其余 4 个，$d_c = 2$。

证明。记 $T_c = \mathbb{R}^6/\Lambda_c$，其中 $\Lambda_c \cong \mathbb{Z}^6$ 是尖点群。根据引理 3.2(2)，φ 在 Λ_c 上的限制非零，其像为 $d_c\mathbb{Z}$，其中 d_c 如陈述所述。令 $\lambda_c\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ 为延拓 $\varphi|_{\Lambda_c}$ 的线性映射。它诱导一个光滑纤维丛

$$\bar{\lambda}_c\colon T_c = \mathbb{R}^6/\Lambda_c \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1.$$

0 上的纤维是 $\lambda_c^{-1}(\mathbb{Z})/\Lambda_c$。集合 $\lambda_c^{-1}(\mathbb{Z})$ 是平行超平面 $\lambda_c^{-1}(n)$、$n \in \mathbb{Z}$ 的并集，并且 Λ_c 将 $\lambda_c^{-1}(n)$ 映射到 $\lambda_c^{-1}(n')$ 当且仅当 d_c 整除 $n - n'$。因此，该纤维由 d_c 个 T^5 的副本组成。

选取一个光滑映射 $f_0\colon M \to S^1$，使其诱导 φ。映射 $T_c \to S^1$ 的同伦类由其在基本群上诱导的映射决定，因此对于每个 c，$f_0|_{T_c}$ 与 λ_c 同伦。利用 ∂M 的领域，我们通过同伦将 f_0 改为光滑映射 f_1，使得对于每个 c 都有 $f_1|_{T_c} = \lambda_c$。□

对于有限支配，我们使用以下判据。对于群 G 和同态 $\psi\colon G \to \mathbb{Z}$，Novikov环 $\mathbb{Z}G_\psi$ 的定义与第 5 节相同，只是用 $(G,\ \psi)$ 替代 $(\Gamma,\ \varphi)$。

定理 6.3 (Ranicki, Sch¨utz [Sch06, 定理 4.9])**.** 设 Y 是一个有限连通 *CW* 复形，其基本群为 G，万有覆盖为 Y。设 $\psi\colon G \to \mathbb{Z}$ 是一个满同态，且 Y_ψ是 Y 的无限循环覆盖，其基本群为 核 ψ。那么，Y_ψ 有限支配，当且仅当核 ψ 有限表示且

$$H_*\big(\widehat{\mathbb{Z}G}_\psi \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\widetilde{Y})\big) = 0 = H_*\big(\widehat{\mathbb{Z}G}_{-\psi} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\widetilde{Y})\big).$$

引理 6.4。无限循环覆盖 M_φ 有限支配。

证明。我们将定理 6.3 应用于 $Y = X$ 和 $\psi = \varphi$。复形 X 是有限的，其基本群为 Γ，万有覆盖为 Σ （第3节）。根据引理 3.2(1)，同态 φ 是满射。由推论 4.4，核 K 有限表示；根据定理 5.1，两个诺维科夫同调群均为零。因此，X 的无限循环覆盖 $X_\varphi = \Sigma/K$ 有限支配。

空间 X 和 M 都是 $K(\Gamma,1)$ 空间，因此存在一个同伦等价 $X \to M$，其在 Γ 上诱导恒等映射。它提升为一个同伦等价 $X_\varphi \to M_\varphi$。因此，M_φ 也是有限支配的。□

对于 Whitehead群，我们使用以下定理。

定理 6.5 (Bartels–L¨uck [BL12, 定理 B])。设 G 是一个无挠群，它在有限维 *CAT(0)* 空间上适当地、余紧地且等距地作用。那么 $\mathrm{Wh}(G) = 0$ 且 $K_0(\mathbb{Z}G) = 0$。

这两个消失结论在 [BL12] 的引言中被列为该文定理B的推论。

引理6.6。$\mathrm{Wh}(\Gamma) = 0$。

证明。根据命题2.2(1)，群 Γ 是无挠的。它通过立方等距变换作用于戴维斯复形 Σ，后者是一个维数为7的CAT(0)立方复形。该作用是自由的，且商空间 X紧致，因此该作用是适当且余紧的。于是定理 6.5适用。□

定理 *1.1* 的证明。取 $M = \mathbb{H}^7/\Gamma$。根据命题2.2，它是一个可定向、完备、有限体积的双曲7-流形，并且(1)成立。

对于(2)，令 f_1 为引理6.2中的映射。我们将定理 6.1应用于$N = M$ 和 $g = \overline{f_1}$。流形 M 是紧致、连通且维数为7的。映射 f_1 诱导出满射φ，其在 ∂M 上的限制是一个光滑纤维丛。根据引理 6.4，覆盖空间 M_φ 是有限支配的；根据引理6.6，$\mathrm{Wh}(\Gamma) = 0$ 。因此，$\overline{f_1}$ 相对于 ∂M 同伦于一个光滑纤维丛

$$p\colon \overline{M} \longrightarrow S^1.$$

其纤维是一个紧6流形 F。 p到 int $M \cong M$的限制是一个以 int F为纤维的光滑纤维丛，并且它表示 φ。

对于（3）， p 的精确同伦序列表明， F 是连通的，因为 φ 是满射的；并且 F 是无球面的，因为 M 是无球面的。它是可定向的，因为 M 和 S^1 是可定向的。由于∂M上的 $p = f_1$ ，边界 $\partial F = F \cap \partial M$是纤维丛 $f_1|_{T_c}$的各个纤维之并。根据引理6.2，它由

$$\sum_{c=1}^{252} d_c = 248 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 256$$

个 T^5的副本组成。 □

Acknowledgements

作者感谢Fangting Zheng在五年前将作者引介至相关课题，并感谢其在撰写本文期间进行的有益讨论。

Use of AI tools

作者使用GPT（OpenAI）来帮助探索想法、完善证明并编写用于计算的代码，并使用Claude（Anthropic）起草了手稿。作者对本文的数学内容承担全部责任。

AppendixA. Data

$\mathbb{F}_2^{56}$的向量写作由 7 个 8 位比特块组成。块 n 从左到右列出坐标 $8n$， $8n+1$，……， $8n+7$。

V的基。

$$\begin{aligned}
b_1 &= 10010110\ 00001111\ 00110011\ 00001111\ 00001111\ 00001111\ 00001111\\
b_2 &= 11111111\ 00000000\ 11111111\ 11111111\ 00000000\ 00000000\ 00000000\\
b_3 &= 11111111\ 11111111\ 00000000\ 00000000\ 00000000\ 11111111\ 00000000\\
b_4 &= 01101001\ 00001111\ 00110011\ 00001111\ 11110000\ 00001111\ 11110000\\
b_5 &= 10100101\ 10011001\ 00111100\ 00111100\ 00111100\ 00000000\ 00111100\\
b_6 &= 00000000\ 11111111\ 00000000\ 11111111\ 11111111\ 00000000\ 00000000\\
b_7 &= 01100110\ 10100101\ 10011001\ 00111100\ 01100110\ 00111100\ 00000000\\
b_8 &= 11000011\ 01011010\ 00000000\ 10011001\ 00111100\ 01011010\ 01011010
\end{aligned}$$

注意， $b_1+b_2+b_3+b_4$ 是全 1 向量**1**。

状态。$\mathfrak{s}=$ 10111101 01001011 10011011 00010000 11011101 10111011 01010011。

$n\backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	10000000	11000000	10100000	11100000	00010000	01010000	00110000	01110000
1	10001000	10001100	01011100	01011000	10101000	10101100	01111100	01111000
2	10001010	11101110	11001010	10101110	01011110	00111010	00011110	01111010
3	10000001	00110101	10000101	00110001	11000001	01110101	11000101	01110001
4	11000110	10100010	11000010	10100110	01010110	00110010	01010010	00110110
5	11100011	01010111	10000111	00110011	11000011	01110111	10100111	00010011
6	00011101	10101001	11001001	01111101	10001101	00111001	01011001	11101101

TABLE 1. 移动 m_{8n+r}，用相对于 V的基$b_1,\dots,b_8$的坐标表示。穿过面 F_j时，将m_j的词逐位添加到当前 P^7副本的词中。

$n\backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	9960	9996	9983	9933	10063	9972	10100	10094
1	9996	10031	9965	9946	10092	9983	9942	10017
2	9907	10094	9904	9938	10056	10086	9904	10079
3	9994	9981	9915	10019	9912	10046	10070	9955
4	10063	9990	10030	9992	10014	10082	9972	9997
5	10022	9960	10024	10014	9983	10066	9946	10073
6	10057	10071	9936	9958	10005	9953	10059	10037

TABLE 2. 权重 a_{8n+r}。

APPENDIX B. THE COMPUTATIONS

所有计算均为整数或 $\mathbb{F}_2$ 的元素上的精确计算。它们使用附录A中的数据。

命题*2.2* 和引理 *3.2*。 检验如下。 V 的秩通过在 $\mathbb{F}_2$ 上进行高斯消元计算得出。枚举了全部 33，644 个非空团，并针对每个团 S 检验了 $\{m_i\}_{i\in S}$ 的独立性。理想顶点是满足全部 56 条定义不等式的点$_{12}(p_i+p_j)$，其中 $\langle p_i,\ p_j\rangle=-1$。对每个理想顶点，均检验了其 12 个邻接面的所述性质。在 X 的全部 14，336 条有向边和 48，384 个方形上检验了余循环恒等式。相对于一棵生成树计算了 α 的周期。

命题 *4.3*。 证明中使用的 Tietze 变换针对每个 v均有记录。每个变换消去一个生成元，总计有 41，472 个变换。消去过程如第 5.2 节所述。

命题*5.2*。 对于每个 v，依次对 $k=1$、.....、7，按照第 5.2 节的方法，消去具有 σ 且次数为 k 的配对（σ，τ），直至 k 次的微分消失。每次我们选择使（$r-1$）（$c-1$）最小的配对，其中 r 是满足 $\langle d\sigma',\ \tau\rangle\neq 0$ 的基元素 σ' 的数量，而 c 是满足 $\langle d\sigma,\ \tau'\rangle\neq 0$ 的基元素 τ' 的数量，这些数量均针对当前微分 d 而言。如果有多个配对达到最小值，则按照固定规则选择其中一个。successive 步骤的映射按照第 5.2 节所述进行复合。随后，使用原始边界矩阵，在全部 468，224 个胞腔上检查（ι_v，π_v，κ_v）的恒等式（5.2）。

i	y_i	$j=\beta^{-1}(i)$	x_j	w_j	c_j	u_i
1	10000000	13	00101110	r_{19}	9938	0
2	11000000	15	10110001	r_{31}	9955	0
3	01010000	12	00001110	r_{20}	10056	0
4	10111000	8	11100110	r_{20}	10056	-18
5	01101100	19	01000011	r_8r_{46}	19942	0
6	11111100	20	11010011	r_8r_{46}	19942	0
7	10000110	23	11110111	r_{31}	9955	0
8	01000110	17	01101001	$r_{15}r_{41}$	19977	-11
9	00100110	16	00001001	$r_{41}r_{15}$	19977	0
10	00010110	4	01001000	r_{20}	10056	0
11	01010110	22	11010111	r_{24}	9994	0
12	01001110	24	11001111	r_{24}	9994	-66
13	11011110	3	01110000	r_{19}	9938	-73
14	11111110	1	10100000	r_{20}	10056	-60
15	01000001	2	00110000	r_{31}	9955	-88
16	11101001	21	01000111	r_{19}	9938	0
17	10011001	10	10110110	$r_{41}r_{15}$	19977	0
18	11111001	9	11010110	$r_{15}r_{41}$	19977	-25
19	00100011	5	00001100	$r_{46}r_8$	19942	-60
20	10110011	6	10011100	$r_{46}r_8$	19942	-46
21	00000111	11	01110110	r_{31}	9955	-51
22	00100111	7	10100110	r_{24}	9994	-5
23	10110111	18	00011001	r_{19}	9938	-12
24	00111111	14	10111110	r_{24}	9994	0

TABLE 3. D的首项。顶点 y_i 和x_j 以坐标表示相对于 $b_1,\ldots,b_8$。顶点 y_i 具有 $L_v\simeq S^2$，而顶点x_j具有 $L_v\simeq S^3$。单词 w_j 从 x读出：第一个字母是第一个被穿过的面。$\{8,46\}$和 $\{15,41\}$都不是一对相邻的面，因此字母的顺序很重要。

随后，在 $\mathbb{Z}\Gamma$ 中精确计算算子 $D^{(1)}$，$D^{(2)}$，$D^{(3)}$。群元素记录为字词（5.4），并按照相邻字母的交换关系取模进行比较。最后，逐项检查命题5.2中的不等式。

这些计算的结果以辅助文件的形式提供。其中列出了每个 $v\in V$的单纯形数量和 L_v的同调，以及 $D^{(1)}$、$D^{(2)}$ 和$D^{(3)}$的所有非零项。

REFERENCES

[Ago13] I. Agol，《虚Haken猜想》，Doc. Math. 18 (2013)，1045–1087。附录由 I. Agol、D. Groves 和 J. Manning 撰写。[ALR01] I. Agol、D. D. Long 和 A. W. Reid，《Bianchi群在几何有限子群上可分》，Ann. of Math. (2) 153 (2001)，第 3 期，599–621。[BL12] A. Bartels 和 W. L¨uck，《双曲群和 CAT(0)群的 Borel猜想》，Ann. of Math. (2) 175 (2012)，第 2 期，631–689。[BB97] M. Bestvina 和 N. Brady，《群的莫尔斯理论与有限性性质》，Invent. Math. 129 (1997)，第 3 期，445–470。[Bro65] R. Brown，《扭曲Eilenberg–Zilber定理》，Simposio di Topologia（Messina，1964），Edizioni Oderisi，Gubbio，1965，第 33–37 页。[Cra04] M. Crainic，《关于扰动引理与变形》，预印本（2004），arXiv:math/0403266。

[Dav08] M. W. Davis, 《考克斯特群的几何与拓扑》，伦敦数学会专著丛书，第 32 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2008。[ERT12] B. Everitt、J. G. Ratcliffe 和 S. T. Tschantz, 《直角考克斯特多胞体、双曲六维流形与 Siegel 的一个问题》，Math. Ann. 354 (2012)，第 3 期，871–905。[Far71] F. T. Farrell, 《流形纤维化到圆上的障碍》，Actes du Congr`es International des Math´ematiciens（尼斯，1970），第 2 卷，Gauthier-Villars，巴黎，1971，第 69–72 页。[Far72] F. T. Farrell, 《流形纤维化到圆上的障碍》，Indiana Univ. Math. J. 21 (1971/72)，315–346。[Fis23] S. P. Fisher, 《双曲7-流形的代数纤维化》，Bull. Lond. Math. Soc. 55 (2023)。[IMM23] G. Italiano、B. Martelli 和 M. Migliorini, 《纤维化到 S^1上的双曲五维流形》，Invent. Math. 231 (2023)，第 1 期，1–38。[IMM24] G. Italiano、B. Martelli 和 M. Migliorini, 《维数至多为 8 的代数纤维化双曲流形》，J. Inst. Math. Jussieu 23 (2024)，第 2 期，609–646。[IMN26] G. Italiano、M. Migliorini 和 A. Ng, 《高维双曲群的改进代数纤维化》，预印本（2026），arXiv:2606.05091。[JNW21] K. Jankiewicz、S. Norin 和 D. T. Wise, 《直角考克斯特群的虚拟纤维化》，J. Inst. Math. Jussieu 20 (2021)，第 3 期，957–987。[Kie25] D. Kielak, 《流形与群的虚拟纤维化》，预印本（2025），arXiv:2510.01805。[PV05] L. Potyagailo 和 E. Vinberg, 《双曲空间中的直角反射群》，Comment. Math. Helv. 80 (2005)，第 1 期，63–73。[Ran95] A. Ranicki, 《有限支配与Novikov环》，Topology 34 (1995)，第 3 期，619–632。[Sch06] D. Sch¨utz, 《有限支配、诺维科夫同调与非奇异闭1-形式》，Math. Z. 252 (2006)，第 3 期，623–654。[Sie70] L. C. Siebenmann, 《纤维化到圆上的总体怀特海德挠率障碍》，Comment. Math. Helv. 45 (1970)，1–48。[Sk¨o06] E. Sk
¨
358 2006 1, oldberg, 115 129
《代数视角下的莫尔斯理论》，Trans. Amer. Math. Soc. ( )，第 – 期，–。[Vin85] `E. B. Vinberg, 《双曲反射群》，Russian Math. Surveys 40 (1985)，第 1 期，31–75。[Wal65] C. T. C. Wall, 《CW复形的有限性条件》，Ann. of Math. (2) 81 (1965)，56–69。[Weg12] C. Wegner, 《CAT(0)群的 K-理论 Farrell–Jones 猜想》，Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012)，第 3 期，779–793。[Wis21] D. T. Wise, 《具有拟凸层级的群的结构》，Annals of Mathematics Studies，第 209 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2021。

Department of Mathematics, University of Wisconsin–Madison, Madison, WI 53706, USA
Email address: llguo@威斯康星州.edu