arXiv:2611.30882v1 [math.OA] 23 Nov 2026

Voiculescu 的自由半圆族的迹类扰动

MINGHUI MA、RUI SHI 和 TIANZE WANG

摘要。设 $\{s_j\}_{j\in\Lambda}$ 是全 Fock 空间 $\mathcal{H}=\mathcal{F}(\ell^2(\Lambda))$ 上的标准自由半圆族，其中 $|\Lambda|\geqslant 2$。对于任意一族满足 $\gamma=\sum_{j\in\Lambda}\|K_j\|_1<\infty$ 的自伴迹类算子 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$，我们证明冯·诺伊曼代数 $W^*(\{s_j+K_j\colon\ j\in\Lambda\})$ 的 II_1 型部分 $\mathcal{P}$ 同构于自由群因子 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$。作为应用，我们证明，在可分无限维希尔伯特空间上，不可约算子集合在迹类范数下并不稠密。对于每个固定的 $\gamma>0$，Murray–von Neumann 维数 $\dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}}\mathcal{H})$ 的可能取值构成区间 $[1,1+\gamma)$，其中 $z_{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{P}$ 的单位元。

1. 引言

经典的 Weyl–von Neumann 定理 [10, 21] 指出，在可分无限维希尔伯特空间上，每个自伴算子都可以通过任意小的希尔伯特–施密特扰动对角化。Kuroda [9] 将 Weyl–von Neumann 定理推广到所有不等价于迹类范数的酉不变范数，包括 Schatten p-范数，其中 $1<p<\infty$。在 $p=1$，Kato–Rosenblum 定理 [8, 12] 指出，差为迹类的两个自伴算子的绝对连续部分酉等价。特别是，非零的绝对连续部分会阻碍通过迹类扰动实现对角化。对于具有对易分量的有界自伴 n元组， $n\geqslant 2$Voiculescu [13, 14]证明，若扰动后的元组也具有对易分量，则逐坐标的 Lorentz 理想 $\mathcal{C}_n^-$ 扰动在酉等价意义下保持联合勒贝格绝对连续部分。他在 [18, 定理 3。1] 中进一步证明，对于 $\mathcal{C}_{p_j}^-$中的逐坐标扰动，同样的结论也成立，其中 $p_j>1$ 且 $\sum_{j=1}^n p_j^{-1}=1$。他最近发表的综述[19]讨论了可交换元组的波算子，并针对二元组提出了两个问题。对于 $n\geqslant 3$，Bhutani 和 Voiculescu [2] 证明，对于可能无界且强可交换的元组，在逐坐标 $\mathcal{C}_n^-$ 扰动下，联合绝对连续子空间上存在强波算子。

自由概率论由 Voiculescu[20] 在研究自由群因子时引入。在自由中心极限定理 [20, 定理 3.5.1，第 29], 页中，半圆律扮演着与经典中心极限定理中的高斯律相同的角色。

2020 数学主题分类。次要分类46L54和47A55。关键词和短语。 自由半圆族、自由群因子、迹类扰动、不可约算子。

Voiculescu 在全 Fock 空间上的构造给出了一个自由半圆族，其生成的冯·诺伊曼代数与同一指标集上的自由群因子同构 [20, 定理 2.6.2，第 17]页。Kato–Rosenblum 定理分别适用于每个半圆生成元。受 Voiculescu 的工作启发 [13, 14]，我们研究自由半圆族的同时迹类扰动。

设 Λ 是一个带有 $|\Lambda| \geqslant 2$ 的集合，并考虑全 Fock 空间

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}(\ell^2(\Lambda)) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell^2(\Lambda)^{\otimes n}.$$

对每个 $j \in \Lambda$，令 l_j 和 r_j 分别为与第 j 个标准单位向量对应的左生成算子和右生成算子。它们的伴随算子 l_j^* 和 r_j^* 是相应的湮灭算子。作用于一个 Fock 字时，l_j^* 若首字母为 j，则将其移除，否则结果为零；r_j^* 对末字母的作用类似。二者都会湮灭真空向量，也就是说，$l_j^*\Omega = r_j^*\Omega = 0$。

设 $s_j = l_j + l_j^*$。算子 $\{s_j\}_{j\in\Lambda}$ 构成一个标准自由半圆族。根据 [20, 例 3.4.2，第 26], 页，关于真空态 $T \mapsto \langle T\Omega, \Omega\rangle$，每个 s_j 的分布都是标准半圆律 μ，其定义为

$$d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - t^2}\, dt, \qquad -2 \leqslant t \leqslant 2.$$

特别地，$\tau(s_j^2) = 1$。真空态在 $W^*(\{s_j : j \in \Lambda\})$ 上的限制是忠实正规迹态τ。标准的等同关系

$$W^*(\{s_j : j \in \Lambda\}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda), \qquad \mathcal{H} \cong L^2(\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda), \tau) \tag{1.1}$$

将在全文中使用，其中 $\mathbb{F}_\Lambda$ 是由 Λ 生成的自由群，τ 对应于其典范群迹；参见 [20, 定理 2.6.2，第 17] 页。此外，内积由 $\langle x, y\rangle = \tau(y^*x)$ 给出，其中 $x, y \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$。

对于 $\mathcal{H}$ 上的迹类算子 K，记其迹为 $\|K\|_1 = \mathrm{Tr}(|K|)$。我们的第一个定理表明，当半圆生成元受到迹范数可求和的自伴算子扰动时，所得冯·诺伊曼代数与原自由群因子直和项同构。

定理 1.1。设 $\{s_j\}_{j\in\Lambda}$ 为上述定义的标准自由半圆族。假设 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$ 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的一族自伴迹类算子，满足

$$\gamma = \sum_{j\in\Lambda} \|K_j\|_1 < \infty. \tag{1.2}$$

设 $S_j = s_j + K_j$，其中 $j \in \Lambda$，且 $\mathcal{N} = W^*(\{S_j : \ j \in \Lambda\})$。则 $\mathcal{N}$具有中心分解

$$\mathcal{N} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{D},$$

其中，$\mathcal{P} = z_{\mathcal{P}}\mathcal{N}$与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 同构，其中 $\mathcal{N}$ 中的非零中心投影 $z_{\mathcal{P}}$ 所对应的 $\mathcal{Q}$ 或为零，或为适当无穷；而 $\mathcal{D}$ 作用于 $\mathcal{H}$ 的有限维约化子空间。此外，存在同构 θ: $\mathcal{P} \to \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$，使得

$$\theta(z_{\mathcal{P}} S_j) = s_j \qquad (j \in \Lambda).$$

若 Λ 是无限的，则 $\mathcal{D} = 0$。

当 Λ 有限时，可和性条件 (1.2) 自动成立。当 Λ 不可数时，它意味着除可数多个 $j \in \Lambda$ 外，$K_j = 0$。

算子理论中一个由来已久的问题，涉及迹类范数下可分无限维希尔伯特空间上不可约算子的稠密性。Halmos [5] 证明了不可约算子在算子范数拓扑中构成一个稠密 G_δ 子集。在 [5, 第 1], 节的最后一段中，Douglas 借助 Weyl–von Neumann 定理指出，不可约算子在希尔伯特–施密特范数下稠密。Herrero 在 [6, 引理 4.33] 中证明，不可约算子集在 Schatten p-范数下稠密，对每个 $p > 1$均如此。作者在 [7, 定理 1.2]中将这个由来已久的稠密性问题归结为循环型II_1因子的生成元情形。应用定理 1.1，我们在推论 4.5 中对该问题给出了否定回答，并由此建立了算子理论与冯·诺伊曼代数之间的联系。

Kato–Rosenblum 定理中的酉等价意味着，自伴算子的绝对连续谱重数函数在迹类扰动下保持不变。对于可交换元组，Voiculescu [16] 还将联合绝对连续谱重数函数的积分与一族 Lorentz 理想的拟中心模联系起来。在定理 1.1 的设定中，我们可以像 [4, 第五章第 10α] 节那样，用 Murray–von Neumann 维数 $\dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}}\mathcal{H})$ 来度量表示 $\mathcal{P}$ 在 $z_{\mathcal{P}}\mathcal{H}$ 上的重数。对于未受扰动的算子族，这个维数为 1，因为 $\mathcal{H} \cong L^2(\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)\ \tau)$ 是一个左 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$-模。下一个定理表明，这个维数在迹类扰动下可以增大，并确定了总迹范数$\gamma = \sum_{j\in\Lambda} \|K_j\|_1$固定时该维数可能取的值。

定理 1.2。沿用定理 *1.1* 的记号，令 $d =$ 维数$_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}}\mathcal{H})$。若 $\gamma = 0$，则$d = 1$。对于每个 $\gamma > 0$，当 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$ 遍历所有满足 $\sum_{j\in\Lambda} \|K_j\|_1 = \gamma$ 的自伴迹类族时，维数 d 恰好取遍 $[1, 1+\gamma)$ 中的值。

在第 2 节中，我们记录全 Fock 空间上的交换关系，并构造一个迹泛函，用于给 Murray–von Neumann 维数提供上界。在第 3 节中，我们证明，对于紧扰动，原始族与扰动后族之间的非零交织算子会导出一个与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 同构的中心直和项。在第 4 节中，我们在可和性假设 (1.2) 下通过有限秩逼近构造这样的交织算子。随后，我们证明定理 1.1，并将其应用于不可约算子的稠密性问题。最后，在第 5 节中，我们通过建立维数界证明定理 1.2；并且对于每个 $\gamma > 0$，通过对单个生成元施加正有限秩扰动，实现$[1, 1+\gamma)$ 中的每一个值。

2. 预备知识

2.1. 交换子与对易恒等式

我们记录下文要用到的交换子与对易恒等式。在前述识别 (1.1) 下， [20, 注 2.6.7，第 20] 页给出

$$\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)' = W^*(\{r_j + r_j^* : j \in \Lambda\}) = R(\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)).$$

这里 $R_x\xi = \xi x$，且交换子上的典范迹 τ'满足 $\tau'(R_x) = \tau(x)$。令 P_Ω 为到 $\mathbb{C}\Omega$ 上的秩一投影，并令 $e_j = l_j\Omega = r_j\Omega$，其中 $j \in \Lambda$。根据第 6 页例 1.5.8 和第 20], 页注 2.6.7 中左、右创造算子的定义，直接对福克字计算可得

$$[l_j, r_i] = 0, \qquad [l_j^*, r_i] = \delta_{ij}P_\Omega, \qquad [l_j, r_i^*] = -\delta_{ij}P_\Omega \quad (i, j \in \Lambda).$$

2.2. Murray-von Neumann 维数

我们记录一个关于 Murray-von Neumann 维数的著名结果。

引理 2.1。 设$(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1 因子，且 $\mathcal{H}$ 是一个正规左 $\mathcal{M}$-模。假设 $\xi \in \mathcal{H}$，并且 $p \in \mathcal{M}$ 是一个投影，使得 $p\xi = \xi$。那么

$$\dim_{\mathcal{M}} \overline{\mathcal{M}\xi} \leqslant \tau(p).$$

特别地，由 n 个向量生成的子模的 $\mathcal{M}$-维数至多为 n。

证明。 设 $g \in L^1(\mathcal{M}, \tau)_+$ 定义如下

$$\tau(xg) = \langle x\xi, \xi\rangle \qquad (x \in \mathcal{M}).$$

于是 $\tau((1-p)g) = \|(1-p)\xi\|^2 = 0$，从而得到 $g = pgp$。由于

$$\|x\xi\|^2 = \tau(x^*xg) = \|xg^{1/2}\|_2^2,$$

映射 $x\xi \mapsto xg^{1/2}$ 延拓为 $\mathcal{M}\xi$ 到$L^2(\mathcal{M},\ \tau)p$的等距 $\mathcal{M}$-模嵌入。后一个稠的维数为 $\tau(p)$。取 $p = 1$，每个循环子模的维数至多为 1。最后一个断言由子模之和的维数的次可加性得到。□

2.3. 一个迹泛函

在本小节中，$\mathcal{H}$ 表示全 Fock 空间 $\mathcal{F}(\ell^2(\Lambda))$。令 $\mathcal{E}$ 表示满足以下条件的所有算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$的集合：

$$[s_j, X] \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H}) \quad (j \in \Lambda), \qquad \sum_{j\in\Lambda} \|[s_j, X]\|_1 < \infty.$$

显然，$\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的含幺 $*$-子代数。对于有限元组，这就是 [17, 第 2 节1]中讨论的迹类模上的交换子代数。受 Voiculescu 的迹配对 [15,命题 31], 的启发，我们定义一个线性泛函如下：

$$\varphi(X) = \langle X\Omega, \Omega\rangle + \sum_{j\in\Lambda} \mathrm{Tr}([s_j, X]\, l_j) \qquad (X \in \mathcal{E}).$$

对于每个 $X \in \mathcal{E}$，至多有可数多个交换子 $[s_j, X]$ 非零，并且由于 $\|l_j\| = 1$，该级数绝对收敛。显然，φ 在 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'$上与真空迹 τ'一致。此外，若 Λ 是有限的，则对每个 $j \in \Lambda$，$P_\Omega \in \mathcal{E}$且 $[s_j, P_\Omega]l_j = -P_\Omega$。因此，$\varphi(P_\Omega) = 1 - |\Lambda| < 0$。

我们先验证恒等式 $\varphi(AX) = \varphi(XA)$，其中 $X \in \mathcal{E}$为 A 是右创造算子或其伴随算子时的情形。

引理 2.2. 设对于每个 $X \in \mathcal{E}\}$，都有 $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{E}\colon\ \varphi([A, X]) = 0$。那么，$\mathcal{F}$是 $\mathcal{E}$的含单位子代数，并且对于每个 $j \in \Lambda$，都有 $r_j, r_j^* \in \mathcal{F}$。

证明。若 $A, B \in \mathcal{F}$且 $X \in \mathcal{E}$，则 $BX, XA \in \mathcal{E}$，并且

$$\varphi([AB, X]) = \varphi([A, BX]) + \varphi([B, XA]) = 0.$$

因此，$\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$的含单位子代数。

设 $\omega_\Omega(T) = \langle T\Omega, \Omega\rangle$，其中 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。对于 $j \in \Lambda$和 $A, X \in \mathcal{E}$，我们有

$$[s_j, [A, X]] = [s_j, A]X - X[s_j, A] + A[s_j, X] - [s_j, X]A,$$

因此

$$\varphi([A, X]) = \omega_\Omega([A, X]) + \sum_{j\in\Lambda} \mathrm{Tr}\big([s_j, A][X, l_j] + [s_j, X][l_j, A]\big).$$

回忆一下，$[l_j, r_i] = 0$、$[l_j^*, r_i] = \delta_{ij} P_\Omega$ 和 $[l_j, r_i^*] = -\delta_{ij} P_\Omega$。由于 $l_j\Omega = r_j\Omega = e_j$ 且 $l_j^*\Omega = r_j^*\Omega = 0$，我们得到

$$\varphi([r_i, X]) = \omega_\Omega([r_i, X]) + \mathrm{Tr}(P_\Omega[X, l_i]) = 0,$$
$$\varphi([r_i^*, X]) = \omega_\Omega([r_i^*, X]) - \mathrm{Tr}(P_\Omega[X, l_i]) - \mathrm{Tr}([s_i, X]P_\Omega) = 0.$$

因此，r_i，$r_i^* \in \mathcal{F}$。 □

接下来我们证明，φ 在 $\mathcal{E}$ 上是迹的。对于 η_1，$\eta_2 \in \mathcal{H}$，我们将算子 $\xi \mapsto \langle \xi, \eta_2 \rangle \eta_1$ 记作 $\eta_1 \hat{\otimes} \eta_2$。

命题 2.3。线性泛函 φ 在 $\mathcal{E}$ 上是迹的，即

$$\varphi(AX) = \varphi(XA) \qquad (A, X \in \mathcal{E}).$$

证明。我们需要证明 $\mathcal{E} = \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 由引理 2.2 给出。对于每个 $X \in \mathcal{E}$，我们有

$$\varphi([A, X]) = \omega_\Omega([A, X]) + \mathrm{Tr}(D_X A) + \sum_{j \in \Lambda} \mathrm{Tr}([s_j, A][X, l_j]) \qquad (A \in \mathcal{E}),$$

其中 $D_X = \sum_{j\in\Lambda}[[s_j, X], l_j] \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ 和 $\|D_X\|_1 \leqslant 2\sum_{j\in\Lambda} \|[s_j, X]\|_1$。前两项关于 A 是超弱连续的，而最后一项可由 $2\|X\| \sum_j \|[s_j, A]\|_1$ 控制。因此，$\mathcal{F}$ 具有闭包性质：如果网 $A_\lambda \in \mathcal{F}$ 超弱收敛到 $A \in \mathcal{E}$ 且满足 $\sum_{j\in\Lambda} \|[s_j, A_\lambda - A]\|_1 \to 0$，那么 $A \in \mathcal{F}$。

由引理 2.2，由 $\{r_j + r_j^*$ 生成的含单位元的 $*$-代数 $j \in \Lambda\}$ 包含于 $\mathcal{F}$ 中。该代数在 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'$ 中超弱稠密。由于 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'$ 中的每个算子都与每个 s_j 对易，由闭包性质可得 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)' \subseteq \mathcal{F}$。

固定 $A \in \mathcal{E}$。由于 $\sum_{j\in\Lambda} \|[s_j, A]\|_1 < \infty$，存在序列 $\{\xi_m\}_{m=1}^\infty$ 和 $\{\eta_m\}$，它们属于 $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)\ \tau)$，且存在标记 $i(m) \in \Lambda$，使得

$$[s_j, A] = \sum_{i(m)=j} \xi_m \hat{\otimes} \eta_m \quad (j \in \Lambda), \qquad \sum_{m=1}^\infty (\|\xi_m\|^2 + \|\eta_m\|^2) < \infty.$$

设 $d = \sum_{m=1}^\infty (\xi_m^* \xi_m + \eta_m^* \eta_m) \in L^1(\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)\ \tau)_+$。对于 $t > 0$，令

$$p_t = \chi_{[0,t]}(d) \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda).$$

那么 $\xi_m p_t$，$\eta_m p_t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$。由此可得 $R_{\xi_m p_t}$，$R_{\eta_m p_t}^* \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)' \subseteq \mathcal{F}$。对于 $n \geqslant 1$，令

$$B_{t,n} = \sum_{m=1}^n R_{\xi_m p_t}\, r_{i(m)}\, R_{\eta_m p_t}^* \in \mathcal{F}.$$

由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|B_{t,n}\| \leqslant \left\| p_t \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^* \xi_m \right) p_t \right\|^{1/2} \left\| p_t \left(\sum_{m=1}^{n} \eta_m^* \eta_m \right) p_t \right\|^{1/2} \leqslant t.$$

恒等式 $[s_j, r_i] = \delta_{ij} P_\Omega$ 给出

$$\sum_{j\in\Lambda} \|[s_j, B_{t,n}] - R_{p_t}[s_j, A]R_{p_t}\|_1 \leqslant \sum_{m>n} \|\xi_m p_t\| \|\eta_m p_t\| \to 0.$$

设 B_t 为有界序列 $\{B_{t,\ n}\}_{n=1}^{\infty}$的一个弱算子聚点。前面的估计给出 $[s_j, B_t] = R_{p_t}[s_j, A]R_{p_t}$。由于 $B_{t,\ n} \in \mathcal{F}$，闭包性质给出 $B_t \in \mathcal{F}$。此外，我们有

$$[s_j, R_{p_t} A R_{p_t} - B_t] = R_{p_t}[s_j, A]R_{p_t} - [s_j, B_t] = 0 \qquad (j \in \Lambda).$$

因此， $R_{p_t} A R_{p_t} - B_t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)' \subseteq \mathcal{F}$，从而 $R_{p_t} A R_{p_t} \in \mathcal{F}$。注意， $R_{p_t} \to I$在强算子拓扑中，而 $R_{p_t} A R_{p_t} \to A$ 在弱算子拓扑中。此外，我们有

$$\sum_{j\in\Lambda} \|[s_j, R_{p_t} A R_{p_t} - A]\|_1 = \sum_{j\in\Lambda} \|R_{p_t}[s_j, A]R_{p_t} - [s_j, A]\|_1 \to 0 \quad (t \to \infty).$$

再次应用闭包性质得到 $A \in \mathcal{F}$。 □

3. 紧扰动

我们研究一般 II_1 因子标准表示中的紧扰动。对于一个含单位元的 C^*-代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，称 ρ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的态为 $\mathcal{A}$-中心的，当且仅当对于每个 $a \in \mathcal{A}$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，都有 $\rho(aT) = \rho(Ta)$。

引理 3.1。设 $\mathcal{M}$ 是作用在 $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, \tau)$ 上的 *II* 型II_1 因子， $\{x_j\}_{j\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{M}$ 的自伴生成族， $\mathcal{A}$ 是由该族生成的含单位元 C^*-代数。假设 $\mathcal{A}$ 具有唯一迹态 $\tau|_{\mathcal{A}}$，且 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 不存在 $\mathcal{A}$-中心态。对于 $\mathcal{H}$ 上的自伴紧算子 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$，令

$$X_j = x_j + K_j \quad (j \in \Lambda), \qquad \mathcal{N} = W^*(\{X_j : j \in \Lambda\}).$$

那么 $\mathcal{N}$ 具有中心分解

$$\mathcal{N} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{D},$$

其中 $\mathcal{P}$ 要么为零，要么与 $\mathcal{M}$同构； $\mathcal{Q}$ 要么为零，要么适当无穷；而$\mathcal{D}$ 作用于 $\mathcal{H}$的有限维约化子空间。若 $\mathcal{P} = z_{\mathcal{P}}\mathcal{N} \neq 0$，则存在同构 $\theta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}$，满足 $\theta(z_{\mathcal{P}} X_j) = x_j$，对每个 $j \in \Lambda$均成立。

证明。令 $\mathcal{B}$ 为由 $\{X_j\}_{j\in\Lambda}$生成的含幺 C^*-代数，令 $\mathcal{I}=\mathcal{B}\cap\mathcal{K}(\mathcal{H})$，并令 π 为考尔金商。由于对每个 $j\in\Lambda$，$\pi(X_j)=\pi(x_j)$，因此$\pi(\mathcal{B})=\pi(\mathcal{A})$。限制映射 $\pi|_{\mathcal{A}}$是单射，因为 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}$且 $\mathcal{M}\cap\mathcal{K}(\mathcal{H})=\{0\}$。因此，$\eta=(\pi|_{\mathcal{A}})^{-1}\circ(\pi|_{\mathcal{B}})$给出短正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{I}\longrightarrow\mathcal{B}\xrightarrow{\eta}\mathcal{A}\longrightarrow 0,\qquad \eta(X_j)=x_j\quad(j\in\Lambda).$$

$\mathcal{A}$ 上的迹态的唯一性意味着，$\tau_{\mathcal{B}}=\tau\circ\eta$ 是 $\mathcal{B}$ 上消去 $\mathcal{I}$的唯一迹态。

由于 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{B}$的双边理想，其弱算子闭包 $\mathcal{I}^{\mathrm{WOT}}$ 是 $\mathcal{N}$的双边理想。因此，对于某个中心投影 $z_{\mathcal{I}}\in\mathcal{N}$，有 $\mathcal{I}^{\mathrm{WOT}}=z_{\mathcal{I}}\mathcal{N}$。令 z_f为 $\mathcal{N}$ 中使 $z_f\mathcal{N}$ 有限的最大中心投影，并定义

$$z_{\mathcal{P}}=z_f(1-z_{\mathcal{I}}),\qquad z_{\mathcal{Q}}=1-z_f,\qquad z_{\mathcal{D}}=z_fz_{\mathcal{I}}.$$

令 $\mathcal{P}=z_{\mathcal{P}}\mathcal{N}$、$\mathcal{Q}=z_{\mathcal{Q}}\mathcal{N}$和 $\mathcal{D}=z_{\mathcal{D}}\mathcal{N}$。这些投影两两正交，且和为 1。根据 z_f的选取，$\mathcal{Q}$ 要么为零，要么是适当无穷的。

假设 $z_{\mathcal{P}}\neq 0$。对于 $\mathcal{P}$上的每个正规迹态 φ，$\mathcal{B}$ 上的迹态$b\mapsto\varphi(z_{\mathcal{P}}b)$消去 $\mathcal{I}$，因此等于 $\tau_{\mathcal{B}}$。$z_{\mathcal{P}}\mathcal{B}$ 在$\mathcal{P}=z_{\mathcal{P}}\mathcal{N}$ 中的超弱稠密性表明，$\mathcal{P}$ 至多有一个正规迹态。由此可知，$\mathcal{P}$ 是有限因子，并且具有唯一的正规忠实迹态 $\tau_{\mathcal{P}}$。对于 $b\in\mathcal{B}$，我们有

$$\tau_{\mathcal{P}}\big((z_{\mathcal{P}}b)^*(z_{\mathcal{P}}b)\big)=\tau_{\mathcal{B}}(b^*b)=\tau(\eta(b)^*\eta(b)).$$

由 $\tau_{\mathcal{P}}$和 τ的忠实性可知，$z_{\mathcal{P}}b=0$当且仅当 $\eta(b)=0$。因此，$z_{\mathcal{P}}b\mapsto\eta(b)$定义了一个保持迹的 $*$-同构，将 $z_{\mathcal{P}}\mathcal{B}$ 映到 $\mathcal{A}$。由此诱导的 L^2空间之间的酉算子将左乘表示对应起来，并将此映射扩展为一个同构 $\theta\colon\mathcal{P}\to\mathcal{M}$，且对每个 $j\in\Lambda$，都有 $\theta(z_{\mathcal{P}}X_j)=x_j$。

设 w 是 $z_{\mathcal{D}}\mathcal{N}$中的一个非零中心投影。由于 $w\mathcal{I}^{\mathrm{WOT}}=\overline{w\mathcal{N}}$，我们有 $w\mathcal{I}\neq\{0\}$。$w\mathcal{I}$ 中的非零算子的绝对值具有一个非零有限秩谱投影 $q\in w\mathcal{N}$。在有限维代数 $q\mathcal{N}q$中取一个极小投影 p。p 在 $z_{\mathcal{D}}\mathcal{N}$ 中的中心支撑 z 满足 $z\leqslant w$，并且 $z\mathcal{N}$ 是一个有限 I 型因子。投影 z 是有限个与 p等价且两两正交的投影之和，因此具有有限秩。

我们断言，$z_{\mathcal{D}}\mathcal{H}$ 是有限维的。否则，将前面的论证依次应用于非零中心投影 $z_{\mathcal{D}}-\sum_{k<n}z_k$，我们将得到 $z_{\mathcal{D}}\mathcal{N}$ 中由非零有限秩中心投影组成的正交序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$。定义 $\mathcal{N}$-中心态 $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下：

$$\rho_n(T)=\frac{\mathrm{Tr}(z_nTz_n)}{\mathrm{Tr}(z_n)}\qquad(T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})).$$

由于 $z_n \to 0$ 在强算子拓扑中，我们有：对于每个紧算子 K， $|\rho_n(K)| \leqslant \|z_n K z_n\| \to 0$ 。令 ρ_∞ 为 $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的弱-*聚点。于是， ρ_∞ 是一个湮灭紧算子的 $\mathcal{N}$-中心态。对于每个 $j \in \Lambda$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们有

$$\rho_\infty([x_j, T]) = \rho_\infty([X_j, T]) - \rho_\infty([K_j, T]) = 0.$$

这使得 ρ_∞ 成为一个 $\mathcal{A}$-中心态，产生矛盾。因此，$\dim(z_{\mathcal{D}}\mathcal{H}) < \infty$。 □

下一个引理给出了存在一个与原因子同构的中心直和项的判据。

引理 3.2. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的冯·诺伊曼代数，分别由自伴族 $\{x_j\}_{j\in\Lambda}$ 和 $\{X_j\}_{j\in\Lambda}$ 生成。假设 $\mathcal{M}$ 是一个 II 型因子，并且存在一个非零的 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对每个 $j \in \Lambda$ 都满足 $X_j Y = Y x_j$。那么存在一个非零中心投影 $z \in \mathcal{N}$ 和一个同构 $\theta\colon z\mathcal{N} \to \mathcal{M}$，使得对每个 $j \in \Lambda$，都有 $\theta(zX_j) = x_j$。

证明。 设 $Y = V|Y|$ 为极分解，且 $P = V^*V$ 和 $Q = VV^*$。交织关系及其伴随算子给出 $Y^*Y \in \mathcal{M}'$ 和 $YY^* \in \mathcal{N}'$。由此可得 $P \in \mathcal{M}'$ 和 $Q \in \mathcal{N}'$。由于 $|Y| \in \mathcal{M}'$，我们有 $(X_jV - Vx_j)|Y| = 0$，因此 $(X_jV - Vx_j)P = 0$。于是，我们有

$$(X_jQ)V = V(x_jP), \qquad j \in \Lambda.$$

由于 $\mathcal{M}$ 是因子且 $P \neq 0$，它到 $P\mathcal{H}$ 的正规压缩是忠实的。$\mathcal{N}$ 到 $Q\mathcal{H}$ 的正规压缩的核为 $(1-z)\mathcal{N}$，其中 z 是一个非零中心投影。通过酉算子 $V\colon P\mathcal{H} \to Q\mathcal{H}$ 进行共轭，可将压缩代数 $\mathcal{M}P$ 与 $\mathcal{N}Q$ 同构起来，并得到所需的同构。□

现在我们将前面的引理应用于标准自由半圆族。

命题 3.3。 对于 $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda), \tau)$ 上的自伴紧算子 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$，令

$$S_j = s_j + K_j \quad (j \in \Lambda), \qquad \mathcal{N} = W^*(\{S_j\colon j \in \Lambda\}).$$

若存在非零的 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得对每个 $j \in \Lambda$ 都有 $S_jY = Ys_j$，则 $\mathcal{N}$ 有一个中心分解

$$\mathcal{N} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{D},$$

其中 $\mathcal{P} = z_{\mathcal{P}}\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$同构， $\mathcal{Q}$ 要么为零，要么是适当无穷的，而 $\mathcal{D}$作用于有限维希尔伯特空间。此外，对于所有 $j \in \Lambda$，同构 $\theta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$可以选取为满足 $\theta(z_{\mathcal{P}}S_j) = s_j$。

证明。令 $\mathcal{A}$ 为由 $\{s_j\}_{j\in\Lambda}$生成的含幺 C^*-代数。回忆一下，标准半圆律 μ 由下式给出

$$d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}\,dt, \qquad -2 \leqslant t \leqslant 2.$$

定义 $F(t) = \mu([-2,t])$，其中 $t \in [-2,2]$，并令

$$u_j = e^{2\pi \mathbf{i} F(s_j)} \in C^*(1, s_j) \qquad (j \in \Lambda).$$

那么 $\{u_j\}_{j\in\Lambda}$ 是一族自由 Haar 酉算子，并且对每个 $j \in \Lambda$，都有 $W^*(u_j) = W^*(s_j)$；参见 [20, 引理 2.6.5，第 18] 页。自由性表明，$\mathcal{A}$ 可识别为 $C^*(1, s_j)$ 与由其余半圆算子生成的含幺 C^*-代数关于其限制迹的约化自由积。根据 [1, 命题 3.1]，$\tau|_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 上唯一的迹态。此外，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的一个 $\mathcal{A}$-中心态会使约化自由群 C^*-代数 $C_r^*(\mathbb{F}_\Lambda)$ 上的典范迹成为可和的，其中 $C_r^*(\mathbb{F}_\Lambda)$ 是由 $\{u_j\}_{j\in\Lambda}$ 生成的含幺 C^*-代数。这与 [3,命题 4.1.1]，矛盾，因为 $\mathbb{F}_\Lambda$ 是非可和的。

根据引理 3.1，我们有 $\mathcal{N} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{D}$，其中 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{D}$ 如陈述所述。根据引理 3.2，$\mathcal{N}$ 有一个非零的 II 型 $_1$ 中心直和项。由于这个直和项包含在 $\mathcal{P}$ 中，我们有 $\mathcal{P} \neq 0$。所需的同构 θ 由引理 3.1 给出。□

4. 迹类扰动

本节中，我们假设 $\mathcal{H}$ 是全 Fock 空间 $\mathcal{F}(\ell^2(\Lambda))$，并将证明定理 1.1。

4.1. 有限截断

如 (1.2) 中所示，设 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的一族自伴迹类算子，使得

$$\gamma_j = \|K_j\|_1 < \infty \quad (j \in \Lambda), \qquad \gamma = \sum_{j\in\Lambda} \gamma_j < \infty.$$

于是，至多有可数多个 K_j 非零。非零算子 K_j 的谱分解给出向量 $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$、符号 $\sigma_m \in \{-1,\ 1\}$ 以及标记 $i(m) \in \Lambda$，使得

$$K_j = \sum_{i(m)=j} \sigma_m(\xi_m \hat{\otimes} \xi_m), \qquad \gamma_j = \sum_{i(m)=j} \|\xi_m\|_2^2,$$

其中 $\{\xi_m\colon\ i(m) = j\}$ 对每个 $j \in \Lambda$ 都是一个正交集。如果总项数有限，则附加带有任意符号和指标的零向量。此外，我们有 $\gamma = \sum_{m=1}^{\infty} \|\xi_m\|_2^2 < \infty$。

令 $e_j = l_j\Omega = r_j\Omega$，其中 $j \in \Lambda$。这些向量构成 $\ell^2(\Lambda)$ 的标准正交基。对于 $q \geqslant 1$ 和 $(j_1, \ldots, j_q) \in \Lambda^q$，记作 $w = j_1 \cdots j_q$，并定义相应的 *Fock* 字如下：

$$e_w = e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}.$$

对于空字 $\varnothing$，令 $e_\varnothing = \Omega$。由 Λ 中所有有限字（包括空字）所索引的向量 e_w 构成 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。

引理4.1。 *Fock* 字的线性张成空间恰好由向量 $p\Omega$组成，其中 p 是 $\{s_j\}_{j\in\Lambda}$ 中的一个非交换多项式。对于每个 $j \in \Lambda$，该张成空间在 r_j 和 r_j^* 作用下保持不变。

证明。 显然，该张成空间包含 Ω，并且在每个 $s_j = l_j + l_j^*$ 作用下保持不变，因此包含每个 $p\Omega$。反过来，对于 $j \in \Lambda$，$e_\varnothing = \Omega$ 和 $e_j = s_j\Omega$。对于每个 i，$j \in \Lambda$ 以及任意字 v（可以为空），我们有 $l_i e_{jv} = e_{ijv}$ 和 $l_i^* e_{jv} = \delta_{ij} e_v$。因此

$$e_{ijv} = s_i e_{jv} - \delta_{ij} e_v.$$

现在对字长进行归纳即可得到某个多项式 p_w 的 $e_w = p_w\Omega$。通过添加或移除 Fock 字的最后一个字母，可知右创建与湮灭下的保持性。□

固定 $n \geqslant 1$。对于每个 $1 \leqslant m \leqslant n$，选取 $a_{m,\,n}$ 中的一个多项式，使得$a_{m,\,n}\Omega$ 是 ξ_m 的 Fock展开的有限截断，其中 $\|a_{m,\,n}\Omega - \xi_m\| \leqslant n^{-1}\|\xi_m\|$。令 $a_{m,\,n} = 0$，其中 $m > n$。显然，$a_{m,\,n} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$，并且

$$\|a_{m,n}\Omega\| \leqslant \|\xi_m\|, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|a_{m,n}\Omega - \xi_m\|^2 = 0. \tag{4.1}$$

定义

$$K_{j,n} = \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n \\ i(m)=j}} \sigma_m(a_{m,n}\Omega \hat{\otimes} a_{m,n}\Omega), \qquad S_{j,n} = s_j + K_{j,n}. \tag{4.2}$$

于是 $\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in\Lambda} \|K_{j,\,n} - K_j\|_1 = 0$。对于每个 $n \geqslant 1$，除有限多个 $j \in \Lambda$ 外，我们都有 $K_{j,\,n} = 0$。更确切地说，当 $j \notin \{i(1), i(2), \ldots, i(n)\}$ 时，$K_{j,\,n} = 0$。

根据命题 3.3，要得到定理 1.1 中的分解，只需构造一个非零的 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对每个 $j \in \Lambda$ 都有 $S_j Y = Y s_j$。我们首先研究有限秩扰动 $S_{j,\,n}$ 的交织方程。

4.2. 有限秩扰动的交织算子

固定 $n \geqslant 1$。对于 $1 \leqslant m \leqslant n$，令 $a_{m,\ n} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 为前一小节中选取的 ξ_m 的 Fock 展开的有限截断。由 (4.2)，方程 $S_{j,\ n}Y = Ys_j$ 等价于

$$[s_j, Y] = -\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ i(m)=j}} \sigma_m(a_{m,n}\Omega \hat{\otimes} Y^* a_{m,n}\Omega).$$

对于 $A_m \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'$，恒等式 $[s_j, r_i^*] = -\delta_{ij}P_\Omega$ 给出

$$[s_j, R_{a_{m,n}} r_{i(m)}^* A_m] = R_{a_{m,n}}[s_j, r_{i(m)}^*]A_m = -\delta_{i(m),j}(a_{m,n}\Omega \hat{\otimes} A_m^*\Omega).$$

这提示了候选表达式

$$Y = A_0 + \sum_{m=1}^{n} R_{a_{m,n}} r_{i(m)}^* A_m, \qquad A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'. \tag{4.3}$$

Let

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}, \qquad \mathfrak{A} = (I \otimes \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda))' = \mathcal{B}(\ell^2) \,\overline{\otimes}\, \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)', \qquad \mathcal{T}' = \mathrm{Tr} \otimes \tau'.$$

令 $J_m\colon\ \mathcal{H} \to \mathscr{H}$ 为第 m 个坐标嵌入，并令 $\Omega_m = J_m\Omega$ 对于 $m \geqslant 0$。记 $E_n = \sum_{m=0}^{n} J_m J_m^*$。定义

$$W_n = \big(I, R_{a_{1,n}} r_{i(1)}^*, \ldots, R_{a_{n,n}} r_{i(n)}^*\big)\colon E_n\mathscr{H} \to \mathcal{H} \tag{4.4}$$

~ ~并将 W_n 在 $(1-E_n)\mathscr{H}$ 上延拓为零。通过 $A_n = \sum_{m=0}^{n} J_m A_m$ 定义 $A_n\colon\ \mathcal{H} \to E_n\mathscr{H}$。~于是（4.3）变为 $Y = W_n A_n$。在下面的引理中记 $\widehat{s}_j = I \otimes s_j$。

Lemma 4.2. 对于每个 $n \geqslant 1$，都存在一个满足条件的投影 $P_n \in E_n\mathfrak{A}E_n$

$$\mathcal{T}'(P_n) \geqslant 1, \tag{4.5}$$

$$(S_{j,n}W_n - W_n\widehat{s}_j)P_n = 0 \qquad (j \in \Lambda), \tag{4.6}$$

$$P_n(W_n^* a_{m,n}\Omega - \sigma_m\Omega_m) = 0 \qquad (m \geqslant 1). \tag{4.7}$$

证明。令 $\eta_m = W_n^* a_{m,n}\Omega - \sigma_m\Omega_m$ 对于 $1 \leqslant m \leqslant n$，令 $\mathscr{K}_n$ 为由 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 在 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 的对角左作用下生成的 $E_n\mathscr{H}$ 的闭子模，并令P_n 为到 $E_n\mathscr{H} \ominus \mathscr{K}_n$ 上的投影。则 $P_n \in E_n\mathfrak{A}E_n$，由引理 2.1 可得

$$\mathcal{T}'(P_n) = n + 1 - \dim_{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)} \mathscr{K}_n \geqslant 1.$$

显然，对于 $1\leqslant m\leqslant n$，有 $P_n\eta_m=0$。对于 $m>n$，我们有 $a_{m,n}=0$ 且 $P_n\Omega_m=0$。这就证明了 (4.7)。对于 $y\in P_n\mathscr{H}$，由 (4.2) 和恒等式 $[s_j,r_i^*]=-\delta_{ij}P_\Omega$ 可得

$$(S_{j,n}W_n-W_n\widehat{s}_j)y=\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ i(m)=j}}\sigma_m\langle y,\eta_m\rangle\, a_{m,n}\Omega=0.$$

这就证明了 (4.6)。 □

为了控制趋于弱极限的过程，我们使用 φ 来估计 $\mathcal{T}'(Y^*Y)$，其中行的形式为 $Y=W_nB$。

引理 4.3。对于 $1\leqslant m\leqslant n$，令 $a_m\in\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 和 $i(m)\in\Lambda$。令

$$W_n=\big(I,R_{a_1}r^*_{i(1)},\ldots,R_{a_n}r^*_{i(n)}\big),\qquad c=\left(\sum_{m=1}^n\|a_m\Omega\|^2\right)^{1/2}.$$

假设 $B\in E_n\mathfrak{A}E_n$、$Y=W_nB$ 和 $Y^*Y\in E_n\mathfrak{A}E_n$。则 $YY^*\in\mathcal{E}$ 和

$$\mathcal{T}'(Y^*Y)=\varphi(YY^*)\leqslant\|Y^*\Omega\|^2+2c\|Y\|\,\mathcal{T}'(B^*B)^{1/2}.$$

证明。在 $E_n\mathscr{H}$ 上写作 $Y=(C_0,\ C_1,\ \ldots\ldots,\ C_n)$，其中 $C_k=YJ_k$。W_n 的每个元素都属于 $\mathcal{E}$，而 B 的每个元素都属于 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'$。由于 $Y=W_nB$，我们对每个 $0\leqslant k\leqslant n$ 都有$C_k\in\mathcal{E}$。因此，$YY^*=\sum_{k=0}^nC_kC_k^*\in\mathcal{E}$。

由于 $Y^*Y\in E_n\mathfrak{A}E_n$，每个对角元素 $C_k^*C_k=J_k^*Y^*YJ_k$ 都属于 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'$。根据命题 2.3，我们有 $\varphi(C_kC_k^*)=\varphi(C_k^*C_k)=\tau'(C_k^*C_k)$。对 k 求和得到

$$\varphi(YY^*)=\sum_{k=0}^n\tau'(C_k^*C_k)=\mathcal{T}'(Y^*Y).$$

令 $\partial_jY=s_jY-Y\widehat{s}_j$，其中 $j\in\Lambda$。由于 B 与 $\widehat{s}_j=I\otimes s_j$ 对易，因此$\partial_jY=(s_jW_n-W_n\widehat{s}_j)B$。利用 $[s_j,r_i^*]=-\delta_{ij}P_\Omega$ 和 $R_{a_m}\Omega=a_m\Omega$，我们得到

$$\partial_jY=-\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ i(m)=j}}a_m\Omega\,\hat{\otimes}\,B^*\Omega_m.$$

因此，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\sum_{j\in\Lambda}\|\partial_jY\|_1\leqslant\sum_{m=1}^n\|a_m\Omega\|\|B^*\Omega_m\|\leqslant c\left(\sum_{m=1}^n\|B^*\Omega_m\|^2\right)^{1/2}\leqslant c\,\mathcal{T}'(B^*B)^{1/2},$$

wher最后一个不等式使用了 $\sum_{m=0}^n\|B^*\Omega_m\|^2=\mathcal{T}'(BB^*)=\mathcal{T}'(B^*B)$。由于

$$[s_j,YY^*]=(\partial_jY)Y^*-Y(\partial_jY)^*,$$

we 有 $\|[s_j, YY^*]\|_1 \leqslant 2\|Y\|\|\partial_j Y\|_1$。由于 $\|l_j\| = 1$，根据 φ 的定义可得

$$\left|\varphi(YY^*) - \|Y^*\Omega\|^2\right| \leqslant \sum_{j\in\Lambda} \|[s_j, YY^*]\|_1 \leqslant 2c\|Y\|\,\mathcal{T}'(B^*B)^{1/2}.$$

这就证明了所需的估计。 □

4.3. **图归一化与非零弱极限**

设 P_n 是引理 4.2 中的投影，并设 $T_n = W_n P_n$。由于 P_n 与 $\widehat{s}_j$ 可交换，由 (4.6) 得

$$S_{j,n}T_n = T_n\widehat{s}_j \qquad (j \in \Lambda).$$

取伴随算子得到 $T_n^* S_{j,n} = \widehat{s}_j T_n^*$。因此，$T_n^*T_n$ 与每个 $\widehat{s}_j$ 都可交换，从而 $T_n^*T_n \in P_n\mathfrak{A}P_n$。对于算子 T_n，其图映射 $\begin{pmatrix} P_n \\ T_n \end{pmatrix}\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H} \oplus \mathcal{H}$ 具有极分解

$$\begin{pmatrix} P_n \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n \\ Y_n \end{pmatrix} (P_n + T_n^*T_n)^{1/2},$$

其中

$$B_n = P_n(I + T_n^*T_n)^{-1/2} \in E_n\mathfrak{A}E_n, \qquad Y_n = W_nB_n, \qquad B_n^2 + Y_n^*Y_n = P_n. \tag{4.8}$$

特别地，Y_n 是一个压缩算子，且 $Y_n^*Y_n \in E_n\mathfrak{A}E_n$。由于 B_n 与每个$\widehat{s}_j$都可交换，我们还有

$$S_{j,n}Y_n = Y_n\widehat{s}_j \qquad (j \in \Lambda). \tag{4.9}$$

由于 $B_n = B_nP_n$ 和 $Y_n^* = B_nW_n^*$，将（4.7）左乘 B_n 可得

$$Y_n^* a_{m,n}\Omega = \sigma_m B_n\Omega_m \qquad (m \geqslant 1). \tag{4.10}$$

因此，由（4.1）可知，$\|B_n\Omega_m\| \leqslant \|a_{m,\,n}\Omega\| \leqslant \|\xi_m\|$。再结合 $\|B_n\Omega_0\| \leqslant 1$，对 B_n^2 的对角元取真空迹可得

$$g_n := \mathcal{T}'(B_n^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \|B_n\Omega_m\|^2 \leqslant 1 + \gamma. \tag{4.11}$$

现在我们取弱算子极限，并证明所得交织算子的初始支撑的迹至少为 1。

引理 4.4。设 Y_α 是沿着 $\mathbb{N}$上的自由超滤子 α对 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 取弱算子极限所得。则

$$S_jY_\alpha = Y_\alpha\widehat{s}_j \qquad (j \in \Lambda), \qquad \mathcal{T}'(P_\alpha) \geqslant 1,$$

其中 P_α 是 $Y_\alpha^*Y_\alpha \in \mathfrak{A}$的支撑。

证明。由于 由于 B_n 和 Y_n 都是压缩算子，弱算子紧性给出了极限

$$B_\alpha = \lim_{n\to\alpha} B_n \in \mathfrak{A}, \qquad Y_\alpha = \lim_{n\to\alpha} Y_n \in \mathcal{B}(\mathscr{H},\mathcal{H}).$$

由于 $S_{j,\ n} \to S_j$ 在范数意义下，且根据（4.9）有 $S_{j,\ n}Y_n = Y_n\widehat{s}_j$，因此

$$S_jY_\alpha = Y_\alpha\widehat{s}_j \qquad (j\in\Lambda).$$

取伴随算子可知，$Y_\alpha^*Y_\alpha$ 与每个 $\widehat{s}_j$交换。因此， $Y_\alpha^*Y_\alpha \in \mathfrak{A}$，从而其支撑 P_α 属于 $\mathfrak{A}$。令 $Q_\alpha = I - P_\alpha$。

设 $w_n = W_n^*\Omega = \big(\Omega,\ \ (r_{i(m)}a_{m,\ n}^*\Omega)_{\ m\geqslant 1}\big)$ 以及 $w = \big(\Omega,\ \ (r_{i(m)}\xi_m^*)_{\ m\geqslant 1}\big)$ 是 $\mathscr{H}$ 中的向量，其中 $\xi\mapsto\xi^*$ 是 $\mathcal{H}$ 上延拓 $a\Omega \mapsto a^*\Omega$ 的共轭线性等距映射。对于每个 $m\geqslant 1$，我们有 $a_{m,\ n}\Omega \to \xi_m$ 在范数意义下成立。结合（4.1），可推出$w_n \to w$ 在范数意义下成立。由于根据（4.10），$Y_n^*a_{m,\ n}\Omega = \sigma_m B_n\Omega_m$，且 $Y_n^*\Omega = B_nw_n$，因此我们有

$$B_\alpha\Omega_m = \sigma_m Y_\alpha^*\xi_m \quad (m\geqslant 1), \qquad B_\alpha w = Y_\alpha^*\Omega.$$

于是 $Q_\alpha B_\alpha\Omega_m = 0$ 对 $m\geqslant 1$ 和 $Q_\alpha B_\alpha w = 0$成立。由于 $Q_\alpha B_\alpha \in \mathfrak{A}$ 与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 的对角左作用以及 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)\Omega$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，故可得 $Q_\alpha B_\alpha = 0$。由于 $0\leqslant B_n\leqslant P_n$，我们有

$$\lim_{n\to\alpha}\|B_nQ_\alpha\eta\|^2 \leqslant \langle B_\alpha Q_\alpha\eta, Q_\alpha\eta\rangle = 0 \qquad (\eta\in\mathscr{H}).$$

因此，沿着 α， $B_nQ_\alpha \to 0$ 在强算子拓扑下成立。

反设 $\mathcal{T}'(P_\alpha) = \sum_{m=0}^\infty \|P_\alpha\Omega_m\|^2 < 1$，并令

$$h_n = \mathcal{T}'(Q_\alpha B_n^2 Q_\alpha) = \sum_{m=0}^\infty \|B_nQ_\alpha\Omega_m\|^2.$$

于是每一项沿着 α 都趋于零。由于 $\|B_n\Omega_m\| = \|Y_n^*a_{m,\ n}\Omega\| \leqslant \|\xi_m\|$ 由 (4.1) 和 (4.10) 可得，我们有

$$\|B_nQ_\alpha\Omega_m\| \leqslant \|B_n\Omega_m\| + \|B_nP_\alpha\Omega_m\| \leqslant \|\xi_m\| + \|P_\alpha\Omega_m\| \qquad (m\geqslant 1).$$

回忆 $\gamma = \sum_{m=1}^\infty \|\xi_m\|^2 < \infty$。因此，根据勒贝格控制收敛定理，$\lim_{n\to\alpha} h_n = 0$。

由于 $h_n = \mathcal{T}'(B_nQ_\alpha B_n) = \sum_{m=0}^\infty \|Q_\alpha B_n\Omega_m\|^2$，对于每个 $m\geqslant 0$，我们有 $Q_\alpha B_n\Omega_m \to 0$ 沿着α。由于每个 $Q_\alpha B_n \in \mathfrak{A}$ 都是一个压缩算子，与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 的对角左作用相交换，且 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)\Omega$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，因此可知 $Q_\alpha B_n \to 0$ 在沿着 α 的强算子拓扑下成立。结合 $n\to\infty$ 下的 $w_n \to w$，我们得到 $\lim_{n\to\alpha}\|Q_\alpha B_nw_n\| = 0$。

设 $N \geqslant n \geqslant 1$。由 $Y_n^*\Omega = B_n w_n$, $\sum_{m=1}^{n} \|a_{m,\ n}\Omega\|^2 \leqslant \gamma$、(4.5)、(4.8)，并将引理 4.3 应用于带有 $E_N = \sum_{m=0}^{N} J_m J_m^*$ 的 $Y_n Q_\alpha E_N = W_n(B_n Q_\alpha E_N)$，我们得到

$$\mathcal{T}'(E_N Q_\alpha P_n Q_\alpha E_N) \leqslant h_n + \|Q_\alpha B_n w_n\|^2 + 2\sqrt{\gamma h_n}.$$

这里我们使用了 $\|Y_n Q_\alpha E_N\| \leqslant 1$和 $\mathcal{T}'(E_N Q_\alpha B_n^2 Q_\alpha E_N) \leqslant h_n$。令 $N \to \infty$，可得

$$\mathcal{T}'(P_n Q_\alpha) = \mathcal{T}'(Q_\alpha P_n Q_\alpha) \leqslant h_n + \|Q_\alpha B_n w_n\|^2 + 2\sqrt{\gamma h_n}.$$

因此，$\lim_{n\to\alpha} \mathcal{T}'(P_n Q_\alpha) = 0$。另一方面，由 $Q_\alpha = I - P_\alpha$ 和 (4.5)，可得

$$\mathcal{T}'(P_n Q_\alpha) = \mathcal{T}'(P_n) - \mathcal{T}'(P_\alpha P_n P_\alpha) \geqslant 1 - \mathcal{T}'(P_\alpha) > 0.$$

这就产生了矛盾。因此，$\mathcal{T}'(P_\alpha) \geqslant 1$。 □

定理 *1.1* 的证明。由引理 4.4，算子 Y_α 非零且满足

$$S_j Y_\alpha = Y_\alpha \widehat{s}_j \qquad (j \in \Lambda).$$

选取 $m \geqslant 0$ 使得 $Y = Y_\alpha J_m \neq 0$。利用 $\widehat{s}_j J_m = J_m s_j$，得到

$$S_j Y = S_j Y_\alpha J_m = Y_\alpha \widehat{s}_j J_m = Y s_j \qquad (j \in \Lambda).$$

The 所需的分解和同构由命题 3.3 得出 .

假设 Λ 是无限的，并在 Λ中选择互不相同的指标 $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$。对于每个单位向量 $\xi \in \mathcal{H}$，都有 $\sum_{n=1}^{\infty} \|l_{j_n}^* \xi\|^2 \leqslant 1$和 $\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{j_n}\|_1 \leqslant \gamma$。因此，

$$\|S_{j_n}\xi - l_{j_n}\xi\| \leqslant \|l_{j_n}^*\xi\| + \|K_{j_n}\|_1 \to 0,$$

由于 $\{l_{j_n}\xi\}_{n=1}^{\infty}$是标准正交集，$\{S_{j_n}\xi\}_{n=1}^{\infty}$没有收敛子列。因此，$\mathcal{H}$ 的任何非零有限维子空间都不可能在每个 S_j下保持不变。由此可得 $\mathcal{D} = 0$。□

将两个半圆生成元作为单个算子的实部和虚部，可得到一个反例，说明不可约算子在迹类范数下并不稠密。

推论 4.5。设 $\Lambda = \{1、2\}$ 和 $T = s_1 + \mathbf{i}s_2$。则对于每个迹类算子 $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$T + K$ 都是可约的。特别地，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的不可约算子集合在迹类范数下并不稠密。

证明。令 $K = K_1 + \mathbf{i}K_2$，其中 K_1 和 K_2 均为自伴迹类算子。于是

$$W^*(T + K) = W^*(s_1 + K_1, s_2 + K_2).$$

由于定理 1.1 表明，$W^*(T + K)$ 的 II_1 型直和项与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_2)$ 同构，因此 $T + K$ 不是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的不可约算子。□

5. Murray-von Neumann 维数

本节将研究 Murray-von Neumann 维数，并证明定理 1.2。对于定理 1.1 中的自伴迹类族 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$，令

$$d(\{K_j\}_{j\in\Lambda}) = \dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}}\mathcal{H}).$$

由于 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$同构，因此该维数可视为在 $\{K_j\}_{j\in\Lambda}$扰动下 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$的重数。我们利用引理 4.4 给出该维数的下界，并通过估计 $\varphi(z_{\mathcal{P}})$给出上界。

引理 5.1。在定理 *1.1* 的假设下，若 $\gamma > 0$，则

$$1 \leqslant d(\{K_j\}_{j\in\Lambda}) < 1 + \gamma.$$

证明。设 Y_α 为引理 4.4 中的交织算子，$Y_\alpha = V_\alpha|Y_\alpha|$ 为其极分解。于是 $\mathcal{T}'(P_\alpha) \geqslant 1$ 且 $P_\alpha = V_\alpha^* V_\alpha$。如引理 3.2 的证明所示，$V_\alpha$将 $P_\alpha\mathscr{H}$与 $V_\alpha V_\alpha^*\mathcal{H}$对应起来，而将 $\mathcal{N}$压缩到 $V_\alpha V_\alpha^*\mathcal{H}$ 所得的压缩与 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$同构。由定理 1.1 可知 $V_\alpha V_\alpha^* \leqslant z_{\mathcal{P}}$，因此

$$d(\{K_j\}_{j\in\Lambda}) \geqslant \dim_{\mathcal{P}}(V_\alpha V_\alpha^*\mathcal{H}) = \mathcal{T}'(P_\alpha) \geqslant 1.$$

我们采用第 2.3 节中的记号。对于 $X \in \mathcal{N}'$，我们有 $[s_j, X] = [X, K_j]$，其中 $j \in \Lambda$。由此可得 $X \in \mathcal{E}$，并且

$$\varphi(X) = \langle X\Omega, \Omega\rangle + \mathrm{Tr}(DX), \qquad D = \sum_{j\in\Lambda}[K_j, l_j] \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H}).$$

因此，φ 在 $\mathcal{N}'$ 上是正规的。假设 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 对每个 $j \in \Lambda$ 都满足 $S_j Y = Y s_j$。那么 $Y^*Y \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)'$，并且 $[s_j, Y] = -K_j Y$。特别地，$Y \in \mathcal{E}$。由命题 2.3，我们有

$$\varphi(YY^*) = \varphi(Y^*Y) = \tau'(Y^*Y). \tag{5.1}$$

通过定理 1.1 中的同构 θ，我们可以将 $z_{\mathcal{P}}\mathcal{H}$ 分解为循环 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$-模的正交和。因此，存在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的部分等距算子 $\{V_k\}$，使得

$$S_j V_k = V_k s_j \quad (j \in \Lambda), \qquad z_{\mathcal{P}} = \sum_k V_k V_k^*.$$

由 (5.1) 以及 φ 在 $\mathcal{N}'$ 上的正规性，我们有

$$d(\{K_j\}_{j\in\Lambda}) = \sum_k \tau'(V_k^* V_k) = \sum_k \varphi(V_k V_k^*) = \varphi(z_{\mathcal{P}}).$$

对于 $j \in \Lambda$，令 $C_j = [s_j, z_{\mathcal{P}}] = [z_{\mathcal{P}}, K_j]$。那么 C_j是斜伴随的，并且

$$\|C_j\|_1 = \frac{1}{2}\|[2z_{\mathcal{P}} - 1, K_j]\|_1 \leqslant \|K_j\|_1.$$

由于 $|\langle l_j\xi,\ \xi\rangle| < \|\xi\|^2$ 对每个非零的 $\xi \in \mathcal{H}$，我们都有 $|\operatorname{Tr}(C_j l_j)| < \|C_j\|_1$，只要 $C_j \neq 0$成立。由此可得，只要 $K_j \neq 0$成立，就有 $|\operatorname{Tr}(C_j l_j)| < \|K_j\|_1$。由于 $\gamma > 0$，至少有一个 K_j 非零。因此

$$d(\{K_j\}_{j\in\Lambda}) = \varphi(z_{\mathcal{P}}) \leqslant \|z_{\mathcal{P}}\Omega\|^2 + \sum_{j\in\Lambda} |\operatorname{Tr}(C_j l_j)| < 1 + \gamma.$$

证明至此完成。 □

在 Λ 中选取一个指标，并将其记为 1。对于作用在 $\mathcal{H}$ 上的任意自伴迹类算子 L，记

$$d(L) = d(\{K_j\}_{j\in\Lambda}),$$

其中，对于每个 $j \in \Lambda \setminus \{1\}$，都有 $K_1 = L$ 和 $K_j = 0$。对于 $a \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 和 $\lambda > 0$，令

$$b = (\lambda - s_1)a, \qquad L = \lambda^{-1} b\Omega \hat{\otimes} b\Omega, \qquad S_j = s_j + \delta_{j1} L \quad (j \in \Lambda). \tag{5.2}$$

设 $\mathcal{N} = W^*(\{S_j :\ j \in \Lambda\})$，并令 $\mathcal{P} = z_{\mathcal{P}}\mathcal{N}$ 为定理 1.1 给出的直和项。对于 (5.2) 中的秩一扰动，我们为 $d(L)$ 建立一个上界。

引理 5.2。设 $p \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 是一个非零投影。采用 (5.2) 中的记号，假设 a 是 $p\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)p$ 中的一个可逆算子，且满足 $\langle a\Omega\ b\Omega\rangle = \lambda$。那么 $R_p \in \mathcal{N}'$，并且

$$d(L) = \tau(1-p) + \dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}} R_p \mathcal{H}) \leqslant 1 + \tau(1-p).$$

证明。由于 $b = bp$，我们有 $b\Omega \in R_p\mathcal{H}$ 且 $R_p L = L R_p = L$。因此，R_p 与每个 S_j 都交换，从而 $R_p \in \mathcal{N}'$。在 $R_{1-p}\mathcal{H}$ 上，族 $\{S_j\}_{j\in\Lambda}$ 与$\{s_j\}_{j\in\Lambda}$一致。根据定理 1.1，我们有 $R_{1-p}\mathcal{H} \subseteq z_{\mathcal{P}}\mathcal{H}$ 且

$$\dim_{\mathcal{P}}(R_{1-p}\mathcal{H}) = \dim_{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)}(R_{1-p}\mathcal{H}) = \tau(1-p).$$

由于 $R_p \in \mathcal{N}'$ 且 $R_{1-p}\mathcal{H} \subseteq z_{\mathcal{P}}\mathcal{H}$，我们有 $z_{\mathcal{P}}\mathcal{H} = R_{1-p}\mathcal{H} \oplus z_{\mathcal{P}}R_p\mathcal{H}$。剩下要证明 $\dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}}R_p\mathcal{H}) \leqslant 1$。

令 $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{N}a\Omega + \mathcal{N}b\Omega}$。由于 $a\Omega\ b\Omega \in R_p\mathcal{H}$ 且 $R_p \in \mathcal{N}'$，我们有 $\mathcal{K} \subseteq R_p\mathcal{H}$。由于 $\mathcal{K}$ 在每个 S_j 作用下不变，且包含 $\operatorname{ran} L$，因此它在每个$s_j = S_j - \delta_{j1}L$作用下都不变。由 a 在 $p\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)p$ 中的可逆性，我们有

$$R_p\mathcal{H} = \overline{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)p\Omega} = \overline{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)a\Omega} \subseteq \mathcal{K}.$$

因此，$\mathcal{K} = R_p\mathcal{H}$。由于 $\langle a\Omega\ b\Omega\rangle = \lambda$，我们有 $La\Omega = b\Omega$，故

$$S_1 a\Omega = s_1 a\Omega + b\Omega = \lambda a\Omega. \tag{5.3}$$

在定理 1.1 的同构 θ 下，$z_{\mathcal{P}}S_1$ 对应于 s_1，而后者没有特征值。由 (5.3) 可得 $z_{\mathcal{P}}a\Omega = 0$，因此

$$z_{\mathcal{P}}R_p\mathcal{H} = z_{\mathcal{P}}\mathcal{K} = \overline{\mathcal{P}z_{\mathcal{P}}b\Omega}.$$

根据引理 2.1，这个循环 $\mathcal{P}$-模的维数至多为 1。 □

当引理 5.2 中的投影 p 与 r_1 对易时，我们可以显式计算 $d(L)$。

引理 5.3。 在引理 *5.2* 的假设下，设 p 与 r_1 对易。那么

$$\dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}}R_p\mathcal{H}) = 1, \qquad d(L) = 1 + \tau(1-p).$$

证明。对于 $x \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$，令 $\widetilde{x} = (x|_{R_p\mathcal{H}}) \oplus x$ 表示作用于 $R_p\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上的对角作用。定义

$$W\colon R_p\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to R_p\mathcal{H}, \qquad W(y_0, y_1) = y_0 + R_b r_1 y_1.$$

令 $\xi = W^* a\Omega \in R_p\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$，并令

$$\mathscr{L} = \{\widetilde{x}\xi\colon x \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)\}^\perp \subseteq R_p\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}.$$

由于 p 与 r_1 交换，我们有 $pW = W\widetilde{p}$。结合 $pa = a$，得到$\widetilde{p}\xi = \xi$。由于 $\mathscr{L}^\perp$ 由 ξ 在对角作用和 $\widetilde{p}\xi = \xi$ 下生成，引理 2.1 给出 $\dim_{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)} \mathscr{L}^\perp \leqslant \tau(p)$。因此

$$\dim_{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)} \mathscr{L} = 1 + \tau(p) - \dim_{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)} \mathscr{L}^\perp \geqslant 1.$$

对于 $y = (y_0, y_1) \in R_p\mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$，恒等式 $[s_j, r_1] = \delta_{j1}P_\Omega$ 给出

$$(s_j W - W\widetilde{s}_j)y = \delta_{j1}\langle y_1, \Omega\rangle b\Omega.$$

假设 $y \in \mathscr{L}$。由于 $\mathscr{L}$ 在对角作用下不变， y 和 $\widetilde{s}_1 y$ 均与 $\xi = W^* a\Omega$ 正交；等价地， Wy 和 $W\widetilde{s}_1 y$ 均与 $a\Omega$ 正交。利用 $b = (\lambda - s_1)a$，我们得到

$$\langle Wy, b\Omega\rangle = -\langle (s_1 W - W\widetilde{s}_1)y, a\Omega\rangle = -\lambda\langle y_1, \Omega\rangle. \tag{5.4}$$

因此 $LWy = -\langle y_1, \Omega\rangle b\Omega$。由于 $S_j = s_j + \delta_{j1}L$ 和 $\mathscr{L}$ 在每个 $\widetilde{s}_j$ 下均不变，我们得到

$$S_j(W|_{\mathscr{L}}) = (W|_{\mathscr{L}})(\widetilde{s}_j|_{\mathscr{L}}) \qquad (j \in \Lambda). \tag{5.5}$$

假设 $y \in$ 核$(W|_{\mathscr{L}})$。根据 (5.5)，该核在每个 $\widetilde{s}_j$ 作用下均保持不变，因此在 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 的对角作用下也保持不变。将 (5.4) 应用于 $\widetilde{x}y$，得到

$$0 = \langle W\widetilde{x}y, b\Omega\rangle = -\lambda\langle y_1, x^*\Omega\rangle \qquad (x \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)).$$

由于 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)\Omega$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，因此 $y_1 = 0$，进而 $y_0 = Wy = 0$。由此，$W|_{\mathscr{L}}$ 是单射。结合 (5.5)，对 $W|_{\mathscr{L}}$ 作极分解，可得酉算子 $U\colon \mathscr{L} \to W\mathscr{L}$，满足

$$S_j U = U(\widetilde{s}_j|_{\mathscr{L}}) \qquad (j \in \Lambda).$$

根据定理 1.1，$\overline{W\mathscr{L}} \subseteq z_{\mathcal{P}} R_p \mathcal{H}$，因此

$$\dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}} R_p \mathcal{H}) \geqslant \dim_{\mathcal{P}} \overline{W\mathscr{L}} = \dim_{\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)} \mathscr{L} \geqslant 1.$$

应用引理 5.2 完成证明。 □

现在我们利用引理 5.3，为维数中每个预定的增加量 $0 \leqslant h < 1$ 构造正秩一扰动。

引理 5.4。设 $0 \leqslant h < 1$ 和 $c > 2(1-\sqrt{1-h})$。则存在一个正秩一算子 L，作用于 $\mathcal{H}$，使得

$$d(L) = 1 + h, \qquad \|L\|_1 = c.$$

证明。由于 $|\Lambda| \geqslant 2$，我们可以在 $\Lambda \setminus \{1\}$ 中选取一个指标，并记为 2。令 p为 $W^*(s_2)$ 中的一个投影，且 $\tau(p) = 1 - h$。根据 [11], 中的命题 12.11 和 12.13 以及定理 14.10，$ps_1^2 p$ 在 $p\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)p$ 的谱为

$$\big[(1-\sqrt{1-h})^2, (1+\sqrt{1-h})^2\big].$$

因此，$e = \chi_{(0,c^2/4)}(ps_1^2 p) \in p\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)p$ 是 $ps_1^2 p$ 的一个非零谱投影，并且有 $\|s_1 e\Omega\|^2 = \tau(ps_1^2 pe) < (c^2/4)\tau(e)$。当 $\varepsilon > 0$充分小时，正可逆算子

$$a = \frac{e + \varepsilon p}{\|(e+\varepsilon p)\Omega\|} \in p\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)p$$

满足 $\|a\Omega\| = 1$ 以及 $\|s_1 a\Omega\| < c/2$。将 s_1 映射到 $-s_1$ 并固定其他生成元的 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\Lambda)$ 的保迹自同构固定 p 和 s_1^2，因此也固定 a。由此可得 $\langle s_1 a\Omega,\ a\Omega\rangle = \tau(as_1 a) = 0$。令

$$\lambda = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\|s_1 a\Omega\|^2}}{2},$$

并通过 (5.2) 定义 b 和 L。于是 $\langle a\Omega,\ b\Omega\rangle = \lambda > 0$。因此，$L$ 是秩为一的正算子，并且有

$$\|L\|_1 = \lambda^{-1}\|b\Omega\|^2 = \lambda\|a\Omega\|^2 + \lambda^{-1}\|s_1 a\Omega\|^2 = c.$$

由于 r_1 与 s_2对易，因此它与 p对易。由引理 5.3 可知

$$d(L) = 1 + \tau(1-p) = 1 + h.$$

证明到此完成。 □

通过对单个生成元反复应用秩一构造，我们以迹范数总量 γ 实现 $[1, 1+\gamma)$ 中的每个维数。

命题 5.5。 设 $\gamma > 0$ 和 $1 \leqslant t < 1+\gamma$。那么存在一个正有限秩算子 K_1，使得对于 $j \in \Lambda \setminus \{1\}$，令 $K_j = 0$，我们有

$$\gamma = \|K_1\|_1 = \sum_{j\in\Lambda} \|K_j\|_1, \qquad d(\{K_j\}_{j\in\Lambda}) = t.$$

证明。令 $h = t - 1 \geqslant 0$。由于 $h < \gamma$和 $2n(1 - \sqrt{1 - h/n}) \to h$，我们可以选取一个整数 $n > h$，使得 $2n(1 - \sqrt{1 - h/n}) < \gamma/n$。根据引理 5.4，存在一个正秩一算子 L，使得

$$d(L) = 1 + h/n, \qquad \|L\|_1 = \gamma/n.$$

采用定理 1.1 的记号，我们有 $\dim_{\mathcal{P}}(z_{\mathcal{P}}\mathcal{H}) = d(L) \geqslant 1$。因此，存在一个等距算子 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，满足 $U\mathcal{H} \subseteq z_{\mathcal{P}}\mathcal{H}$，使得

$$(s_j + \delta_{j1}L)U = Us_j \qquad (j \in \Lambda). \tag{5.6}$$

令 $L_0 = 0$，并对 $1 \leqslant m \leqslant n$ 定义 $L_m = L + UL_{m-1}U^*$。于是，每个 L_m 都是正的，且秩至多为 m。由于 $U^*U = I$，我们有

$$\|L_m\|_1 = \mathrm{Tr}(L_m) = \mathrm{Tr}(L) + \mathrm{Tr}(L_{m-1}) = \|L_{m-1}\|_1 + \gamma/n.$$

对于每个 $j \in \Lambda$，交织关系 (5.6) 给出

$$(s_j + \delta_{j1}L_m)U = (s_j + \delta_{j1}L)U + \delta_{j1}UL_{m-1} = U(s_j + \delta_{j1}L_{m-1}).$$

因此，$U\mathcal{H}$约化每个 $s_j + \delta_{j1}L_m$，且酉算子 $U\colon \mathcal{H} \to U\mathcal{H}$满足

$$(s_j + \delta_{j1}L_m)|_{U\mathcal{H}}U = U(s_j + \delta_{j1}L_{m-1}) \qquad (j \in \Lambda).$$

由于 U^* 在 $(U\mathcal{H})^\perp$ 上消失，L_m 的递归关系给出

$$(s_j + \delta_{j1}L_m)|_{(U\mathcal{H})^\perp} = (s_j + \delta_{j1}L)|_{(U\mathcal{H})^\perp} \qquad (j \in \Lambda).$$

对于 $m = 1$，(5.6) 表明 $U\mathcal{H}$贡献维数 1，因此 $(U\mathcal{H})^\perp$贡献 $d(L) - 1 = h/n$。由于 $(U\mathcal{H})^\perp$ 上的受限族与 m无关，可加性给出 $d(L_m) = d(L_{m-1}) + h/n$，其中 $1 \leqslant m \leqslant n$。由此可得

$$d(L_n) = 1 + h, \qquad \|L_n\|_1 = \gamma.$$

取 $K_1 = L_n$ 即可完成证明。 □

定理 *1.2* 的证明。 如果 $\gamma = 0$，那么显然 $d = 1$。假设 $0 < \gamma < \infty$。由引理 5.1，得 $1 \leqslant d < 1+\gamma$。反过来，区间 $[1, 1+\gamma)$ 中的每个数都可由命题 5.5 实现。□

参考文献

[1] D. Avitzour。 C^*代数的自由积。《美国数学会汇刊》271 (1982)，第 2 期，423–435。MR0654842[2]R. Bhutani 和 D. V. Voiculescu。无界 n元组的一个锐 Kato-Rosenblum 型定理。arXiv:2606.28594v2 (2026年)。[3] N. Brown。 C^*代数的不变均值与有限表示理论。《美国数学会回忆录》184 (2006)，第 865 号，viii+105 页。MR2263412[4]A. Connes。《非交换几何》。Academic Press, Inc.，圣迭戈，CA，1994。xiv+661 页。MR1303779[5]P. Halmos。不可约算子。《密歇根数学杂志》15 (1968)，215–223。MR0231233[6] D. Herrero。《希尔伯特空间算子的逼近》。第 I 卷。数学研究札记，72。Pitman（高级出版计划），波士顿，MA，1982。xiii+255 页。MR0676127[7]J. Fang、C. Jiang、M. Ma、J. Shen、R. Shi、T. Wang。迹类范数下不可约算子的稠密性。arXiv:2504.17190v6 (2026年)。[8] T. Kato。迹类算子对连续谱的扰动。《日本学士院纪要》33 (1957)，260–264。MR0092133[9] S. Kuroda。关于 Weyl–von Neumann 定理。《日本学士院纪要》34 (1958)，11–15。MR0102751[10] J. von Neumann。积分算子谱的刻画。Actualités Sci. Indust. 229，Hermann，巴黎，1935。[11] A. Nica、R. Speicher。《自由概率组合学讲义》。伦敦数学会讲义丛书，335。剑桥大学出版社，剑桥，2006。xvi+417 页。MR2266879[12] M. Rosenblum。连续谱的扰动与酉等价。《太平洋数学杂志》7 (1957)，997–1010。MR0090028[13] D. Voiculescu。关于希尔伯特空间算子的范数理想扰动的一些结果。《算子理论杂志》2 (1979)，第 1 期，3–37。MR0553861[14] D. Voiculescu。关于希尔伯特空间算子的范数理想扰动的一些结果。II。《算子理论杂志》5 (1981)，第 1 期，77–100。MR0613049[15]D. Voiculescu。泛函的勒贝格分解以及模赋范理想的交换子的唯一预对偶。《休斯敦数学杂志》43 (2017)，第 4 期，1251–1262。MR3766367[16] D. Voiculescu。 n元组算子的混合赋范理想扰动 I。《几何与物理杂志》128 (2018)，169–184。MR3786193

[17]D. Voiculescu. K-理论与绝对连续谱的扰动。《数学物理通讯》365（2019），第1期，363–373. MR3900834[18] D.Voiculescu. 混合赋范理想扰动 n-算子元组 II：弱波算子。算子理论、算子代数及其与几何和拓扑的相互作用——Ronald G. Douglas纪念文集，501–510.《算子理论：进展与应用》，278 MR4200268[19] D. Voiculescu. 算子扰动与非交换凝聚器：拟中心模的新进展。《米兰数学杂志》93（2025），第1期，173–185. MR4927984[20] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica. 自由随机变量。一种研究自由积的非交换概率方法，及其在随机矩阵、算子代数和自由群调和分析中的应用。CRM专著丛书，1. 美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1992. vi+70 页. MR1217253[21]H. Weyl. 论差为全连续的有界二次型。《巴勒莫数学学会汇刊》27 (1) (1909)，373–392. Minghui Ma，数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国电子邮件地址： minghuima@dlut.edu.cnRui Shi，数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国电子邮件地址： ruishi@dlut.edu.cn， ruishi.math@gmail.comTianze Wang，数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国电子邮件地址：swan0108@mail.dlut.edu.cn