arXiv:2611.30892v1 [cs.CC] 23 Nov 2026

LogCFL = 无歧义辅助下推自动机$\big(O(\log\ n),\ \text{poly}(n)\big)$

A. Pavan N. V. Vinodchandran

摘要

我们注意到，Hoza 在证明 NL = UL 时引入的隔离技术可以扩展，从而得到 LogCFL = 无歧义辅助下推自动机($O(\log\ n)$，poly(n))。

1 引言

我们注意到，Hoza 的技术 [1] 可以扩展到复杂度类 LogCFL，并证明 LogCFL 可以变为无歧义。我们采用 Hoza 论文 [1]中的记号。

2 证明

定理。 *LogCFL* 中的每种语言都能由一台无歧义辅助下推自动机在多项式时间和 O(对数 n) 工作空间内接受。也就是说，LogCFL = 无歧义辅助下推自动机(O(对数 n)，多项式(n))

证明。 根据 Venkateswaran 对 LogCFL 的刻画，LogCFL 是对数空间一致的 SAC^1 [4], ，因此只需计算一个具有多项式规模 N和深度 $D = O$(对数 N) 的分层半无界布尔电路。半无界电路的与门扇入为 2，而或门具有无界扇入。叶节点位于第零层，连线连接相邻层。固定该电路及其输入。对于一个接受输入，证书树在每个或门处选择一个真子节点，并在每个与门处选择所有子节点（至多两个）。给定一个为门赋予权重的权重函数 w ，证书树的权重 T是总和 $W(T;$ $w) = \sum_{x\in V(T)} w(g_x)$，其中 g_x是节点 x处的电路门，而 $V(T)$ 是该树的顶点集 T。如果对于每个真门，以其为根的最小权重证书树恰好有一棵，我们就称该输入上的 w 最小值唯一 。

根据 Reinhardt 和 Allender [2, Section 3], 的工作，对于无歧义电路求值，只需构造一个可由对数空间计算、且有多项式界的权重函数，使其对给定的电路和输入具有最小值唯一性。然而，我们设计的是一个权重函数族，而非单个权重函数。Reinhardt 和 Allender 还给出了一种无歧义辅助下推自动机，用于检查给定的权重函数是否具有最小值唯一性。他们的工作使用电路连线上的权重；而 van Melkebeek 和 Prakriya [3] 设计了类似的过程，用于检查将权重赋给节点时是否具有最小值唯一性。我们证明，对于给定的电路和输入，至少四分之三的权重函数具有最小值唯一性。通过使用 Reinhardt 和 Allender 以及 van Melkebeek 和 Prakriya 的无歧义过程，我们可以依次遍历该权重函数族中的每个权重函数，直到找到一个具有最小值唯一性的权重函数。

最小值唯一。Reinhardt 和 Allender 还给出了一种无歧义辅助下推自动机，用于检查给定的权重函数是否为最小值唯一。他们的工作使用了权重于
电路连线；然而，van Melkebeek 和 Prakriya [3] 设计了一种类似的过程，用于检查将权重赋给节点时的最小值唯一性。

权重函数

令 N 表示电路中的门数，令 D 表示其深度。如 Hoza [1],所述，令 $E\colon [N]\to\{0,1\}^{\ell}$ 为一个对数空间可计算编码，其距离为 $\delta \geq \lceil \log_2(2N^2)\rceil$，其中 $\ell = O(\log N)$。

对于种子 $z\in\{0,1\}^{\ell}$ 和位于第 h 层的门 v，定义

$$w_z(v) = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} 6^{h+\ell-j} E(v)_j z_j,$$

由于高度为 $O(\log N)$，权重有多项式上界，且每个门的权重都可以在对数空间内计算。

Hoza 使用层索引的 2进赋值，在每个路径区间中选出优先级最高的层。在我们的情形中，由于电路具有对数深度，权重函数稍微简单一些。在证书树中，根是其最高层上的唯一节点，并且它下方 r 层至多有 2^r 个节点。因此，我们可以将第 h 层的权重按 6^h 缩放。由于 $D = O(\log N)$，即使 6^D 也是 N 的多项式。注意，每个 $z\in\{0,1\}^{\ell}$ 都定义一个权重函数。由于 $\ell = O(\log N)$，我们有一个多项式大小的权重函数族。

隔离

我们使用 Hoza 的比特翻转论证 [1, 定理 2.4]。对于一个真门 v，令 $F_v(z) = \min_T W(T;\, w_z)$，其中最小值取遍所有以 v 为根的证书树。令 $(\partial_j F_v)(z) = F_v(z_{j\leftarrow 1}) - F_v(z_{j\leftarrow 0})$，同时固定其他位。

断言。 对于层级 h 上的每个真门 v、每个种子 z，以及每个 $j\in\{1,\dots,\ell\}$，令 $B_j = 6^{h+\ell-j}$。那么

$$B_j E(v)_j \;\leq\; (\partial_j F_v)(z) \;\leq\; B_j\big(E(v)_j + \tfrac{1}{2}\big). \tag{1}$$

断言的证明。 固定一棵以 v 为根的证书树 T，并记 $W_b(T) = W(T;\, w_{z_{j\leftarrow b}})$。将位 j 设为开启，会在根节点处增加 $B_j E(v)_j$。距离为 r 的位置至多有 2^r 个节点，每个节点至多增加 $B_j/6^r$。因此，后代节点增加的量介于零和 $B_j\sum_{r\geq 1}(2/6)^r = B_j/2$ 之间。于是，对于每个 T，

$$W_0(T) + B_j E(v)_j \leq W_1(T) \leq W_0(T) + B_j E(v)_j + B_j/2.$$

在这三个项中对同一组树取最小值，并减去 $\min_T W_0(T)$，得到 (1)，因为 $\min_T W_b(T) = F_v(z_{j\leftarrow b})$。 □

断言。 对于同一层级上两个不同的真门 u, v，以及一个均匀随机种子 $z\in\{0,1\}^{\ell}$，

$$\Pr_z\big[F_u(z) = F_v(z)\big] \leq 2^{-\delta}. \tag{2}$$

证明。 固定所有满足 $E(u)_j = E(v)_j$ 的坐标。码字至少在 δ 个空闲坐标上不同。我们将证明，这些空闲坐标至多有 一种 赋值能够造成平局。

假设 z 是平局，即 $F_u(z) = F_v(z)$。令 z' 为一个字符串，它与 z 至少在一个自由坐标上不同。考虑一个过程，按递增顺序翻转自由坐标，将 z 转换为 z'。令 j 为第一个被翻转的坐标。不失一般性，$E(u)_j = 1$ 且 $E(v)_j = 0$。由区间界可得：

$$\begin{aligned} \partial_j F_u &\;\geq\; B_j \cdot 1 = B_j, \\ \partial_j F_v &\;\leq\; B_j \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{B_j}{2}. \end{aligned}$$

因此，翻转 z_j 会使 $F_u - F_v$ 至少远离零 $B_j - B_j/2 = B_j/2$。对于之后的所有翻转$k > j$，总修正量至多为

$$\tfrac{3}{2}\sum_{k>j} B_k \le \tfrac{3}{2}\cdot B_j \sum_{s=1}^{\ell} 6^{-s} \le \tfrac{3}{2}\cdot \frac{B_j}{5} = \frac{3B_j}{10} < \frac{B_j}{2}.$$

因此，差值不可能回到零，所以 z' 不是平局。至多有一种自由坐标赋值会产生平局；由于共有 $2^m \ge 2^\delta$ 种赋值，$\Pr[\text{平局}] \le 2^{-\delta}$。 □ □

断言。 对于任意固定的电路和输入，至少有 $3/4$ 个种子 $z \in \{0,1\}^\ell$ 给出一个最小唯一权重函数 w_z。

断言的证明。 根据（2），同一层上每一对不同真门具有相等最小权重的概率至多为 $2^{-\delta}$。所有层中此类无序对至多有 $\binom{N}{2}$ 个。由于 $2^{-\delta} \le 1/(2N^2)$，由并集界可得

$$\Pr_z[\text{some such pair ties}] \le \binom{N}{2} 2^{-\delta} \le \tfrac{1}{4}.$$

固定一个不存在此类平局的种子。我们对层数进行归纳，证明每个真门都有唯一的最小权重证书树。真叶节点只有一个节点的证书。在真或门处，所有真子节点都位于前一层，并且具有互不相同的最小权重。最小树必须选择具有最小 $F_u(z)$ 的子节点 u 及其唯一的最小树。在真与门处，最小树必须为每个子节点使用一棵最小树。根据归纳假设，每棵树都是唯一的，因此按照规定顺序组合后也是唯一的。因此，每个不存在平局的种子都是最小值唯一的，从而证明了该断言。 □

特别是，该族包含所需的最小唯一权重赋值。 □

AI 披露

GPT Astra 6.2 找到了将 Hoza 的隔离技术扩展到 LogCFL 的方法。作者对本文的内容承担全部责任。

参考文献

[1] William M. Hoza。NL = UL。计算复杂性电子研讨会，TR26-323，2026年。[2] Klaus Reinhardt 和 Eric Allender。使非确定性变得无歧义。*SIAM* 计算杂志，29(4)，1118–1131，2000年。[3] Dieter van Melkebeek 和 Gautam Prakriya。在空间受限情形下实现隔离的去随机化。*SIAM* 计算杂志，48(3)，979–1021，2019年。[4] H. Venkateswaran。刻画 LOGCFL 的性质。计算机与系统科学杂志，43(2)，380–404，1991年。