arXiv:2611.30893v1 [math.RA] 23 Nov 2026

一个对称 Hadamard 乘积的度量特征值下界 S

Shengxuan Luo* Zai Yang†

西安交通大学数学与统计学院，中国西安 710049

摘要

对于半正定矩阵 X，令 $\mu_k(X)$ 表示其 k 阶主子矩阵的最小特征值中的最小值。对于 n 阶半正定 A, B，我们证明

$$\mu_{i+j-1}(A\circ B)\geq \mu_i(A)\mu_j(B),\qquad i,j\in\{1,2,\dots,n\},\quad i+j-1\leq n,$$

并刻画右侧为正时的等号情形。所得的对称最小特征值下界

$$\lambda_{\min}(A\circ B)\geq \max_{1\leq i\leq n}\mu_i(A)\mu_{n-i+1}(B)$$

在端点取值时恢复经典的 Schur下界，即使两个因子均为奇异矩阵时也可能取到精确值。它与近期姊妹论文中的投影下界不可比较，而将两个下界结合起来可以同时改进二者。证明结合了 B 的一个谱下界，其对角元至少为 $\mu_j(B)$，以及投影下界所依据的投影不等式。文中还给出了多因子和 Khatri–Rao 推论。

关键词： Hadamard 乘积、特征值下界、主子矩阵、半正定矩阵、因子宽度、Kruskal秩。

2020年数学主题分类： 15A18, 15A42, 15B48。

1 引言

同型矩阵 $A=[a_{\ell q}]$ 和 $B=[b_{\ell q}]$ 的 Hadamard 乘积为 $A\circ B=[a_{\ell q}b_{\ell q}]$。舒尔乘积定理指出，若 A,B 均为半正定矩阵，则 $A\circ B$ 也是半正定矩阵 [1, 2]。关于这一运算的谱不等式已有大量文献，例如参见 [3, 4, 5, 6, 7]。特别地，即使两个因子都是奇异矩阵，Hadamard 乘积仍可能是正定矩阵。 [8, 9, 10]中给出了这一现象的秩和 Kruskal秩判据。

本文中，矩阵均为复数矩阵， X^* 表示矩阵X的共轭转置， $X\succeq 0$ 表示 X 是厄米特半正定矩阵。我们用 $X_{\ell q}$ 表示X的第 (ℓ,q) 个元素。用 $r_X=\operatorname{rank}X$ 表示 X 的秩， $X[S]$ 表示 X 的一个主子矩阵，其行和列均由集合 S索引。对于一个阶数为 n的厄米矩阵 X，我们按降序排列其特征值:

$$\lambda_1(X)\geq\cdots\geq\lambda_n(X)=\lambda_{\min}(X),$$

并定义

$$\mu_k(X)=\min_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\lambda_{\min}(X[S]),\qquad k\in\{1,\dots,n\}. \tag{1}$$

*电子邮件： 2592425519@stu.xjtu.edu.cn。

†通讯作者。电子邮件： yangzai@xjtu.edu.cn。

等价地，

$$\mu_k(X) = \min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1 \\ |\operatorname{supp} x|\le k}} x^* X x. \tag{2}$$

因此， $\mu_k(X)$ 是所有维数至多为 k 的坐标子空间上瑞利商的一致下界。特别地，

$$\mu_1(X) \ge \cdots \ge \mu_n(X) = \lambda_{\min}(X), \qquad \mu_k(X[S]) \ge \mu_k(X) \quad (|S| \ge k). \tag{3}$$

这两个断言直接由取最小值所遍历的各个族推出。

定理 1.1（主要不等式）。设 A、$B \succeq 0$ 的阶数为 n，并令 i、$j \in \{1、2、\ldots、n\}$。若 $i+j-1 \le n$，则

$$\mu_{i+j-1}(A \circ B) \ge \mu_i(A)\mu_j(B). \tag{4}$$

因此，

$$\lambda_{\min}(A \circ B) \ge \max_{1\le i\le n} \mu_i(A)\mu_{n-i+1}(B). \tag{5}$$

由于 $\mu_1(X)$ 是 X 的最小对角线元素，且 $\mu_n(X) = \lambda_{\min}(X)$，所以在 (5) 中选取端点可得到经典的 Schur下界 [2, 10]:

$$\lambda_{\min}(A \circ B) \ge \max\left\{\mu_1(A)\lambda_{\min}(B),\ \lambda_{\min}(A)\mu_1(B)\right\}.$$

当 A 和 B 均为奇异时，这些端点界为零；而在 (5) 中对 i 取中间值则可能得到严格为正的下界。

对于阶数为 n 的 $A, B \succeq 0$ 和 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 的普通乘积，经典的乘法不等式为 [11,定理 7]

$$\lambda_{i+j-1}(AB) \le \lambda_i(A)\lambda_j(B), \qquad i+j-1 \le n, \tag{6a}$$
$$\lambda_{i+j-n}(AB) \ge \lambda_i(A)\lambda_j(B), \qquad i+j \ge n+1. \tag{6b}$$

不等式 (4) 可视为上界不等式 (6a) 的反向形式：它保留输出指标 $i+j-1$ 和条件 $i+j-1 \le n$，同时将普通乘积替换为 Hadamard 乘积，并将 λ_k 替换为 μ_k。它也类似于下界不等式 (6b)，但输出指标为 $i+j-1$ 而非 $i+j-n$。对于 AB 的最小特征值，后一个不等式要求 $i=j=n$，从而得到 $\lambda_{\min}(AB) \ge \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B)$。相比之下，(5) 使用所有互补阶数 $i+j=n+1$，并且在两个因子均为奇异矩阵时仍可能保持正值。

这些量具有不同的变分意义：$\lambda_k(X)$ 在 k 维子空间上最大化最小瑞利商，而 $\mu_k(X)$ 则在 k 维坐标子空间上将其最小化。因此，$\mu_k(X) \le \lambda_k(X)$。

对于 $B \ne 0$，固定一组按特征值非递减顺序排列的 B 标准正交特征基，并令P_r 表示投影到其前 r 个向量张成空间上的正交投影。姊妹论文 [10,定理 2] 给出了方向投影界

$$\lambda_{\min}(A \circ B) \ge L_{\mathrm{proj}}(A \mid B) := \max_{1\le r\le r_B} \left\{\mu_{n-r+1}(A)\lambda_r(B)\min_{\ell}(P_r)_{\ell\ell}\right\}. \tag{7}$$

本文证明，对称界(5)与(7)中的两个方向投影界 $L_{\mathrm{proj}}(A \mid B)$ 和 $L_{\mathrm{proj}}(B \mid A)$ 中较大的那个不可比较。此外，将对称界和方向投影界分别应用于同一个因子的不同半正定加项，仍能得到优于两者的结果；参见第 4 节。

定理 1.1 证明中的主要技术贡献，是对 B的迹平衡上谱截断给出一致对角估计：其对角元至少为 $\mu_j(B)$。此截断是 B 的谱下界，也是秩为j 的正交投影的非负线性组合。我们将该对角估计与支撑伴随界(7)的投影不等式结合起来。同一估计还给出了(4)和(5)在内部指标处的等号刻画。

第 2 节利用谱下界引理证明主要不等式，并讨论等号成立条件与尖锐性。第 3 节证明谱下界引理。第 4 节比较并结合这两个界。第 5 节给出多因子和 Khatri–Rao 推论，第 6 节总结本文。

2 证明、等号成立条件与尖锐性

2.1 谱下界与主要证明

定义 2.1（谱下界矩阵与上截断）。 设 $B \succeq 0$ 具有互异的特征值$\theta_1 > \cdots > \theta_d \geq 0$，并设 E_r 为对应于 θ_r的特征子空间上的正交投影。有序分解 $B = \sum_{r=1}^{d} \theta_r E_r$ 由 B唯一确定。对于每个 r ，满足 $0 \leq z_r \leq \theta_r$ 的矩阵 $Z = \sum_{r=1}^{d} z_r E_r$称为 B的谱下界矩阵。对于 $t \geq 0$， B 在 t 处的上谱截断为

$$T_t(B) = \sum_{r=1}^{d} \min\{\theta_r, t\} E_r.$$

特别地， $T_t(B)$ 是 B 的谱下界，并满足

$$0 \preceq T_t(B) \preceq B, \qquad T_t(B) \preceq tI.$$

引理 2.2（谱下界）。 设 $B \succeq 0$ 的阶为 n，并假设 $j \in$ {1、2、.....、 n} 且μ_j（B） > 0。令

$$\tau = \max\left\{t \geq 0 : \operatorname{tr}\big(T_t(B)\big) \geq jt\right\}, \qquad Z = T_\tau(B). \tag{8}$$

则 $\tau > 0$,

$$\begin{aligned} &0 \preceq Z \preceq B, \qquad Z \preceq \tau I, \qquad \operatorname{tr} Z = j\tau, \\ &Z_{\ell\ell} \geq \mu_j(B) \quad (\ell \in \{1, \ldots, n\}). \end{aligned} \tag{9}$$

特别地， Z 是 秩为 j 的正交投影的非负线性组合。如果 $j < n$，则

$$Z_{\ell\ell} = \mu_j(B) \quad \Longleftrightarrow \quad B_{\ell\ell} = \mu_j(B). \tag{10}$$

我们在第 3 节中证明引理 2.2。另一个要用到的结果是 [10,定理 5]的如下推论：如果 $A \succeq 0$ 的阶为 n ，且 P 是秩为 r 的正交投影，则

$$A \circ P \succeq \mu_{n-r+1}(A)\operatorname{diag}(P), \qquad r \in \{1, \ldots, n\}, \tag{11}$$

其中，diag(P) 是与 P 具有相同对角线的对角矩阵。事实上， $A - \mu_{n-r+1}(A)I$ 的所有 $n - r + 1$ 阶主子矩阵都是半正定的，因此所引定理适用于它与 P 的 Hadamard 乘积。下文还给出了 (11) 的一个简短因子宽度证明。

定理 *1.1* 的证明。 如果 $\mu_i(A)\mu_j(B) = 0$，则由舒尔乘积定理可得 (4)。否则，固定一个阶为 $k = i + j - 1$ 的 $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$。由 (3)， $\mu_i(A[J]) \geq \mu_i(A)$ 且 $\mu_j(B[J]) \geq \mu_j(B) > 0$。对 $B[J]$ 应用引理 2.2，得到上谱截断 $Z = T_\tau(B[J])$。记 $Z = \sum_\ell t_\ell P_\ell$,

其中 $t_\ell \ge 0$，且每个 P_ℓ 都是秩恰为 j 的正交投影。由于 $k-j+1=i$，对每个 P_ℓ 应用 (11)，并利用 $\mu_i(A[J]) \ge \mu_i(A)$，得到

$$\begin{aligned}(A\circ B)[J] &\succeq A[J]\circ Z\\ &= \sum_\ell t_\ell (A[J]\circ P_\ell)\\ &\succeq \sum_\ell t_\ell \mu_i(A)\,\mathrm{diag}(P_\ell)\\ &= \mu_i(A)\,\mathrm{diag}(Z)\\ &\succeq \mu_i(A)\mu_j(B) I_k.\end{aligned} \tag{12}$$

第一个不等式用到了舒尔乘积定理和 $Z \preceq B[J]$。对 J 取最小值即可证明 (4)。取 $j=n-i+1$ 并对 i 取最大值，得到 (5)。 □

2.2 等号情形

命题 2.3 (内部指标处取等号)。 设 A、$B \succeq 0$ 的阶为 n。假设 i、$j \in \{2,\dots,n\}$、$i+j-1 \le n$ 和 $\mu_i(A)\mu_j(B) > 0$。在(4) 中取等号，当且仅当存在一个坐标 ℓ 使得

$$A_{\ell\ell} = \mu_i(A), \qquad B_{\ell\ell} = \mu_j(B). \tag{13}$$

每个这样的坐标在两个因子中都是孤立的：其所在行和列中的所有非对角元均为零。

证明。 设等号成立。取一个阶为 $k=i+j-1$ 的集合 J，并在 J 的坐标中取单位向量 x，使其达到 $\mu_i(A)\mu_j(B)$（$A\circ B$）的最小特征值。由 (12)，下界矩阵 $B[J]$ 的对角线界以及 $\mu_i(A)$的正性可得

$$\sum_{\ell\in J} |x_\ell|^2 \big(Z_{\ell\ell} - \mu_j(B)\big) = 0.$$

每一项都非负，因此对支撑集 x 中的每个 ℓ，都有 $Z_{\ell\ell} = \mu_j(B)$。由于 $Z_{\ell\ell} \ge \mu_j(B[J]) \ge \mu_j(B)$，两处不等式都取等号。因为 $j<k$，(10) 给出 $B_{\ell\ell} = \mu_j(B)$。交换这两个因子，并使用相同的 J 和 x，应用同样的论证。由于 $i<k$，这也推出在 x 的支撑集上有 $A_{\ell\ell} = \mu_i(A)$。

反过来，满足 (13) 的坐标在任何包含它的 k-集上都使瑞利商 $\mu_i(A)\mu_j(B)$。结合 (4) 即可证明等号成立。最后，由于 $i \ge 2$，$A-\mu_i(A)I$ 的每个 2×2 主子矩阵都是半正定的。这类子矩阵中的零对角线元素会迫使相应的非对角线元素为零。对于 B，论证完全相同。 □

如果任一因子都没有孤立坐标，那么每个右端为正的内部不等式 (4) 都是严格不等式。

We 接下来考虑（4）中的等号情形：当某个指标为 1，或右端为零时。 .

首先，假设 $i=1$ 且 $\mu_1(A)\mu_j(B) > 0$。等式 (4) 成立，当且仅当存在$J \subseteq \{1,\dots,n\}$ 满足 $|J|=j$，以及一个由 J索引的非零向量 x，使得

$$\begin{aligned}&[A[J]\circ (B[J] - \mu_j(B) I_j)]x = 0,\\ &x_\ell = 0 \quad (\ell \in J,\ A_{\ell\ell} > \mu_1(A)).\end{aligned} \tag{14}$$

事实上，对于每个这样的 J，

$$\begin{aligned}(A\circ B)[J]-\mu_1(A)\mu_j(B)I_j&\\ =A[J]\circ(B[J]-\mu_j(B)I_j)&\\ +\mu_j(B)(\operatorname{diag}(A[J])-\mu_1(A)I_j).&\end{aligned}$$

两个加项都是半正定的。因此，$(A\circ B)[J]$ 的最小特征值等于 $\mu_1(A)\mu_j(B)$，当且仅当这两个加项有一个共同的非零零向量。对 J 取最小值，即得到上述判据。情形 $j=1$ 可通过交换因子得到。

边界等号不一定涉及孤立坐标。对于 $n\ge 2$，令 $\mathbf{1}\in\mathbb{C}^n$ 为全一向量。此时 $A=\mathbf{1}\mathbf{1}^*$ 和 $B=I+\mathbf{1}\mathbf{1}^*$ 都没有孤立坐标，但 $\lambda_{\min}(A\circ B)=\mu_1(A)\lambda_{\min}(B)=1$。

最后，若 $\mu_i(A)\mu_j(B)=0$，则（4）中的等号成立，当且仅当$A\circ B$ 存在一个阶为 $i+j-1$ 的奇异主子矩阵。仅仅右端为零并不能推出等号成立。

（5）中的等号成立，当且仅当最大化的互补指标对$i+j=n+1$使（4）中的等号成立。若最大值为正且在内部指标 $i\in\{2,\dots,n-1\}$处取得，则命题 2.3 因此无需对因子作任何奇异性假设，就能刻画等号成立的情形。若正的最大值仅在端点指标处取得，则适用边界判据（14）。

特别地，若两个因子都是奇异的，且 (5) 的右端为正，则当且仅当它们有共同的对角元最小坐标，并且存在某些互补阶数 $i+j=n+1$ 满足 $\mu_i(A)=\mu_1(A)$ 和 $\mu_j(B)=\mu_1(B)$ 时，等号成立。事实上，两个端点项都为零，因此命题 2.3 适用于一对极大化矩阵。反过来，这样的一对矩阵给出 $\mu_1(A)\mu_1 B$，这也正是它们在共同坐标处的乘积对角线元素。

2.3 输出指标的尖锐性

命题 2.4。 若 $i,j\in\{1,\dots,n\}$ 和 $i+j-1<n$，则存在半正定 A,B 使得

$$\mu_i(A)>0,\qquad \mu_j(B)>0,\qquad \mu_{i+j-1}(A\circ B)>0,\qquad \mu_{i+j}(A\circ B)=0.$$

因此，定理 *1.1* 中的指标是最优的。

证明。 对于 $k\ge 0$，令 $v_k=(1^k,2^k,\dots,n^k)^T$，并取

$$A=\sum_{k=0}^{i-1}v_kv_k^*,\qquad B=\sum_{k=0}^{j-1}v_kv_k^*.$$

将 $v_0,\dots,v_{r-1}$ 限制到任意 r 坐标上，便构成一个范德蒙德基。特别是，$\mu_i(A)\mu_j(B)>0$。由于 $v_p\circ v_q=v_{p+q}$，

$$A\circ B=\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{q=0}^{j-1}v_{p+q}v_{p+q}^*. \tag{15}$$

求和中包含每个 $v_0,\dots,v_{i+j-2}$。根据相同的范德蒙德论证，每个阶数为 $i+j-1$ 的主子矩阵都是正定的。由于 $r_{A\circ B}=i+j-1$，每个阶数为 $i+j$ 的主子矩阵都是奇异的。

□

3 谱下界引理的证明

本节证明引理 2.2。该引理给出 B 的一个下界矩阵，可在定理 1.1 的证明中对其应用投影不等式 (11)。为此，下界矩阵必须是秩为 j 的正交投影的非负线性组合。我们通过在一个由迹平衡确定的阈值处，从上方截断 B 的特征值，得到这种投影结构。另一个问题是，这种谱修改是否保留了引理 2.2 所要求的对角线下界。建立该下界是本节的主要任务。我们先介绍稀疏测试矩阵原理，再将其应用于截断，最后证明该应用中使用的分解。在整个截断构造过程中，$B \succeq 0$、$j \in \{1, \dots, n\}$，且 $\mu_j(B) > 0$。

3.1 稀疏测试矩阵原理

对于 $s \in \{1, \dots, n\}$，厄米特因子宽度锥由所示秩一矩阵的有限个非负线性组合构成：

$$\mathrm{FW}_s(n) = \mathrm{cone}\{zz^* : z \in \mathbb{C}^n,\ |\operatorname{supp} z| \le s\}; \tag{16}$$

见 [12]。矩阵本身可能是稠密的；支集限制针对的是其生成向量。

根据 (2)，每个最多支撑于 j 个坐标上的向量 z 都满足

$$z^* B z \ge \mu_j(B)\|z\|^2.$$

对于 $M \in \mathrm{FW}_j(n)$，记 $M = \sum_\nu z_\nu z_\nu^*$，其中 $|\operatorname{supp} z_\nu| \le j$，并将非负系数吸收到向量中。对前述不等式求和，并利用 $\operatorname{tr}(BM) = \sum_\nu z_\nu^* B z_\nu$ 以及 $\operatorname{tr} M = \sum_\nu \|z_\nu\|^2$，得到

$$\operatorname{tr}(BM) \ge \mu_j(B) \operatorname{tr} M, \qquad M \in \mathrm{FW}_j(n). \tag{17}$$

这一推论仅使用稀疏因子，而不涉及下文发展的对偶理论。

It 因此，只需针对每个坐标 ℓ 构造一个满足 M_ℓ satisfyin 的测试矩阵 g

$$M_\ell \in \mathrm{FW}_j(n), \qquad \operatorname{tr}(BM_\ell) = Z_{\ell\ell}, \qquad \operatorname{tr} M_\ell \ge 1. \tag{18}$$

事实上，这些性质立即给出

$$Z_{\ell\ell} = \operatorname{tr}(BM_\ell) \ge \mu_j(B) \operatorname{tr} M_\ell \ge \mu_j(B).$$

接下来我们从上谱截断中推导出 M_ℓ。前两个小节中的技术工作证明了它属于因子宽度锥。

3.2 迹平衡截断及其对角估计

截断论证中所需的唯一分解如下。

引理 3.1（投影列分解）。设 P 是 $\mathbb{C}^n$ 上秩为 r 的正交投影。若 $h \ge 1$ 是满足 $r + h \le n$ 的整数，则对每个 $\ell \in \{1, \dots, n\}$，

$$(I - P)e_\ell e_\ell^*(I - P) + \frac{P_{\ell\ell}}{h}(I - P) \in \mathrm{FW}_{r+h}(n), \tag{19}$$

其中，e_ℓ 表示 $\mathbb{C}^n$中的第 ℓ个标准坐标向量。

引理 3.1 的证明见第 3.4 小节。我们首先利用它完成谱下界矩阵的构造。

引理 *2.2* 的证明。迹平衡。 由于 $\mu_j(B) > 0$，我们有 $r_B \geq j$。(8) 中的可行集是闭集，受 $\operatorname{tr} B/j$ 限制，且包含 $\lambda_j(B) > 0$。在其最大元素 τ 处，不等式必为等式：若 $\operatorname{tr} T_\tau(B) > j\tau$，由连续性可知，稍大的阈值仍然可行。因此 $\operatorname{tr} Z = j\tau$。特别地，$\tau \geq \lambda_j(B) > 0$，且 (9) 中的序关系可直接由定义 2.1 得出。

投影表示。 矩阵 Z/τ 的特征值属于 $[0,1]$，且其和为 j。这样的特征值向量构成恰有 j 个 1 的零一向量的凸包：任何含有分数项的向量至少有两个这样的项，可沿相反方向扰动它们，同时保持其和不变，因此它不是极点。现在使用同一特征基，可将 Z/τ 写成秩为 j 的投影的凸组合。乘以 τ 可得到 Z 所需的非负组合；另见 [13]。

接下来需要证明对角估计及其等号条件。令 P 为投影到与特征值严格大于 τ相对应的 B 特征子空间上的投影。由于 $\tau \geq \lambda_j(B)$，其秩 r 至多为 $j-1$。我们有

$$Z = \tau P + B(I-P), \qquad \operatorname{tr}\big(B(I-P)\big) = (j-r)\tau. \tag{20}$$

测试矩阵的推导。 $Z_{\ell\ell}$的两项贡献分别为 $[B(I-P)]_{\ell\ell}$和 $\tau P_{\ell\ell}$。由于 P是 B的谱投影，因此它与 B 对易，且$(I-P)^2 = I-P$。因此，

$$\operatorname{tr}\big(B(I-P)e_\ell e_\ell^*(I-P)\big) = e_\ell^*(I-P)B(I-P)e_\ell = [B(I-P)]_{\ell\ell}.$$

为重现剩余的贡献，使用式 (20) 中的迹平衡：

$$\frac{P_{\ell\ell}}{j-r}\operatorname{tr}\big(B(I-P)\big) = \tau P_{\ell\ell}.$$

这些恒等式启发我们作如下定义

$$M_\ell = (I-P)e_\ell e_\ell^*(I-P) + \frac{P_{\ell\ell}}{j-r}(I-P).$$

事实上，

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(BM_\ell) &= [B(I-P)]_{\ell\ell} + \frac{P_{\ell\ell}}{j-r}\operatorname{tr}\big(B(I-P)\big)\\ &= [B(I-P)]_{\ell\ell} + \tau P_{\ell\ell} = Z_{\ell\ell}.\end{aligned}$$

因子宽度。 将引理 3.1 应用于 $h = j-r \geq 1$。由此可得 $M_\ell \in \mathsf{FW}_j(n)$，因为 $r+h = j \leq n$。因此，决定系数 $P_{\ell\ell}/(j-r)$的同一迹平衡，也使所需的因子宽度指标等于 j。

迹与对角线估计。 由于 $\operatorname{tr}(I-P) = n-r$，我们有

$$\operatorname{tr} M_\ell = 1 - P_{\ell\ell} + \frac{P_{\ell\ell}(n-r)}{j-r} = 1 + \frac{n-j}{j-r}P_{\ell\ell} \geq 1.$$

(18) 中的三个性质现已全部得到验证。应用 (17) 可得更精确的对角估计

$$\begin{aligned}Z_{\ell\ell} = \operatorname{tr}(BM_\ell) &\geq \mu_j(B)\operatorname{tr} M_\ell\\ &= \mu_j(B)\left(1 + \frac{n-j}{j-r}P_{\ell\ell}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

特别地，$Z_{\ell\ell} \geq \mu_j(B)$，这正是 (9) 所要求的。

如果 $j < n$ 和 $Z_{\ell\ell} = \mu_j(B)$，那么（21）迫使 $P_{\ell\ell} = 0$，从而得到 $Pe_\ell = 0$。根据（20），$Z_{\ell\ell} = B_{\ell\ell}$。（10）中的逆向蕴含由 $Z \preceq B$ 和对角线界推出。 □

3.3 对偶性与初等对称函数引理

接下来只需证明上文所使用的投影列分解。我们首先回顾一个对偶性判据，并建立一个标量特征值不等式；二者将共同证明所需的稀疏分解。

对于对偶性论证，我们使用每个 $\mathrm{FW}_s(n)$ 元素的等价表示：将其表示为若干个支撑集为 $S\times S$ 的半正定矩阵之和，其中每个基数为 s 的 $S\subseteq\{1,\dots,n\}$ 对应一个加项。锥随 s 增大：$\mathrm{FW}_1(n)$ 由非负对角矩阵组成，而 $\mathrm{FW}_n(n)$ 是半正定锥。

在实向量 阶数为 n 的厄米矩阵实向量空间上，我们使用 Frobenius 内积 t

$$\langle H,M\rangle=\operatorname{Re}\operatorname{tr}(H^*M)=\operatorname{tr}(HM).$$

我们用上标 d 表示对偶锥，并将 $*$ 保留用于共轭转置 .

以下对偶性刻画针对实对称矩阵，见 [14, 命题 3.4]。其证明对厄米矩阵同样适用，无需任何改动。

引理3.2（因子宽度对偶性）。锥 $\mathrm{FW}_s(n)$ 是闭的，且其对偶锥为 *is*

$$\mathrm{FW}_s(n)^{\mathrm{d}}=\{H=H^*:H[S]\succeq 0\ \textit{for all}\ S\subseteq\{1,\dots,n\}\ \textit{with}\ |S|=s\}. \tag{22}$$

因此，厄米矩阵 M 属于$\mathrm{FW}_s(n)$，当且仅当对(22)右侧的每个 H，都有$\operatorname{tr}(HM)\ge 0$。

要证明结构化矩阵属于 $\mathrm{FW}_s(n)$，我们使用对偶判据，而不显式构造所有稀疏因子。对于对偶测试矩阵 H，其主子矩阵的正性意味着

$$e_k(\lambda(H))=\sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\det H[S]\ge 0,\qquad k\in\{1,\dots,s\}, \tag{23}$$

其中 $\lambda(H)$ 是其特征值向量。对于 $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$，$k$次初等对称函数为 $e_k(x)=\sum_{S\subseteq\{1,\dots,m\}}\prod_{\ell\in S}x_\ell$，包含 $e_0(x)=1$。

$|S|=k$

我们需要将这些非负和转化为关于最小特征值及选定特征值之和的界。以下引理给出了两种操作：删除一个坐标可保留低一阶的非负性，而直到 s 阶均非负，则可限制最小坐标的负贡献。其证明使用实根多项式的交错性质和牛顿不等式。

引理 3.3。设 $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ 满足 $e_k(x)\ge 0$ 对于 $k\in\{1,\dots,s\}$，其中 $s\in\{1,\dots,m\}$

1. 若 $s\ge 2$，删除任意一个坐标后得到的向量，其直到 $s-1$ 次的初等对称函数均非负。

2. 有

$$e_1(x)+(s-1)\min_{\ell\in\{1,\dots,m\}}x_\ell\ge 0. \tag{24}$$

证明。令 $p(t)=\prod_\ell(t+x_\ell)$。求 $m-s$ 次导数后，含有 e_{s+1}、.....、e_m 的项会消失：

$$p^{(m-s)}(t)=\sum_{k=0}^{s}\frac{(m-k)!}{(s-k)!}e_k(x)t^{s-k}.$$

系数均为非负数，且首项系数为正，因此这个多项式没有正根。根据罗尔定理，它的所有根都是实数；因此它们均为非正数。

删除 x_ℓ 会将 p 替换为 $q(t) = p(t)/(t + x_\ell)$，其根与 p的根交错。根据 [15, 定理 1.47], 求导保持交错性，因此 $q^{(m-s)}$ 的根位于 $p^{(m-s)}$ 的根之间，且均为非正数。由于 $q^{(m-s)}$ 具有正的首项系数，其所有系数均为非负数。这些系数是剩余坐标的初等对称函数（次数最高达 $s-1$）的正倍数，从而证明了第 1 部分。这里的交错按弱意义理解，即允许出现重根。

对于第 2 部分， $s = 1$ 的情形正是所作的假设。如果 $s = m$，则 p 的非负系数意味着$x_\ell \geq 0$ 对所有 ℓ均成立。设 $2 \leq s < m$。将 x 替换为 $x + \varepsilon(1, \ldots, 1)$ 会使 $p^{(m-s)}$的根严格向左移动，因此扰动后向量的初等对称函数在次数不超过 s时均为正。只需证明这些扰动情形下的结论，然后令 $\varepsilon \downarrow 0$即可。将扰动后的向量重新记为 x，以下不妨设 $e_k(x) > 0$ 对 $k \in \{1, \ldots, s\}$成立。

若最小的坐标为负数，将其写作 $-u$, $u > 0$，并删去它，得到 η。递推关系 $e_k(\eta) = e_k(x) + ue_{k-1}(\eta)$ 给出 $e_k(\eta) > 0$ 至次数 s，以及 $u < e_s(\eta)/e_{s-1}(\eta)$。牛顿不等式 [15, 定理 4.8，尤其是 (4.3.3)], ，结合由连续性得到的重根情形下的非严格形式，可得

$$\left(\frac{e_k(\eta)}{\binom{m-1}{k}}\right)^2 \geq \frac{e_{k-1}(\eta)}{\binom{m-1}{k-1}} \frac{e_{k+1}(\eta)}{\binom{m-1}{k+1}}, \qquad k \in \{1, \ldots, s-1\}.$$

由于直到次数 s 的各项均为正，作除法可知 $e_k(\eta)/\binom{m-1}{k}$ 的连续比值单调不增。将次数 s 处的比值与首个比值 $e_1(\eta)/(m-1)$ 比较，并利用 $\binom{m-1}{s}/\binom{m-1}{s-1} = (m-s)/s$，可得

$$u < \frac{e_s(\eta)}{e_{s-1}(\eta)} \leq \frac{m-s}{s(m-1)} e_1(\eta) = \frac{m-s}{s(m-1)}(e_1(x) + u).$$

重新排列得 $(s-1)u \leq (m-s)e_1(x)/m \leq e_1(x)$，由此证明 (24)。若最小的坐标非负，则结论显然成立。取极限即可证明第 2 部分。 □

3.4 投影列分解的证明

我们首先将引理 3.3 与因子宽度对偶性结合起来，得到一个投影加秩一项的分解。这将提供证明引理 3.1 时所使用的低维分解。

引理 3.4。 设 $\mathbb{C}^n$ 上的 R 是一个秩-r 正交投影，且 $w \in \mathbb{C}^n$ 是一个单位向量。对于每个 $h \in \{1, \ldots, r\}$,

$$R + (h-1)ww^* \in \mathrm{FW}_{n-r+h}(n). \tag{25}$$

特别地，每个秩-r 正交投影 $r \geq 1$ 都属于 $\mathrm{FW}_{n-r+1}(n)$。

证明。 取一个厄米 H，其阶数为 $n-r+h$ 的主子矩阵均为半正定，如式（22）所示。所有更低阶的主子矩阵也都是半正定的，因此（23）适用于直到 $n-r+h$ 次的情形。删去最大的 $n-r$ 个特征值。根据引理 3.3(1)，每删去一个，所能保证的次数就降低一阶。因此，剩余的 r 个特征值的初等对称函数在直到 h 次的范围内均非负。该引理的第 2 部分给出

$$\sum_{k=n-r+1}^{n} \lambda_k(H) + (h-1)\lambda_n(H) \geq 0.$$

为完整起见，最小迹不等式可由 H 的标准正交特征基u_1、……、 u_n 直接推出。由于 R 是一个秩为 r 的正交投影，

$$\operatorname{tr}(HR)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(H)\|Ru_k\|^2,\qquad 0\le\|Ru_k\|^2\le 1,\qquad \sum_{k=1}^{n}\|Ru_k\|^2=r.$$

在总和为 r 的 $[0,1]$ 中，给最小的 r 个特征值赋予单位权重，可使特征值的加权和最小。由此以及Rayleigh原理可得

$$\operatorname{tr}(HR)\ge\sum_{k=n-r+1}^{n}\lambda_k(H),\qquad w^*Hw\ge\lambda_n(H).$$

由于 $h-1\ge 0$，将这些不等式相加可得

$$\operatorname{tr}\big(H[R+(h-1)ww^*]\big)\ge 0.$$

这对任意对偶测试矩阵 H 均成立，因此引理3.2证明了 (25)。取 $h=1$ 即可证明最后一个断言。□

现在我们证明截断论证中所述的投影列分解。证明在维数为 $n-1$ 的空间中应用引理 3.4，然后通过添加至多一个坐标来提升每个稀疏因子。

引理 *3.1* 的证明。 坐标置换保持因子宽度不变，因此不妨设 $\ell=1$。记作$p=P_{11}$。若 $p=0$，则 (19) 中的矩阵为 $e_1e_1^*$；若 $p=1$，则它为 $(I-P)/h$。二者的因子宽度都符合要求，后者是因为引理 3.4 给出 $I-P\in\mathrm{FW}_{r+1}(n)$。

假设 $0<p<1$。将 P的第一列写作

$$Pe_1=\begin{pmatrix}p\\ \sqrt{p(1-p)}\,w\end{pmatrix},\qquad \|w\|=1.$$

P 值域中与 Pe_1 正交的向量，其第一坐标均为零。令 R 为在 $\mathbb{C}^{n-1}$中投影到其尾部坐标的正交补上的投影。则 R 的秩为 $n-r$。与 Pe_1 正交也使这些尾部坐标与 w正交，因此 $Rw=w$。$Pe_1/\sqrt{p}$ 对 P尾部块的贡献为 $(1-p)ww^*$，所以 $I-P$的尾部块为 $R-(1-p)ww^*$。由于 $h\le n-r$，在维数为 $n-1$ 的空间中对秩为 $(n-r)$ 的投影 R应用引理 3.4，可得

$$R+(h-1)ww^*\in\mathrm{FW}_{r+h-1}(n-1).$$

这里，因子宽度指标为 $(n-1)-(n-r)+h=r+h-1$。根据情形 $h=1$ 和嵌套性，同一个锥也包含 R。

Set

$$F=\begin{pmatrix}-\sqrt{(1-p)/p}\,w^*\\ I_{n-1}\end{pmatrix}.$$

对于 $\ker P$ 中的向量，其第一个坐标是 $-\sqrt{(1-p)/p}$ 与 w 的尾部坐标的内积。映射 F 正好插入这个第一个坐标。利用上述分块描述，直接相乘可得

$$I-P=F\big[R-(1-p)ww^*\big]F^*,\qquad (I-P)e_1=-\sqrt{p(1-p)}\,Fw.$$

将这两个恒等式代入（19）的左侧。提升矩阵中 ww^* 的系数变为（$h-1$）（$1-p$），从而得到

$$\begin{aligned}(I-P)e_1e_1^*(I-P)+\frac{p}{h}(I-P)\\ =\frac{p}{h}F\big[R+(h-1)(1-p)ww^*\big]F^*.\end{aligned}\tag{26}$$

括号中的表达式等于

$$pR+(1-p)\big[R+(h-1)ww^*\big],$$

因此，由凸性可知它属于 $\mathrm{FW}_{r+h-1}(n-1)$。如果 z 至多有 $r+h-1$ 个非零项，那么 Fz 的尾部坐标恰好为 z，而其第一个坐标至多增加一个非零项。因此，对稀疏分解应用 F 和 F^*，其因子宽度至多增加一。再结合非负因子 p/h，即可证明 (19)。

□

此外，作为一个推论，引理 3.4 中的情形 $h=1$ 也可推出相应的不等式 (11)：它将一个秩为 r 的投影 P 置于 $\mathrm{FW}_{n-r+1}(n)$ 中。对于每个生成元 zz^* 的支撑集，$A-\mu_{n-r+1}(A)I$ 的相应主子矩阵是半正定的。根据舒尔乘积定理，$(A-\mu_{n-r+1}(A)I)\circ(zz^*)\succeq 0$。取相应的非负线性组合即可得到 (11)。

4 与秩优化投影界的比较

4.1 投影基准与正性

令 $L_{\mathrm{proj}}(A\mid 0)=0$。对于 $B\neq 0$，秩优化界 (7) 可由 $B\succeq\lambda_r(B)P_r$ 和 (11) 得出。在特征值并列时，秩落在并列块内部的项不超过该块最后一个索引对应的项：特征值不变，而 μ 因子和投影的对角元素都只会增大。因此，最大值与并列时所选的基无关。项 $r=r_B$ 是全范围估计。由于 $B\preceq\lambda_1(B)P_{r_B}$，它优于 $[10,\text{推论 }3]$，中的有效条件数界。

记 $L_{\mathrm{sym}}(A,\ B)$ 为 (5) 的右端。X 的 Kruskal 秩 k_X 是满足以下条件的最大 k：任意 k 列均线性无关；若有一列为零，则 $k_X=0$。对于 $X=U^*U$，恒等式 $\ker X=\ker U$ 表明这两个矩阵具有相同的列依赖关系。主子矩阵 $X[S]$ 是 U 中相应列的格拉姆矩阵。因此

$$\mu_k(X)>0\quad\Longleftrightarrow\quad k\le k_X.$$

因此，

$$L_{\mathrm{sym}}(A,B)>0\quad\Longleftrightarrow\quad k_A+k_B\ge n+1.\tag{27}$$

事实上，正项要求互补阶数 $i\le k_A$ 和 $n-i+1\le k_B$。该不等式本身并不要求所选阶数中的任何一个等于某个秩。

相比之下，方向条件为

$$L_{\mathrm{proj}}(A\mid B)>0\quad\Longleftrightarrow\quad k_A+r_B\ge n+1\text{ and }B_{\ell\ell}>0\text{ for all }\ell.\tag{28}$$

正的秩-r 项意味着 $k_A+r\ge n+1$，且 P_r 的对角线为正，因此 B 也如此。反过来，右侧的条件使全值域项为正：B 及其值域投影在相同坐标处的对角线元素均为零。因此，(27) 涉及两个因子的 Kruskal 秩，并且在两个方向上都蕴含 (28)。反向推论可能不成立。

4.2 秩指标处的比较

如果 $r_B \geq 1$，那么

$$\mu_{r_B}(B) \leq \lambda_{r_B}(B) \min_{\ell}(P_{r_B})_{\ell\ell}. \tag{29}$$

对于 $\mu_{r_B}(B) = 0$，这是直接的。否则，应用引理 2.2，并取 $j = r_B$。式 (8) 中可行的最大阈值为 $\lambda_{r_B}(B)$：在该值处，所有 r_B 个正特征值都对该阈值作出贡献，而在任何更大的值处，至少有一个特征值的贡献严格更小。因此，$Z = \lambda_{r_B}(B)P_{r_B}$，并且 (29) 由下界矩阵的对角线界推出。

将 $L_{\mathrm{sym}}(A, B)$ 的一项写成 $\mu_i(A)\mu_j(B)$，其中 $i + j = n + 1$。将 (29) 乘以 $\mu_{n-r_B+1}(A)$ 可知，$L_{\mathrm{sym}}(A, B)$ 中满足 $j = r_B$ 的项受全范围投影估计控制。若该项达到对称最大值，则 $L_{\mathrm{sym}}(A, B) \leq L_{\mathrm{proj}}(A \mid B)$。交换两个因子后可得类似的比较。当 $i < r_A$ 和$j < r_B$ 时，两种比较均不适用。

两个界的共同来源并不意味着支配关系。对称界使用秩-j 投影的非负组合，而方向界则使用其中一个因子的单个首要谱投影。组合中的投影不一定是首要谱投影。

4.3 两个对比示例

首先考虑 Styan 矩阵 [3, 10]:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

这里有 $r_A = r_B = 2$，但有 $k_A = 2$ 和 $k_B = 1$。因此，根据（27），$L_{\mathrm{sym}}(A,\ B) = 0$；根据（28），$L_{\mathrm{proj}}(B \mid A) = 0$。在另一种方向下，

$$\mu_2(A) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2(B) = 2 - \sqrt{2}, \qquad \min_{\ell}(P_2)_{\ell\ell} = \frac{1}{2}.$$

由于 $\mu_3(A) = 0$，秩一项消失，因此

$$L_{\mathrm{proj}}(A \mid B) = \frac{(3 - \sqrt{5})(2 - \sqrt{2})}{4} > 0, \qquad \lambda_{\min}(A \circ B) = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}.$$

对于相反的排列，取这两个奇异因子

$$A = B = \frac{1}{4} \oplus Q, \qquad Q = I_4 - \frac{1}{4}\mathbf{1}\mathbf{1}^*, \tag{31}$$

其中，$\mathbf{1} \in \mathbb{C}^4$ 是全一向量。由于 Q 是秩为 3 的投影，且其阶为 s 的主子矩阵的最小特征值为 $1 - s/4$，因此我们有 $r_A = r_B = 4$，并且

$$(\mu_1(A), \ldots, \mu_5(A)) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right).$$

因此，它们的 Kruskal 秩均为 3。对称界在 $i = j = 3$ 处取得，并且根据命题 2.3 是精确的，因为第一个坐标取得了两个选定值。对于每个 $r \leq 3$，其首个

秩-r 投影的第一个对角线元素为零。秩-4 投影为 $1 \oplus Q$，其最小对角线元素为 $3/4$。因此

$$L_{\mathrm{proj}}(A \mid A) = \frac{3}{64} < L_{\mathrm{sym}}(A, A) = \frac{1}{16} = \lambda_{\min}(A \circ A). \tag{32}$$

当两个所选阶数都不等于某个秩时，也会出现这种严格改进。对于含有两个奇异因子的情形，若要使对称界超过两个方向界，阶数 5 是最小值：如果 $n \le 4$ and$i < r_A, j < r_B$，则 $i + j \le 2(n-2) < n+1$。因此，一个为正的互补指标项至少必须选取一个秩，秩指标比较也就适用。

即使不存在孤立坐标，这种严格改进仍然成立。取

$$A = B = \left(\frac{1}{4} \oplus Q\right) + \frac{1}{100} v v^*, \qquad v = (1, 1, -1, 1, -1)^T.$$

两个因子都是半正定的，且所有元素均非零，公共核为 span$\{(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^T\}$，值域投影为 $1 \oplus Q$。直接计算得到

$$\mu_2(A) = \frac{51 - \sqrt{626}}{100}, \qquad \mu_3(A) = \frac{32 - \sqrt{374}}{50}, \qquad \mu_4(A) = 0.$$

因此，$i = j = 3$ 是唯一为正的互补指标项。投影最大值在秩 4 处取得，从而有

$$L_{\mathrm{sym}}(A, A) = \mu_3(A)^2, \qquad L_{\mathrm{proj}}(A \mid A) = \frac{3}{4}\mu_2(A)\lambda_4(A),$$

其中 $\lambda_4(A) = (13 - \sqrt{61})/20$。因此，

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{proj}}(A \mid A) &\approx 0.05056 \\ &< L_{\mathrm{sym}}(A, A) \approx 0.06412 \\ &< \lambda_{\min}(A \circ A) \approx 0.06760. \end{aligned}$$

这里 $\lambda_{\min}(A \circ A) = (419 - \sqrt{123482})/1000$。因此，即使对于稠密奇异因子，对称界仍严格超过两个方向投影界。

4.4 组合两个界

这两个界也可以结合使用。

命题 4.1（组合界）。设 A、$B \succeq 0$ 的阶为 n，且满足 $B \neq 0$。对于 $r \in \{1, \dots, r_B\}$，令 P_r 为 B的一个首秩-r 正交投影。对于每个 $t \in [0, \lambda_r(B)]$，

$$\lambda_{\min}(A \circ B) \ge L_{\mathrm{sym}}(A, B - tP_r) + t\,\mu_{n-r+1}(A)\min_{\ell}(P_r)_{\ell\ell}. \tag{33}$$

证明。$B = (B - tP_r) + tP_r$ 中的两项都是半正定的。将 (5) 应用于 $A \circ (B - tP_r)$，将 (11) 应用于 $A \circ (tP_r)$。将它们的最小特征值下界相加，即得 (33)。 □

取 $t = 0$ 可恢复对称界。取 $t = \lambda_r(B)$，则至少可得到秩-r投影估计，因为对称项非负。因此，在两个方向上对所有可行选择取右侧的最大值，所得界不会小于任一原始估计。

即使两个因子都是奇异的，也可能实现严格改进。取

$$P = I_4 - \tfrac{1}{4}\mathbf{1}\mathbf{1}^{*}, \qquad u = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^{T},$$
$$Q = P - uu^{*}, \qquad A = B = P + 12Q.$$

这里 $r_A = r_B = 3$。矩阵 P 是 A的值域投影，而 Q 是其首要秩二投影，其中 $\lambda_2(A) = 13$ 且 $\min_{\ell} Q_{\ell\ell} = 1/4$。$2 \times 2$ 主子矩阵给出 $\mu_2(A) = 1$。经过同时行列置换后，3×3 主子矩阵的谱为

$$\left\{1, \frac{13}{4}, 13\right\}, \qquad \left\{13, \frac{41-\sqrt{1473}}{8}, \frac{41+\sqrt{1473}}{8}\right\}.$$

因此，

$$\mu_3(A) = \frac{41-\sqrt{1473}}{8} > \frac{1}{4}.$$

(7) 中的秩一项为零，秩二项为 $13\mu_3(A)/4 > 13/16$，秩三项为 $3/4$。因此

$$L_{\mathrm{proj}}(A \mid A) = \tfrac{13}{4}\mu_3(A), \qquad L_{\mathrm{sym}}(A, A) = \mu_3(A).$$

在 (33) 中，取 $r = 2$ 和 $t = 12$，使得 $B - tP_r = P$。由于 $\mu_2(P) = 1/2$ 且 $\mu_3(P) = 1/4$，

$$L_{\mathrm{sym}}(A, P) = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{\mu_3(A)}{2}\right\} = \frac{1}{4}.$$

因此，组合界给出

$$\lambda_{\min}(A \circ A) \geq \frac{1}{4} + 12\,\mu_3(A)\min_{\ell} Q_{\ell\ell} = \frac{1}{4} + 3\mu_3(A),$$

它大于两个原始界。将 $A \circ A$ 分解到由坐标对 $\{1,2\}$ 和 $\{3,4\}$ 所对应的对称子空间和反对称子空间中，得到 $\lambda_{\min}(A \circ A) = 13/2$。数值上，对称估计、投影估计以及所展示的组合估计分别约为 0.3275、1.065 和 1.233。

5 多因子与 Khatri–Rao 推论

推论 5.1（多因子不等式）。设 $A_1, \dots, A_m \succeq 0$ 的阶分别为 n、$m \geq 2$，并设 $i_\ell \in \{1, \dots, n\}$ 对于 $\ell \in \{1, \dots, m\}$。对于满足 $k + m - 1 \leq \sum_{\ell=1}^{m} i_\ell$ 的每个 $k \in \{1, \dots, n\}$，

$$\mu_k(A_1 \circ \cdots \circ A_m) \geq \prod_{\ell=1}^{m} \mu_{i_\ell}(A_\ell). \tag{34}$$

证明。我们对 $m \geq 1$ 使用归纳法证明该断言。对于 $m = 1$，条件为 $k \leq i_1$，因此由单调性可得该断言成立。对于归纳步骤，令 $m \geq 2$，并置 $d = \max\{1, k - i_m + 1\}$。则 $d \in \{1, \dots, n\}$，$d + m - 2 \leq \sum_{\ell=1}^{m-1} i_\ell$，且 $d + i_m - 1 = \max\{k, i_m\} \leq n$。归纳假设给出

$$\mu_d(A_1 \circ \cdots \circ A_{m-1}) \geq \prod_{\ell=1}^{m-1} \mu_{i_\ell}(A_\ell).$$

应用定理 m 1.1 和单调性到 $A_1 \circ \cdots \circ A_{m-1}$ 以及 A_m，索引为 d, i_m，以获得 (3 4). $\square$

对于一个有 n 列的矩阵 U，令 U_S 表示由索引为 S 的列组成的子矩阵。式 (1) 中已定义的量描述了它们的条件性：

$$\sqrt{\mu_k(U^*U)} = \min_{|S|=k} \min_{\substack{x\in\mathbb{C}^k \\ \|x\|=1}} \|U_S x\|, \qquad k \in \{1,\dots,n\}. \tag{35}$$

当 k 超过 U 的行数时，该值为零。

推论 5.2（Khatri–Rao 不等式）。设 U_1、…、U_m 各有 n 列，并令 K 为它们的 *Khatri–Rao* 积，即对相应列取张量积构成。采用推论 *5.1* 中的指标，

$$\mu_k(K^*K) \geq \prod_{\ell=1}^{m} \mu_{i_\ell}(U_\ell^*U_\ell). \tag{36}$$

证明。张量积的内积等于相应内积的乘积，因此

$$K^*K = (U_1^*U_1) \circ \cdots \circ (U_m^*U_m).$$

应用（34）即可完成证明。 □

对（36）开平方并利用（35），即可得到对于给定矩阵中所有指定阶数的列子集所对应的一致下界。如果（36）右侧的乘积与零保持正距离，则对变化的矩阵族可得到一个正的一致下界。由于 $\mu_k(U^*U) > 0$ 当且仅当 $k \leq k_U$，在（36）中令 $i_\ell = k_{U_\ell} \geq 1$，可知对于每个 $k \in \{1、\dots、n\}$ 且满足 $k + m - 1 \leq \sum_{\ell=1}^{m} k_{U_\ell}$，

$$k_K \geq k. \tag{37}$$

这种定性的 Kruskal秩不等式是经典结果 [16, 17]。不等式（36）根据列 Gram 矩阵的最小特征值给出了一个定量版本。

对 $\mu_k(X)$进行穷举评估涉及 $\binom{n}{k}$ 个主子矩阵，因此，计算这些界未必比计算它们所估计的特征值更便宜。它们的主要用途在于结构分析；当可以获得一致的主子矩阵估计时，也可用于定量分析。

6 结论

我们为半正定 Hadamard 积建立了一个具有尖锐主子矩阵指标的对称特征值下界。该谱下界还说明了界何时取等：对于内部指标，正等号成立，当且仅当两个因子共享一个孤立坐标，并且它们在该坐标处的对角元素分别取得所选值。主子矩阵表述给出了多因子不等式和定量的 Khatri–Rao 条件数界。

对称界与两个方向投影界中较大的一个彼此不可比。后者在对称界为零时仍可能为正，而对称界也可能严格更大。将这两个界分别应用于某个因子的半正定加项，可以得到严格大于任一单独估计的下界。

致谢

作者谨向 Roger A. Horn 教授致谢，感谢他提出的宝贵意见，这些意见提升了本文的质量。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在可能被认为会影响本文所报告工作的已知竞争性经济利益或个人关系。

数据可用性

未使用外部数据集。文章中已列明所有示例矩阵和精确量。

Dec生成式人工智能和人工智能辅助技术声明

在准备本项工作期间，作者使用了生成式人工智能来构建和检查数学论证，以及起草和修订文本与 LaTeX源文件。作者负责核验所有数学结果和参考文献，并对手稿的最终内容负责。

参考资料

[1] I. Schur，《关于含有无穷多个变量的有界双线性型理论的评注》，《纯粹与应用数学杂志》140（1911）1–28。[2] R.A. Horn，C.R. Johnson，《矩阵分析》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，2013。[3] G.P.H. Styan，Hadamard积与多元统计分析，《线性代数及其应用》6（1973）217–240。doi:10.1016/0024-3795(73)90023-2。[4] T. Ando，R.A. Horn，C.R. Johnson，Hadamard 乘积的奇异值：一个基本不等式，《线性与多重线性代数》21（1987）345–365。[5] B.-Y. Wang，F. Zhang，半正定厄米矩阵的普通乘积与Hadamard 乘积的迹与特征值不等式，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》16（1995）1173–1183。[6] B. Mond，J.E. Pečarić，关于矩阵 Hadamard 乘积的不等式，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》19（1998）66–70。[7] X. Zhan，关于Hadamard 乘积奇异值的不等式，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》18（1997）1093–1095。[8] Z. Yang，P. Stoica，J. Tang，基于空间平滑的子空间方法的源可分辨性：Hadamard 乘积视角，《IEEE信号处理汇刊》67（2019）2543–2553。doi:10.1109/TSP.2019.2908142。[9] R.A. Horn，Z. Yang，Hadamard 乘积的秩，《线性代数及其应用》591（2020）87–98。doi:10.1016/j.laa.2020.01.005。[10] R.A. Horn，S. Luo，H. Xu，Z. Yang，Hadamard 乘积的正性，2026年。arXiv:2604.19602v2。[11] J.K. Merikoski，R. Kumar，关于矩阵和与积的展度的不等式，《应用数学电子注》4（2004）150–159。

[12] E.G. Boman，D. Chen，O. Parekh，S. Toledo，关于因子宽度与对称 H矩阵，《线性代数及其应用》405（2005）239–248。doi:10.1016/j.laa.2005.03.029。[13] M.L. Overton，R.S. Womersley，关于对称矩阵最大特征值之和，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》13（1992）41–45。doi:10.1137/0613006。[14] J. Gouveia，A. Kovačec，M. Saee，关于平方和 k多项式，《纯粹与应用代数杂志》226（2022）106820。doi:10.1016/j.jpaa.2021.106820。[15] S. Fisk，多项式、根与交错，2008年。arXiv:math/0612833v2。[16] N.D. Sidiropoulos，R. Bro，关于 N 阶数组的多线性分解的唯一性，《化学计量学杂志》14（2000）229–239。[17] N.D. Sidiropoulos，X. Liu，非相干多径小时延扩展条件下盲波束形成的可辨识性结果，《IEEE信号处理汇刊》49（2001）228–236。