arXiv:2611.30901v1 [math.RT] 23 Nov 2026

作用于建筑上的群的 Hecke 诱导模的度量结构

Pierre-Emmanuel Caprace、Alex Loué 和 Andreas Thom

摘要。设 X 是一个类型为 $(W,\ S)$ 的厚的局部有限建筑，G 是一个在 X上适当作用且室传递的局部紧群。我们给出伊wahori–Hecke 代数 $\mathbf{C_q}[W]$的厄米模 $(V_0,\ \varphi_0)$ 所满足的一个条件，确保定义在诱导的 G-模上的自然 G-不变型具有与 φ_0相同的负指标，其中 $\mathbf{q}$ 是 X的厚度向量。这意味着 Hecke 模的归纳法保酉性。在仿射情形下，这推广了 Matsumoto、Barbasch–Moy 和 Ciubotaru 的结果。一般而言，假设 G是 Weyl-传递的，我们便在希尔伯特空间以及有限秩无限维对称空间上得到新的不可约 G-表示。利用具有洛伦兹符号的 Hecke 模，我们还推导出 Kazhdan 性质 (T) 的新障碍，表明以厚度为条件的已知充分条件在很大程度上也是必要条件。

1. 引言

令 G 为一个全不连通局部紧群，且 $B \leq G$ 为一个紧开子群。代数 $C_c(B\backslash G/B)$ 由双B-不变函数构成，G 是$*$卷积代数 $C_c(G)$的子代数；后者由 G上的连续、紧支撑复值函数构成。它可以被视为 G 在空间 $C_c(G/B)$上的线性表示的交换子代数，参见 [9,第 IV 章，习题 22]。

卷积代数 $C_c(B\backslash G/B)$ 自然地出现在 G 的表示论中。事实上，G 的每个酉表示 $(\mathcal{H}\ \pi)$ 都会在空间 $\mathcal{H}^B$ 的 B-不变向量上诱导出一个 $*$-表示 $C_c(B\backslash G/B)$。此外，如果 π 不可约且 $\mathcal{H}^B$ 非零，那么 $\mathcal{H}^B$ 是一个不可约的 $C_c(B\backslash G/B)$-模，参见 [34, 第 IV 章，定理 2]。一个自然的问题是，是否每个（不可约）酉$C_c(B\backslash G/B)$-模都以这种方式产生。

一般而言，答案是否定的：反例可在 G局部域上的单代数群中找到，其中 B 是一个极大紧子群，参见 [35] 及其中的参考文献。然而，对于局部域 G上的单代数群，如果 B 是一个*Iwahori* 子群，答案则是肯定的。秩一情形由 Matsumoto 在 [38, §5.6.6, 第 215]页证明。Borel 在 [8, §5.11], 提出了这个结论是否也适用于更高秩的问题，此后该问题长期悬而未决，直到 Barbasch–Moy 和 Ciubotaru [给出了肯定答案。

自然可以将 Borel 问题的范围扩展到这样的情形：G 在一个厚且局部有限的建筑[3, 4, 17]X 上真、连续且 Weyl-传递地作用，

PEC 的研究部分由 FWO 和 F.R.S.-FNRS 通过 EOS 计划（项目编号 40007542）资助。

任意类型 $(W,\ S)$，且 B 是一个室的稳定子。除仿射情形外，有限域上的极大 Kac–Moody 群提供了明确的例子族；在这种情况下，$(W,\ S)$ 可以是任意的晶体学 Coxeter 系统（见 [36, 第 8]章）。此外，在直角情形中，考虑半正则直角建筑物的全自同构群（见 [12]），以及具有指定局部作用的变体（见 [20]），还可得到并非 Kac–Moody 类型的其他例子。

在此情形下，卷积代数 $C_c(B\backslash G/B)$ 同构于 Hecke 代数 $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}[W]$，该代数与厚度向量 $\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 相关联，作用于 X（见下文第 4 节）。给定一个酉 $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}[W]$-模 V_0，其 **Hecke 诱导模**

$$C_c(G)\otimes_{C_c(B\backslash G/B)} V_0$$

带有一个自然的 G-不变型，称为**诱导形式**，见下文第 4 节。Borel 问题在于询问该诱导形式是否为半正定。以下结果对所有类型给出了肯定答案。

定理 A。设 X 是一个类型为 (W,S) 的厚的局部有限建筑，且 G 是一个作用于 X上的局部紧群，并以真、连续且 *Weyl* 传递地的方式作用。设 $\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 是 X的厚度向量。对于每个酉 $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}[W]$-模，*Hecke* 诱导形式都是半正定的。

称 G 的酉表示 $(\mathcal{H}\ \pi)$ 为 B-**球形**，如果 B-不变向量所成的空间 $\mathcal{H}^B$ 非零。

推论 B. 沿用定理 A的假设。映射 $\mathcal{H}\ \mapsto\mathcal{H}^B$ 将酉表示 $(\mathcal{H}\ \pi)$ 对应到 G 相应的 $C_c(B\backslash G/B)$-模$\mathcal{H}^B$，由此在不可约 B-球形表示与 G不可约酉 $C_c(B\backslash G/B)$-模的等价类之间建立双射对应。

我们的证明直接且自成一体；特别是，我们为仿射情形给出了一个新的证明，与前述工作有显著不同 [3, 4, 17, 38]。该证明具有统一性，因为它不区分主系列与互补系列。一个重要的组成部分是对建筑的室进行穷竭，并且该穷竭满足某种弱凸性（见命题 2.5）；其构造利用了 CAT(0) 度量与组合度量之间的相互作用。

生成元 $(e_s)_{s\in S}$ 所满足的二次关系（下文第 §4.1 节回顾）确保 Hecke 代数 $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}[W]$ 具有一个包络 C^*-代数，记为 $C^*_{\mathbf{q}}(W)$，参见 [38, §2.4.2]。定理 A 有如下推论，其中 $p_B = \frac{1}{m(B)}\mathbf{1}_B \in C^*(G)$ 表示 B的归一化特征函数。

推论 C。保留定理 A的假设，并将哈尔测度 m 在 G 上归一化，使得 $m(B) = 1$。典范满射

$$C^*_{\mathbf{q}}(W)\to p_B C^*(G)p_B,$$

由赋值 $e_w\ \mapsto\ \mathbf{1}_{BwB}$ 定义，是单射。特别地，$C^*_{\mathbf{q}}(W)$ 与角代数 $p_B C^*(G)p_B$ 同构。

当 $(W,\ S)$ 为直角型时，Hecke 代数 $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}[W]$ 同构于群代数 $\mathbf{C}[W]$（参见 [15, 命题 4.2]），因此包络 C^*-代数

$C^*_{\mathbf{q}}$（W）同构于最大 C^*-代数 C^*（W）。一般而言，没有对$C^*_{\mathbf{q}}$（W）的此类描述。

$\mathbf{C_q}[W]$ 的每个一维表示都是酉的。其中，交错表示 $\mathbf{C_q}[W] \to \mathbf{C}$ 是这样一个表示：对所有 $s \in S$，它将生成元 e_s 映射为 -1。在 [37, §1], 中，Matsumoto 将 G 的特殊表示（也称为斯坦伯格表示）定义为一个不可约酉表示（$\mathbf{H}$ σ），满足 $\mathbf{H}^B$ 是一维的，并且由 σ 诱导的 $\mathbf{H}^B$ 上的 $\mathbf{C_q}[W]$-表示是交错表示。
Matsumoto 指出，如果特殊表示存在，那么它在等价意义下是唯一的。此外，只要 $\sum_{w\in W} q_w^{-1} < \infty$，特殊表示就存在，其中 $q_w = m(BwB)$。在这种情况下，σ 是平方可积的。（这些断言在 [37] 中未加证明；可以利用 [19, §19.2] 中构造的赫克–冯·诺依曼代数的幂等元来证明它们。在平方可积的情形下，特殊表示的另一种构造见 [25, §6]。）当 X 是仿射型的厚建筑时，级数 $\sum_{w\in W} q_w^{-1}$ 的收敛性是自动的；但一般而言并非如此，见 [7],，因此在相应情形下特殊表示的存在性一直尚未确定。定理 A 直接推出以下结论。

推论 D（特殊表示的存在性）。 每个满足定理 A的假设的群都有一个特殊表示。

还有另一个自然的有限维表示 V_{g}，其维数为 $|S|$，我们称之为几何 Hecke 模，见下文第 4.5 节。它可以被视为考克斯特群 W 的几何表示的一种变形。当 (W, S) 是 2-球面（即对于所有 $s \neq t \in S$，考克斯特数 $m_{s,t}$ 都有限）时，它带有一个典范的厄米形式 φ_{g}，这是定义在 W 的几何表示上的蒂茨形式的一种自然变形。该形式 φ_{g} 不必是正定的。但当它是正定时，定理 A 所给出的 G 的赫克诱导酉表示称为 G 的几何酉表示。利用 Kassabov 关于 Kazhdan 性质 (T) 的判据（见 [33]），我们证明如下结果。

推论 E（拉普拉斯算子的谱隙）。 保留定理 A 的假设，并设 (W, S) 是 2-球形的。若 φ_{g} 是正定的，则 G 具有 *Kazhdan* 性质 *(T)*。此外，由下式定义的拉普拉斯算子的谱隙

$$\Delta = \sum_{s\in S} (\mathbf{1}_B - (q_s + 1)^{-1}\mathbf{1}_{P_s}) \in C^*(G),$$

其中 $(P_s)_{s\in S}$ 表示秩一抛物子群，该谱隙由几何酉表示达到；若 (W, S) 不可约，则该表示也不可约。

众所周知，(W, S) 是 2-球形是 G 具有 (T) 性质的必要条件，参见 [25, §2]。关于传递作用（但不一定是 Weyl 传递）的群的 (T) 性质，更一般的陈述见推论 4.20 。

推论 E 可视为 Kassabov 结果的一个“厚类比” [33, §6。1]该结果指出，有限 Coxeter 群的几何表示达到了相对于该群标准 Coxeter 生成集的拉普拉斯算子谱隙。

我们证明定理A 的方法不仅适用于酉$\mathbf{C_q}[W]$-模，也适用于厄米$\mathbf{C_q}[W]$-模；其关联型具有非平凡的符号。事实上，证明并不要求建筑 X 具有 Weyl-传递

自同构群，甚至不要求具有室传递自同构群。事实上，我们的主要结果如下。

定理 F。 设 X 是一个厚的、局部有限的、半正则的、类型为 (W,S) 的建筑，其所有球形余留的自同构群都是传递的。设 $\mathbf{q}=(q_s)_{s\in S}$ 为其厚度向量，并设 (V_0,φ_0) 为一个非退化的 *Hermitian* $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$-模，其中 $\mathbf{K}$ 是实数域或复数域。我们假设型 φ_0 具有负指标 $p<\infty$。如果对于每个球形子集 $J\subset S$，都存在一个 p 维子空间 U_J，它逐点固定于 V_0，且对所有 $s\in J$ 都被 $T_s=q_s^{-1}e_s$ 逐点固定，并且 φ_0 在其上的限制是负定的，那么 *Hecke* 诱导模 $\mathrm{ind}(V_0)$ 上的诱导形式也具有负指标 p。

若对于每个 $s\in S$， X 的所有 s-面板都具有相同的基数，则称建筑是**半正则的**。这是使厚度向量定义良好所需的条件。注意，如果 Aut(X) 是室传递的，那么 X 是半正则的，并且所有球形余留都具有传递的自同构群。

在 φ_0 为正定时，我们有 $p=0$，关于球形子集的断言 $J\subset S$ 是多余的。因此，定理 A 直接由定理 F推出。

定理F 中关于球形子集的断言由几何 Hecke 模自动满足（见下文引理 4.21）。利用存在保持具有符号 $(1,\infty)$ 的型的无界表示是 (T) 性质的一个障碍这一事实，我们得到以下结果；该结果可视为推论E的部分逆命题。

推论 G。 设 X 是一个具有2-球型(W,S)的厚的局部有限建筑。假设 S 包含一个大小为 $|S|-1$的球形或仿射子集，且几何形式 φ_{g} 是非退化的。那么，一个在 X 上真地、连续地且室传递地作用的局部紧群 G 具有 *Kazhdan* 性质 *(T)*，当且仅当 φ_{g} 是正定的。

关于确保 (T) 性质失效的更一般判据，请参见推论 4.25。

最早确立在 2-球形类型且厚度足够大的厚的局部有限建筑上强传递地作用的群具有 (T) 性质的结果（超出仿射情形），归功于 Dymara–Januszkiewicz [25]。他们的结果要求厚度具有一个下界，随后可借助 Ershov–Jaikin [26], 、Kassabov [33] 和 Ershov–Rall [27] 的结果加以改进（在该背景下对 Kassabov 阈值的重新表述也可参见 [31] ）。对于作用在低厚度 2-球面建筑上的群，其 (T) 性质的状况长期以来一直不明确。对于仿射型建筑，I. Oppenheim [42] 的一项近期结果确保了 (T) 性质无条件成立。在非仿射型情形下，据我们所知，迄今为止此前唯一已知的、在该背景下为 (T) 性质提供障碍的结果，是 Bischof 的否定性结果 [6, 引理 7.4。6]，其针对的是定义在 $\mathbf{F}_2$ 上、类型为 (4,4,4) 的 Kac–Moody 双曲建筑。

对于几何形式非退化的紧致双曲型建筑，推论 G 中的二分结论可以加强为 Kazhdan 性质与 Haagerup 性质之间的二分。回顾一下，若一个考克斯特系统是**紧致双曲型**的，则它不是球形的，也不是仿射型的，并且对于每个 $J\subsetneq S$，抛物子群 $W_J=\langle J\rangle$ 都是有限的。注意，在这种情况下，几何形式 φ_{g} 要么是正定的，要么是退化的

半正定的，要么是具有洛伦兹符号的非退化型（见推论 4.17）。通过逐个情形计算，可以验证，当厚度向量为常向量时，型 φ_{g} 是非退化的。

推论 H. 设 X 是一个厚的局部有限紧致双曲型建筑(W, S)，其秩至少为三，且设 $\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 是其厚度向量。设 G是一个局部紧群，它通过自同构在 X上适当地、连续地且室传递地作用。

如果 φ_{g} 具有洛伦兹型符号，那么 G具有 *Haagerup* 性质，并且由几何 *Hecke* 模得到的双曲作用在度量意义上是适当的。

这恢复了以下特殊情形：在阶为 $(4,4,4)$ 的域上定义的 2型 Kac–Moody 建筑；相关结果记载于 [**14**, 命题 7。1]。推论 H 将由一个更一般的结论推出（见命题 4.31），该结论在更灵活的假设下保证 Haagerup 性质，也适用于紧致双曲型以外的情形，见 §4.10。

在（W， S）为直角型且 G 在 X 上强传递的情形下（如果 $G = \mathrm{Aut}(X)$ 且 X 是半正则的，这一条件会自动满足，见 [**12**]），几何 Hecke 模并非规范定义的：它取决于参数的选择，即对所有满足考克斯特数$m_{s、t}$为无限的对 $s \neq t \in S$，选择参数 $\mu_{s、t} \in \mathbb{C}$。利用定理 4.22，我们得到这些群在有限秩无限维对称空间上的不可约表示的多参数族。在特殊情形下，当 X 是半正则树且 $\mu_{s、t} > 1$ 为实数时，我们重新得到 Burger–Iozzi–Monod [**11**]首次构造并研究的无限维实双曲空间上的不可约表示。在我们的语境中，有限秩无限维对称空间上的不可约表示 > 1 也会自然出现，不仅在直角型情形下如此，在低厚度的某些 2-球型类型中也是如此；具体例子见下文 §4.9。这与高秩经典的单李群和代数群情形形成对比，因为在后者中，各种结果保证此类作用不可能存在；参见 B. Duchesne [**24**] 和 F. Viola [**49**]近期的工作。

致谢。 感谢 Bruno Duchesne、Timothée Marquis、Nicolas Monod、Pierre Py、Sven Raum 和 Alain Valette 对本文提出的意见，并感谢 Bruno Duchesne 提醒我们关注 F. Viola 的工作 [**49**]。

AI 声明。 关于通过控制 Hecke 诱导模上诱导形式的符号，来回答具有一般型 BN 对的局部紧群的 Borel 问题，并为 Kazhdan 性质 (T) 提供障碍，这一想法由前两位作者数年前独立提出。完成 [**14**], 时，第三位作者也获悉了这一想法；当时自然产生了这样一个问题：对于作用在厚度低于 Kassabov 阈值的建筑上的群，Haagerup 性质是否成立。2026年7月，最后一位作者借助与 GPT 5.6 Sol 的人机交互，基于一种贯彻该想法的组合策略，得到了关于这一特定问题的一项中间结果。其目标是通过赫克诱导几何表示，研究传递地按 Weyl 作用于紧致双曲型、厚度恒定且秩为 3 的建筑上的群是否具有 Haagerup 性质。这使我们产生了命题 4.5 中基变换的想法。随后，三位作者协作撰写论文，未再使用任何 AI 工具，直至完成不含 §4.10 的完整初稿。最后阶段，通过与 ChatGPT 6 Astra

的交互，我们得以得到推论 H，随后又将其推广为命题 4.31。最后，我们使用 ChatGPT 6 Astra 对全文进行了一致性检查，并据此作了少量修改。

2. 建筑

2.1. 组合结构与 CAT(0) 实现。关于一般理论，请参阅书籍 [1] 和 [19]。我们简要回顾一些与本文相关的基本定义和事实。

设 (W,S) 为一个考克斯特系统。始终假设 S 是有限的。我们将类型为 (W,S) 的建筑 X 视为一个室的集合，记为 $\mathrm{Ch}(X)$，并赋予一个取值于 W的映射 $\delta\colon \mathrm{Ch}(X)\times\mathrm{Ch}(X)\to W$，称为 Weyl距离，如[1, 第 5]章所述。建筑 X 的自同构是 $\mathrm{Ch}(X)$ 的一个保持 Weyl距离不变的置换。（请注意，在这种建筑处理方式中，自同构按定义保持类型不变。）给定 $c,d\in\mathrm{Ch}(X)$，相对于考克斯特生成集 S，(c,d) 的词长δ称为 c 与 d之间的数值距离（或廊道距离）。记作 $\mathrm{dist}(c,d)$。给定 R 中的一个余类 X，记其室集合为 $\mathrm{Ch}(R)$。若余类 R_1 包含于余类 R_2，即 $\mathrm{Ch}(R_1)\subseteq\mathrm{Ch}(R_2)$，则称余类 R_1 包含于余类 R_2。若余类 R 包含于公寓 A，则称其包含于某个公寓；也就是说， R 中的某个室属于 A。

X 的戴维斯实现记为 $|X|$。其定义如下（更多细节参见 [19,§18] ）。考虑由X中的球形余留构成的偏序集$\mathcal{S}(X)$。偏序集$\mathcal{S}(X)$的旗复形**flag complex**，记为 $\mathrm{Flag}(\mathcal{S}(X))$，是一个抽象单纯复形，其单形为球形余留的链。特别地，顶点是 X 的球形余留。空间 $|X|$定义为该单纯复形 $\mathrm{Flag}(\mathcal{S}(X))$的几何实现。空间 $|X|$ 赋有 CW 拓扑（参见 [19, §A.1]）。一个关键特征是，它还带有分片欧几里得结构，使得 $|X|$赋予相应的长度度量（记为 d）后，成为完备 CAT(0) 度量空间，参见 [19, 定理 18.3.1]。

给定一个室 $c\in\mathrm{Ch}(X)$，我们用 $|c|$ 表示$|X|$中对应的子复形。其单形是包含室 c 的球形余留之链。它也是 CAT(0)空间 $|X|$的一个闭凸子集；此外，由于 S 是有限的，它还是紧的。

给定一个球形余类 R，我们定义

$$|R| = \bigcap_{c\in\mathrm{Ch}(R)} |c|$$

and

$$|\mathrm{Ch}(R)| = \bigcup_{c\in\mathrm{Ch}(R)} |c|.$$

显然 $|R|$ 是闭的且为凸集。

引理 2.1。 对于任意球形余类 R，集合 $|\mathrm{Ch}(R)|$ 是闭的且为凸集 .

证明。给定两个室 c，$d\in\mathrm{Ch}(R)$，考虑一个同时包含它们的公寓 A。交集 $\mathrm{Ch}(R)\cap A$ 恰好等于所有包含 c 和 d的半公寓的交集。由于半公寓在 CAT(0) 实现中是凸的，因此可知 $|\mathrm{Ch}(R)|\cap|A|$ 是凸的。因此，连接 $|c|\cup|d|$ 中两点的测地线段包含于 $|\mathrm{Ch}(R)|$中。由于这对 R中的任意一对室都成立，我们推断 $|\mathrm{Ch}(R)|$ 确实是凸的。

按构造， $|\mathrm{Ch}(R)|$ 是一个分片欧几里得复形，其中胞腔只有有限多个等距类型。因此它是柯西完备的（见 [10, 第 105–111] 页，或 [19,命题 I.3。4]），因而是 $|X|$的一个闭子集。□

每个 $x \in |X|$ 都有一个**支撑**，它是唯一包含 x 且 x 位于其相对内部的单形 $\sigma \in \mathrm{Flag}(\mathcal{S}(X))$。回顾一下，根据定义， σ 是 X 中的一条球形余类链；我们用 $\mathrm{Res}(x)$ 表示属于 σ的最小球形余类。令 $\mathrm{Ch}(x) = \mathrm{Ch}(\mathrm{Res}(x))$，且 $|\mathrm{Ch}(x)| = |\mathrm{Ch}(\mathrm{Res}(x))|$。

引理 2.2. 对于所有 $x \in |X|$，集合 $|\mathrm{Ch}(x)|$ 是 x 在 $|X|$中的一个邻域。

证明。令 $\sigma \in \mathrm{Flag}(\mathcal{S}(X))$为 x的支撑。再令 $\tau \in \mathrm{Flag}(\mathcal{S}(X))$为一个包含 σ的单形。那么，最小球形余类 $T \in \tau$ 包含于 σ的最小球形余类中；根据定义，后者是 $\mathrm{Res}(x)$。因此，任何属于$T\mathrm{Ch}(c \in)$的室都属于 $\mathrm{Ch}(\mathrm{Res}(x))$。由于 $|c|$ 是 $|X|$ 的一个子复形，且包含单形 τ，我们可推知 $|\mathrm{Ch}(x)|$包含 τ。特别地， $|\mathrm{Ch}(x)|$包含所有满足 $\tau \supseteq \sigma$的单形 τ 之并 $\mathrm{St}(\sigma)$。该集合是 x的一个邻域。□

2.2. 投影。 建筑的一个基本特征是余类之间存在组合投影。我们介绍一些基本事实，更多信息请参见 [48, §3.19]和 [12, §2] 。

给定一个室 $c \in \mathrm{Ch}(X)$ 和一个余类 R in X， c在 R上的**投影** 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中距离数值距离意义下的 c 最近的唯一室。记作 $\mathrm{proj}_R(c)$。投影映射的一项重要性质是，它不会增大室之间的数值距离：对于所有 $c, c' \in \mathrm{Ch}(X)$， $\mathrm{proj}_R(c)$ 到 $\mathrm{proj}_R(c')$ 的数值距离不大于 c到 c'的数值距离。

若 R 和 R' 是两个余类，则集合

$$\{\mathrm{proj}_R(c) \mid c \in \mathrm{Ch}(R')\}$$

是一个包含于 R中的余类的房间集。该余类记作 $\mathrm{proj}_R(R')$.

下面的结果给出了薄建筑情形下 $\mathrm{proj}_R(R')$ 的相关信息。这尤其有用，因为 $\mathrm{proj}_R(R')$ 完全由任意一个与 R 和 R' 相交的公寓中对应的投影决定（见 [48, §3.19]） 。给定薄建筑 X 的一个余类 R ，其类型为 (W, S)，我们将 $\mathcal{H}(R)$ 定义为所有与 $\mathrm{Ch}(R)$ 相交的 X 超平面的集合。将 W 视为 X 的自同构群，我们用 W_R 表示 W 中 R 的稳定子。它是W的一个抛物子群。

引理2.3。 设 R、 R' 是薄建筑物 X 中的两个余类，其类型为 (W, S)。

(i) 我们有 $W_{\mathrm{proj}_R(R')} = W_R \cap W_{R'}$。该群由穿过超平面 $\boldsymbol{H}(R) \cap \boldsymbol{H}(R')$ 的反射生成。*(ii)* 室 $d \in \mathrm{Ch}(R)$ 属于 $\mathrm{Ch}(\mathrm{proj}_R(R'))$ ，当且仅当 d 和 R' 位于每个超平面 $H \in \boldsymbol{H}(R) \setminus \boldsymbol{H}(R')$ 的同一侧。

证明。(i) 第一个断言由 [1, 引理3.123], 得出，第二个断言由[12, 引理2.3和2.7]得出。

(ii) 若 $H \in \mathcal{H}(R)$，则 R 中包含 H 的某个面板 σ 。根据 [48, 2.30.5]，对于所有的室 c，我们有 $\mathrm{proj}_\sigma(c) = \mathrm{proj}_\sigma(\mathrm{proj}_R(c))$。因此， c 和 $\mathrm{proj}_R(c)$ 位于 H 的同一侧。此外，若 $H \notin \mathcal{H}(R')$，则 R' 的所有室都位于 H 的同一侧。(ii) 的“仅当”部分得证。

现在令 $d \in \mathrm{proj}_R(R')$，并设 $d' \in \mathrm{Ch}(R)$ 是任意一个室，它与 R' 位于每个超平面 $H \in \mathcal{H}(R) \setminus \mathcal{H}(R')$ 的同一侧。那么，将 d 与 d' 分隔开的超平面只有属于 $\mathcal{H}(R) \cap \mathcal{H}(R')$ 的那些。由于每个这类超平面上的反射都属于 $W_{\mathrm{proj}_R(R')}$（由 (i) 可知），且该群在 $\mathrm{Ch}(\mathrm{proj}_R(R'))$ 上传递作用，因此我们推得 $d' \in \mathrm{Ch}(\mathrm{proj}_R(R'))$。这就证明了 (ii)。□

最后，我们需要以下结果，它将组合投影与 CAT(0)度量联系起来。

命题 2.4. 设 x、$x' \in |X|$ 是不同的点，设 $R = \mathrm{Res}(x)$，且 $R' = \mathrm{Res}(x')$。以下断言成立。

(i) $[x, x'] \cap |\mathrm{Ch}(R)|$ 是一条长度为正的测地线段。

(ii) 对任意满足 $x \neq y$ 的 $y \in [x, x'] \cap |\mathrm{Ch}(R)|$，有

$$\mathrm{Ch}(x) \cap \mathrm{Ch}(y) = \mathrm{Ch}(\mathrm{proj}_R(R')).$$

证明。由于 $|\mathrm{Ch}(R)|$ 由引理 2.1可知是闭凸集，因此交集$[x, x'] \cap |\mathrm{Ch}(R)|$ 是一条包含 x 的测地线段。由引理 2.2可知其长度为正。这就证明了 (i)。

现在设 $y \in [x, x'] \cap |\mathrm{Ch}(R)|$，且 $y \neq x$。根据定义，我们有 $\mathrm{Ch}(x) = \mathrm{Ch}(R)$。为了证明 (ii)，我们需要证明余类 $\mathrm{proj}_R(R')$ 的室集与余类 $R \cap \mathrm{Res}(y)$ 的室集相同。当且仅当在某个同时包含 R 和 R' 的公寓中该包含关系成立时，这一结论才成立。因此，在本证明余下部分中，不失一般性地假设建筑 X 是薄的。

注意到 $\mathrm{Ch}(R) \cap \mathrm{Ch}(y)$ 非空。事实上，由于 $y \in |\mathrm{Ch}(R)|$，存在一个室 $d \in \mathrm{Ch}(R)$，使得 $y \in |d|$。任意这样的室 d 都属于交集 $\mathrm{Ch}(R) \cap \mathrm{Ch}(y)$。接下来我们断言 $d \in \mathrm{Ch}(\mathrm{proj}_R(R'))$。令 $\mathrm{H}(R)$ 为薄建筑 X 中所有与 $\mathrm{Ch}(R)$ 相交的超平面所构成的集合；对 R' 也类似。取 $H \in \mathrm{H}(R)$，并假设 $y \in |H|$。根据引理3.4]，，整条测地线段$[x, x']$ 都包含在超平面 $|H|$ 内，因此 [41，，故 $H \in \mathrm{H}(R')$，因为$R' = \mathrm{Res}(x')$。由此可知，对于所有属于 $\mathrm{H}(R) \setminus \mathrm{H}(R')$ 的超平面 $H \in$ ，点 y 与余类 R' 位于由 H 确定的同一个半公寓内。特别地，H 不会将室 d 与 R' 中的任何室分隔开。由引理2.3(i)可知，d 是 $\mathrm{proj}_R(R')$ 的一个室，从而证实了这一断言。这表明 $\mathrm{Ch}(R) \cap \mathrm{Ch}(y) \subseteq \mathrm{Ch}(\mathrm{proj}_R(R'))$。

回顾引理 2.3(ii)，W_T of $T = \mathrm{proj}_R(R')$ 的稳定子由通过 $\mathrm{H}(R) \cap \mathrm{H}(R')$ 中所有元素的反射生成。$\mathrm{H}_A(R) \cap \mathrm{H}_A(R')$ 中的每个超平面都包含 x 和 x'，因而也包含 $y \in [x, x']$。于是，W_T 固定 y。由于 $\mathrm{proj}_R(R')$ 是薄建筑 X 的一个余类，因此抛物子群 W_T 在该余类的室上是传递的。由于 W_T 稳定 R，我们推得 $\mathrm{Ch}(R) \cap \mathrm{Ch}(y) \supseteq \mathrm{Ch}(\mathrm{proj}_R(R'))$。断言 (ii) 得证。□

2.3. 球形余类的穷竭。 设 X 是一个类型为 (W, S) 的局部有限建筑。若 $(R_n)_{n \geq 0}$ 是 X 中球形余类的一个序列，记 $Y_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{Ch}(R_k)$。如果对于所有 $n \geq 0$ 和 $b \in Y_n$，都有 $\mathrm{proj}_{R_{n+1}}(b) \in Y_n$，则称序列 $(Y_n)_{n \geq 0}$ 是**弱凸的**。如果它穷竭 X，则称 $\bigcup_{n \geq 0} Y_n = X$。

当 (W, S) 是秩 2 的自由考克斯特系统时（即当 X 是一棵局部有限树时），X 中存在许多弱凸序列。事实上，我们可以如下论证。首先，注意到如果 $Y \subseteq X$ 是任意有限子树，那么它至少有一个叶节点ℓ。包含 ℓ 的 X 中的边集定义了一个余类 R。它是一个球形余类

因为 X 是局部有限的，并且存在唯一的 $c \in X$ 使得 $Y \cap R = \{c\}$。现在，对所有 $b \in Y$，我们都有 $\mathrm{proj}_R(b) = c \in Y$。此外， $Y \cup R$ 也是一棵有限子树。

现在，我们可以从任意一个室 $c_0 \in X$ 开始，并反复使用这一观察。令 $R_0 = \{c_0\}$，这是一个球形余类，而 $Y_0 = R_0$ 是 X 的有限子树。根据归纳法，如果对于某个 $n \geq 0$ 已构造出 Y_n，则按上述方式选取 R_{n+1}。序列 $(Y_n)_{n\geq 0}$ 显然是弱凸的。通过例如规定在 Y_n 中选取的叶节点 ℓ 到 c_0的距离最小，不难想象出这样一个还能穷竭 X 的序列。

当 (W, S) 是一个任意的考克斯特系统时，无法使用相同的论证。事实上，主要困难在于，不同于我们刚才讨论的树的情形，当 $Y \subseteq X$ 是凸的，且 R 是一个球形余类，并且对于所有 $b \in Y$ 都有 $\mathrm{proj}_R(n) \in Y$ 时，并集 $Y \cup R$ 一般不一定是凸的。然而，利用组合投影与 $|X|$ 上的 CAT(0)度量之间的相互作用，可以构造出适用于任意类型的弱凸穷竭。

命题 2.5. 在每个类型为 (W, S) 的局部有限建筑 X 中，都存在一个球形余留序列 $(R_n)_{n\geq 0}$，满足以下条件，其中$Y_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{Ch}(R_k)$:

(1) $\bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Ch}(R_n) = \mathrm{Ch}(X)$。*(2)* 对所有的 $n \geq 0$ 和 $b \in Y_n$，都有 投影$_{R_{n+1}}(b) \in Y_n$。

命题 2.5 的证明。任取一个基点 $x_0 \in |X|$。对每个室 $c \in \mathrm{Ch}(X)$，集合 $|c|$ 是闭且凸的。令 $\pi_{|c|}\colon |X| \to |c|$ 表示最近点投影（见 [10, §II.2]）。令 $D = \{d(x_0, \pi_{|c|}(x_0)) \mid c \in \mathrm{Ch}(X)\}$。由于 X 局部有限，D 与任意有限区间的交集都是有限集。因此 D 是离散的，我们可以将其元素枚举为严格递增序列，即 $0 = d_0 < d_1 < \ldots$。

对于每个整数 $m \geq 0$，我们令 $\mathcal{R}_m$ 表示所有形如 $\mathrm{Res}(\pi_{|c|}(x_0))$ 的球形余类的集合，其中 $c \in \mathrm{Ch}(X)$ 是满足 $d(x_0, \pi_{|c|}(x_0)) = d_m \in \mathcal{D}$ 的室。然后，通过对所有整数 $m \geq 0$ 依次枚举集合 $\mathcal{R}_m$ 中的元素（顺序任意），构造所需的序列 $(R_n)_{n\geq 0}$。

以这种方式定义的序列 $(R_n)_{n\geq 0}$ 满足 (1) 是显然的：对于每个 $c \in \mathrm{Ch}(X)$，距离 $d(x_0, \pi_{|c|}(x_0))$ 是某个元素 $d_m \in \mathcal{D}$，因此 $R = \mathrm{Res}(\pi_{|c|}(x_0))$ 属于$\mathcal{R}_m$，从而 c 属于序列 (R_n) 中某个余类的室集。

剩下需要验证投影条件 (2)。我们将证明，对于所有 $k \leq n$，投影 $T = \mathrm{proj}_{R_{n+1}}(R_k)$ 的室集完全包含于 Y_n 中。这确实意味着 (2) 成立。

根据构造，对每个 n，都存在一个室 $c_n \in \mathrm{Ch}(R_n)$，使得 $d(x_0, x_n) \in \mathcal{D}$，其中 $x_n = \pi_{|c_n|}(x_0)$，且 $R_n = \mathrm{Res}(x_n)$。

现在固定 $k \leq n$。令 $R = R_{n+1}$, $x = x_{n+1}$, $R' = R_k$, $x' = x_k$ 和 $T = \mathrm{proj}_R(R')$。由于 $k \leq n$，我们有 $\mathrm{Ch}(R') \subseteq Y_n$。我们必须证明 $\mathrm{Ch}(T) \subseteq Y_n$。

若 $x' = x$，则 $R' = R = T$，无需证明任何内容。因此，我们可以假设 $x \neq x'$。

由于 $k \leq n$，我们有 $d(x_0, x') = d(x_0, x_k) \leq d(x_0, x_{n+1}) = d(x_0, x)$。由 CAT(0) 不等式可知，对于所有不同于 x 的 $y \in [x, x']$，都有 $d(x_0, y) < d(x_0, x)$。根据命题 2.4，存在某个不同于 x 的 $y \in [x, x'] \cap |\mathrm{Ch}(R)|$，并且对于任意这样的 y，我们都有 $\mathrm{Ch}(y) \supseteq \mathrm{Ch}(T)$。因此，对于每个 $c \in \mathrm{Ch}(T)$，我们有

$y \in |c|$，从而 $d(x_0, \pi_{|c|}(x_0)) \leq d(x_0, y) < d(x_0, x)$。由此可知，对于某个 $i \leq n$，c 属于余类 R_i 的室集。因此 $c \in Y_n$，如所要求。□

3. 厄米空间与无限维对称空间

本节旨在介绍有限指标的（无限维）厄米空间及其相关对称空间的一些基本事实。Pontryagin 发起了对这些对象的研究，[44]，并受到 Gromov 的推动，[32,§6.A.III]。本文的论述基于 [11, 22, 23, 39]。

3.1. 有限指标的厄米空间。我们回顾一下可能为无限维的 K-向量空间 V 上半双线性型的一些事实，其中 $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$。更多信息和背景请参见 [11, §2] 。设 φ: $V \times V \to \mathbf{K}$ 为一个半双线性型。我们假设 φ 是对称的，即对于所有 v、w，都有 $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$。于是，二元组 (V, φ) 称为一个厄米空间。给定一个子空间 U，记作 $U^\perp = \{w \in V \mid \varphi(v, w) = 0 \ \forall v \in U\}$。子空间 $V^\perp$ 称为φ的根基；它也记作 $\mathrm{Rad}(\varphi)$。如果 $\mathrm{Rad}(\varphi) = \{0\}$，则称 φ 为非退化的。

若向量 $v \in V$ 满足 $\varphi(v, v) = 0$，则称其为**迷向**的；否则称为**非迷向**的。若 φ 在 W 上的限制为零，则称子空间 $W \leq V$ 为**迷向**子空间。迷向子空间的维数上确界称为 φ的**指标**，记为 $i(\varphi)$。φ的**正元**（分别为**负**）**指标**记为 $i_+(\varphi)$（分别记为 $i_-(\varphi)$），其定义为：使 φ 的限制为正定（分别为负定）的子空间维数的上确界。

设 φ 是非退化的。有限维理论表明，$i(\varphi) \leq \min\{i_+(\varphi)\ i_-(\varphi)\}$。特别地，只要 φ 的正元指标或负指标有限，其指标便有限。在这种情况下，我们有

$$i(\varphi) = \min\{i_+(\varphi), i_-(\varphi)\}.$$

有序对 $(i_-(\varphi)\ i_+(\varphi))$ 称为 φ的**符号**。

仍设 φ 是非退化的。我们用 $\mathrm{End}(V, \varphi)$ 表示线性自同态 $f \in \mathrm{End}(V)$ 所成的空间，其中的映射具有一个 φ-**伴随**（若不存在混淆，则简称为**伴随**）f^*，即存在映射 $f^* \in \mathrm{End}(V)$ 使得

$$\varphi(f(v), w) = \varphi(v, f^*(w))$$

对于所有 $v, w \in V$。φ 的非退化性确保了：如果 f^* 存在，则它是唯一的。可以验证，$\mathrm{End}(V, \varphi)$ 是一个 $*$-代数。

现在我们来定义强非退化性这一概念；下面将看到，它保证了对所有连续算子都存在 φ-伴随。

V 的一个**正交分解** 是直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$，满足对于所有 $v_i \in V_i$，都有 $\varphi(v_1, v_2) = 0$。在这种情况下，我们记作 $V = V_1 \perp V_2$。一个 $\pm$**-分解** 是满足以下条件的正交分解 $V = V_1 \perp V_2$：φ 在 V_1 上的限制为负定，而 φ 在 V_2 上的限制为正定。这样的分解产生一个定义在 V 上的正定半双线性型 φ'，其在 V_1（分别在 V_2）上的限制为 $-\varphi$（分别为 φ），并且按照该型，V_1 与 V_2 仍然正交。我们称有限指标的非退化型 φ（或厄米空间 (V, φ)）为**强非退化**，如果正定厄米空间 (V, φ') 是希尔伯特空间。这一性质不依赖于 V的 $\pm$-分解的选择；此外，分别与这些 $\pm$-分解相关联的所有希尔伯特型内积两两等价，见 [11, 引理 2.4]。

如果 φ 是有限指标的非退化型，则总存在一个**典范完备化** (V,φ)，它是有限指标的强非退化型，并且其中 (V,φ) 作为稠密子空间嵌入，见 [40, 命题 3。9]。

3.2. 强非退化厄米空间上的表示。 (V,φ)的一个**自同构** 是一个可逆线性算子 α: $V \to V$，使得 $\varphi(\alpha(x)\ \alpha(y)) = \varphi(x,y)$ 对所有 $x,y \in V$ 均成立。所有自同构构成的群记为 Aut(V,φ)。若 φ 是有限指标的强非退化空间，则 (V,φ) 的每个自同构关于相应的希尔伯特结构都是 V 上的有界线性算子（参见 [11, §2] 和 [22, 命题 9.7]）。给定一个局部紧群 G，线性表示 σ: $G \to$Aut(V,φ) 称为**连续** 的，如果它满足下文列出的等价条件。

命题 3.1。 对于一个有限指标的强非退化厄米空间(V,φ)，局部紧群 G 通过自同构作用于该空间时，下列条件等价。

(i) 作用映射 $G \times V \to V$是连续的。*(ii)* 对每个 $v \in V$，轨道映射 $G \to V$: $g \mapsto gv$ 是连续的。*(iii)* 在 V 中存在一个稠密子集 W，使得对每个 $v \in W$，轨道映射$G \to V$: $g \mapsto gv$ 是连续的。

证明。我们已经提到，G 的每个元素都通过连续算子作用于 V。因此，(i) 与 (ii) 的等价性由 [47, 命题 13.2] 得出。显然，(ii) 蕴含 (iii)。为证明逆命题，不妨假设 $i(\varphi) = i_{-}(\varphi)$，并考虑一个 $\pm$-分解 $V = V_{-} \perp V_{+}$。[22,命题 9.7] 的证明表明，自同构 $f \in$ Aut$(V,\ \varphi)$ 的算子范数可以由其在有限维子空间V_{-}上的限制的范数的连续函数界定。因此，包含于任意固定紧子集中的 G的元素的算子范数是一致有界的。(iii) 到 (ii) 的蕴含关系随即得到。□

从现在起，术语 **表示** 局部紧群 G 在有限指标的强非退化厄米空间上的表示，将用于指连续线性表示。

在本节余下部分，我们假设 φ 是有限指标的强非退化空间。我们的下一个目标是将抽象调和分析中的一些众所周知的事实推广到这一情形。

注意，对于任意 $v \in V$，线性泛函 f_v: $V \to \mathbf{K}$: $x \mapsto \varphi(x,\ v)$ 是连续的。此外，里斯表示定理可以分别应用于 $\pm$ 的分解中的每个直和项，因此 V 上的每个连续线性泛函都具有这种形式。换言之，连续映射 $V \to V^{*}$: $v \mapsto f_v$ 是从 V 到其拓扑对偶 V^{*} 的同构。类似地，可以证明 V 上的每个连续线性算子都有一个 φ-伴随，参见 [39, 命题 5.4] 的证明。

现在设 σ 是局部紧群 G 在厄米空间 $(V,\ \varphi)$ 上的一个表示。表示 σ 自然扩张为代数 $C_c^{\mathbf{K}}(G)$ 的一个 $*$-表示，该代数由连续、紧支撑的 $\mathbf{K}$ 值函数构成。事实上，对于$f \in C_c^{\mathbf{K}}(G)$，算子

$$\sigma(f) = \int_G f(g)\sigma(g)dg$$

与经典的希尔伯特情形一样，通过要求满足以下条件来定义

$$\varphi(v,\sigma(f)w)=\int_G \varphi(v,f(g)\sigma(g)w)dg$$

对所有 v，$w\in V$。容易验证，这确实定义了一个线性表示
$*$-代数

$$C_c^{\mathbf{K}}(G)\to \mathrm{End}(V,\varphi)$$

我们也将其记为 σ。事实上，这可扩展为 G上紧支撑拉东测度的卷积代数。特别地，给定一个紧子群$B\leq G$ 以及 μ_B 在 B上的归一化哈尔测度，将其视为G上的拉东测度，我们在 V上得到一个连续幂等算子 $\sigma(\mu_B)$。

命题 3.2。 设 $\sigma\colon\ G\to \mathrm{Aut}(V,\varphi)$ 是局部紧群 G 在一个有限指标的强非退化厄米空间上的表示，并设 $B\leq G$是一个紧子群。

(i) φ 在 B-不变向量子空间 V^B 上的限制 φ_B 是强非退化的。*(ii)* 算子 $\sigma(\mu_B)$ 在 V^B上作为 φ-正交投影作用。*(iii)* 子空间 V^B 是 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$-不变的。特别地，表示 σ给出一个 $*$-表示 $\sigma_B\colon\ C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)\to \mathrm{End}(V^B,\varphi_B)$。

证明。注意到 μ_B 是幂等且自伴的；因此 $\sigma(\mu_B)$ 也具有相同性质。后者的取值属于 V^B，并且在 V^B 上充当恒等算子。这证明了断言 (ii)。对于 (ii)，我们如下论证。假设 $v\in V^B$ 非零。 φ 的非退化性意味着存在一个向量 $w\in V$，使得 $\varphi(v,w)\neq 0$。因此 $\varphi(\sigma(\mu_B)v,w)=\varphi(v,\sigma(\mu_B)w)$ 非零。因此 φ_B 非退化。此外， V^B 在 V 中是闭的，所以实际上 φ_B 是强非退化的。断言 (iii) 显然成立，因为 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)=\mu_B * C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)*\mu_B$。□

在强非退化厄米空间 (V,φ) 上的表示称为**不可约的**，如果 V 的闭不变子空间只有 $\{0\}$ 和 V。以下结果在联系群G 的不可约表示与卷积代数 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$的不可约表示方面发挥着重要作用。在酉情形下，这一结果众所周知（见 [34, 第 IV 章，定理 2]）。有限指标厄米版本隐含在 [39, 命题 5.4], 的证明中，可通过与酉情形类似的论证得出。

命题 3.3. 设 $\sigma\colon\ G\to \mathrm{Aut}(V,\varphi)$ 是局部紧群 G 在一个有限指标的强非退化厄米空间上的表示，并设 $B\leq G$是一个紧子群。对于每个闭的 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$-子模 $W\leq V^B$，$\sigma(G)W=\bigcup_{w\in W}\sigma(G)w$ 的张成空间的闭包Z 是一个 G-不变子空间，且满足 $Z^B=W$。

特别地，若 $\sigma(G)V^B$ 张成 V 的一个稠密子空间，则 σ 不可约当且仅当 σ_B 不可约。

证明。设 $W\leq V^B$ 是一个非零的闭子空间，且在 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$ 作用下保持不变。设 Z 是 $\sigma(C_c^{\mathbf{K}}(G))W$ 张成空间的闭包。因此， Z 是 V 的一个闭 G-不变子空间。投影 $Z\mapsto Z^B$ 由算子 $\sigma(\mu_B)$ 给出。因此，$\sigma_B(C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B))W=\sigma(\mu_B)\sigma(C_c^{\mathbf{K}}(G))W$ 张成 Z^B 的一个稠密子空间。因此 $W=Z^B$。由此， V^B 的每个闭 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$-子模都可由映射 $Z\mapsto Z^B$ 得到。

现在假设 $\sigma(G)V^B$ 张成 V 的一个稠密子空间。若 W 非零且 σ 不可约，则可知我们刚刚构造的空间 Z 就是整个 V。因此 $W = Z^B = V^B$，从而证实 σ_B 是不可约的。

反过来，假设 σ_B 不可约，并令 $Z \leq V$ 为一个闭的 G-不变子空间。因此，Z^B 是 V^B的一个闭的 σ_B-不变子空间。由不可约性可得$Z^B = \{0\}$ 或 $Z^B = V^B$。

首先假设 $Z^B = \{0\}$。根据命题 3.2，型 φ_B 是强非退化的，因此 $V = V^B \perp (V^B)^\perp$。等式 $Z^B = \{0\}$推出 $Z \leq \ker(\sigma(\mu_B)) = (V^B)^\perp$，从而 $V^B \leq Z^\perp$。由于 Z 是 G-不变的，我们推知 $\sigma(G)V^B$包含于 $Z^\perp$中，鉴于该假设，故 $V \leq Z^\perp$。因此 $Z \leq V^\perp = \{0\}$。

现在假设 $Z^B = V^B$。这意味着 G-不变子空间 Z包含 $\sigma(G)V^B$，因此根据假设有 $Z = V$。所以 σ 不可约。□

3.3. 有限秩的无限维对称空间。 设在负指标为 $p < \infty$、正指标为 $q \geq 1$（可能为 $q = \infty$）的域 $\mathbf{K}$ 上给定一个强非退化厄米空间（V，φ），则所有 p 维子空间 $M_{p,\,q}(\mathbf{K})$ 的集合——其中 φ 的限制是负定的——是一个黎曼对称空间；当 $\dim(V)$ 为无限时，其维数也是无限的。在后一种情况下，$M_{p,\,q}(\mathbf{K})$ 也记作 $X_p(\mathbf{K})$。它带有一个自然的距离函数，使其成为完备的 CAT(0)空间，参见 [23, 推论 2.5]。群 $\mathrm{Aut}(V,\ \varphi)$ 在 $M_{p,\,q}(\mathbf{K})$ 上连续地作用为等距变换。B. Duchesne [22, 23] 对无限维情形下的这些空间进行了系统研究。对于 $p = 1$，它是一个 CAT(-1) 空间；根据 $\mathbf{K}$ 是$\mathbf{R}$ 还是$\mathbf{C}$，分别称为**实** 或**复双曲空间** 。

我们需要回顾一个众所周知的事实：在任意维实双曲空间或复双曲空间上存在无界作用，是 Kazhdan 性质 (T) 的一个障碍。有限维情形参见 [5, 推论 2.7。3] 所给出的证明实际上适用于任意维空间，参见 [16,定理 7.4。3]。

命题 3.4。 设局部紧群 G 在一个（可能是无限维的）实双曲空间或复双曲空间上连续地作用，并且作用由等距变换构成。

(1) 若 G 具有 *(T)* 性质，则该作用有有界轨道，因而存在不动点。*(2)* 若该作用在度量意义下是适当的，则 G 具有 *Haagerup* 性质。

证明。关键在于，实双曲空间或复双曲空间上的距离函数是条件负定核。事实上，有限维情形可由 [28, 推论 7.4] 得出。由于该条件只涉及有限个点，这便推出了任意维情形的结论，参见 [16, 定理 7.4。3]。□

4. Hecke 代数与 Hecke 诱导模

4.1. Iwahori–Hecke 代数。 设 (W, S) 是一个有限秩考克斯特系统，且 $\mathbf{K}$ 为实数域或复数域。给定一个 S-元组 $\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$，其元素均为非零实数，并且 $q_s = q_t$ 若 s 和 t 共轭，则相关的**Iwahori–Hecke 代数** （或简称**Hecke 代数**）是记作 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$、定义在 $\mathbf{K}$ 上的 $*$-代数，其基为 $(e_w)_{w\in W}$，由 W 索引，且其乘法满足

$$e_s e_w = \begin{cases} e_{sw} & \text{if } \ell(sw) > \ell(w), \\ q_s e_{sw} + (q_s - 1)e_w & \text{if } \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

对所有 $s \in S$ 和 $w \in W$，参见 [19, §19。1] 以及 [9, 第 IV 章，习题 23]。对合 $*$通过如下赋值定义

$$e_w^* = e_{w^{-1}}.$$

它由 $(e_s)_{s\in S}$ 生成。该生成集连同以下关系给出了 Hecke 代数 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$ 的一个表示：

二次关系

$$e_s^2 = (q_s - 1)e_s + q_s$$

对所有 $s \in S$，以及**Artin 关系**

$$(e_s e_t)^r = (e_t e_s)^r \qquad \text{if } m_{s,t} = 2r$$
$$(e_s e_t)^r e_s = (e_t e_s)^r e_t \qquad \text{if } m_{s,t} = 2r+1$$

对所有 $s,\ t \in S$ 其中 $m_{s,\ t}$ 为有限（见 [9, 第 IV 章第 2 节，习题 23]）。

设 $w \in W$。将 w写成约化词 $w = s_1 \dots s_n$，其中 $s_i \in S$。置 $q_w = q_{s_1} \dots q_{s_n}$。鉴于考克斯特群中字问题的解，$q_w$ 的值与所选择的约化词无关。通过置 e_w 为以下形式，对基向量进行重新归一化将会很方便

$$T_w = \frac{1}{q_w} e_w.$$

根据 [19, 引理 19.1.2], ，对于所有 $u,\ v \in W$ 且 $\ell(uv) = \ell(u)+\ell(v)$，有 $T_u * T_v = T_{uv}$。由 [19, 命题 19.1.1 和引理 19.1.5], 可得

$$T_w T_s = \begin{cases} T_{ws} & \text{if } \ell(ws) > \ell(w), \\ q_s^{-1} T_{ws} + (1 - q_s^{-1}) T_w & \text{if } \ell(ws) < \ell(w) \end{cases} \tag{1}$$

对所有 $s \in S$ 和 $w \in W$均成立。特别地，归一化二次关系给出

$$T_s^2 = q_s^{-1} T_e + (1 - q_s^{-1}) T_s.$$

4.2. Hecke 代数与卷积。 现在设 X 是一个有限秩、厚的局部有限建筑，其类型为 (W, S)。从现在起，我们将不再使用 X 的 CAT(0)度量实现，而只将 X 视为一个带有 W值距离 δ的室集。因此，我们将 X 与其室集 Ch(X)等同。同样，我们将任意余类 R 与 Ch(R)等同。

我们假设 X 是**半正则**的，也就是说，对每个 $s \in S$，X 的所有s面板都具有相同的基数。注意，若 Aut(X)在室上传递地作用，则该条件自动成立，因为此时 Aut(X)的作用对所有 $s \in S$的s面板都是传递的。于是我们定义 $q_s \in \mathbf{N}$ 为这样一个数：所有 s面板都包含 $q_s + 1$ 个室。元组$\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 称为半正则建筑 X的**厚度向量**。

如上一节所述，令$\mathbf{K}$ 为实数域或复数域。以下引理回顾一个众所周知的事实：$C_c^{\mathbf{K}}(X)$上的有限支撑$\mathbf{K}$值函数空间自然具有右$\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$-模的结构，见 [43]。给定一个室 $c \in X$，记 $\mathbf{1}_c$ 为其示性函数$\mathbf{1}_{\{c\}}$：$X \to \mathbf{K}$。我们不使用符号 δ，因为它已经被用于表示 X上的Weyl距离。对于$\mathbf{K} = \mathbf{C}$，在不会引起混淆时，通常省略指数 $\mathbf{K}$。

引理 4.1. 设 $\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 是 X 的厚度向量。给定 $x \in X$ 和$s \in S$，我们定义

$$\mathbf{1}_x \cdot e_s = \sum_{y\in X, \delta(x,y)=s} \mathbf{1}_y.$$

这些赋值赋予 $C_c^{\mathbf{K}}(X)$ 一个右 $\mathbf{K_q}[W]$-模结构。

证明。由于函数 $(\mathbf{1}_x)_{x\in X}$ 构成 $C_c^{\mathbf{K}}(X)$ 的一组基，给定的赋值在空间$C_c^{\mathbf{K}}(X)$上定义了由 $(e_s)_{s\in S}$ 生成的自由结合 $\mathbf{K}$-代数的右作用。我们需要验证 $\mathbf{K_q}[W]$ 的定义关系得到满足。我们注意到

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_x \cdot e_s)\cdot e_s &= \sum_{y\in X,\delta(x,y)=s} \mathbf{1}_y \cdot e_s \\ &= \sum_{y\in X,\delta(x,y)=s}\ \sum_{z\in X,\delta(y,z)=s} \mathbf{1}_z \\ &= q_s\mathbf{1}_x + (q_s-1)\sum_{z\in X,\delta(x,z)=s} \mathbf{1}_z \\ &= q_s\mathbf{1}_x + (q_s-1)\mathbf{1}_x\cdot e_s \\ &= \mathbf{1}_x\cdot e_s^2,\end{aligned}$$

因此二次关系得到满足。

对于 $s\neq t\in S$ 满足 $m_{s,t}$ 有限的情形，令 w_0 为 $\langle s,t\rangle$ 中的最长词。再令$f_{s,t}=e_se_t\dots$为从左侧以 e_s 开头的 $m_{s,t}$ 个生成元的乘积，并类似地定义 $f_{t,s}=e_te_s\dots$。由定义可知，对于所有 $x\in X$，我们都有

$$\mathbf{1}_x\cdot f_{s,t}=\sum_{y\in X,\delta(x,y)=w_0}\mathbf{1}_y=\mathbf{1}_x\cdot f_{t,s},$$

因此 Artin 关系也得到满足。所需断言得证。 □

现在令 G 为一个局部紧群，通过自同构在 X 上真、连续且传递地作用。固定一个基室 c_0。G的传递性意味着，它由包含 c_0 的各面板的稳定子生成，而这些稳定子全都是紧开子群。特别地，G 是幺模的。

令 $B=\mathrm{Stab}_G(c_0)$，它也是 G 的一个紧开子群。我们通过规定 $m(B)=1$，将 m 在 G 上的哈尔测度归一化。轨道映射在陪集空间 G/B 与 X 之间建立了一一对应。因此，空间 $C_c^{\mathbf{K}}(X)$ 可识别为 $C_c^{\mathbf{K}}(G)$ 的子空间 $C_c^{\mathbf{K}}(G/B)$，其由右-B-不变函数组成。我们将赋有卷积乘积的 $C_c^{\mathbf{K}}(G)$ 视为一个 $\mathbf{K}$-代数，并配备由下式定义的标准对合 $f\mapsto f^*$

$$f^*(x)=\bar{f}(x^{-1}).$$

由双-B-不变函数组成的子代数记作 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$。对于每个 $w\in W$，我们定义

$$D(w)=\{g\in G\mid \delta(c_0,gc_0)=w\}.$$

由于 B 固定 c_0，可知 $D(w)$ 是双 B-陪集的并。换言之，示性函数 $\mathbf{1}_{D(w)}$ 是双-B-不变的。建筑 X 局部有限，因此有 $\mathbf{1}_{D(w)}\in C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$。此外，我们有

$$m(D(w))=q_w$$

对于所有 $w\in W$，由于哈尔测度 m 已按如下方式归一化：$m(B)=1$。

根据 [19, 引理 19.1。5], 映射

$$\mathbf{K_q}[W] \to C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B) : e_w \mapsto \mathbf{1}_{D(w)}$$

将 e_w 映射为示性函数 $\mathbf{1}_{D(w)} \in C_c^{\mathbf{K}}(G)$，建立了 Hecke 代数 $\mathbf{K_q}[W]$ 与 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$ 的一个子代数 J 之间的同构。若对于每个 $w \in W$，集合 $D(w)$ 是一个单独的B-双陪集，即 BwB，则称 G 在 X 上的作用是 **Weyl-传递** 的。在这种情况下，对于所有 $w \in W$，都有 $m(BwB) = q_w$，且映射 $\mathbf{K_q}[W] \to C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$ 是满射，因此 $\mathbf{K_q}[W]$ 与 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$ 同构。

卷积乘积自然地赋予 K-向量空间 $C_c^{\mathbf{K}}(G/B)$ 一个左 $C_c^{\mathbf{K}}(G)$-模结构和一个右 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$-模结构。由于 G/B 可以与 X 进行对应，空间 $C_c^{\mathbf{K}}(G/B)$ 和 $C_c^{\mathbf{K}}(X)$ 自然同构。按照上述方式，将 $\mathbf{K_q}[W]$ 视为 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$ 的子代数 J，便可在此情形下得到引理 4.1。

4.3. 厄米模与赫克诱导。设 (V_0, φ_0) 是 $\mathbf{K}$ 上的非退化厄米空间，并且

$$\rho\colon \mathbf{K_q}[W] \to \mathrm{End}(V_0, \varphi_0)$$

是 $*$-代数的线性表示。因此，ρ 是代数同态，满足对于所有 $a \in \mathbf{K_q}[W]$，$\rho(a^*) = \rho(a)^*$。我们称 (V_0, φ_0) 为 **厄米 $\mathbf{K_q}[W]$- 模**。作用映射 ρ 通常将被省略。

设 X 是一个类型为 (W, S) 的局部有限建筑，并设 $\mathbf{q}$ 是其厚度向量。在这种情况下，我们将与厄米 $\mathbf{K_q}[W]$-模 (V_0, φ_0) 相关联的**Hecke 诱导模** 定义为模的张量积

$$\mathrm{ind}(V_0) = C_c^{\mathbf{K}}(X) \otimes_{\mathbf{K_q}[W]} V_0,$$

其中 $\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 是 X 的厚度向量（参见引理 4.1，了解其右侧 $\mathbf{K_q}[W]$-模结构 $C_c^{\mathbf{K}}(X)$）。为定义 $\mathrm{Aut}(X)$ 的线性左作用，考虑向量空间的张量积会很方便

$$\mathscr{E} = C_c^{\mathbf{K}}(X) \otimes V_0.$$

因此，诱导模是 $\mathscr{E}$ 的一个商。全自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 通过线性变换作用于 $\mathscr{E}$：对所有 $c \in \mathrm{Ch}(W)$ 和 $v \in V_0$，元素 $g \in \mathrm{Aut}(X)$ 将 $\mathbf{1}_c \otimes v$ 映射为 $\mathbf{1}_{g(c)} \otimes v$。直接验证可知，该作用保持商映射 $\mathscr{E} \to \mathrm{ind}(V_0)$ 的核。因此，它在诱导模 $\mathrm{ind}(V_0)$ 上定义了一个由 $\mathrm{Aut}(X)$ 通过线性变换给出的作用。

型 φ_0 自然地在诱导模上诱导出一个厄米形式。为定义它，我们首先考虑 φ 在 $\mathscr{E}$ 上定义的半双线性型，其定义为

$$\varphi(\mathbf{1}_{c_1} \otimes v_1, \mathbf{1}_{c_2} \otimes v_2) = \varphi_0(T_{\delta(c_2,c_1)}v_1, v_2)$$

对所有 c_1，$c_2 \in \mathrm{Ch}(X)$ 以及 v_1，$v_2 \in V_0$。以下结果保证 φ 可以规范地下降为 $\mathrm{ind}(V_0)$ 上的厄米形式。我们将其记为 $\mathrm{ind}(\varphi_0)$；在不会引起混淆时，也记为 φ，并称其为**诱导形式**。由于 $\mathrm{Aut}(X)$ 保持 Weyl距离不变，该作用保持 $\mathscr{E}$ 上的形式 φ，因而也保持诱导模 $\mathrm{ind}(V_0)$ 上的诱导形式。

引理 4.2。对于所有 $x \in X$、$v \in V_0$ 和 $a \in \mathbf{K_q}[W]$，元素

$$\mathbf{1}_x \otimes av - (\mathbf{1}_x \cdot a) \otimes v$$

属于 φ 的根基。

证明。只需在 $a = T_s$ 中验证该断言，其中 $s \in S$。设 $y \in X$ 和 $w \in V_0$。我们有

$$\varphi(\mathbf{1}_x \otimes T_s v, \mathbf{1}_y \otimes w) = \varphi_0(T_{\delta(y,x)} T_s v, w).$$

鉴于（1），后者等于

$$\varphi_0(T_{\delta(y,x)s} v, w)$$

若 $\ell(\delta(y,\ x)s) > \ell(\delta(y,\ x))$，则为

$$q_s^{-1}\varphi_0(T_{\delta(y,x)s} v, w) + (1 - q_s^{-1})\varphi_0(T_{\delta(y,x)} v, w)$$

若 $\ell(\delta(y,\ x)s) < \ell(\delta(y,\ x))$。

设 x' 为包含 x的室 y 在 s-面板上的投影，记作 σ。此外，我们有

$$\begin{aligned}\varphi((\mathbf{1}_x \cdot T_s) \otimes v, \mathbf{1}_y \otimes w) &= q_s^{-1} \sum_{z \in \sigma, z \neq x} \varphi(\mathbf{1}_z \otimes v, \mathbf{1}_y \otimes w) \\ &= q_s^{-1} \sum_{z \in \sigma, z \neq x} \varphi_0(T_{\delta(y,z)} v, w).\end{aligned}$$

由于 σ 包含 $q_s + 1$ 个室，右侧等于

$$\varphi_0(T_{\delta(y,x)s} v, w)$$

若 $x' = x$，且到

$$q_s^{-1}\varphi_0(T_{\delta(y,x)s} v, w) + q_s^{-1}(q_s - 1)\varphi_0(T_{\delta(y,x)} v, w)$$

若 $x' \neq x$。

由于 $x' = x$ 当且仅当 $\ell(\delta(y,x)s) > \ell(\delta(y,x))$，我们可推得

$$\varphi(\mathbf{1}_x \otimes T_s v, \mathbf{1}_y \otimes w) = \varphi((\mathbf{1}_x \cdot T_s) \otimes v, \mathbf{1}_y \otimes w)$$

对所有 $x, y \in X$, $s \in S$和 $v, w \in V_0$均成立。引理得证。 □

以下基本观察说明了 Hecke 诱导模何时是平凡表示的倍数。

引理 4.3. 设 (V_0, φ_0) 是一个非退化 *Hermitian* $\mathbf{K_q}[W]$-模，且 X 是一个局部有限、半正则、类型为(W, S) 、厚度向量为$\mathbf{q}$的建筑。若 T_s 对所有 $s \in S$都在 V_0 上作为恒等算子作用，则诱导模$(\mathrm{ind}(V_0),\mathrm{ind}(\varphi_0))$ 带有平凡的$\mathrm{Aut}(X)$作用。此外，商$\mathrm{ind}(V_0)/\mathrm{Rad}(\mathrm{ind}(\varphi_0))$ 与 V_0同构。

证明。根据假设，对于所有 $x,\ y \in X$和$v,\ w \in V_0$，我们有 $\varphi(\mathbf{1}_x \otimes v,\ \mathbf{1}_y \otimes w) = \varphi_0(v,\ w)$。选取一个基室 $c \in X$。由此可知，对于所有 $x \in X$，向量 $(\mathbf{1}_c - \mathbf{1}_x) \otimes v$ 属于 $\mathrm{Rad}(\varphi)$。这意味着，商映射 $\mathscr{E} \to \mathrm{ind}(V_0)/\mathrm{Rad}(\mathrm{ind}(\varphi_0))$ 在子空间 $\mathbf{1}_c \otimes V_0$ 上的限制是满射的。 φ_0 是非退化的这一假设意味着它还是单射的。所有所需断言均得证。□

在 X 为局部有限且 $\mathrm{Aut}(X)$ 包含一个闭子群G，其在 X上传递时，Hecke 诱导模还有另一种自然实现。事实上，正如 §4.2中所回顾的，我们有同构 $\mathbf{K_q}[W] \to J$ 由以下赋值定义： $e_w \mapsto \mathbf{1}_{D(w)}$ 对所有 $w \in W$均成立。我们定义一个映射

$$P\colon C_c^{\mathbf{K}}(G) \to J : f \mapsto \sum_{w \in W} \frac{1}{q_w} \langle f, \mathbf{1}_{D(w)} \rangle \mathbf{1}_{D(w)}.$$

因此，f 在 $g \in D(w)$ 处的值等于 f 在 $D(w)$ 上各值的平均值。

引理 4.4。设 X 是一个局部有限、半正则的建筑，其类型为 (W, S)，厚度向量为 $\mathbf{q}$，且 $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ 是一个传递作用的闭子群。再设 (V_0, φ_0) 是一个厄米 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$-模。

(i) 诱导模 $\mathrm{ind}(V)$ 与 $C_c^{\mathbf{K}}(G) \otimes_J V_0$ 同构。*(ii)* 诱导形式 $\mathrm{ind}(\varphi_0)$ 与 $C_c^{\mathbf{K}}(G) \otimes_J V_0$ 上由下式定义的形式一致：

$$\varphi(f_1 \otimes v_1, f_2 \otimes v_2) = \varphi_0(P(f_2^* * f_1)v_1, v_2).$$

(iii) 若 G 是 *Weyl*-传递的，则 $J = C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$，且有

$$P(f) = \mathbf{1}_B * f * \mathbf{1}_B$$

对所有 $f \in C_c^{\mathbf{K}}(G)$。

证明。通过上文回顾的同构，我们将 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$ 与 J 识别。特别地，$T_e = \mathbf{1}_{D(e)} = \mathbf{1}_B$。

由于 G 是室传递的，左 G-模 $C_c^{\mathbf{K}}(X)$ 和 $C_c^{\mathbf{K}}(G/B)$ 自然同构。此外，该自然同构还保持右 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$-模的结构。断言 (i) 得证。

为了证明断言 (ii)，只需检验左 B-陪集的示性函数之间的等式，例如 $f_i = \mathbf{1}_{g_i B}$ 满足 $g_1, g_2 \in G$ 的情形，因为这些函数构成 $C_c^{\mathbf{K}}(G/B)$ 的一组基。我们有 $f_2^* * f_1 = m(Bg_2^{-1}g_1B)^{-1}\mathbf{1}_{Bg_2^{-1}g_1B}$。令 $w = \delta(c_0, g_2^{-1}g_1(c_0)) = \delta(g_2(c_0), g_1(c_0))$。由于 $Bg_2^{-1}g_1B \subseteq D(w)$，我们有

$$\begin{aligned} P(f_2^* * f_1) &= \frac{1}{q_w} \frac{1}{m(Bg_2^{-1}g_1B)} \Big(\int_{D(w)} \mathbf{1}_{Bg_2^{-1}g_1B}(x)dx \Big) \mathbf{1}_{D(w)} \\ &= \frac{1}{q_w} \mathbf{1}_{D(w)} \\ &= T_w. \end{aligned}$$

因此我们得到 $\varphi_0(P(f_2^* * f_1)v_1, v_2) = \varphi_0(T_{\delta(g_2(c_0), g_1(c_0))}v_1, v_2)$，这证实了 (ii)。

对于 (iii)，注意到对所有 $g \in D(w)$，我们都有

$$\mathbf{1}_B * f * \mathbf{1}_B(g) = \int_B \int_B f(xgy)dxdy = \frac{1}{m(BwB)} \int_{BwB} f(h)dh.$$

断言成立，因为当 G 是 Weyl-传递时，我们有 $BwB = D(w)$。 □

4.4. 诱导形式的负指标。 今后我们假设 (V_0, φ_0) 是一个非退化的 Hermitian $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$-模，并且其负指标

$$p = i_-(\varphi_0)$$

是有限的。一般而言，诱导形式 $\mathrm{ind}(\varphi_0)$ 可能是退化的。我们的目标是找出一些条件，以确保其负指标也等于 p。

我们保留 §4.3 中的记号。给定一个子集 $Y \subseteq X$，我们进一步将 $\mathscr{E}_Y$ 定义为 $C_c^{\mathbf{K}}(Y) \otimes V_0$ 在 $\mathscr{E}$ 中的自然像，并将其视为 $\mathscr{E}$ 的子空间。将 φ 限制到 $\mathscr{E}_Y \times \mathscr{E}_Y$ 所得到的限制记为 φ_Y。

命题 4.5. 设 $Y \subseteq X$ 是一个非空子集，R 是一个余类，使得对于所有 $y \in Y$，我们有

$$\mathrm{proj}_R(y) \in Y.$$

如果 $i_-(\varphi_0) = i_-(\varphi_R) = i_-(\varphi_Y) = p < \infty$，那么 $i_-(\varphi_{R\cup Y}) = p$。

证明。我们考虑由赋值 L 在 $\mathscr{E}_{R\cup Y}$ 上定义的线性算子 s

$$\mathbf{1}_c \otimes x \mapsto \begin{cases} \mathbf{1}_c \otimes x & \text{if } c \in R \\ \mathbf{1}_c \otimes x - \mathbf{1}_{c'} \otimes T_{\delta(c',c)} x & \text{if } c \in Y \setminus R, \end{cases}$$

对所有 $c \in R \cup Y$ 和 $x \in V_0$ 均成立，其中 $c' =$ 投影$_R(c)$。注意到 L 是可逆的。此外，它在 $\mathscr{E}_R$ 上充当恒等算子。令 $\mathscr{F} = L(\mathscr{E}_{Y\setminus R})$。由于 $\mathscr{E}_{R\cup Y} \cong \mathscr{E}_R \oplus \mathscr{E}_{Y\setminus R}$，我们有 $\mathscr{E}_{R\cup Y} \cong \mathscr{E}_R \oplus \mathscr{F}$。

我们断言 $\mathscr{E}_R \perp \mathscr{F}$。事实上，给定 $c \in Y \setminus R$、$d \in R$ 和 $x, y \in V_0$，令 $c' =$ 投影$_R(c)$，则得到

$$\begin{aligned} \varphi(L(\mathbf{1}_c \otimes x), \mathbf{1}_d \otimes y) &= \varphi(\mathbf{1}_c \otimes x - \mathbf{1}_{c'} \otimes T_{\delta(c',c)} x, \mathbf{1}_d \otimes y) \\ &= \varphi_0(T_{\delta(d,c)} x, y) - \varphi_0(T_{\delta(d,c')} T_{\delta(c',c)} x, y) \\ &= \varphi_0(T_{\delta(d,c)} x, y) - \varphi_0(T_{\delta(d,c')} T_{\delta(c',c)} x, y) \\ &= \varphi_0(T_{\delta(d,c)} x, y) - \varphi_0(T_{\delta(d,c)} x, y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因为 $\mathsf{dist}(d, c) = \mathsf{dist}(d, c') + \mathsf{dist}(c', c)$，这是因为 $c' =$ 投影$_R(c)$。这就证明了该断言。

我们刚刚得到了一个正交分解 $\mathscr{E}_{R\cup Y} = \mathscr{E}_R \perp \mathscr{F}$。这些假设意味着 $R \cap Y$ 包含所有满足 $y \in Y$ 的投影投影$_R(y)$。这意味着 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{E}_Y$ 的子空间，从而我们得到 $\mathscr{E}_Y = \mathscr{E}_{R\cap Y} \perp \mathscr{F}$。此外，这也意味着 $R \cap Y$ 非空。因此，它包含一个满足 $c \in R \cap Y$ 的子空间 $\mathscr{E}_{\{c\}}$。赋予该子空间以 φ 的限制后，它与 (V_0, φ_0) 同构。因此 $p = i_-(\varphi_0) \leq i_-(\varphi_{R\cap Y})$。根据假设，我们有

$$p = i_-(\varphi_Y) = i_-(\varphi_{R\cap Y}) + i_-(\varphi|_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}}) \geq p + i_-(\varphi|_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}}).$$

因此，$\varphi|_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}}$ 的负指标为零。换言之，$\varphi|_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}}$ 是半正定的。

再次利用该断言，假设 $i_-(\varphi_R) = p$ 现在得到

$$i_-(\varphi_{R\cup Y}) = i_-(\varphi_R) + i_-(\varphi|_{\mathscr{F}\times\mathscr{F}}) = p + 0 = p,$$

正如所需。 □

下面的辅助事实将使我们能够检验命题 φ_R 中的条件4.5 是否由球形余类满足。

引理 4.6. 设 X 是一个球形类型的局部有限建筑spherical (W, S)，其自同构群是传递的，且其厚度向量为$\mathbf{q}$。再设 $\rho: \mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W] \to \mathrm{End}(V_0, \varphi_0)$ 是 $*$-代数的一个线性表示。若型 φ_0 是正定的，则诱导形式 $\mathrm{ind}(\varphi_0)$ 是半正定的。

证明中，我们将借助 [46, 引理 1.7]，它保证了赋予 C^*-代数诱导模的诱导形式是半正定的。如 [46, 定义 1.3], 所述，给定一个 C^*-代数 A 和一个 C^*-子代数 J，若映射 $P\colon A \to J$ 是一个连续、正的投影，且对所有 $a \in A$ 和 $b \in J$ 均有 $P(ab) = P(a)b$，则称其为**条件期望**。一个典型例子是映射 $P(a) = pap$，其中 $p \in A$ 是一个自伴幂等元，且 $J = pAp$。

引理 4.7. 设 A 是有限维的 C^*-代数，且 J 是一个 C^*-子代数。假设 A 配备了内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，使其成为希尔伯特代数（见 [21, A.54]）。那么，正交投影 $A \to J$ 是一个条件期望。

证明。首先注意，对所有 $x \in J$ 和 $y \in J^\perp$，都有 $xy \in J^\perp$：事实上，对所有 $z \in J$，都有

$$\langle z, xy\rangle = \langle x^* z, y\rangle = 0$$

因为 $x^* z \in J$。接下来注意到，$J^\perp$是 $*$-不变的，因为根据希尔伯特代数的定义，对所有$x, y \in A$，都有 $\langle x, y\rangle = \langle y^*, x^*\rangle$。由此可得，对所有 $x \in J$ 和$y \in J^\perp$，也有 $yx \in J^\perp$。

现在令 $P\colon A \to J$ 为正交投影。给定 $a \in A$，令 $a = a_0 + a_1$为 a按照 $A = J \oplus J^\perp$ 的分解。对所有 $b \in J$，我们有

$$P(ab) = P(a_0 b) + P(a_1 b) = P(a_0 b) = a_0 b = P(a)b$$

因为 $a_1 b \in J^\perp$ 是上文所作的初步观察。

剩下需要证明的是 P 为正元。由于 J 和 $J^\perp$ 均为 $*$-不变的，对所有 $a \in A$，我们有 $P(a)^* = P(a^*)$。现在假设 $a \in A$为正元。因此，$P(a)$是自伴的；为了证明 $P(a)$为正元，只需证明由左乘 $P(a)$定义的有限维代数 J 上的算子的特征值均非负。于是，令 $x \in J \setminus \{0\}$ 且 $\lambda \in \mathbf{R}$ 满足$P(a)x = \lambda x$。我们已经看到 $P(ax) = P(a)x$。令 $y = ax - P(ax) \in J^\perp$，并利用 a 为正元，我们注意到

$$0 \leq \langle ax, x\rangle = \langle P(ax) + y, x\rangle = \langle \lambda x + y, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle.$$

这证实了 $\lambda \geq 0$，从而证明 $P(a)$ 是正元。 □

引理的另一种更具概念性的证明，可以由希尔伯特代数内积是由忠实迹诱导这一事实得出：事实上，该断言可由保迹条件期望作为正交投影的标准实现推出 [**2**, 定理 9.1.2 和注记 9.1。3]。

引理的证明 4.6。胞腔传递性意味着 $\mathbf{K}_\mathbf{q}[W]$ 同构于子代数 J，它属于 $C_c(G)$：如 §4.2中所回顾的，同构 $\mathbf{K}_\mathbf{q}[W] \to J$ 由以下赋值定义 $e_w \mapsto \mathbf{1}_{D(w)}$ 对所有 $w \in W$。

由于 G 是有限的，代数 $C_c(G) = \ell^2(G)$ 关于型 $\langle f, g\rangle = \int_G f(x)\bar{g}(x)dx$ (见 [**21**, §13.10.1])。此外，J是一个子代数，其标准正交基由以下向量给出

$$U_w = q_w^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{D(w)}$$

对所有 $w \in W$ （参见 [**19**, §19.2]）。

注意，映射 $P\colon C_c(G) \to J : f \mapsto \frac{1}{q_w}\langle f, \mathbf{1}_{D(w)}\rangle \mathbf{1}_{D(w)}$ 在 §4.3中定义，与

$$P\colon C_c(G) \to J : f \mapsto \sum_{w \in W} \langle f, U_w\rangle U_w.$$

特别地，P 是相对于型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$的 正交投影到 J 上。由引理 4.7，映射 P 是一个条件期望。因此，该引理在复数域上的结论可由 [**46**, 引理 17]得出。在实数域上的陈述可通过限制标量得到。 □

我们现在可以证明主要结果了，该结果在引言中被表述为定理 F 。为方便读者，我们在此重述其内容。

定理 4.8。设 X 是一个厚、局部有限、半正则的W $S(W,S)$型建筑，其所有球形余类的自同构群均为传递群。设$\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 为其厚度向量，且(V_0, φ_0) 是一个非退化 *Hermitian*$\mathbf{K_q}[W]$-模。

假设 $i_-(\varphi_0) = p < \infty$。若对每个球形子集 $J \subset S$，都存在一个p维子空间 U_J，它属于 V_0，并且对所有 $s \in J$，均由 $T_s = q_s^{-1}e_s$ 逐点固定；此外，φ_0 在该子空间上的限制为负定，则 $i_-(\mathrm{ind}(\varphi_0)) = p$。

证明。我们首先断言，对每个球形剩余 R，型 φ_R 在 $\mathscr{E}_R$ 上的负指标为 p。

令 $J \subseteq S$ 为 R的类型，H_J 为由$\mathbf{K_q}[W]$ 中的$\{T_s \mid s \in J\}$生成的子代数。因此，V_0是一个 Hermitian H_J-模，而 $\mathscr{E}_R$是相应的诱导模。我们有 HermitianH_J-模的正交直和分解 $V_0 = U_J \perp U_J'$，其中 U_J 是由假设所给出的 p维子空间。我们知道，φ_0 在 U_J 上的限制为负定，因此其在 U_J'上的限制为正定。

H_J 不变分解 $V_0 = U_J \perp U_J'$给出了空间 $\mathscr{E}_R = C_c(R) \otimes V_0$的正交和分解 $\mathscr{E}_R = \mathscr{E}_J \perp \mathscr{E}'_J$，该分解在 Aut($R$) 的自然作用下保持不变。我们将型 φ 在子空间 $\mathscr{E}_R$、$\mathscr{E}_J$和 $\mathscr{E}'_J$上的限制分别记为 φ_R、φ_J 和 φ'_J。

由于 T_s 的每个生成元 H_J 在 U_J上都以恒等算子作用，因此由引理 4.3 可知，商 $\mathscr{E}_J/\mathrm{Rad}(\varphi_J)$ 同构于 U_J，且诱导的Aut(R)作用是平凡的。特别地，我们有 $i_-(\varphi_J) = i_-(\varphi_0) = p$。

现在考虑 H_J-模 U'_J。我们将群 Aut(R) 的 Hecke 诱导模记为 ind(U'_J)。由引理 4.2，商映射 $\mathscr{E}'_J \to$ind(U'_J) 的核包含于 φ_R在 $\mathscr{E}'_J$上的限制 φ'_J的根基中。特别地，φ'_J 的负指标与 ind(U'_J) 上的诱导形式的负指标相同。由于 φ_0在 U'_J上限制为正定型，根据引理 4.6，ind(U'_J) 上的诱导形式是半正定的。因此，φ'_J是半正定的。于是 $i_-(\varphi_R) = i_-(\varphi_J) + i_-(\varphi'_J) = p + 0 = p$，这证实了该断言。

现在我们考虑由命题 $(R_n)^{n\geq 0}$ 2.5 给出的球形余类序列。对于每个 $n \geq 0$，我们令 $Y_n = \bigcup_{k=0}^{n} R_k$。由于 $Y_0 = R_0$ 是一个球形剩余，限制 φ_{Y_0} 根据上述断言具有负指标 p。由此可通过对n 作归纳，得到限制 φ_{Y_n} 具有负指标 p 对所有 n均成立：事实上，由命题 4.5给出归纳步骤，其假设由命题 2.5与上述断言结合可知均已满足。结论得证。□

将 $p = 0$代入后，我们得到以下推论，它推广了引言中的定理A 。

推论 4.9。设 X，(W, S) 和 $\mathbf{q}$ 如定理 4.8中所述。设 (V_0, φ_0) 是一个 *Hermitian* $\mathbf{K_q}[W]$-模。

若 φ_0 是正定的，则诱导形式 φ 是半正定的。

推论 B 和 C 的证明。首先注意到映射 $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^B$ 根据命题 3.3，保持表示的不可约性。

下面证明每个不可约酉 Hecke 模都可以实现。事实上，给定一个厄米 $\mathbf{C_q}[W]$-模 (V_0, φ_0)，且 φ_0 正定，我们便得到一个酉表示 σ，它作用于 G 诱导模 $\mathcal{V}$ 的典范完备化 $\mathrm{ind}(V_0)$ 除以 $\mathrm{ind}(\varphi_0)$的根基所得的空间上。根据命题 3.1，该表示是连续的，因为 $\mathcal{V}$ 包含

一组稠密向量，其在 G 中的稳定子是开集。由命题 3.3可知，若 V_0 不可约，则 σ 也不可约，且相应的表示作用于$\mathbf{C_q}[W] \cong C_c(B\backslash G/B)$ 在 $\mathcal{V}^B$ 上同构于 V_0。所需结论随即得出。□

4.5. 几何 Hecke 模。 给定一个考克斯特系统 (W,S)，群W 在维数为$|S|$ 的实向量空间 $\bigoplus_{s\in S}\mathbf{R}\alpha_s$ 上有一个忠实线性表示，并保持一个对称双线性型 φ_{T}，该型称为**蒂茨形式**，定义如下

$$\varphi_{\mathrm{T}}(\alpha_s,\alpha_t) = -\cos(\frac{\pi}{m_{s,t}})$$

对所有的 $s,t\in S$，其中 $m_{s,t}$ 是 st 的阶，参见 [9, 第 V 章第 4] 节。该表示称为 W的**几何表示**。

与前文一样，我们用 $\mathbf{K}$ 表示实数域或复数域，并令$\mathbf{q}$ 为由$\mathbf{K}$中元素组成的S元组。Hecke 代数 $\mathbf{K_q}[W]$ 可视为群代数 $\mathbf{K}[W]$的一种变形；后者与参数为 $q_s=1$（对所有 s而言）所对应的 Hecke 代数同构。对于任意的$\mathbf{q}$，代数$\mathbf{K_q}[W]$ 也在$\mathbf{K}$向量空间 $V_{\mathrm{g}}=\bigoplus_{s\in S}\mathbf{K}\alpha_s$上有线性表示。为定义该表示，我们假设对所有 $s\neq t$，均有 $m_{s,t}\in\{2,3,4,6,8,\infty\}$。如果 W 是厚的局部有限建筑的 Weyl 群，那么根据有限广义多边形的阶数所受的众所周知的限制，后一条件自动成立，参见 [29]。

我们假设元组 $\mathbf{q}=(q_s)_{s\in S}$ 由正实数组成。对于所有 $s,t\in S$满足 $m_{s,t}=\infty$的情形，我们选择一个标量 $\mu_{s,t}\in\mathbf{K}$，使得 $\mu_{t,s}=\mu_{s,t}$。

对于所有 $s,t\in S$，我们令

$$\varepsilon_{s,t}=\begin{cases}-1 & \text{if } s=t\\ 0 & \text{if } m_{s,t}=2\\ \frac{\sqrt{q_s}}{1+q_s}=\frac{\sqrt{q_t}}{1+q_t} & \text{if } m_{s,t}=3\\ \sqrt{\frac{q_s+q_t}{(1+q_s)(1+q_t)}} & \text{if } m_{s,t}=4\\ \sqrt{\frac{q_s+q_t+\sqrt{q_sq_t}}{(1+q_s)(1+q_t)}} & \text{if } m_{s,t}=6\\ \sqrt{\frac{q_s+q_t+\sqrt{2q_sq_t}}{(1+q_s)(1+q_t)}} & \text{if } m_{s,t}=8\\ \mu_{s,t} & \text{if } m_{s,t}=\infty.\end{cases} \tag{2}$$

注意

$$\varepsilon_{s,t}=\left(\frac{q_s+q_t+2\sqrt{q_sq_t}\cos(2\pi/m_{s,t})}{(q_s+1)(q_t+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

如果 $m_{s,}$ {3、4、 6、8}。

我们在空间 $V_{\mathrm{g}}=\bigoplus_{s\in S}\mathbf{K}\alpha_s$上定义一个对称双线性形式 φ_{g}，称为**几何形式**，定义为

$$\varphi_{\mathrm{g}}(\alpha_s,\alpha_t)=-\varepsilon_{s,t}$$

对所有 $s,t\in S$均成立。根据定义，它是一个厄米形式。当 (W,S) 为 **2-球形**（即 $m_{s,t}<\infty$ 对所有 $s,t\in S$均成立）时，它是典范定义的。一般而言，它取决于标量 $\mu_{s,t}$的选择。

注意，如果对所有 s 都有 $q_s=1$，并且对所有 s 都有 $_t=1$， t 其中 $m_{s,\ t}=\infty$，则型 φ_{g} 与蒂茨形式一致。

对于每个子集 $J \subset S$，令 $V_J = \langle \alpha_s \mid s \in J \rangle$，并将 φ_{g} 在 $V_J \times V_J$ 上的限制记为 φ_J。如果 $W_J = \langle J \rangle$ 是有限的，则称 J 为**球形**。下面的观察将会很有用。

引理 4.10。对于每个球形对 $J = \{s,t\} \subseteq S$，型 φ_J 是正定的。

证明。若 $m_{s,\,t} = 2$，则显然成立。若 $m_{s,\,t} > 2$，我们注意到

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon_{s,t}^2 &\geq \frac{(1+q_s)(1+q_t) - q_s - q_t - \sqrt{2q_sq_t}}{(1+q_s)(1+q_t)} \\ &= \frac{1 + q_sq_t - \sqrt{2q_sq_t}}{(1+q_s)(1+q_t)} \\ &> \frac{1 + q_sq_t - 2\sqrt{q_sq_t}}{(1+q_s)(1+q_t)} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{q_sq_t})^2}{(1+q_s)(1+q_t)} \end{aligned}$$

由此可知，φ_J 的格拉姆矩阵具有正行列式。结论随之成立，因为该矩阵的迹等于 2。□

现在我们将赋予 $(V_{\mathrm{g}},\ \varphi_{\mathrm{g}})$ 一个 Hermitian $\mathbf{K_q}[W]$-模的结构，定义如下。对于所有 $s \in S$，我们令

$$E_s = \frac{1 + e_s}{1 + q_s}.$$

由二次关系可得 $E_s^2 = E_s$。此外 $E_s^* = E_s$。对于所有 s，我们定义线性算子

$$\widetilde{E_s} : V_{\mathrm{g}} \to V_{\mathrm{g}} : v \mapsto v - \varphi_{\mathrm{g}}(v, \alpha_s)\alpha_s.$$

根据定义，这是在超平面 $\alpha_s^{\perp}$ 上的 φ_{g}-正交投影。

~命题 4.11。</style>这些赋值可扩展为一个线性表示：$\mathbf{K_q}[W] \to \mathrm{End}(V_{\mathrm{g}}, \varphi_{\mathrm{g}})$</style>的 $*$-代数。

~证明。我们需要验证算子 $\rho(e_s) = (1+q_s)E_s - \mathrm{I}$ 满足 Hecke 代数的定义关系。

根据定义，我们有 $\widetilde{E_s}^2 = \widetilde{E_s}$。由此可知，$\rho(e_s)$ 满足二次关系。

现在我们来验证 $s \neq t \in S$ 与 $m_{s,\,t} < \infty$ 的 Artin 关系。令 $J = \{s,t\}$。根据引理 4.10，空间 V 分解为 V_J 及其 φ_{g}-正交补 $V_J^{\perp}$ 的正交直和。注意到，$\widetilde{E_s}$ 和 $\widetilde{E_t}$ 在 $V_J^{\perp}$ 上的限制是恒等算子。特别地，$\rho(e_s)$ 和 $\rho(e_t)$ 在 $V_J^{\perp}$ 上的限制分别等于 $q_s\mathrm{I}$ 和 $q_t\mathrm{I}$。因此，这些限制满足 Artin 关系。现在我们来验证 $\rho(e_s)$ 和 $\rho(e_t)$ 在 V_J 上的限制满足 Artin 关系。

相对于基 $(\alpha_s,\ \alpha_t)$，我们有

$$\rho(e_s) = \begin{pmatrix} -1 & (1+q_s)\varepsilon_{s,t} \\ 0 & q_s \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \rho(e_t) = \begin{pmatrix} q_t & 0 \\ (1+q_t)\varepsilon_{s,t} & -1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\rho(e_s)\rho(e_t) = \begin{pmatrix} -q_t + (1+q_s)(1+q_t)\varepsilon_{s,t}^2 & -(1+q_s)\varepsilon_{s,t} \\ q_s(1+q_t)\varepsilon_{s,t} & -q_s \end{pmatrix}$$

and

$$\rho(e_t)\rho(e_s) = \begin{pmatrix} -q_t & q_t(1+q_s)\varepsilon_{s,t} \\ -(1+q_t)\varepsilon_{s,t} & -q_s + (1+q_s)(1+q_t)\varepsilon_{s,t}^2 \end{pmatrix}.$$

两个矩阵的迹为 $-q_s - q_t + (1+q_s)(1+q_t)\varepsilon_{s,t}^2$ 行列式为 $q_s q_t$。Artin 关系可通过直接应用 Cayley–Hamilton 定理计算得到。这确保了 ρ 确实是 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$的线性表示。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$根据定义，对于所有 v，$w \in V_{\mathrm{g}}$，我们有 $\varphi_{\mathrm{g}}(E_s v,\ w) = \varphi_{\mathrm{g}}(v,\ E_s w)$。由于 Hecke 代数 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$ 由 E_s 生成，我们推知 ρ 是一个.....的表示 $*$-代数。□

因此，这一对 $(V_{\mathrm{g}},\ \varphi_{\mathrm{g}})$ 是一个厄米 $\mathbf{K}_{\mathbf{q}}[W]$-模。我们称之为**几何 Hecke 模**。如上所述，当$(W,\ S)$ 为 2- 球形时，它是规范定义的；但一般情况下并非如此，因为它取决于 $(\mu_{s,\ t}$ 中的常数 2)。

二次关系意味着，在 Hecke 代数的任意线性表示中，生成元 e_s 的像可能具有的特征值只有 q_s 或 -1。**对称表示**是这样一个一维表示：对所有 s，它都将 e_s 映射到 q_s（等价地，T_s 被映射到 1）。**交错表示**是这样一个一维表示：对所有 s，它都将 e_s 映射到 -1。

下面的引理是显然的；证明从略。

引理 4.12。设$(V_{\mathrm{g}}, \varphi_{\mathrm{g}})$ 是一个几何 *Hecke* 模。向量 $v \in V_{\mathrm{g}}$ 对所有 $s \in S$ 均被 E_s 固定，当且仅当 $v \in \mathrm{Rad}(\varphi_{\mathrm{g}})$。

特别地，如果 φ_{g} 是非退化的，则对称表示不包含在几何 *Hecke* 模中。□

现在我们可以刻画几何模的不可约性。为此，我们定义一个图 $\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$，其顶点集为 S；其中，不同顶点的对$\{s,\ t\}$ 构成一条边，当且仅当 $\varepsilon_{s,\ t} \neq 0$。下面的引理直接由定义得到。证明从略。

引理 4.13。*(i)* 如果 $\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$ 是连通的，则(W, S) 是不可约的。*(ii)* 如果(W, S) 是不可约的，并且对于所有满足 $m_{s,\ t} = \infty$的 $s, t \in S$，都有$\mu_{s,\ t} \neq 0$，则 $\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$ 是连通的。

I特别地，如果 $(W,\ S)$ 不可约且是 2-球面的，那么图 $\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$ 是连通的 l.

命题 4.14。假设 $\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$ 是连通的。那么 V_{g} 的每个真子模都包含于$\mathrm{Rad}(\varphi_{\mathrm{g}})$中。

特别地，几何 *Hecke* 模不可约，当且仅当 φ_{g} 非退化。

证明。设 $Y \leq V_{\mathrm{g}}$ 是一个子模。

我们首先断言，如果存在 $s \in S$ 使得 $\alpha_s \in Y$，那么 $Y = V_{\mathrm{g}}$。

事实上，对于任意 $t \in S$，$\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$的连通性保证存在一个由 S中元素构成的序列（$s = s_0$，s_1，s_2，.....，$s_n = t$），使得对所有 i，都有$\varepsilon_{s_{i-1},\ s_i} \neq 0$。由此可知，若 $\alpha_{s_{i-1}} \in Y$，则 $E_{s_i}(\alpha_{s_{i-1}}) \in Y$，进而 $\alpha_{s_i} \in Y$。通过归纳法可得，对所有 i，都有$\alpha_{s_i} \in Y$，断言得证。

现在设 $s \in S$，并假设 Y包含某个元素 $y \notin \alpha_s^{\perp}$。那么 $\widetilde{E_s}(y) \in Y$，由此可得 $\alpha_s \in Y$。根据该断言，这意味着 $Y = V_{\mathrm{g}}$。

由此可知，每个真子模 V_{g} 都包含于 $\bigcap_{s \in S} \alpha_s^{\perp} = \mathrm{Rad}(\varphi_{\mathrm{g}})$ 中，正如所需。□

4.6. 几何形式的符号。几何形式的符号起着重要作用。以下记号对于研究它将很有用。记 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 为几何形式 φ_{g} 关于标准基 $(\alpha_s)_{s\in S}$的格拉姆矩阵，并记 $\lambda_{\mathbf{q}}(W)$ 为 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 的最小特征值。给定两个实数的 $|S|$-元组 $\mathbf{q}=(q_s)_{s\in S}$ 和 $\mathbf{r}=(r_s)_{s\in S}$，如果对所有 $s\in S$ 都有 $q_s\geq r_s$，我们记 $\mathbf{q}\geq\mathbf{r}$。

引理 4.15。 设(W,S) 是一个有限秩的2-球形考克斯特系统。给定S元组$\mathbf{q}=(q_s)_{s\in S}$ 和 $\mathbf{r}=(r_s)_{s\in S}$，其元素均为正实数，若对所有$s\in S$都有 $q_s\geq r_s\geq 1$，则 $\lambda_{\mathbf{q}}(W)\geq\lambda_{\mathbf{r}}(W)$。

证明。 格拉姆矩阵 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 的所有对角元均为 1。以 (s,t) 为指标的非对角元 $-\varepsilon_{s,t}$，其中 $\varepsilon_{s,t}$ 由式（2）定义。注意，$,_t$ 是 q_s（分别是 q_t）的非增函数。因此结论由 [31, 命题2.9]□得出。

命题 4.16。 设(W,S) 是一个有限秩考克斯特系统，且$\mathbf{q}=(q_s)_{s\in S}$由实数组成。

(i) 若 (W,S) 是球形的，且对所有 s 都有 $q_s\geq 1$，则几何形式是正定的。
(ii) 若 (W,S) 是2-球形仿射的，且对所有 s 都有 $q_s>1$，则几何形式是正定的。

证明。 球形考克斯特系统的蒂茨形式是正定的，见 [9,第 V 章，第 4 节。8]。因此 (i) 由引理4.15得出。

仿射考克斯特系统的蒂茨形式是半正定的，且行列式为零，见 [9, 第 V 章，第 4 节。9]。令 $r=\min\{q_s|s\in S\}$，并令 $\mathbf{r}$ 为常数S-元组，对所有 s 均有 $r_s=r$。根据引理 4.15，若矩阵 $M_{\mathbf{r}}$ 是正定的，则 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 也正定。根据假设 $r>1$。$M_{\mathbf{r}}$ 的行列式可视为关于 $\sqrt{r}$ 的有理函数，因此只有有限个根。此外，它在 $r=1$ 处为零，而根据引理 4.15，当 $r\geq 1$ 时该值非负。因此，当 $r>1$ 时它严格为正。结论得证。□

推论 4.17。 设(W,S) 是一个秩为 $n=|S|$ 的考克斯特系统，并且$\mathbf{q}=(q_s)_{s\in S}$ 由实数组成，且对所有 $s\in S$都有 $q_s>1$。

如果 S 包含一个大小为 $n-1$ 的子集 J，且该子集是球形的或2-球形仿射的，那么格拉姆矩阵 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 至多有一个负特征值。特别地，型 φ_{g} 是正定的，或是半正定且退化的，或具有洛伦兹符号且非退化。

证明。 事实上，几何形式在余维一子空间 φ_J 上的限制 V_J 根据命题 4.16是正定的。因此 $V_{\mathrm{g}}=V_J\perp V_J^{\perp}$ 且$i_-(V_{\mathrm{g}})=i_-(V_J^{\perp})$。结论得证。□

备注 4.18。 一般而言，即使 (W,S) 是不可约的且2-球形，几何形式的指标也可以任意大：事实上，如果 S 包含两两正交的子集 J_1，……，J_r 使得 φ_{J_i} 对所有 i 都具有洛伦兹符号，那么 φ_{g} 的指标至少为 r。一些例子将在 §4.9 中讨论。

4.7. Kazhdan 性质 (T)。 我们先回顾 Kassabov判据 [33]。设群 H 由两个子群 A, $B\leq H$ 生成，并设有一个酉表示

π 的 H 没有非零的 H-不变向量，我们定义

$$\varepsilon_H(A,B;\pi)=\sup\Big\{\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\|v\|}\mid u\in\mathcal{H}_\pi^A\setminus\{0\},v\in\mathcal{H}_\pi^B\setminus\{0\}\Big\}.$$

若 $\mathbf{H}_\pi^A=\{0\}$ 或 $\mathbf{H}_\pi^B=\{0\}$，则记 $\varepsilon_H(A,B;\pi)=0$。若 π 是任意的酉表示，则定义 $\varepsilon_H(A,B;\pi)$ 为 $\varepsilon_H(A,B;\pi_0)$，其中 $\pi_0\leq\pi$ 是定义在 π 的不变向量子空间的正交补上的子表示。对所有满足 $\mathbf{H}_\pi^H=\{0\}$ 的 H 的酉表示 π 取 $\varepsilon_H(A,B;\pi)$ 的上确界，记为 $\varepsilon_H(A,B)$。

现在考虑一个由紧子群 $A_1,\dots,A_n$ 生成的群 G，使得对所有 i,j，$A_{i,j}=A_i\cup A_j$ 都是紧的。令 $\varepsilon_{i,j}=\varepsilon_{A_{i,j}}(A_i,A_j)$。设 M 为由 $M_{i,i}=1$ 以及对所有 $i\neq j$ 的 $M_{i,j}=-\varepsilon_{i,j}$ 定义的对称 $n\times n$-矩阵。我们称其为元组 $(G,(A_i)_{1\leq i\leq n})$ 的余弦矩阵。Kassabov判据 [33, §2] 保证，如果余弦矩阵 M 是正定的，那么 G 具有 (T) 性质。

设群 G在一个局部有限建筑上真地、室传递地作用，则球形余类的稳定子都是紧的。此外，室传递性意味着 G 由包含任意给定室的面板的稳定子生成。下面的结果确定余弦矩阵。

命题 4.19. 设 X 是一个球型为2的局部有限建筑(W,S)，G 是一个局部紧群，它通过自同构在 X上连续、真地、室传递地作用。设 $c_0\in X$ 为一个基室，并且对每个 $s\in S$，设$P_s\leq G$ 为包含 c_0的 s-面板的稳定子。另设$\mathbf{q}=(q_s)_{s\in S}$ 为 X的厚度向量。

那么$(G,(P_s)_{s\in S})$ 的余弦矩阵与几何形式的格拉姆矩阵 $M_{\mathbf{q}}(W)$相同。

证明。设 $s\neq t\in S$。记由 $P_s\cup P_t$生成的子群为 $P_{s,t}$。由于 G 是室传递的，群$P_{s,t}$ 与包含基室 c_0的$\{s,t\}$-余类的稳定子相同。

结合 [30, 命题 7。1]和 [13, 定理 2.10(ii)]，，现在可以推断出 $\varepsilon_{P_s,\,t}(P_s,\ P_t)=\varepsilon_{s,\,t}$，其中 $\varepsilon_{s,\,t}$ 由（2）定义。结论得证。□

当几何形式为正定时，根据推论4.9，相应的 Hecke 诱导模上的诱导形式是半正定的。将其根基商去并取完备化后，得到相应的 G酉表示，称为 **几何酉表示** G。

以下陈述直接推出引言中陈述的推论E .

推论 4.20。 设 X，G 和$(P_s)_{s\in S}$ 以及 $\mathbf{q}$ 如命题 *4.19*所述。假设 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 是正定的。

则 G 具有 *Kazhdan* 性质 *(T)*。更确切地说，由下式定义的拉普拉斯算子的谱

$$\Delta=\sum_{s\in S}(\mathbf{1}_B-(q_s+1)^{-1}\mathbf{1}_{P_s})\in C^*(G)$$

包含于 $\{0\}\cup[\lambda_{\mathbf{q}}(W)\ n]$ 中，其中 $n=|S|$。此外，其谱隙 $\lambda_{\mathbf{q}}(W)$ 是 $\pi_{\mathrm{g}}(\Delta)$ 的一个特征值，其中 π_{g} 是 G 的几何酉表示。

此外，如果(W,S) 是不可约的，且如果 G 是 *Weyl*-传递的，那么几何酉表示是不可约的。

证明。 根据命题 4.19，余弦矩阵 $(G,(P_s)_{s\in S})$ 与格拉姆矩阵 $M_{\mathbf{q}}(W)$一致。由于 G 由抛物子群 P_s生成，而这些子群是紧的， $M_{\mathbf{q}}(W)$ 的正定性确保 G 具有 (T)，根据 [33, §2]。

对于推论的其他断言，我们采用与 [33, 定理 6.1]相同的论证。设$\pi:\ G\to U(\mathcal{H})$是一个酉表示。首先注意到，算子 $\pi(\Delta)$在$\mathcal{H}^G$ 以及$(\mathcal{H}^B)^\perp$上均为零。剩下的工作是描述 $\pi(\Delta)$在$\mathcal{H}^B\cap(\mathcal{H}^G)^\perp$上的谱。

对于$\mathcal{H}$中的每个闭子空间 Z ，我们用 $d_Z(\cdot)$表示到 Z的距离函数。给定一个与$\mathcal{H}^G$正交的向量 $v\in\mathcal{H}^B$ ，我们应用 [33, 定理 5.1], ，该定理保证

$$||v||^2=d_{\mathcal{H}^G}(v)^2\le D^T(M_{\mathbf{q}}(W))^{-1}D,$$

其中， D 是以 S 为指标、由 $D_s=d_{\mathcal{H}^{P_s}}(v)$定义的列向量。

设 $\lambda=\lambda_{\mathbf{q}}(W)>0$。利用$(q_s+1)^{-1}\pi(\mathbf{1}_{P_s})$是到子空间$\mathcal{H}^{P_s}$上的正交投影这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}D^T(M_{\mathbf{q}}(W))^{-1}D&\le\lambda^{-1}D^T\cdot D\\&=\lambda^{-1}\sum_{s\in S}d_{\mathcal{H}^{P_s}}(v)^2\\&=\lambda^{-1}\sum_{s\in S}\langle v-(q_s+1)^{-1}\pi(\mathbf{1}_{P_s})v,v\rangle\\&=\lambda^{-1}\sum_{s\in S}\langle(\pi(\mathbf{1}_B)-(q_s+1)^{-1}\mathbf{1}_{P_s})v,v\rangle\\&=\lambda^{-1}\langle\pi(\Delta)v,v\rangle,\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\pi(\mathbf{1}_B)v=v$ ，因为 $v\in\mathcal{H}^B$。这证明了 $\langle\pi(\Delta)v,\ v\rangle\ge\lambda||v||^2$。由于 Δ 是自伴的，算子 $\pi(\Delta)$ 的谱由近似特征值组成（参见 [18, 第 XI 章第 1 节，习题 2]）。因此，我们可以得出， $\pi(\Delta)$ 的谱包含于 $\{0\}\cup[\lambda,+\infty[$ 中。

注意到，算子 $\pi(\mathbf{1}_B-(1+q_s)^{-1}\mathbf{1}_{P_s})$ 是到$\mathcal{H}^B\cap(\mathcal{H}^{P_s})^\perp$上的正交投影。特别地，它的范数等于 1，因此 $\|\pi(\Delta)\|\le|S|$。我们推断， Δ 在 $C^*(G)$ 中的谱实际上包含于 $\{0\}\cup[\lambda,n]$ 中，其中 $n=|S|$。

最后，我们注意到，谱隙是在几何酉表示中达到的。事实上，记此表示为 $\pi_{\mathrm{g}}:\ G\to U(\mathsf{K})$，并记 $q\colon\mathrm{ind}(V_0)\to\mathsf{K}$ 为典范映射。设 $c_0\in X$ 是由 B 固定的基室，则 $q(\mathbf{1}_{c_0}\otimes V_0)$ 是 K 的一个 B-不变子空间；由于 q 在 $\mathbf{1}_{c_0}\otimes V_0$ 上是单射，且 φ_{g} 具有正定性，它与 V_{g} 同构。由于 G 是室传递的，Hecke 代数 $\mathsf{C}_{\mathbf{q}}[W]$ 可被识别为 $C_c(B\backslash G/B)$ 的一个子代数，参见 §4.2。将 $q(\mathbf{1}_{c_0}\otimes V_0)$ 与 V_{g} 识别后，我们看到 $\pi_{\mathrm{g}}(\Delta)$ 在 V_{g} 上的作用为 $\sum_{s\in S}(1-E_s)\in\mathsf{C}_{\mathbf{q}}[W]$。直接计算表明，相对于标准基 $(\alpha_s)_{s\in S}$ ，表示 $\sum_{s\in S}(1-E_s)$ 的矩阵恰好是 $M_{\mathbf{q}}(W)$。因此， λ 是 $\pi_{\mathrm{g}}(\Delta)$ 的一个特征值。

关于不可约性的最后一个结论可由命题3.3 和4.14 推出，前提是$(W,\ S)$ 不可约且 G 是 Weyl-传递的。□

4.8. 对有限秩无限维对称空间的等距作用。一般而言，几何形式可以是不定的。以下结果指出，几何 Hecke 模总是满足定理4.8中的技术条件。

引理 4.21。 设(W,S) 是一个有限秩考克斯特系统，且$\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 是一个 S元实数组，并且对所有 $s \in S$都有 $q_s \geq 1$ 。设$(V_{\mathrm{g}},\varphi_{\mathrm{g}})$ 是几何$\mathbf{K_q}[W]$-模。假设 $i_-(\varphi_{\mathrm{g}}) = p$。对于每个球形子集 $J \subset S$，存在一个 p 维子空间 V_J，它包含于 V_{g}，且对所有 $s \in J$都被 T_s 逐点固定；在该子空间上， φ_{g} 的限制是负定的。

证明。考虑由 $\{\alpha_s \mid s \in J\}$ 张成的子空间 U_J。根据命题 4.16， $U_J \times U_J$ 上几何形式 φ_J 的限制是正定的。因此， V_{g} 可作正交直和分解为 $U_J \perp U_J^{\perp}$，且 $i_-(\varphi_J) = 0$。特别地，$p = i_-(\varphi_{\mathrm{g}}) = i_-(\varphi_{\mathrm{g}}|_{U_J^{\perp}})$。根据定义，对于所有 $s \in J$，算子 T_s 在 $U_J^{\perp}$ 上的作用都是恒等映射。由此可知， $U_J^{\perp}$ 包含一个具有所需性质的子空间 V_J。□

利用定理4.8 这便得到$\mathrm{Aut}(X)$在有限秩无限维非正曲率对称空间上的等距作用（其定义见上文 §3.3 ）。

定理 4.22. 设 X 是非球面型(W,S) 的局部有限半正则建筑，厚度向量为$\mathbf{q}$，设$\mathbf{K}$ 为实数域或复数域。我们假设 X 的每个球形剩余都是室传递的。设$(V_{\mathrm{g}},\varphi_{\mathrm{g}})$ 为上文定义的几何$\mathbf{K_q}[W]$-模。假设 $p = i_-(\varphi_{\mathrm{g}}) > 0$。

(i) 诱导形式 $\mathrm{ind}(\varphi_{\mathrm{g}})$具有负指标 p，其正指标记为 q，满足 $q \geq 1$ *(*可能 $q = \infty$*)*。*(ii)* 群$\mathrm{Aut}(X)$ 在对称空间$M_{p,q}(\mathbf{K})$*(*见 *§3.3)*。

此外，假设 (W,S) 是不可约的，并且图 $\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$是连通的（见引理 *4.13*）。设 G 是一个局部紧群，它通过自同构在 X上真地作用。

(iii) 如果 $\mathrm{Aut}(X)$ 是室传递的，且 G 在 X上余紧地作用，那么 G- 在 $M_{p,q}(\mathbf{K})$ 上的作用没有全局不动点。*(iv)* 如果 X 是厚的，且 G 在 X上传递地 *Weyl*-传递，那么 $q = \infty$ 以及 G- 在 $M_{p,q}(\mathbf{K}) = X_p(\mathbf{K})$ 上的作用是不可约的。

证明。令 $V_0 = V_{\mathrm{g}}/\mathrm{Rad}(\varphi_{\mathrm{g}})$，并令 φ_0 为商上的 φ_{g} 所定义的型。因此，(V_0,φ_0) 是一个非退化 Hermitian $\mathbf{K_q}[W]$- 模。令 $p = i_-(V_0)$。显然 $p = i_-(V_{\mathrm{g}})$。根据引理 4.21，定理 4.8 中的技术条件得到满足。因此，$\mathrm{ind}(\varphi_{\mathrm{g}})$ 的负指标等于 p。由定义可知， $i_+(\varphi_{\mathrm{g}}) \geq 1$ 显然成立。因此 $q \geq 1$。这就证明了 (i)。

$\mathrm{Aut}(X)$ 在 $V = \mathrm{ind}(V_0)$ 上的诱导表示保持诱导形式 $\varphi = \mathrm{ind}(\varphi_0)$。根据构造，所有向量都有一个开稳定子，因此 $V/\mathrm{Rad}(\varphi)$ 也具有相同性质。稍微滥用一下记号，我们将 $V/\mathrm{Rad}(\varphi)$ 的典范完备化记为 (V,φ)，并赋予其相应的型。由命题 3.1（见 §3.1），典范完备化 (V,φ) 上的相应表示也是连续的。断言 (ii) 得证。

现在假设 $(W,\ S)$ 是不可约的，并且 $\Delta(\varphi_{\mathrm{g}})$ 是连通的。假设在 $M_{p,\ q}(\mathbf{K})$ 中存在一个 G-不动点。由于 G 在 $\mathrm{Aut}(X)$ 中是余紧的，因此 $\mathrm{Aut}(X)$ 具有有界轨道，进而也具有不动点，因为 $M_{p,\ q}(\mathbf{K})$ 是完备的 CAT(0)空间。因此，不妨假设 G 是室传递的，因为根据假设，$\mathrm{Aut}(X)$ 是室传递的。

根据 $M_{p,\ q}$(K) 的定义，在 V 中存在一个 p 维的负定 G-不变子空间 W。选取一个基室 $c_0 \in X$。我们有

$$V_0 \cong \mathbf{1}_{c_0} \otimes V_0 \leq V.$$

由于 φ_0 是非退化的，投影 $q\colon V \to V$ 在 $\mathbf{1}_{c_0} \otimes V_0$ 上是单射。此外，根据 G 是室传递的假设，$G(\mathbf{1}_{c_0} \otimes V_0)$ 张成 V。因此，$V_0 \cong \mathbf{1}_{c_0} \otimes V_0$ 在 V 中的像不可能与 W 正交。于是，W 到 $q(\mathbf{1}_{c_0} \otimes V_0)$ 的正交投影非零。我们将相应的 V_0 子空间记为 W_0。回顾 §4.2，$\mathbf{K_q}[W]$ 可以实现为卷积代数 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B) \subseteq C_c^{\mathbf{K}}(G)$ 的一个子代数，其中 $B = G_{c_0}$。由于 W 是 G-不变的，它是 V 的一个 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$-子模。因此，$W_0$ 是 V_0 的一个子模。根据命题 4.14，我们得到 $W_0 = V_0$。于是 $p \leq \dim(V_0) = \dim(W_0) \leq \dim(W) = p = i_-(V_0)$。因此，$V_0$ 是负定的。这与命题 4.16 矛盾。断言 (iii) 得证。

最后，假设 X 是厚的，且 G 在 X 上 Weyl-传递。在这种情况下，$\mathbf{K_q}[W]$ 到 $C_c^{\mathbf{K}}(B\backslash G/B)$ 的自然嵌入是满射。B-不变向量组成的空间 V^B 包含 $q(\mathbf{1}_{c_0} \otimes V_0)$。此外，根据命题 4.14，Hecke 模 V_0 是不可约的。由于 $G\big(q(\mathbf{1}_c \otimes V_0)\big)$ 张成了 V 的稠密子空间，由命题 3.3 可知，G 到 $M_{p,q}$(K) 的等距群的表示是不可约的。若 q 有限，则该群将是一个有限维李群。令 $K \leq G$ 为该表示的核。根据构造，K 包含 G 在 X 上作用的核，而 G 到 $M_{p,q}$(K) 的等距群的表示定义在整个群 Aut(X) 上，该群是全不连通的。由于李群没有小子群，从全不连通局部紧群到李群的每个连续同态都具有开核。因此我们推得 K 在 G 中是开子群。利用命题 4.4], ，我们推得 G/K 是有限的。因此，G 在 CAT(0) 空间 $M_{p,q}$(K) 上的轨道都是有限的。由此可知，G 有一个不动点，这与 (iii) 矛盾。这证实了 $q = \infty$。□

备注 4.23：如果建筑 X 是薄的，并且 $G = W$（因此 G 是 Weyl-传递的），则有 $\mathbf{K_q}[W] \cong J = C_c^{\mathbf{K}}(W)$，所以诱导模不过就是几何模。因此它是有限维的，从而说明定理 $q < \infty$ 4.22 中的情形 可以发生：第 (iv) 项中的厚度假设是必要的。然而，我们所关注的主要情形是 X 是厚的，且 $\mathrm{Aut}(X)$ 是 Weyl-传递的，这正是引言中提到的 Kac–Moody 建筑或半正则直角型建筑的情形。在所有这些情形中，根据定理 $q = \infty$ 4.22 (iv)，即使 G-作用不是 Weyl-传递的，也仍然如此。

备注 4.24：定理 4.22 (iv) 所给出的不可约表示可能不是几何不可约的：事实上，作用在 X_p（C）上的不可约表示可以保持 X_p（R）的一个等距嵌入副本。例如，当该复表示是某个实表示的复化时，情况就是如此。关于每个不可约复表示都属于此类的一个实例，请参见 [45, 命题 7] 。

我们推导出以下结论，其中不假定 G-作用是真作用，也不假定 X 是不可约的。

推论 4.25. 设 X 是一个非球面型建筑，类型为 (W, S)，且 $\mathrm{Aut}(X)$ 室传递；设 $\mathbf{q}$ 为其厚度向量。再设 G 是一个连续作用于 X 且作用余紧的局部紧群

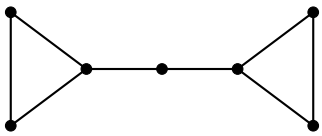
如果 $i_-(\varphi_g) = 1$，那么 G 不具有 *Kazhdan* 性质 *(T)*。

证明。根据 [25, §2], ，不妨设 (W, S) 是 2-球面的。此外， G 在 X 的每个不可约分支上连续且余紧地作用。由假设可知，存在一个不可约分支$J \subset S$，使得 φ_g 对 $V_J = \alpha_s \mid s \in J$ 的限制具有负指标 1。令X_J 为基室 c_0 的 J-余类。根据定理 4.22(iii)， G 在 Aut(X_J) 中的自然像的闭包由命题 3.4 可知不具有 (T)。因此，G 也不具有 (T)。□

推论的证明G。 根据命题 4.16，假设意味着 $i_+(\varphi_g) \geq |S| - 1$，因此 $i_-(\varphi_g) \leq 1$。由于 φ_g 是非退化的，我们推得 φ_g 是正定的，或者 $i_-(\varphi_g) = 1$。所需结论由推论 4.20 和4.25得出。 □

4.9. 例子。 本节将针对三种具体类型，说明上述结果。秩为 n 且包含秩为 $n-1$ 的球形或仿射子集的考克斯特系统的情形，已由推论 G涵盖。因此，我们将考察后者的假设不适用的例子。在以下每个例子中，我们考虑一个厚的、局部有限的、半正则建筑 X，其类型为 (W, S)，厚度向量为$\mathbf{q}$，以及一个局部紧群 G，它通过自同构在 X上连续、真且室传递地作用。

例 4.26。第一个例子是一个秩为 7 的 2-球面考克斯特系统（W, S），其考克斯特图如下:



对于所有生成元 $s, t \in S$，若 $m_{s,t}$ 为奇整数，则元素 s 和 t共轭。由此可知，在当前例子中，所有 Coxeter 生成元均共轭，因此厚度向量 $\mathbf{q} = (q_s)_{s\in S}$ 为常向量。令 $q = q_s$ 为其公共值。

注意到 S 包含一个大小为5的球形子集。命题4.16 保证 $i_+(\varphi_g) \geq 5$，因此 $i_-(\varphi_g) \leq 2$。置

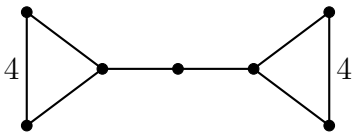
$$z = \sqrt{q} \qquad \text{and} \qquad f(z) = (1+q)^7 \det(M_{\mathbf{q}}(W)).$$

我们得到

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{14} - z^{12} - 4z^{11} - 2z^{10} + 4z^8 + 4z^7 + 4z^6 - 2z^4 - 4z^3 - z^2 + 1 \\ &= (z^2 + z + 1)^3 (z-1)^2 (z^6 - z^5 - z^4 - z^2 - z + 1). \end{aligned}$$

容易验证，对于 $z \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$，有 $f(z) < 0$，并且对所有 $z \geq 2$，有 $f(z) > 0$。由此可知，对于 $q = 2$， $M_{\mathbf{q}}(W)$ 的指标符号为 (1, 6)；对于 3，指标符号为 (0, 7)。根据推论 4.20 和 4.25，我们推断，对于 $q \geq 4$， G 具有 (T)，而对于 $q = 2$， G 不具有 (T)，3。

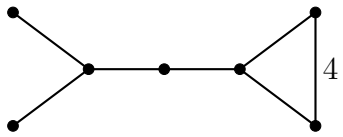
例 4.27。第二个例子是一个秩7的2-球面考克斯特系统（W， S），其考克斯特图如下:



与例 4.26一样，厚度向量是常数；令 $q = q_s$ 为该公共值，并令 $z = \sqrt{q}$。集合 S 再次包含一个大小为 5 的球形子集，因此$i_-(\varphi_g) \leq 2$。再次设 $f(z) = (1+q)^7 \det(M_{\mathbf{q}}(W))$，我们得到

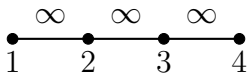
$$\begin{aligned} f(z) &= z^{14} - 3z^{12} - 4\sqrt{2}z^{11} - z^{10} + 4\sqrt{2}z^9 + 11z^8 + 8\sqrt{2}z^7 \\ &\quad + 11z^6 + 4\sqrt{2}z^5 - z^4 - 4\sqrt{2}z^3 - 3z^2 + 1 \\ &= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)^2(z^4 - \sqrt{2}z^3 - \sqrt{2}z + 1)(z^6 - \sqrt{2}z^5 - z^4 - z^2 - \sqrt{2}z + 1). \end{aligned}$$

可以验证，对于所有 $z \geq \sqrt{5}$，$f(z) > 0$，而对于 $z \in \{\sqrt{3}, 2\}$，$f(z) < 0$。由于与类型为 (3, 3, 4) 的紧双曲考克斯特群相关的 3×3 子矩阵的行列式在 $z = \sqrt{2}$ 时为负，因此可得 $i_-(\varphi_g) \geq 1$（当 $q = 2$ 时）。由此推断，$M_{\mathbf{q}}(W)$ 的指标符号在 $q = 2$ 时为 (2, 5)，在 $q = 3$ 时为 (1, 6)，4，而在 $q \geq 5$ 时为 (0, 7)。鉴于推论 4.20 和 4.25，我们推断，当 $q \geq 5$ 时，G 具有 (T) 性质，而当 $q = 3$，4 时，G 不具有 (T) 性质。对于 $q = 2$，定理 4.22 给出了 G 在秩 2 的无限维对称空间上的一个表示；如果 G 是 Weyl-传递的，则该表示是不可约的。此作用无法对 (T) 性质给出任何结论。然而，从 Hecke 代数 $\mathrm{R}_{\mathbf{q}}[W]$ 的表示可以验证，它承认代数 $\mathrm{R}_{\mathbf{q}}[W']$, 作为一个商，其中 (W', S) 是类型为



后者有一个大小为6的球形子集，并且计算可得，$M_{\mathbf{q}}(W')$ 的行列式在 $q = 2, 3$时为负。仿照定理4.8(iii)，我们得到 G 在无限维实双曲空间上的无不动点作用，从而由命题 G 可知，对于 $q = 2$，G 也不具有 (T)，同样由命题3.4可得。

例4.28. 第三个例子是一个秩为 4 的直角考克斯特系统（W, S），其考克斯特图如下：



该群 W 是格罗莫夫双曲的（见 [19, §12.6]），因此 X 和 G 也是双曲的。设 $a = \mu_{1,2}$, $b = \mu_{2,3}$ 和 $c = \mu_{3,4}$，于是

$$M_{\mathbf{q}}(W) = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ -\bar{a} & 1 & -b & 0 \\ 0 & -\bar{b} & 1 & -c \\ 0 & 0 & -\bar{c} & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$\det(M_{\mathbf{q}}(W)) = |a|^2|c|^2 - |a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + 1 = (|a|^2 - 1)(|c|^2 - 1) - |b|^2.$$

由于 S 包含一个大小为 2 的球形子集，因此 $i_-(\varphi_g) \leq 2$。此外，如果$|a| > 1$，或 $|b| > 1$，或 $|c| > 1$，那么 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 包含一个洛伦兹型的 2×2-子矩阵

符号，因此 $i_-(\varphi_g) \geq 1$。特别地，对于所有 a 和 c 满足 $|a|$的 $|c| > 1$，矩阵 $M_{\mathbf{q}}($ $W)$ 的符号为 $(2,2)$，对所有 b 满足 $0 < |b| < \sqrt{(|a|^2-1)(|c|^2-1)}$均成立。因此，定理 4.22给出了 G 在秩为 2的实和复无穷维对称空间上的一个多参数表示集合。

4.10. 度量适当作用。在本节中，我们讨论定理4.22 所给出的在无限维对称空间上的作用是否是度量适当的。在实双曲空间的情形下，该条件蕴含 Haagerup 性质，参见命题3.4。

引理 4.29。设 X 是非球面型的局部有限半正则建筑$(W、 S)$，其厚度向量为 $\mathbf{q}$。假设$\mathrm{Aut}(X)$ 是室传递的，并且 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 的所有系数均为实数。

假设 $i_-(\varphi_g) = 1$。那么，由定理 $\mathrm{Aut}(X)$在双曲空间 $\mathbb{H} = X_1(\mathbf{R})$ 上给出的作用是度量适当的，当且仅当对于某个负向量 $v_0 \in V_g$，映射 $W \to \mathbf{R}: w \mapsto \varphi_g(T_w v_0, v_0)$ 是真映射。

如果这些条件成立，那么 $\mathrm{Aut}(X)$ 的每个闭子群都具有 *Haagerup* 性质。

证明。 我们采用定理 4.22的证明中相同的记号，其中 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$，并令 σ 表示由此得到的 $G = \mathrm{Aut}(X)$ 在 V上的表示，它保持 φ一个负指标为一的形式。

固定一个基室 $c_0 \in X$，令 ξ 为$\mathbf{1}_{c_0} \otimes v_0$ 在 V中的像，并令 $\overline{x_0} = [\xi]$为实双曲空间中相应的点。我们有 $\varphi(\xi, \xi) = -1$。在双曲距离 $d_{\mathbb{H}}$采用标准归一化后，诱导形式的定义给出

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(x_0, gx_0) = |\overline{\varphi}(\sigma(g)\xi, \xi)| = |\varphi_g(T_{\delta(c_0, gc_0)}v, v)|$$

对所有 $g \in G$。由于 $G = \mathrm{Aut}(X)$ 在 X上真作用，映射 $G \to W: g \mapsto \delta(c_0, gc_0)$ 是真映射。关于度量适当性的所需等价性随即得到。这些条件意味着 $\mathrm{Aut}(X)$，从而其每个闭子群，都根据命题 3.4(2) 具有 Haagerup 性质。 □

下面的观察为引理 4.29 中映射的真性提供了一个障碍。

引理 4.30。 沿用引理*4.29*中的记号和假设，并设 $i_-(\varphi_g) = 1$。若存在非球面子集 $J \subseteq S$，使得型 φ_J *(定义见 §4.5)* 为正定型，则定理 $\mathrm{Aut}(X)$给出的双曲空间 $\mathbb{H} = X_1(\mathbf{R})$上的作用不是度量适当的。*4.22*

证明。该假设意味着 φ_J 是非退化的，因此 V_g 有一个正交分解为 $V_J \perp V_J^{\perp}$。由于 φ_g 的负指标为 1，存在一个负向量 $v_0 \in V_J^{\perp}$。根据几何模的定义，对于所有 $s \in J$，都有 $E_s(v_0) = v_0$，因此对于所有 $w \in W_J$，都有 $T_w(v_0) = v_0$。于是，映射 $w \mapsto \varphi_g(T_w v_0, v_0)$ 在无限子群 W_J 上的限制为常值。因此它不是真映射，结论由引理 4.29 得出。□

下面的结果可以看作引理 4.30 的逆命题。

命题 4.31。 设 X 是一个厚、局部有限的非球型半正则建筑(W, S)，其厚度向量为$\mathbf{q}$。假设$\mathrm{Aut}(X)$ 在室上传递，且 $M_{\mathbf{q}}(W)$ 的所有系数均为实数。此外，假设对于

每个非球面子集 $J \subsetneq S$，型 φ_J 均为非退化型，且负惯性指数为 1。那么，$\mathrm{Aut}(X)$在双曲空间 $\mathbb{H} = X_1(\mathbf{R})$ 上的作用由定理*4.22* 给出，且度量适当。

证明。定义几何 Hecke 模的公式给出

$$T_s x = x - (1 + q_s^{-1})\varphi_{\mathrm{g}}(x, \alpha_s)\alpha_s$$

对所有 $x \in V_{\mathrm{g}}$ 和 $s \in S$均成立。由于 $\varphi_{\mathrm{g}}(\alpha_s, \alpha_s) = 1$，直接计算可得

$$\varphi_{\mathrm{g}}(T_s x, T_s x) = \varphi_{\mathrm{g}}(x, x) - (1 - q_s^{-2})|\varphi_{\mathrm{g}}(x, \alpha_s)|^2. \tag{4}$$

给定一个约化表达式 $w = s_n \dots s_1$，我们考虑一个算子 $A = T_{s_n} \cdots T_{s_1}$，并定义 $A_0 = \mathrm{Id}$ 和 $A_j = T_{s_j} \cdots T_{s_1}$，其中 $1 \le j \le n$。反复使用（4），我们得到

$$\varphi_{\mathrm{g}}(x, x) - \varphi_{\mathrm{g}}(Ax, Ax) = \sum_{j=1}^{n} (1 - q_{s_j}^{-2})|\varphi_{\mathrm{g}}(A_{j-1}x, \alpha_{s_j})|^2. \tag{5}$$

由于 X 是厚的，我们对所有 s都有 $q_s \ge 2$ 。因此

$$\varphi_{\mathrm{g}}(x, x) \ge \varphi_{\mathrm{g}}(T_w x, T_w x) \tag{6}$$

对所有 $x \in V_{\mathrm{g}}$ 和 $w \in W$均成立。

元素 $w \in W$的**支撑** 记作 $\mathrm{supp}(w)$，定义为满足 $w \in W_I$的最小子集 $I \subseteq S$。由于 $W_I \cap W_J = W_{I \cap J}$，支撑是良定义的。令 L 为具有球形支撑的 W 中元素的最大长度（注意，由于 S 是有限的，$L < \infty$），并设 $N = L + 1$。

我们声称存在常数 $\eta > 1$，使得对于每个非球面子集$J \subsetneq S$、每个满足 $\ell(w) = N$ 且 $\mathrm{supp}(w) = J$的 $w \in W$，以及每个 $x \in V_J$，都有

$$-\varphi_{\mathrm{g}}(T_w x, T_w x) \ge \eta\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(x, x)\Big).$$

事实上，考虑一个约化表达式 $w = s_N \dots s_1$。令 $A = T_w$，并令 $Q_A(x) = \varphi_{\mathrm{g}}(x, x) - \varphi_{\mathrm{g}}(Ax, Ax)$。取满足 $Q_A(x) = 0$ 的 $x \in V_J$。于是 (4) 中的每一项都为零。关于 T_{s_j} 的公式进而依次推出，对所有 j都有 $A_j x = x$ 。因此，对每个 j，都有 $\varphi_{\mathrm{g}}(x, \alpha_{s_j}) = 0$。根据定义， J 的所有元素都会出现；而根据假设，我们有 $x \in V_J$。因此， φ_J 非退化这一假设意味着 $x = 0$。这表明 Q_A 是 V_J上的正定二次型。由于 W 中长度为 N 的元素 w 的个数有限，并且有限维空间 V_J 上的正定型构成的锥，在 V_J上的对称双线性型空间中是开集，因此存在 $\varepsilon_J > 0$，使得对于每个满足 $\ell(w) = N$且 $\mathrm{supp}(w) = J$的 w、每个 $x \in V_J$以及每个 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_J]$，都有 $Q_{T_w}(x) + \varepsilon\varphi_{\mathrm{g}}(x, x) \ge 0$。定义 ε 为对所有非球面子集 J取 ε_J 的最小值。则常数 $\eta = 1 + \varepsilon > 1$ 满足

$$-\varphi_{\mathrm{g}}(T_w x, T_w x) = -\varphi_{\mathrm{g}}(x, x) + Q_{T_w}(x) \ge \eta\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(x, x)\Big)$$

对所有满足 $\ell(w) = N$ 且 $\mathrm{supp}(w) = J$ 的 w，以及所有 $x \in V_J$。这就证明了该断言。

现在令 $w \in W$ 满足 $\ell(w) = N$ 且 $\mathrm{supp}(w) = J$，并令 $x \in V_{\mathrm{g}}$。我们不假设 $x \in V_J$。根据假设， φ_J 是非退化的，因此我们有正交分解 $V_{\mathrm{g}} = V_J \perp V_J^{\perp}$。令 $x = x_J + x'$ 为相应的分解

x_0。由于 $x' \in V_J^{\perp}$，对于所有 $s \in J$，我们有 $T_s(x') = x'$。特别地，$T_w(x') = x'$。根据该断言，我们得到

$$\begin{aligned} -\varphi_{\mathrm{g}}(T_w x, T_w x) &= -\varphi_{\mathrm{g}}(T_w x_J + x', T_w x_J + x') \\ &= -\varphi_{\mathrm{g}}(T_w x_J, T_w x_J) - \varphi_{\mathrm{g}}(x', x') \\ &\geq \eta\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(x_J, x_J)\Big) - \varphi_{\mathrm{g}}(x', x') \\ &= \eta\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(x, x) + \varphi_{\mathrm{g}}(x', x')\Big) - \varphi_{\mathrm{g}}(x', x') \\ &= \eta\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(x, x)\Big) + (\eta - 1)\varphi_{\mathrm{g}}(x', x'). \end{aligned}$$

根据假设，型 φ_J 和 φ_{g} 的负指标均为一。因此，φ_{g} 在 $V_J^{\perp}$上的限制是正定的。此外，$\eta > 1$。于是，项 $(\eta - 1)\varphi_{\mathrm{g}}(x', x')$ 非负，从而我们得到不等式

$$-\varphi_{\mathrm{g}}(T_w x, T_w x) \geq \eta\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(x, x)\Big)$$

对所有 $x \in V_{\mathrm{g}}$均成立。

选取 $v_0 \in V_{\mathrm{g}}$ 使得 $\varphi_{\mathrm{g}}(v_0, v_0) = -1$。给定 $w \in W$，我们可以将其分解为若干个长度为 $\lfloor \ell(w)/N \rfloor$ 的元素的乘积，再乘以一个长度为 N的元素 w'。反复应用前一个不等式，并结合 (6)，我们得到

$$\begin{aligned} -\varphi_{\mathrm{g}}(T_w v_0, T_w v_0) &\geq \eta^{\lfloor \ell(w)/N \rfloor}\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(T_{w'} v_0, T_{w'} v_0)\Big) \\ &\geq \eta^{\lfloor \ell(w)/N \rfloor}\Big(-\varphi_{\mathrm{g}}(v_0, v_0)\Big) \\ &= \eta^{\lfloor \ell(w)/N \rfloor}. \end{aligned}$$

对于任意向量 $x \in V_{\mathrm{g}}$，令 $x = \lambda v_0 + x'$ 为根据$V_{\mathrm{g}} = \langle v_0 \rangle \perp v_0^{\perp}$对 x 进行的分解。我们有 $\lambda = -\varphi_{\mathrm{g}}(x, v_0)$ 和 $\varphi_{\mathrm{g}}(x, x) = -|\lambda|^2 + \varphi_{\mathrm{g}}(x', x') \geq -|\lambda|^2$，因此

$$\varphi_{\mathrm{g}}(x, x) \geq -|\varphi_{\mathrm{g}}(x, v_0)|^2.$$

对于 $x = T_w v_0$，我们推得 $|\varphi_{\mathrm{g}}(T_w v_0, v_0)| \geq \eta^{\frac{1}{2}\lfloor \ell(\bar{w})/N \rfloor}$。这证实映射 $w \mapsto \varphi_{\mathrm{g}}(T_w v_0, v_0)$ 是真映射。结合引理4.29，结论得证。□

推论H的证明。根据假设，每个真子集 $J \subsetneq S$ 都是球面的，而 φ_{g} 具有负指标 1。因此，根据推论 φ_{g} 4.17，φ_{g} 是非退化的。我们推断命题4.31 的假设均已满足。结合引理4.29，结论得证。□

需要指出的是，命题4.31 同样适用于并非紧致双曲型的群。

例 4.32. 设 X 是一个厚、局部有限、半正则建筑，且 Aut(X) 的作用是室传递的，其型为例 4.27 中出现的考克斯特系统 (W', S)。若对所有 s 都有 $q_s = 2$，则由定理 4.22 给出的 Aut(X) 在实双曲空间上的作用是度量适当的（因此 Aut(X) 具有 Haagerup 性质）。事实上，可以验证命题 4.31 的假设得到了满足。若对所有 s 都有 $q_s = 3$，情况则不再如此：事实上，若 $J \subset S$ 是紧致双曲型的子集，则此时型 φ_J 是正定的，因此根据引理 4.30，双曲作用并非真作用。

参考文献

[1] P. Abramenko 和 K. S. Brown。《建筑》，《数学研究生教材》第 248 卷。Springer，纽约，2008。理论与应用。6, 7[2] C. Anantharaman 和 S. Popa。II_1 因子的导论。书稿准备中。20[3] D. Barbasch 和 A. Moy。 p进群的酉性判据。《数学发明》，98(1):19–37，1989。1, 2[4] D. Barbasch 和 A. Moy。仿射Hecke代数中约化到实无穷小特征。《美国数学会杂志》，6(3):611–635，1993。1, 2[5] B. Bekka、P. de la Harpe 和 A. Valette。Kazhdan 性质 (T)，《新数学专著》第 11 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2008。13[6] S. Bischof。关于 $\mathbb{F}_2$ 上型为 (4, 4, 4) 的 RGD系统的构造。博士论文，吉森尤斯图斯-李比希大学，2023。4[7] S. Bischof。考克斯特群的增长函数。《爱丁堡数学会会刊》(2)，68(3):979–993，2025。3[8] A. Borel。局部域上半单群的容许表示及其在 Iwahori 子群下不变的向量。《数学发明》，35:233–259，1976。1[9] N. Bourbaki。《数学原本》。第 XXXIV 分册。群与李代数。第四章：考克斯特群与蒂茨系统。第五章：由反射生成的群。第六章：根系，第 1337 卷，《科学与工业实况》[《当代科学与工业专题》]。Hermann，巴黎，1968。1, 14, 22, 25[10]M. R. Bridson 和 A. Haefliger。《非正曲率度量空间》，《数学科学基础原理》第 319 卷 [《数学科学基础原理》]。施普林格出版社，柏林，1999。7, 9[11] M. Burger、A. Iozzi 和 N. Monod。将树等变嵌入双曲空间。《国际数学研究通知》，2005(22):1331–1369，2005。5, 10, 11[12] P.-E. Caprace。直角建筑物的自同构群：单性与局部分裂。《基础数学》，224(1):17–51，2014。2, 5, 7[13] P.-E. Caprace、M. Conder、M. Kaluba 和 S. Witzel。双曲广义三角群、(T) 性质与有限单商群。《伦敦数学会杂志》(2)，106(4):3577–3637，2022。26[14] P.-E. Caprace 和 A. Thom。关于建筑自同构群的 Howe–Moore性质。预印本，arXiv:2606.27993，2026。5, 29[15] M. Caspers、M. Klisse 和 N. S. Larsen。图乘积 Khintchine不等式与 Hecke C*代数：Haagerup不等式、（非）单性、核性与精确性。《泛函分析杂志》，280(1):第 108795 号论文，41 页，2021。2[16] P.-A. Cherix、M. Cowling、P. Jolissaint、P. Julg 和 A. Valette。《具有 Haagerup 性质的群：Gromov的a-T-可amenability》，《数学进展》第 197 卷。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2001。13[17] D. Ciubotaru。约化 p进群的类型与酉表示。《数学发明》，213(1):237–269，2018。1, 2[18] J. B. Conway。《泛函分析教程》，《数学研究生教材》第 96 卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1990。27[19] M. W. Davis。《考克斯特群的几何与拓扑》，伦敦数学会专著丛书第 32 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2008。3, 6, 7, 14, 16, 20, 31[20] T. De Medts、A. C. Silva 和 K. Struyve。直角建筑物的通用群。《群、几何与动力学》，12(1):231–287，2018。2[21] J. Dixmier。《Les C^*-algèbres et leurs représentations》。《Les Grands Classiques Gauthier-Villars》[《Gauthier-Villars 伟大经典》]。Éditions Jacques Gabay，巴黎，1996。1969 年第二版的重印本。19, 20[22] B. Duchesne。《Des espaces de Hadamard sy métriques de dimension infinie et de rang fini》。博士论文，日内瓦大学，2011。10, 11, 13[23] B. Duchesne。有限秩无限维非正曲率对称空间。《国际数学研究通知 IMRN》，2013(7):1578–1627，2013。10, 13[24] B. Duchesne。具有有限指标的二次型正交群的无限维表示。《图卢兹数学学院科学年刊》(6)，32(2):371–396，2023。5

[25] J. Dymara 和 T. Januszkiewicz. 建筑物及其自同构群的上同调. 《数学发明》, 150(3):579–627, 2002. 3, 4, 30[26] M. Ershov 和 A. Jaikin-Zapirain. 非交换万能格的 (T) 性质. 《数学发明》, 179(2):303–347, 2010. 4[27] M. Ershov 和 A. Rall. 环上 Kac-Moody 群的 (T) 性质. 《代数杂志》, 500:221–241, 2018. 4[28] J. Faraut 和 K. Harzallah. 齐性空间上的不变希尔伯特距离. 《傅里叶研究所年刊》 (Grenoble), 24(3):xiv, 171–217, 1974. 13[29] W. Feit 和 G. Higman. 某些广义多边形的不存在性. 《代数杂志》, 1:114– 131, 1964. 22[30] H. Garland. p-adic 曲率与 p-adic 群离散子群的上同调. 《数学年刊》(2), 97:375–423, 1973. 26[31] Z. Grinbaum-Reizis 和 I. Oppenheim. 群上同调消失的曲率判据. 《群、几何与动力学》, 16(3):843–862, 2022. 4, 25[32] M. Gromov. 无限群的渐近不变量. 收录于《几何群论》第 2 卷（苏塞克斯，1991），第 182 卷《伦敦数学会讲义系列》，第 1–295 页。剑桥大学出版社，剑桥，1993. 10[33] M. Kassabov. 子空间配置与 (T) 性质. 《群、几何与动力学》, 5(2):445–477, 2011. 3, 4, 25, 26, 27[34] S. Lang. $SL_2(R)$, 第 105 卷《数学研究生教材》. 施普林格出版社，纽约，1985. 1975 年版重印. 1, 12[35]N. S. Larsen 和 R. Palma. 正定 *-球形函数、(T) 性质与盖尔范德对的 C^*-完备化. 《剑桥哲学会数学会报》, 160(1):77–93, 2016. 1[36] T. Marquis. 域上 Kac-Moody 群导论. 《欧洲数学学会数学教材》. 欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2018. 2[37] H. Matsumoto. 半单 p-adic 群上的球形函数. 《巴黎科学院报告》A-B 辑, 269:A829–A832, 1969. 3[38] H. Matsumoto. 仿射型有界 Tits 系统中的调和分析，第 590 卷《数学讲义》. 施普林格出版社，柏林—纽约，1977. 1, 2[39]N. Monod 和 P. Py. 双曲空间的一种奇异变形. 《美国数学杂志》, 136(5):1249–1299, 2014. 10, 11, 12[40] N. Monod 和 P. Py. 莫比乌斯群的自表示. 《亨利·勒贝格年刊》, 2:259–280, 2019. 11[41] G. A. Noskov 和 E. B. Vinberg. Coxeter 群子群的强 Tits 替代定理. 《李理论杂志》, 12(1):259–264, 2002. 8[42] I. Oppenheim. 作用于仿射建筑物的群的 (T) 性质. 《伦敦数学会会报》, 57(10):3151–3162, 2025. 4[43] J. Parkinson. 建筑与 Hecke 代数. 《代数杂志》, 297(1):1–49, 2006. 14[44] L. S. Pontryagin. 不定度量空间中的厄米算子. 《俄罗斯科学院学报》数学辑, 8:243–280, 1944. 10[45] P. Py 和 A. Sánchez. 双曲空间、主系列与 O(2, ∞). 《巴塞尔数学文献》, 114(1):97–105, 2020. 29[46] M. A. Rieffel. C^*-代数的诱导表示. 《数学进展》, 13:176–257, 1974. 19, 20[47] A. Robert. 紧群和局部紧群表示论导论，第 80 卷《伦敦数学会讲义系列》. 剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1983. 11[48] J. Tits. 球型建筑与有限 BN 对，第 386 卷《数学讲义》. 施普林格出版社，柏林—纽约，1974. 7[49] F. Viola. 线性高秩代数群在无限维、有限秩对称空间上的局部域作用的不动点定理. Int. Math. Res. Not. IMRN, 2026(20):论文编号

P.-E.C., UCLouvain, 回旋加速器路 2 号, 1348 新鲁汶, 比利时电子邮件地址:
pierre-emmanuel.caprace@uclouvain.be

A.L., UCLouvain, 回旋加速器路 2 号, 1348 新鲁汶, 比利时电子邮件地址:
alex.loue@uclouvain.be

A.T., 德累斯顿工业大学, 01062 德累斯顿, 德国电子邮件
地址: andreas.thom@tu-dresden.de