可压缩性效应对钝体流致运动的影响：横向振荡与旋转振荡的共同特征

Sawant Omkar Deepak[a)] 和Swagata Bhaumik[b)]

印度 *IIT(ISM) Dhanbad* 机械工程系，

印度-*826004*

（日期：2026年11月24日）

通过对圆柱 ($Re = 150$) 的无阻尼横向涡激振动（TVIV）以及长宽比为 0。5 的椭圆柱 ($Re = 200$) 的涡激旋转振荡（VIRO）进行二维直接数值模拟，研究钝体流致运动的可压缩性效应，来流马赫数为 $0.1 \leq M_\infty \leq 0.6$。分析了第一失同步区（$DS\text{-}I$）、同步（锁定）分支（$SB$）和第二失同步区（$DS\text{-}II$）内的响应特性。研究发现，在 SB 中，可压缩性效应会抑制振荡，表现为响应振幅和脉动气动力系数降低，以及滞后跃变的范围和强度减小。与此相反，在 $DS\text{-}II$中，振荡幅值和气动力系数会随 M_∞ 增大；其中，TVIV 和 VIRO 两种情况下，振幅随 M_∞ 的变化均遵循修正普朗特-格劳特关系 。这表明，在 $DS\text{-}II$ 区间，可压缩性的无黏特性会增强振荡响应；而在 SB 中，随着 M_∞ 增大，黏性稳定作用增强，从而抑制响应。尽管模拟是在低雷诺数下进行的，但所发现的趋势与基本的可压缩性机制一致，因此在更高雷诺数下也可能持续存在。

关键词：可压缩流；流致振荡；Prandtl-Glauert 关系；钝体绕流；直接数值模拟；计算流体动力学

arXiv:2611.30903v1 [physics.flu-dyn] 23 Nov 2026

a)电子邮箱：omkars30.20dr0128@mech.iitism.ac.inb)电子邮箱：swagatabhaumik@mech.iitism.ac.in

一、引言

流致振动（FIV）源于非定常气动力与柔性结构之间的相互作用，广泛存在于各类工程系统中。尽管大多数经典研究聚焦于不可压缩低速状态，但现代航空航天应用——例如操纵面、制导导弹和运载火箭——都在可压缩状态下运行，此时密度变化会显著改变气动载荷与结构运动之间的相位关系。这些效应可能导致跨声速颤振、激波抖振和声疲劳等现象。本研究考察了两类典型的流致运动——圆柱的横向振动和椭圆柱的旋转振荡——其范围为低至中等亚声速，以识别并表征可压缩性效应的共同特征。模拟在低雷诺数下进行，从而确保二维流动在物理上仍有意义，同时允许开展广泛的参数变化。尽管在较高M_∞下采用较低 Re 在物理上不可实现，但这有助于在数值上清晰地隔离可压缩性对响应分支的影响。

过去二十年来，数值研究大幅加深了人们对流致振动（FIV）的认识，但研究对象主要是不可压缩流。Singh和Mittal[1] 考察了自由振动圆柱在低雷诺数下的响应，并证实了滞后现象和不同涡脱落模态的出现；随后，Prasanth和Mittal[2]详细刻画了层流状态下的横向涡激振动，包括同步、响应特性和尾流转捩。Leontini、Thomp- son和Hourigan[3]通过二维模拟进一步识别出不同的响应分支，证实即使在低雷诺数状态下，分支状行为仍可能持续存在。针对非圆钝体的数值研究阐明了物体几何形状、非定常流体载荷、尾流动力学与结构运动（振动幅值、同步特性、响应分支、滞后现象，以及不同流致振动状态〔例如涡激振动、失同步响应和驰振〕之间的转变）之间复杂的耦合作用，这种耦合作用是不可压缩流中流致振动响应的基础[4–8]。此类研究还拓展至考察强迫对流、自然对流和混合对流对钝体流致振动的影响[9–14]，结果表明，理查森数、流动方向、热条件、局部加热和圆柱横截面都会显著影响涡脱落、涡激振动响应，

和 r 共振特性，以及驰振行为的抑制 .

已有研究表明，可压缩性会改变静止圆柱的尾流拓扑和涡脱落特性[15,16], ，为考察其在自由振动系统中的作用提供了依据。尽管两位作者所研究的 Re 范围不同，但他们都指出， M_∞ 的增加往往会抑制波动。Song *et al.*[17] 研究了 $Re = 100$ 条件下圆柱的无阻尼横向涡激振动，并通过比较锁定区内单一约化速度下的振动特性，得出结论：当来流马赫数（M_∞）大于 0.1 时，可压缩性效应开始影响振动特性。Rajamuni *et al.*[18] 针对 $Re = 200$ 和$M_\infty = 0.2$ 开展了类似研究，结果表明，横向涡激振动通过增强非定常流固耦合，显著强化了声辐射。Liu *et al.*[19] 针对 $Re = 150$ 和 $M_\infty = 0.2$条件下采用非线性弹性支撑的自由振动圆柱所呈现的结果表明，结构非线性显著改变了响应分支、锁定特性，以及同步状态和失同步状态之间的转变，并相应影响声辐射。Wang *et al.*[20] 进一步刻画了 $Re = 150$ 和 $M_\infty = 0.2$条件下横向振动圆柱的气动响应和声学响应，识别出包括锁定、相位切换和拍振行为在内的不同响应状态，以及这些状态随后对相应声辐射的影响。然而，文献中尚未报道针对不同响应区域内钝体流致运动的可压缩性效应的系统研究。这正是本研究的动机：识别并刻画可压缩性对钝体流致振荡的共同特征，并提取与之相关的一般性、独特模式。我们分别考察长宽比为 0.5 的椭圆柱的横向涡致振动（TVIV）和涡激旋转振荡（VIRO），其$Re = 150$ 分别为 200，同时将 M_∞ 从 0.1 变化至 0.6。

本文结构安排如下。**第二节**详细讨论问题陈述、所采用的网格生成策略、使用的计算方法、控制方程以及边界条件。**第三节**介绍结果并展开讨论，而**第四节**总结全文并给出结论。

II. 控制方程、数值方法和边界条件

采用自主开发的高精度可压缩纳维–斯托克斯求解器，对圆柱的无阻尼横向涡激振动（TVIV）和椭圆柱的无阻尼涡激旋转振荡（VIRO）进行了非定常黏性可压缩流的直接数值模拟（DNS）。这里假设流体为理想量热完全气体，其参数与 Deepak 和 Bhaumik[21] 给出的参数相同。动力黏度随温度的变化遵循萨瑟兰定律[22]。雷诺数 Re 根据 D（圆柱的直径和椭圆柱的长轴）、来流速度 U_∞、来流密度 ρ_∞以及动力黏度 μ_∞定义，而 $M_\infty = U_\infty/a_\infty$，其中 a_∞ 表示来流中的声速。

分别控制 TVIV 情况和 VIRO 情况下无阻尼振荡随时间变化的无量纲结构动力学方程为

$$\ddot{y} + \left(\frac{2\pi}{U^*}\right)^2 y = \frac{2}{\pi m_*} C_l \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\pi}{U^*}\right)^2 \theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_* A R_g^2}\right) C_m \tag{2}$$

这里，椭圆圆柱和圆柱的无阻尼振荡均由约化速度控制

$$U^* = \frac{U_\infty}{f_n D} \tag{3}$$

以及约化质量 m_*（平均材料密度与 ρ_∞ 的比值），其中 f_n 表示结构振荡的固有频率；C_l 为升力系数； $A = \pi A_r/4$ 表示长宽比为 A_r 的椭圆柱的无量纲截面积； C_m 为气动力矩系数； $R_g = \sqrt{1 + A_r^2}/(2\sqrt{2})$ 表示椭圆截面相对于中心的无量纲回转半径。对于圆柱的 TVIV， $m_* = 3.183$；而对于椭圆柱的涡激旋转振荡，本文采用 $A_r = 0.5$ 和 m_* =6。366。值得注意的是，对于 TVIV， $f_n = \sqrt{k_y/m}/(2\pi)$；而对于涡激旋转振荡，$f_n = \sqrt{k_t/I_z}/(2\pi)$，其中 k_y 和 k_t 分别为横向振动和旋转振荡运动的弹簧常数，m 为圆柱的质量， I_z 表示圆柱的转动惯量。参数 U^* 和 m_* 为无量纲

量，满足 $U^* = 1/St_n$，其中 $St_n = f_n D/U_\infty$ 表示基于 f_n 的斯特劳哈尔数。因此，随着 U^* 的增大，控制振荡的弹簧刚度会降低。

对于两种情况，均采用结构化正交曲线坐标 O网格。模拟在移动曲线坐标域中进行，其中坐标系刚性连接于物体，并随物体一起振荡。相应的可压缩纳维–斯托克斯方程（NSE）、边界条件、用于吸收向外传播的声波、涡波和熵波并防止其在外边界处产生虚假非物理反射的海绵层特性、模拟方法，以及静止和运动情况下的验证，均在 Deepak 和 Bhaumik[21]中进行了详细描述。采用高精度数值方法对对流导数和扩散导数进行空间离散化[21]。时间积分采用 4^{th}阶精度的龙格–库塔方法，同时对耦合的结构动力学方程和控制可压缩NSE[21]进行积分。对于圆柱的TVIV，大部分结果均针对径向方向上为 $30D$ 的较小域尺寸给出。对于椭圆柱的VIRO，大部分模拟结果针对域尺寸为 $60D$的情况给出，Deepak 和 Bhaumik[21] 也对 $M_\infty = 0.2$ 和 0.6进行了详细报告。本文还针对较大的域尺寸$1400D$ 对上述较小域结果进行了验证；对于TVIV和VIRO两种情况，在最低和最高马赫数下响应的关键区域，较大域与较小域具有相同的壁面分辨率以及方位角方向上的网格点数。图1–4给出了域尺寸依赖性的对比结果，包括响应振幅、气动力系数和响应频率。结果表明，两种域尺寸下的响应动力学和气动力系数均高度吻合，说明流体动力学不受域尺寸影响。关于时间步长 Δt 和壁面分辨率的结果验证见 Deepak 和 Bhaumik[21]，此处不再重复。

III. 结果与讨论

对于无阻尼圆柱 TVIV 和长宽比为 $A_r = 0.5$ 的椭圆柱涡激旋转振荡，我们分别取较低的 Re 150 和 200，以确保二维模拟在物理上有效。为确定可压缩性效应，

几何形状	M_∞	Re	$\bar{C}_l$	$(C_l')_{max}$	$\bar{C}_d$	$(C_d')_{max}$	$\bar{C}_m$	$(C_m')_{max}$	St_s
圆	0.1	150	0	5.071×10^{-1}	1.3059	2.399×10^{-2}	-5.378×10^{-6}	5.159×10^{-3}	0.185
	0.3	150	0	5.383×10^{-1}	1.3799	3.301×10^{-2}	6.001×10^{-7}	5.697×10^{-3}	0.183
	0.5	150	0	5.641×10^{-1}	1.5519	2.959×10^{-2}	-1.207×10^{-5}	9.926×10^{-3}	0.182
椭圆	0.2	200	0	3.387×10^{-2}	0.5155	9.154×10^{-5}	2.677×10^{-6}	2.826×10^{-3}	0.2875
	0.4	200	0	3.719×10^{-2}	0.5505	1.064×10^{-4}	-8.138×10^{-8}	3.855×10^{-3}	0.2803
	0.6	200	0	3.746×10^{-2}	0.6221	1.887×10^{-4}	-3.111×10^{-6}	5.387×10^{-3}	0.268

表 I：列出了静止圆柱和椭圆柱的平均气动力系数与脉动气动力系数。这里，$(C_l')_{max}$、$(C_d')_{max}$ 和 $(C_m')_{max}$ 分别表示升力、阻力和力矩系数的脉动幅值，而 C_l、C_d 和 C_m 分别表示相应的时间平均系数

针对 $M_\infty = 0.1$、0.3 和 0.5，开展了大量关于圆柱无阻尼 TVIV 的模拟，同时改变 U^*。对于 $A_r = 0.5$ 的椭圆柱涡激旋转振荡，也针对 $M_\infty = 0.2$、0.4 和 0.6 开展了类似的详细模拟。静止圆柱和椭圆柱对应的平均气动力系数和脉动气动力系数列于表 I 中。在第二个不同步区间 $DS\text{-}II$，还分别模拟了 M_∞ 条件下的 TVIV 圆柱（$M_\infty = 0.2$、0.4 和 0.6）和涡激旋转振荡椭圆柱（$M_\infty = 0.1$、0.3 和 0.5）在 $U^* = 10$ 和 12 时的附加工况。对于所有工况，均在振荡圆柱对应的平均量和脉动量达到统计平稳后检查结果。

对于静止圆柱和椭圆柱，正如表 I 所示，随着 M_∞[15] 增大，气动系数的波动振幅并未显著增加。由于物体相对于入射自由来流具有对称性，升力和力矩的时间平均值几乎为零（$(C_l,\ C_m) \approx 0$），而时间平均阻力系数（C_d）则随着 M_∞ 增大而增加。Canuto 和 Taira[15] 指出，$\bar{C}_d$ 随 M_∞ 增大而增加的趋势，可由 Prandtl–Glauert（PG）关系式令人满意地预测；不过，该关系式本质上是通过关联无黏流中的升力系数推导得出的。随着 M_∞ 增大，涡脱落斯特劳哈尔数 St_s 会降低。Canuto 和 Taira[15], 针对静止流动的研究表明

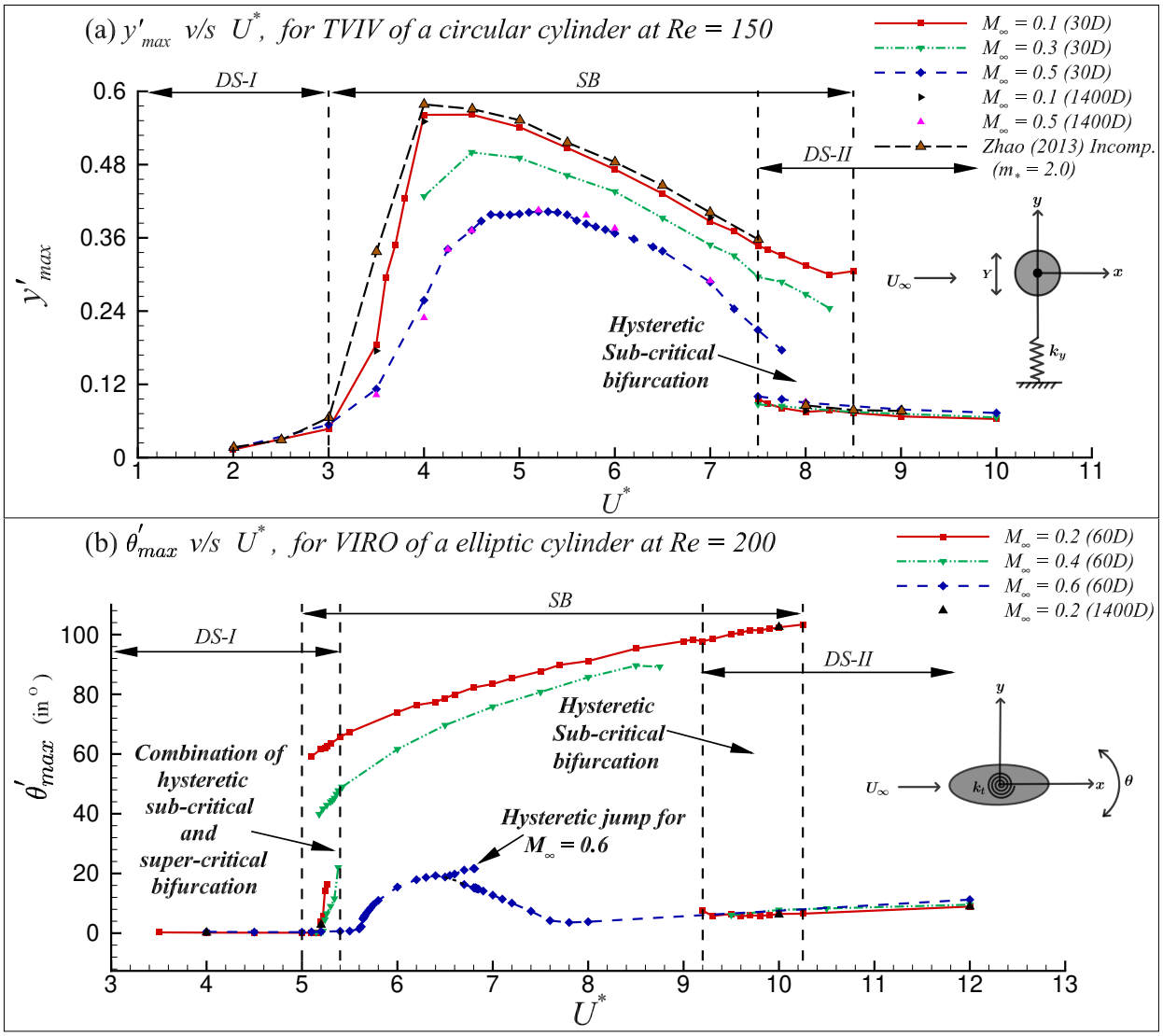

图 1：振荡幅值随 U^* 的变化：（a） y'_{max} 圆柱的 TVIV（$Re = 150$ 和 $m_* = 3.183$）；（b） θ'_{max} 椭圆柱的涡激旋转振荡（$A_r = 0.5$、$Re = 200$和 $m_* = 6.366$）。

流经圆柱时， $St_s \approx (-\eta_1 M_\infty^2 + \eta_0) Re + (\delta_1 M_\infty^2 + \delta_0)$，其中常数 η_1、η_0、 δ_1 和 δ_0 均为正数。

对于绕圆柱流动，理论、实验和分析均已证明，中等振幅的外加横向振荡，或横向的涡致振动（VIV），会延迟三维（$3D$）失稳的发生[23–27]。针对横向振荡圆柱[23] 的Floquet稳定性分析，以及随后对TVIV开展的数值研究[24] 表明，

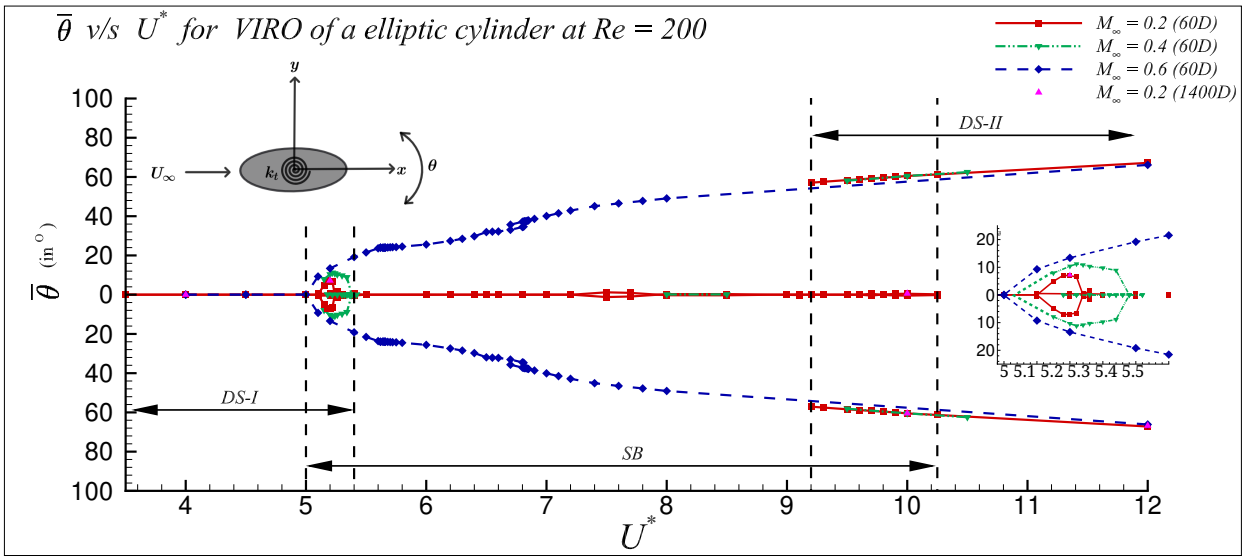

图2：椭圆柱的涡激旋转振荡（$A_r = 0.5$、 $Re = 200$和 $m_* = 6.366$）中，平均偏转 θ 相对于水平取向的变化随 U^* 的变化关系。

不可压缩流绕圆柱流动时， $3D$ 失稳发生的临界雷诺数可从静止情况下的 $Re_{\rm cr} = 180$–190提高至最高 $Re_{\rm cr} = 250$–280；在接近锁定条件（频率接近自然脱落频率）时，即使振动幅值高达 $0.6D$ ，两种尾流模态下也都是如此A 和 B （参见Williamson和Roshko[28]）。对于 $A_r = 0.5$的静止椭圆柱周围的不可压缩流，由于其外形比圆柱更为流线型， $3D$ 失稳会在更高的 $Re_{\rm cr} \approx 250$[29] 下发生。横向振动、旋转振荡[30], 和可压缩性效应[15]也能进一步提高这一临界值。旋转振荡情形还涉及Taylor–Proudman定理[31], ，该定理预言，旋转性会增强二维效应。因此，本文在低雷诺数下进行的二维模拟既能确保物理有效性，又能开展广泛的参数扫描。尽管低 Re 与较高 M_∞ 相结合并不符合现实世界的物理条件，但本研究所采用的计算框架旨在清晰地分离可压缩性对不同响应分支的影响。

图1–3描述了可压缩性对圆柱 TVIV 和椭圆柱涡激旋转振荡响应的影响。其中， y'_{max} 是圆柱横向位移相对于均值的最大波动，

$\theta'_{max} = \max(\theta - \overline{\theta})$是角旋转的最大波动，而 θ 是长轴的平均角旋转

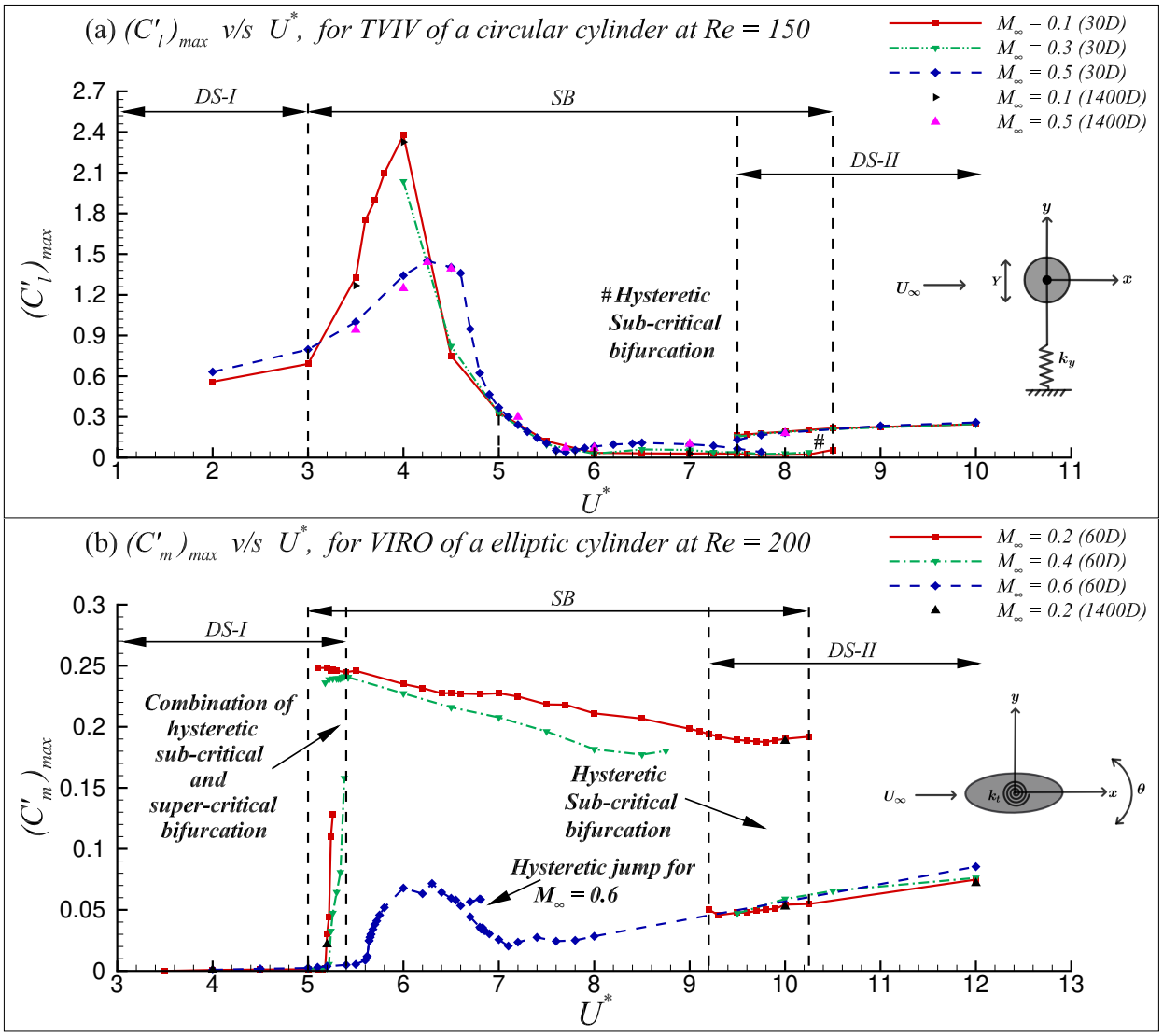

图3：作为 U^* 函数绘制的波动振幅变化：(a) 圆柱 TVIV 的升力系数 C_l （$Re = 150$ 和 $m_* = 3.183$）；(b) 椭圆柱涡激旋转振荡的力矩系数 C_m （$A_r = 0.5$、 $Re = 200$ 和 $m_* = 6.366$）。

角旋转。对于椭圆柱和圆柱的涡致振动，当流经相应静止圆柱的流动达到统计稳定阶段后，弹簧便会启动，从而产生流致振荡。

对于圆柱的 TVIV 情形和椭圆柱的 VIRO 情形，流动动力学的变化可分为三个显著的响应分支：即第一个失同步区或 $DS\text{-}I$；锁定区或同步分支 或SB；以及第二个失同步区或 $DS\text{-}II$ （见图 1）。虽然 $DS\text{-}I$ 被指出

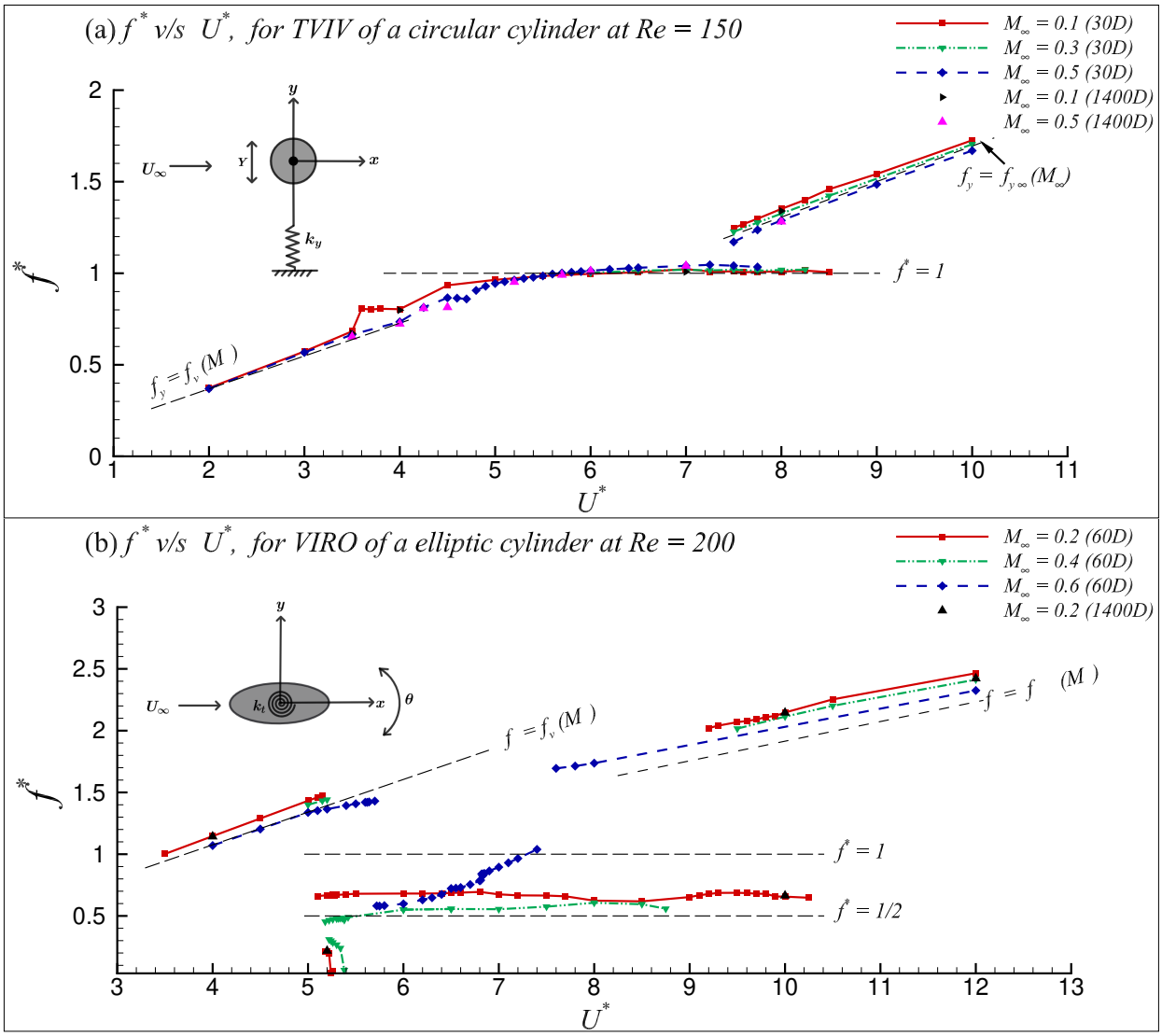

图4：频率比 f^* 随 U^* 的变化关系。图帧 (a) 和 (b) 分别对应圆柱的 TVIV（$Re = 150$ 和 $m_* = 3.183$）以及椭圆柱的涡激旋转振荡（$A_r = 0.5$、 $Re = 200$ 和 $m_* = 6.366$）。

在锁定开始之前，但 $DS\text{-}II$ 存在于锁定结束时。 $DS\text{-}I$ 在 U^*取值较小时出现，而 $DS\text{-}II$则在 U^*取值较大时存在，即分别对应非常刚硬和柔性的弹簧。Navrose 等人 [7]、Mittal 等人[32],Kumar、Singh 和 Sen [33]，以及 Sourav、Kumar 和 Sen[34],分别也指出了不可压缩流中圆柱和椭圆柱 TVIV 的类似分支。图 1(a) 还给出了 Zhao[35] 关于在 $Re = 150$下，处于均匀不可压缩流中的 $m_* = 2.0$ 圆柱 TVIV 的结果。对于此处展示的 TVIV 和 VIRO 情形,

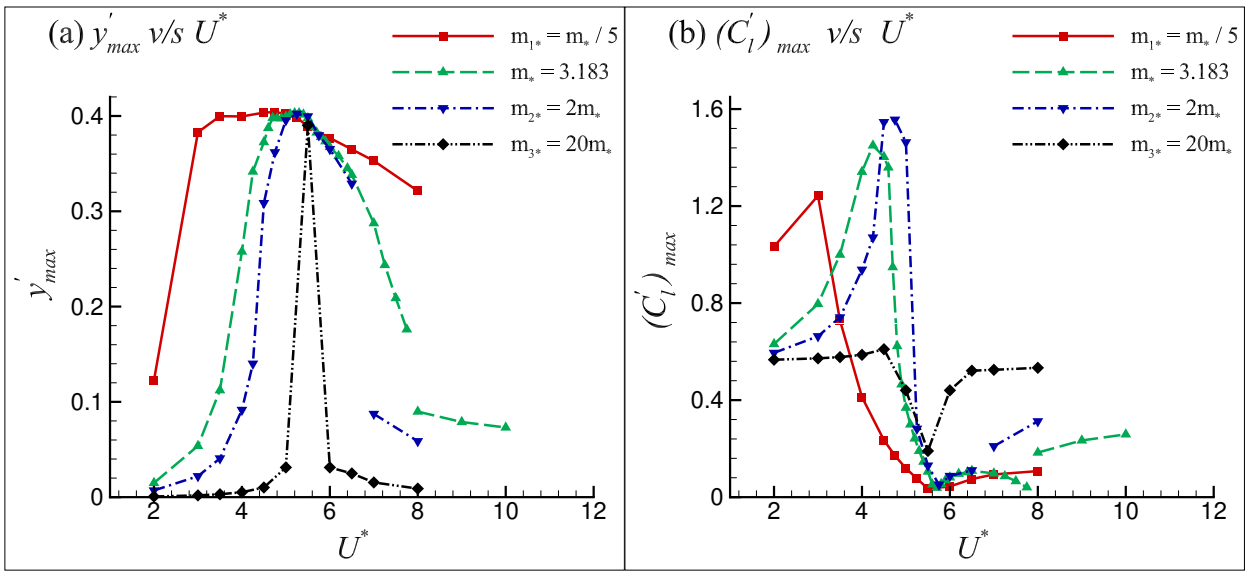

图 5：对于圆柱的 TVIV，在所示的 m_* 值下，(a) 振动幅值 y'_{max} 和 (b) 升力系数的波动幅值 C_l 随 U^* 的变化关系，适用于 $M_\infty = 0.5$ 和 $Re = 150$。

对于两个非同步分支（$DS\text{-}I$ 和 $DS\text{-}II$），流动动力学呈时间谐波特征。然而，对于同步分支，可以观察到流动动力学在准周期与周期特征之间间歇性交替。Deepak 和 Bhaumik[21]展示了椭圆柱涡激旋转振荡情形下 SB 中这种准周期与周期流动动力学之间的间歇性。此外，SB 中还呈现出若干有趣的流动现象，包括形状反转、倍周期分岔，以及尾流中的非对称涡量模式（$P+S$、$2P+S$、$T+S$ 等；Deepak 和 Bhaumik[21]展示了椭圆柱涡激旋转振荡中的这些现象）。

对于圆形和椭圆柱的所有 M_∞ 工况，最大振荡幅值均出现在 SB 区域，而在 $DS\text{-}II$ 和 $DS\text{-}I$ 分支中，TVIV 和涡激旋转振荡工况的振荡幅值均较低（参见图 1(a,b)）。图4展示了 TVIV 和涡激旋转振荡工况下频率比 f^* 随 U^* 的变化。频率比 f^* 定义为 $f^* = f/f_n$，其中 f 表示与振动或振荡运动对应的主导频率。在 $DS\text{-}I$ 区域，对于较低 Re 工况，无论是 TVIV 还是涡激旋转振荡工况，圆柱均作周期振荡，振荡频率由涡脱落频率决定（即，$f = f_v(M_\infty)$），如图4所示。这里，$f_v(M_\infty) = U_\infty St_s/D$ 表示

相应静止圆柱的涡脱落频率，该频率也列于表 I 中。在 $DS\text{-}I$ 中，对于本文研究的上述所有低 Re TVIV 和涡激旋转振荡工况，均观察到 $2S$ 涡量模式。

对于所有 TVIV 情况， SB 的起始大约发生在 $U^* \simeq 3.0$ 处（参见图1(a)）。这表明，对于固定的 m_*，圆柱横向振动的 SB 起始位置通常不会显著依赖于 M_∞。对于横向振动，对 m_* 影响的研究表明，随着 m_* 增加，起始会延迟，同时最大振动幅值 y'_{max} 几乎保持不变（见图5）。在此情况下，响应最初从 $DS\text{-}I$ 末端开始增加，直至达到最大振荡。图1(a)表明，较低 M_∞下 y'_{max} 的增幅更为陡峭。较低马赫数情况下可能会出现滞后跃变，但本文不再进一步探讨。对于较高 M_∞ 的情况，在达到最大值之前也可观察到 y'_{max} 类似的陡峭变化；如图5(a)所示，当 m_* 非常低或非常高时尤其如此。

对于对称椭圆柱的涡激旋转振荡（VIRO）， SB 的起始还与平均偏转（θ）中的¯超临界叉形分岔相耦合，表明平均¯水平取向（$\theta = 0$）是不稳定的。如图2的插图所示，随着 M_∞增加，该分岔的起始点略有降低。在这里，对于低 M_∞ 情况， SB 的起始与三个稳定分支的存在相关（ θ'_{max}¯对应两个解分支，而 θ对应三个分支），这些分支本质上体现了流动的滞后行为。相应的分岔同时具有超临界和亚临界叉形分岔的特征。超临界分岔对应于 $|\theta| > 0$ 的两个具有相同 θ'_{max}的¯解，而亚临界分岔则与θ'_{max} 中伴随 $\theta \approx 0°$的滞后¯跳变相关。在这些M_∞ 情况下，还观察到超临界分岔的两个稳定分支（正、负 θ 吸引子）之间的间歇性切换。随着 U^* 增加，这种切换变得更加无规则且间歇性更强，其动力学表现出类似洛伦兹系统[36], 的特征，如图1(b)所示。正如图1(b)和图2中$M_\infty = 0.2$ 及 0.4所示，随着 M_∞增加，这类情形的强度逐渐减弱，并且对于 $M_\infty = 0.6$完全消失。相关细节，包括频谱内容、时间历程、李萨如图以及尾流模式拓扑，详见 Deepak 和 Bhaumik[21]。

上述 TVIV 和涡激旋转振荡（VIRO）的情况类似于不可压缩

流动[7], 中对称椭圆柱的 TVIV 在锁定区起始处出现的初级滞后现象，其中滞后跃变的强度被认为取决于圆柱的长宽比。同样，本文的结果表明，其强度还取决于 M_∞。随着 M_∞的增加，初级滞后跃变的强度减小；在较高的马赫数下，振荡幅值的初始变化变得更加平滑。通过比较圆柱的 TVIV 和椭圆柱的涡激旋转振荡（VIRO）对应的 y'_{max} 与 θ'_{max}，可以清楚地看出动力学的这一特征。对于圆柱的 TVIV 情况，y'_{max}在 SB中达到最大振荡幅值后，开始在 SB 中单调减小（见图1(a)）。如图5(a)所示，对于相对较高的 m_*，这一变化也变得更加陡峭。相比之下，对于涡激旋转振荡（VIRO），在较低M_∞ 情况下，θ'_{max} 从起始阶段到结束阶段在 SB 中单调增加。随着 M_∞的增加，增加速率趋于减缓。对于较高的 M_∞ 情况（如 0.6），其变化与 TVIV 情况相似：单调增加至最大 θ'_{max}，随后减小（见图1(b)）。

在图3中，$C'_{l,\ \max}$ 对于TVIV和$C'_{m,\ \max}$ 对于涡激旋转振荡，分别表现为其对应运动的气动力驱动因素。对于TVIV，$C'_{l,\ \max}$ 的变化与 y'_{max}相似，后者在 SB中随 U^* initially增加，随后单调减小（参见图3(a)）。随着 M_∞增加，$C'_{l,\ \max}$ 的变化变得更加平滑，斜率也更缓。相比之下，对于较低 M_∞下的涡激旋转振荡，$C'_{m,\ \max}$ 在 SB 中单调减小，这与该区域内 θ'_{max} 的单调增加相反。然而，在较高 M_∞下，这一变化发生改变，其变化与相应的 θ'_{max} 变化相似（见图3(b)）。

在 SB 区域，对于所有 M_∞ 工况，圆柱的TVIV的 $f^* \simeq 1.0$（见图4(a)），表明存在与高振荡幅值相关的共振现象（见图1(a)）。对于圆柱[23,37,38]、菱形柱[39], 、三角柱[40], 以及攻角变化的椭圆柱的TVIV，在不可压缩流中且 Re 从低值（$Re = 100$–150）变化到高值（$Re = 1000$），对应于 $2D$ 和 $3D$ 流动动力学时，也观察到了类似现象。在 SB 中，VIRO的动力学与TVIV情况显著不同（见图4(b)）：对于较低的 M_∞工况，SB中的 f^* 几乎保持不变，并且 U^*，因此在该区域 $f^* \approx 0.5$。对于较高的 M_∞ 工况，f^* 逐渐从0.5增加到1.0，这一点也见于图4(b)中的 $M_\infty = 0.6$。对于这种情况，振荡频率略低于 SB中的 $f_v/2$。因此，对于低 M_∞ 工况，圆柱的振荡频率几乎为 $f_n/2$；而对于 SB中的较高 M_∞ 工况，其振荡频率则趋近于$f_v/2$。这表示倍周期

现象[42,43]：对于VIRO情况，从结构固有频率的一半逐渐过渡到相应静止圆柱涡脱落频率的一半。

对于 TVIV 和涡激旋转振荡两种情况，在 SB 末端均观察到次级滞回跳跃，这与 Navrose 等人[7] 报告的椭圆柱在不可压缩流中发生的 TVIV 情况相似。对于 TVIV 和涡激旋转振荡，随着 M_∞ 增加，次级滞回跳跃的范围和强度均减小，如图1–3所示。例如，对于 TVIV，在 $M_\infty = 0.1$时，$7.5 \leq U^* \leq 8.5$对应的情况会出现次级滞回区域；在 $M_\infty = 0.3$时，$7.5 \leq U^* \leq 8.2$对应的情况会出现；在 $M_\infty = 0.5$时，$7.5 \leq U^* \leq 7.75$ 对应的情况会出现。对于较高的 $M_\infty = 0.6$ 情况下的涡激旋转振荡，次级滞回跳跃在锁定区末端完全消失，不过，在 U^* 附近（振荡幅值达到最大处）观察到一个新的中间滞回跳跃，发生在准周期状态与轨道1的周期状态之间（见图1(b)）。Deepak 和 Bhaumik[21] 中给出了关于 $M_\infty = 0.2$ 和 0.6 时涡激旋转振荡动力学的更多细节。

滞后跃变的下分支进一步延伸至 $DS\text{-}II$（对于TVIV，$M_\infty = 0.1$、0.3和0.5分别对应红线、绿线和蓝线；对于涡激旋转振荡，$M_\infty = 0.2$ 和0.4分别对应红线和绿线），而对于 $M_\infty = 0.6$，该变化则平滑地并入 $DS\text{-}II$。对于涡激旋转振荡，尽管从锁定区末端到 $DS\text{-}II$起始处，振荡幅值会突然下降，但 θ'_{max} 和C'_m在该阶段仍持续单调增加，直至达到相应的自由旋转条件（$U^* \to \infty$）。在此阶段，无论M_∞如何，均可观察到涡街呈 C（$2S$）模式，且平均偏转 θ 持续增大，表明有效攻角也随 U^*增大。相比之下，对于 TVIV，振荡幅值 y'_{max} 单调减小，而C'_l、$_{\max}$ 在 $DS\text{-}II$中增大。Soti和De[44]（对于 $Re = 150$、100和 $m_* = 10$）、Zhao[45]（对于 $Re = 150$ 和 $m_* = 8.0/\pi$）以及 Prasanth和Mittal[2]（对于 $Re = 100$ 和 $m_* = 10.0$）也报道了在不可压缩流中受迫振荡的圆柱无阻尼TVIV的类似现象。对于TVIV，在 $DS\text{-}II$ 中观察到的周期运动中，高次谐波的相对主导地位可以解释这种行为的表面原因。对于涡激旋转振荡，尽管在 $DS\text{-}II$[21]中也观察到类似的频谱行为，但 θ'_{max} 会因有效攻角增大而增大，从而导致类似驰振的振荡特性。

图 4 还表明，对于 TVIV 和涡激旋转振荡，频率比 f^* 会随着 U^* 在 $DS\text{-}II$ 中线性增加，此时圆柱以接近于

相应自由横向振动频率（$f_{y\infty}$）或振荡频率（$f_{\theta\infty}$）的频率振荡。图 4 表明，随着 M_∞减小，自由振荡频率略有增加，这与表 I 中所述相应静止圆柱的涡脱落行为类似。事实上，对于圆柱的 TVIV， $f_{y\infty} \simeq 0.93 f_v$；而对于椭圆柱的涡激旋转振荡， $f_{\theta\infty} \simeq 0.71 f_v$，且与 M_∞无关，其中 f_v 表示相应静止圆柱的涡脱落频率，如表 I 所述。

在 SB 中，图 1–3 所示结果表明，随着 M_∞[15] 增大，流动诱导运动的稳定性增强，从而导致 TVIV 和涡激旋转振荡的振荡幅值均减小。相反，在 $DS\text{-}II$ 中，TVIV 和涡激旋转振荡的振荡幅值均随 M_∞ 的增大而增加。对于 TVIV 和涡激旋转振荡，分别相对于 $C'_{l,\ \max}$和 $C'_{m,\ \max}$ 也观察到了类似的增加现象。这一现象类似于普朗特–格劳特（PG）可压缩性修正类比关系[46],，该关系基于无黏且无旋流假设推导而来。上述规律指出，气动力系数会随着 M_∞ 的增大而增加，其表达式为

$$C_l = \frac{C_{l_i}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad \text{and} \quad C_m = \frac{C_{m_i}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \tag{4}$$

其中， C_{l_i} 和 C_{m_i} 分别表示相应不可压缩流动状态下的升力系数和力矩系数。图 6 比较了通过 DNS 获得的 TVIV 的 y'_{max} 和 $C'_{l,\ \max}$ 以及涡激旋转振荡的 θ'_{max} 和 $C'_{m,\ \max}$，并将其分别与 $U^* = 10.0$ 和 12。0 时的普朗特–格劳特关联式进行比较。相应的修正的 PG关联因子计算如下

$$f_{\mathrm{PG}} = \frac{\sqrt{1 - (M_\infty)_{\mathrm{ref}}^2}}{\sqrt{1 - (M_\infty)^2}} \tag{5}$$

其中，$(M_\infty)_{\mathrm{ref}} = 0.1$ 是参考马赫数。图 6(a) 比较了 y'_{max} 与 $(y'_{max})_{\mathrm{PG}} = (y'_{max})_{\mathrm{ref}} \times f_{\mathrm{PG}}$，而图 6(c) 则比较了 $C'_{l,\ \max}$ 与 $(C'_{l,\ \max})_{\mathrm{PG}} = (C'_{l,\ \max})_{\mathrm{ref}} \times f_{\mathrm{PG}}$随 M_∞ 变化的关系，对象为 $U^* = 10.0$下的 TVIV。图 6(b,d) 中也采用了类似的关联关系，比较 θ'_{max} 与 $C'_{m,\ \max}$，对象为 $U^* = 12.0$下的 VIRO。正如图 6(a,b) 所示， y'_{max} 和 θ'_{max}与相应的 PG 关联值吻合良好。这可能表明，在 $DS\text{-}II$ 状态下，可压缩性的无黏特性会提高振荡响应；相比之下，在 SB中，随着 M_∞ 增加，黏性稳定作用增强，从而使响应减弱。 $DS\text{-}II$ 中类似的现象可能

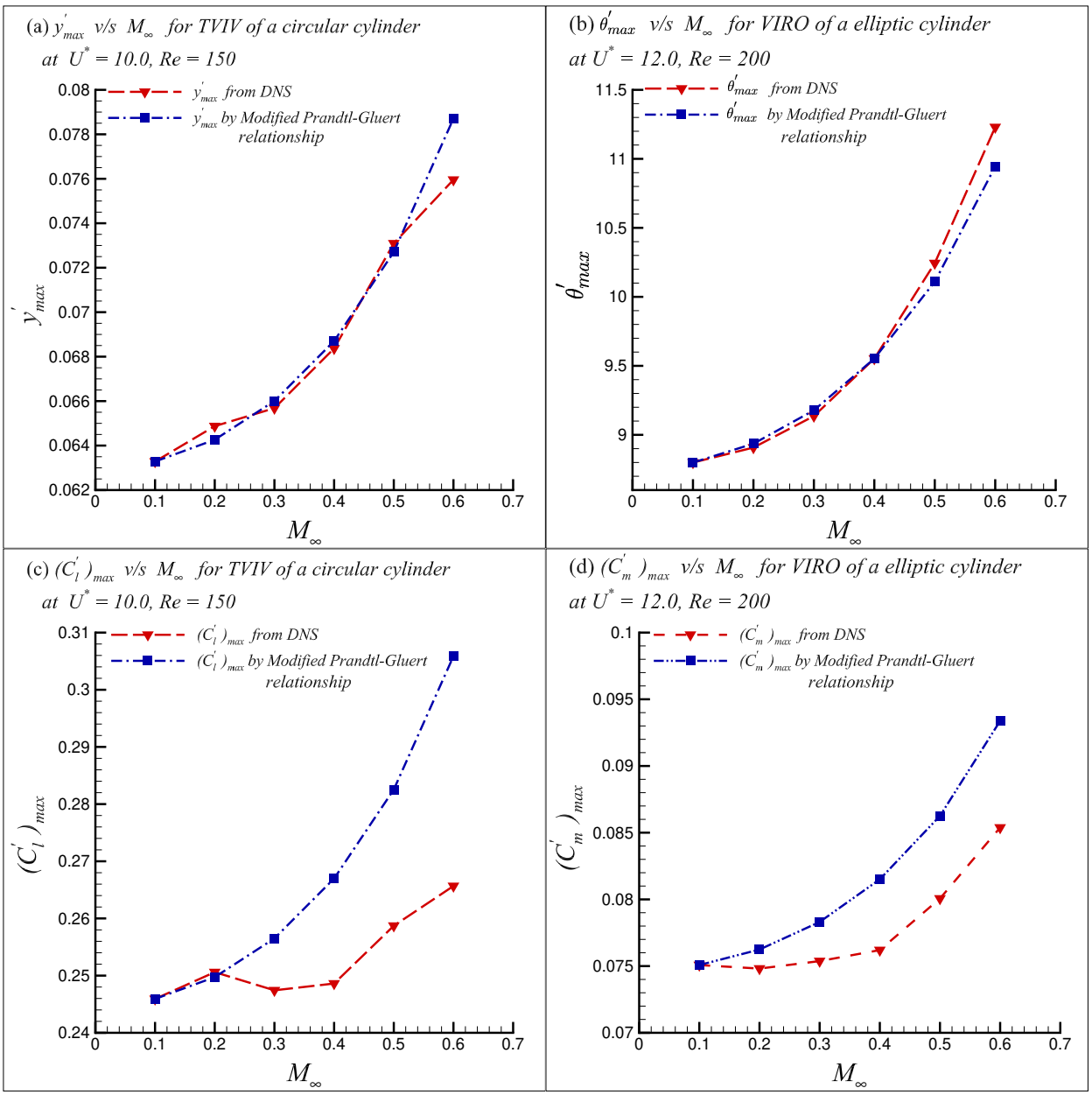

图 6：圆柱在 $U^* = 10$ 下的 TVIV（a、c）以及椭圆柱在 $U^* = 12$ 下的涡激旋转振荡（b、d）中，振荡幅值（y'_{max} 和 θ'_{max}）以及升力和力矩系数的波动振幅（$C'_{l,\ \max}$ 和 $C'_{m,\ \max}$）随 M_∞ 的变化，并与修正普朗特–格劳特关系一同绘出。

也会出现在 $DS\text{-}I$ 中，但本文未对此进行详细探讨。由于在 $DS\text{-}II$ 状态下，非对称横截面会出现驰振现象，因此结果表明，与 SB中的情况不同，马赫数增加会增强发生驰振振荡的趋势。尽管本研究的模拟是在低雷诺数下进行的，

已识别的趋势与基本的可压缩性机制一致[15,16]，因此可能在更高雷诺数下持续存在。要确认这些趋势的定量程度，还需在更高雷诺数下开展进一步的三维研究。

IV. 总结与结论

本文比较研究了长宽比为 0.5 的圆柱横向涡激振动（TVIV）与椭圆柱涡激旋转振荡（VIRO），针对 $0.1 \leq M_\infty \leq 0.6$ 种工况开展研究，以更全面地理解低至中等亚声速马赫数条件下，不同特征区域中可压缩性对流致运动影响的共同特征。对于这两种流致运动，均普遍存在三个特征分支，即 $viz.$， $DS\text{-}I$（非同步区 I）、SB（同步分支）以及 $DS\text{-}II$（非同步区 II）。如图 1–4 所示，尽管 TVIV 与 VIRO 的动力学存在显著差异，但仍观察到若干共同特征，例如锁定区内振荡幅值增大SB，而在另外两个区域内可压缩性效应减弱。对于这两种流致运动，随着 M_∞增加，SB 中的振荡幅值和脉动气动力系数均显著受到抑制。 M_∞ 的增加还会减小 SB起始和结束时滞后跃变的范围与强度，如图 1 和图 3 所示。尽管 SB中存在可压缩性的稳定作用，但对于这两种流致运动，随着 M_∞ 增加， $DS\text{-}II$ 中的波动幅值反而增大。值得注意的是，对于两种情况， $DS\text{-}II$ 区内振荡幅值的变化均密切遵循修正普朗特-格劳特关系（见图 6）。这一二分特征表明，在锁定区域内，黏性稳定作用占主导，而在$DS\text{-}II$中，响应则由无黏可压缩性效应控制。尽管本文模拟采用较低雷诺数，但所识别出的趋势与基本的可压缩性机制一致，因此可能在更高雷诺数下仍然存在。还需指出的是，在实际流动中，自由来流马赫数的增加通常伴随着有效雷诺数的升高（在驻点条件固定的风洞实验中，这种效应还可能进一步增强），从而可能进一步强化本文在 $DS\text{-}II$区域观察到的幅值变化趋势。通过更高雷诺数下的三维模拟对这些效应进行定量验证，仍有待未来研究。

参考文献

[1]S. Singh 和 S. Mittal，“低雷诺数下的涡激振荡：滞后现象与涡脱落模态”，流体与结构杂志**20**，1085–1104（2005）。[2]T. Prasanth 和 S. Mittal，“低雷诺数下圆柱的涡激振动”，《流体力学杂志》**594**，463–491（2008）。[3]J. S. Leontini、M. C. Thompson 和 K. Hourigan，“二维流动中涡激振动分支行为的起始”，流体与结构杂志**22**，857–864（2006）。[4]S. Sen 和 S. Mittal，“低雷诺数下方柱体的自由振动”，流体与结构杂志 **27**，875–884（2011）。[5]M. Zhao、L. Cheng 和 T. Zhou，“低雷诺数下方柱体涡激振动的数值模拟”，《流体物理》**25**，023603（2013）。[6]H. Zhu、T. Tang、Y. Gao、T. Zhou 和 J. Wang，“置于典型来流方向的梯形柱体的流致振动”，流体与结构杂志 **103**，103291（2021）。[7]Navrose、V. Yogeswaran、S. Sen 和 S. Mittal，“低雷诺数下椭圆柱的自由振动”，流体与结构杂志 **51**，55–67（2014）。[8]D. Kumar、M. Mittal 和 S. Sen，“椭圆柱涡激振动中响应的改变与涡脱落抑制”，《国际传热与流体流动杂志》**71**，406–419（2018）。[9]G. Biswas 和 S. Sarkar，“低雷诺数下横向来流中热浮力对圆柱绕流涡脱落的影响”，《国际传热与传质杂志》**52**，1897–1912（2009）。[10]L. Ding、Y. Fu、D. Liu 和 J. Ran，“探索加热表面附近圆柱的传热性能和涡激振动特性”，《流体物理》**36**（2024年）。[11]A. Sohankar 和 M. Rahmani，“横向来流中加热圆柱的混合对流与流致振动”，流体与结构杂志 **81**，450–468（2018）。[12]H. Wan 和 S. S. Patnaik，“利用热效应抑制圆柱的涡激振动”，《流体物理》**28**（2016）。

[13]H. Garg、A. K. Soti 和 R. Bhardwaj，“横流热浮力作用下圆柱的涡激振动与驰振”，《流体物理》**31** (2019年)。[14]H. Wan、J. A. DesRoches、A. N. Palazotto 和 S. S. Patnaik，“椭圆柱的涡激振动及其通过混合对流实现的抑制”，流体与结构杂志**103**，103297 (2021)。[15]D. Canuto 和 K. Taira，“圆柱周围的二维可压缩黏性流”，《流体力学杂志》**785**，349–371 (2015)。[16]T. Nagata、A. Noguchi、K. Kusama、T. Nonomura、A. Komuro、A. Ando 和 K. Asai，“雷诺数为1000至5000时圆柱上可压缩流动的实验研究”，《流体力学杂志》**893**，A13 (2020年)。[17]J. Song、H. Hu、G. Li、H. Zhang 和 F. Ren，“用于计算圆柱辐射噪声的广义插值补充级联格子玻尔兹曼方法”，《计算物理学杂志》**517**，113319 (2024年)。[18]M. M. Rajamuni、Z. Liu、L. Wang、S. Ravi、J. Young、J. Lai 和 F.-B. Tian，“一种用于模拟涉及大变形的流固声相互作用的浸入边界正则化格子玻尔兹曼方法”，《流体物理》**36** (2024年)。[19]S. Liu、F. Xie、Y. Qu、P. Gao 和 G. Meng，“黏性流中非线性支撑刚性圆柱的流固声响应”，《流体物理》**37**(2025)。[20]K. Wang、G. Jin、T. Ye、Y. Chen、等，“采用混合方法对低马赫数流中自激振荡圆柱进行气动与声学分析”，流体与结构杂志**136**，104339 (2025)。[21]S. O. Deepak 和 S. Bhaumik，“可压缩性和取向对椭圆柱流致俯仰振荡的影响”，《流体物理》**38** (2026)。[22]J. Hilsenrath、C. W. Beckett、W. S. Benedict、L. Fano、H. J. Hoge、J. F. Masi、R. L. Nuttall、Y. S. Touloukian 和 H. W. Woolley，气体热物性表：包括空气、氩、二氧化碳、一氧化碳、氢、氮、氧和水蒸气的热力学性质与输运性质表，第564卷（美国商务部、国家标准局，1955年）。[23]J. S. Leontini、M. C. Thompson 和 K. Hourigan，“横向振荡圆柱尾流中的三维转捩”，《流体力学杂志》**577**，79–104 (2007)。[24]M. Verma 和 A. De，“具有两个自由度涡激振动的弹性支撑圆柱流动的三维性”，《流体物理》**34**

(2022年)。[25]E. Berger，“抑制振荡圆柱后方的涡脱落与湍流”，《流体物理学》**10**，S191–S193 (1967)。[26]G. Koopmann，“低雷诺数下振动圆柱的涡旋尾流”，《流体力学杂志》**28**，501–512 (1967)。[27]O. M. Griffin，“低雷诺数下振荡圆柱的非定常尾流”，(1971)。[28]C. H. Williamson 和 A. Roshko，“振荡圆柱尾流中的涡旋形成”，流体与结构杂志**2**，355–381 (1988)。[29]J. S. Leontini、D. L. Jacono 和 M. C. Thompson，“椭圆柱尾流的稳定性分析”，《流体力学杂志》**763**，302–321 (2015)。[30]D. L. Jacono、J. S. Leontini、M. C. Thompson 和 J. Sheridan，“旋转振荡圆柱尾流中三维转捩的改变”，《流体力学杂志》**643**，349–362 (2010)。[31]D. J. Tritton，物理流体动力学（Springer Science & Business Media，2012年）。[32]S. Mittal 等，“低Re下圆柱自由振动中的一种新型多状态区间”，流体与结构杂志**68**，310–321 (2017年)。[33]D. Kumar、A. K. Singh 和 S. Sen，“识别执行涡激振动的曲线与直线轮廓振荡器的响应分支”，《海洋工程》**164**，616–627 (2018年)。[34]K. Sourav、D. Kumar 和 S. Sen，“低质量比椭圆柱的涡激振动：新响应分支的识别”，《流体物理》**32** (2020年)。[35]M. Zhao，“雷诺数为150时串列与并列布置的两个刚性耦合圆柱的流致振动”，《流体物理》**25**，123601 (2013)。[36]P. G. Drazin，非线性系统，第10卷（剑桥大学出版社，1992年）。[37]T. R. Sahu、M. Furquan、Y. Jaiswal 和 S. Mittal，“带刚性分流板的圆柱流致振动”，流体与结构杂志**89**，244–256 (2019年)。[38]M. Verma 和 A. De，“横向振荡开槽圆柱的三维数值研究及其在能量采集中的应用”，《流体力学杂志》**967**，A10 (2023年)。[39]K. Sourav、D. Kumar 和 S. Sen，“低雷诺数下菱形柱的无阻尼纯横向涡激振动”，《海洋工程》**197**，106867 (2020年)。

[40]A. K. Sourav 和 B. P. Tallapragada，《揭示形状对涡激振动的影响：来自菱形和等边三角形圆柱模拟的见解》，《流体物理》**35** （2023年）。[41]J. Zhao、K. Hourigan 和 M. C. Thompson，《发生横向流致振动的椭圆柱的动态响应》，流体与结构杂志**89**，123– 131（2019年）。[42]J. S. Leontini、M. Griffith、D. L. Jacono 和 J. Sheridan，《不同迎角下椭圆截面物体的流致振动》，流体与结构杂志**78**，356–373（2018年）。[43]P. K. Yadav、H. Sarkar 和 S. Sen，《来流条件下自由振动椭圆柱周围的流动》 45°，《流体与结构杂志》**130**，104201（2024年）。[44]A. K. Soti 和 A. De，《受限圆柱的涡激振动与高效流动能量提取》，《流体物理》**32** （2020年）。[45]M. Zhao，《定常流中固有频率比对圆柱涡激振动的影响》，《流体物理》**32**（2020年）。[46]J. D. J. Anderson，《空气动力学基础》，第6版（麦格劳-希尔教育，纽约，2017年）。