arXiv:2611.30904v1 [nucl-ex] 23 Nov 2026

利用 CMS 开放数据，通过微分流系数 $v_0(p_T)$ 探测径向流

Allan E. F. G. Ferreira ,[1] Thiago S. Domingues ,[2,†] Matthew Luzum ,[2,‡] 和 Cesar A. Bernardes [3,§][1]圣保罗州立大学 *Júlio de Mesquita Filho*（*UNESP*）理论物理研究所（*IFT*），*R. Dr. Bento Teobaldo Ferraz, 271 - Várzea da Barra Funda,* 圣保罗 *- SP*，巴西，*01140-070*[2]圣保罗大学（*USP*）物理研究所，*R. do Matão, 1371*，圣保罗，巴西，*05508-090*[3]圣保罗州立大学 *Júlio de Mesquita Filho*（*UNESP*）科学计算中心（*NCC*），*R. Dr. Bento Teobaldo Ferraz, 271 - Várzea da Barra Funda,* 圣保罗 *- SP*，巴西，*01140-070*(日期：2026年11月24日)

我们利用 CMS 开放数据，对 Pb+Pb 在 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特碰撞能量下、中心度为 50–60% 和 60–70% 的中外周中心度类别，全面研究了微分径向流系数 $v_0(p_T)$ 及其 p_T积分对应量 v_0 。测得的 $v_0(p_T)$ 分布与 ATLAS 在 $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ 太电子伏特下的测量数据进行了比较，结果显示径向流涨落的整体幅度具有明显的能量依赖性。值得注意的是，标度比 $v_0(p_T)/v_0$ 近似呈现普适性，在低 p_T下基本不受碰撞能量和中心度影响，并一直保持到 $p_T \sim 3$ 吉电子伏特，这表明积分 v_0 包含了大部分能量依赖信息。我们将数据与 Jetscape 多阶段混合模型进行比较，并使用基于模型输出主成分分析训练的高斯过程模拟器，探索完整的 17 维参数空间。采用 Sobol 指数进行的全局基于方差的敏感性分析表明，对于 Grad 黏性修正，核子涨落参数σ_k 是 v_0、 $v_0(p_T)$ 和 $v_0(p_T)/v_0$方差的主要来源，其次是自由流参数 τ_R 和 α 以及核子宽度 w。体黏度峰值 $(\zeta/s)_{\max}$对 v_0 的影响较弱，但对 $v_0(p_T)$ 和标度比的影响有所增强。基于 p_T 积分观测量和缩放谱校准的模拟器预测，在低和中等 p_T 下对数据的描述较为合理。在 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特下校准的参数也能描述 ATLAS 在 5.02 太电子伏特下的 $v_0(p_T)/v_0$数据，这支持径向流涨落在不同碰撞能量下具有近似普适的动量依赖性。

I. 引言

在大型强子对撞机等设施开展的超相对论重离子碰撞，会产生一种由解禁闭夸克和胶子构成的强相互作用态，即夸克-胶子等离子体（QGP）。这种介质最显著的特征之一是集体流的出现，它反映了系统对初态几何和涨落的流体动力学响应。夸克-胶子等离子体的集体膨胀可分解为各向异性分量和各向同性分量。各向异性分量通常通过方位角粒子分布的傅里叶系数 v_n 来表征，而各向同性分量则与径向流相关，径向流对应于由压力梯度驱动的介质集体向外膨胀。这种径向膨胀使横动量（p_T）谱呈现出典型的硬化特征，并产生已鉴别粒子谱和流观测量中众所周知的质量排序模式。

最近提出了一种用于研究径向流涨落的横动量微分可观测量，记作 $v_0(p_T)$，并已得到广泛研究 [1–14]。可观测量 $v_0(p_T)$ 测量给定p_T 区间内粒子产额的逐事件涨落与事件平均横动量 $[p_T]$ 涨落之间的协方差，从而直接探测径向流涨落。其形式化定义为 [2, 4],

$$v_0(p_T) = \frac{\langle \delta n(p_T)\, \delta[p_T] \rangle}{\langle n(p_T) \rangle \sigma[p_T]}, \tag{1}$$

其中， $n(p_T)$表示给定 p_T 区间内逐事件的粒子产额，$[p_T]$ 是事件平均横动量， $\delta x = x - \langle x \rangle$ 表示相对于系综平均值的涨落，而 $\sigma[p_T]$ 是 $[p_T]$的标准差。该定义类似于皮尔逊相关系数，用于量化谱形状的涨落与平均横动量的涨落之间的相关性。此外，我们可以将 $v_0(p_T)$的 p_T积分对应量识别为$v_0 \equiv \sigma[p_T]/\langle p_T \rangle$，因为 $\langle p_T \rangle = \langle [p_T] \rangle$。

近期的理论和实验研究表明， $v_0(p_T)$呈现出集体行为的若干典型特征。特别是，ATLAS [15] 和ALICE [16] 合作组在$\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ 太电子伏特下Pb+Pb碰撞中的测量结果显示，$v_0(p_T)$主要由长程关联主导，且对赝快度间隔的依赖较弱，表明

这表明，该可观测量主要对全局集体动力学敏感，而非短程非流贡献 [15–21]。此外，归一化形状$v_0(p_T)/v_0$ 在不同碰撞中心度下呈现出近似普适的行为，与各向异性流测量中观察到的

* allan.godoi@unesp.br
† thiago.siqueira.domingues@usp.br
‡ mluzum@usp.br§
cesar.bernardes@unesp.br

标度性质 [12]十分相似。另一个显著特征是， $v_0(p_T)$在谱的平均横动量 $\langle p_T \rangle$附近发生符号变化；这一现象自然源于径向流涨落：径向流较强的事件会产生更硬的谱，从而在较大的 p_T处形成正关联，而在较低的 p_T [2]处形成负关联。这些性质有力支持了将 $v_0(p_T)$解释为一种真正的集体可观测量，它与各向同性的流体动力学膨胀相关。尽管各向异性流可观测量（$v_n, n = 1, 2, \ldots$）主要约束剪切黏性效应 [22, 23], ，径向流涨落能够探测介质的各向同性响应，因此可对体黏性动力学提供互补的敏感性。近期的流体动力学计算进一步表明，缩放观测量 $v_0(p_T)/v_0$ 对夸克-胶子等离子体的体黏度 [2, 15], 尤其敏感。因此，这一可观测量已成为约束夸克-胶子等离子体输运系数，以及研究初态涨落与各向同性流体动力学响应之间相互作用的有力工具 [4]。

在本研究中，我们利用 CMS 公开数据 [24], 对 $v_0(p_T)$ 这一带电粒子的径向流可观测量进行系统研究。数据对应于能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特的 Pb+Pb 碰撞，并将结果与 ATLAS 合作组在 $\sqrt{s_{NN}}$ =5.02— TeV 下对带电粒子的测量结果进行比较 [15]。具体而言，我们研究 $v_0(p_T)$ 的中心度依赖性、标度性质和横动量结构，并通过对重离子碰撞前沿混合模型参数空间进行全局敏感性分析，探究该可观测量对介质内在性质的敏感程度。近期证据表明径向流涨落具有集体性质 [4], , 受此启发，我们采用高斯过程（GP）模拟器，在测量到的可观测量基础上扫描前沿混合模型的整个参数空间 [25] 。本文结构如下：第二节介绍本研究采用的分析框架；在 A 小节中，我们介绍实验数据集和分析方法；在 B 小节中，详细说明用于预测参数空间内径向流可观测量的模拟器的构建与验证；在 C 小节中，介绍用于确定对 $v_0(p_T)$ 及其对应量 v_0 最相关的模型参数的全局敏感性分析。第三节呈现结果：我们首先在 A 小节中利用 CMS 实验数据探究 $v_0(p_T)$ 的集体性质，随后在 B 小节中使用训练好的模拟器扫描完整参数空间，最后在 C 小节中对 v_0 进行缩放，并将这一缩放观测量与实验数据进行比较。第四节给出结论。关于模型计算、主成分分析（PCA）和模拟器验证的补充信息见附录 A 和 B。

II. 分析设置

A. 实验数据与分析方法

数据分析使用来自 CMS 开放数据门户的公开数据集，该数据集对应于 2011年运行期采集的 Pb+Pb 碰撞，碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特 [24], , 并限于 50–70% 中心度类别中的外围碰撞 [1]。事件和径迹按照该数据集的 CMS规定进行筛选 [26]。径迹筛选标准包括$0.5 \leq p_T \leq 10.0$ 吉电子伏特和赝快度 $|\eta| < 2.4$。

感兴趣的量计算如下： $[p_T] = \sum_i w_i p_T / \sum_i w_i$和 $n(p_T) = \sum_i^{p_T} w_i / \sum_i w_i$，其中$\sum_i^{p_T}$ 表示小 p_T 区间内所有径迹的总和， w_i 为探测器修正权重。这些修正通过使用 Hydjet [27] 事件生成器和 Geant4 [28], 对 Pb+Pb 碰撞进行完整的蒙特卡洛模拟，并比较生成器级别的带电粒子与重建径迹 [26, 29]得出。

为抑制非流关联，我们采用了双子事件方法，将数据集划分为两个 η 范围$-2.4 \leq \eta_A \leq -\eta_{gap}/2$和 $\eta_{gap}/2 \leq \eta_B \leq 2.4$，二者之间以一个以零为中心、长度为 η_{gap} 的区间隔开。我们在分析中使用不同的 η_{gap} 来研究长程关联 [15, 30, 31]。

径向流系数 $v_0(p_T)$ 可通过因子化假设获得：将归一化协方差 $\langle \delta n(p_T) \delta[p_T] \rangle / \langle n(p_T) \rangle \langle p_T \rangle$ 除以 p_T 积分可观测量 v_0，从而还原式 1。

$$v_0(p_T) = \frac{1}{v_0} \frac{\langle \delta n(p_T) \delta[p_T] \rangle}{\langle n(p_T) \rangle \langle p_T \rangle}. \tag{2}$$

我们通过构造可观测量来验证因子化假设：在不同的 p_T 参考（p_T^{ref}）范围内评估 $\delta[p_T]$ 和 $\langle p_T \rangle$ ；对于 $\delta n(p_T)$ 和 $\langle n(p_T) \rangle$, 我们使用每个分析区间内横动量在 $0.5 < p_T < 10.0$ 吉电子伏特以内的径迹。

本文所展示可观测量的理论预测采用 Jetscape 框架 [25, 32, 33], 得出，并使用与实验数据所采用方案相同的分箱方案。

B. 主成分分析与高斯过程回归器

为实现对 Jetscape混合重离子碰撞模型整个参数空间内积分径向流系数、微分径向流系数及其比值的快速而准确预测，我们

[1]本分析仅限于中心度为 50–70% 的事件，因为 CMS合作组提供的该数据集不包含更中心的碰撞类别。

针对附录 A 节所述主成分分析得到的主成分表示构建高斯过程模拟器。这种代理建模方法使我们能够对高维模型输出进行插值，并量化其不确定性；该方法已广泛应用于现代相对论重离子碰撞的贝叶斯参数估计中 [25, 33–36]。

模拟器输入由定义混合模拟框架初始条件、输运系数和粒子化的完整 $N_{\rm mp}$模型参数集构成。参数完整列表见文献 [33] 。这些参数包括初始熵归一化、核子亚结构性质、弛豫时间尺度、剪切黏度和体黏度的温度参数化形式，以及切换温度。设计点通过空间填充设计，在预先设定范围内的均匀先验分布中抽取，从而在 $N_{\rm mp}$维参数空间中得到 $N_{\rm design}$ 个训练点。具体而言，本分析中的参数空间为17维。每个设计点均由参数向量表示

$$\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \ldots, \theta_{iN_{\rm mp}}), \tag{3}$$

该参数向量用作模拟器的输入。

我们没有直接将完整模型输出作为中心度和横动量的函数进行模拟，而是先对可观测量进行主成分分析（PCA），从而降低模拟器目标空间的维度。随后，针对前 $N_{\rm PC}$个主成分系数分别训练独立的模拟器，

$$\mathbf{z}_i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{iN_{\rm PC}}), \tag{4}$$

其中，每个主成分代表可观测量空间中的一种正交变化模态。这种分解在保留原始模型计算所编码的主要物理信息的同时，大幅降低了模拟器问题的复杂度。

实际上，只需少量主成分即可准确重建可观测量。对于 v_0，我们保留三个主成分，这些主成分已经捕获了完整数据集总方差的 95% 以上；对于 $v_0(p_T)$，我们保留前 9 个主成分，捕获了总方差的 90% 以上。更多详情请参见附录 A。对于每个主成分 k，我们训练一个独立的高斯过程回归器；对于每个主成分 k，我们训练一个独立的高斯过程回归器，

$$z_k(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathcal{GP}\left(0, K_k(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}')\right), \tag{5}$$

其协方差核为

$$K_k = C \times \mathrm{RBF}(\boldsymbol{\ell}) + \mathrm{WhiteNoise}. \tag{6}$$

常数核 C 控制整体协方差幅度，而径向基函数（RBF）核则通过特征长度尺度向量在参数空间中引入平滑的关联，

$$\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{N_{\rm mp}}), \tag{7}$$

其中每个模型参数维度都对应一个相互独立的长度尺度。这种各向异性的核结构使模拟器能够自适应地学习每个主成分对不同物理参数变化的相对敏感性。特征长度尺度根据设计的参数范围进行初始化，并在训练过程中限制于具有物理意义的范围内进行优化。白噪声分量用于描述有限逐事件模拟所产生的残余统计涨落、不完美的主成分分析重构，以及混合模型计算中的数值不确定性。高斯过程超参数通过最大化训练数据的对数边际似然确定，

$$\log \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathbf{z}^T K^{-1}\mathbf{z} - \frac{1}{2}\log|K| - \frac{N}{2}\log(2\pi), \tag{8}$$

其中， K 表示在训练设计点上计算得到的协方差矩阵。为避免收敛到局部极值，优化过程通过对优化器进行多次随机重启来重复执行。该模拟器实现采用 Scikit-learn [37] Python 库，并遵循重离子碰撞贝叶斯分析中普遍采用的方法 [25, 38–43]。

针对每种黏性修正方案，分别独立训练模拟器（ Grad [44–50], CE [51, 52],PTM [46, 53], 和 PTB [53, 54]）。对于给定的修正方案，使用相应的经主成分分析变换的训练数据，构建一组独立的高斯过程模拟器。这一策略使我们能够在所有情况下保持模拟器架构一致的同时，分离黏性修正对径向流可观测量结构的影响。

由此构建的模拟器框架为径向流可观测量 v_0、 v_0（p_T）和 v_0（p_T）/v_0 提供了平滑且完全可微的代理模型。训练完成后，模拟器可在几乎无需计算成本的情况下进行评估，从而能够在完整的 17 维模型参数空间内高效开展不确定性量化、全局敏感性分析和贝叶斯参数推断，而无需额外进行昂贵的逐事件混合模拟。

C. 全局敏感性分析

为量化模型参数对可观测量的相对重要性，我们基于方差分解，使用 Sobol 指数 [55] 进行全局敏感性分析（GSA）。该方法能够识别输出不确定性的主要来源，同时全面考虑整个先验参数空间中的非线性效应和参数交互作用。使用完整的逐事件模拟直接计算 Sobol 指数，在计算上难以承受；因此，我们采用第 IIB 节中定义的模拟器作为快速替代模型。针对每种黏性修正方案，均使用相应的已训练模拟器组独立进行 GSA

，这些方案均在本研究中予以考察。

a. Sobol 分解。令 $Z = f(\boldsymbol{\theta})$ 表示给定主成分系数的模拟器预测值，其中$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots\ldots, \theta_{N_{\rm mp}})$ 是在其先验范围内抽取的 $N_{\rm mp}$ 模型参数向量。在假设参数相互独立的情况下，ANOVA-HDMR（高维模型表示）函数分解 [55] 为

$$f(\boldsymbol{\theta}) = f_0 + \sum_{r=1}^{N_{\rm mp}} f_r(\theta_r) + \sum_{1\le r<s\le N_{\rm mp}} f_{rs}(\theta_r,\theta_s) + \cdots, \quad (9)$$

其中 $f_0 = \mathbb{E}[Z]$ ，且每一项的均值均为零。对等式两边取方差，并利用各项之间的正交性，可得

$$\mathrm{Var}(Z) = \sum_{r=1}^{N_{\rm mp}} V_r + \sum_{1\le r<s\le N_{\rm mp}} V_{rs} + \cdots, \quad (10)$$

其中，部分方差定义为

$$V_r = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Z \mid \theta_r]), \quad (11)$$
$$V_{rs} = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Z \mid \theta_r,\theta_s]) - V_r - V_s, \quad (12)$$

更高阶项遵循相同的容斥模式。一级 Sobol 指数，

b. 一级和总阶指数。一级（主效应）Sobol 指数，

$$S_r = \frac{V_r}{\mathrm{Var}(Z)} = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}[Z \mid \theta_r])}{\mathrm{Var}(Z)}, \quad (13)$$

用于衡量 θ_r 单独对输出方差的分数贡献。总阶 指数，

$$S_{T,r} = \frac{\mathbb{E}[\mathrm{Var}(Z \mid \boldsymbol{\theta}_{\sim r})]}{\mathrm{Var}(Z)} = 1 - \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}[Z \mid \boldsymbol{\theta}_{\sim r}])}{\mathrm{Var}(Z)}, \quad (14)$$

捕捉 θ_r 的总效应，包括其参与的所有交互项；此处 $\boldsymbol{\theta}_{\sim r} \equiv \{\theta_s : \ s \neq r\}$表示除 θ_r 之外所有参数的集合。根据定义，

$$S_r \le S_{T,r}, \qquad \sum_{r=1}^{N_{\rm mp}} S_r \le 1, \qquad \sum_{r=1}^{N_{\rm mp}} S_{T,r} \ge 1, \quad (15)$$

如果模型完全是加性的，则第一个求和式取等号。下文中，我们将重点讨论总阶指数；当存在强非线性效应和参数间相关性时，这些指数能够稳健地对参数重要性进行排序。

c. 估算流程。我们采用 Saltelli 抽样方案 [56], ，通过 SALib Python 库 [57, 58] 实现。对于每种黏性修正方案，我们从先验中抽取 $N = 1024$ 个基础样本，需要进行 N 次（$2N_{\rm mp} + 2$）模拟器评估每个主成分系数。抽样边界为用于模拟器训练的参数范围（见参考文献 [33] 的表 I）。我们使用 Sobol 指数进行基于方差的全局敏感性分析，以确定对 v_0、 $v_0\,(p_T)$ 和 $v_0\,(p_T)\,/v_0$ 影响最大的模型参数。对于每个可观测量，我们报告每个模型参数的总阶指数 S_T 和一阶指数 S_1 ，这些指数针对每个保留的主成分系数独立计算；图中展示的是主导主成分的结果，它承载了可观测量方差中占比最大的部分。差值 $S_T - S_1$ 量化了参数交互和非线性效应的贡献。

III. 结果

A. 使用 CMS 数据探究微分径向流系数的集体性质

我们将 CMS 合作组对 Pb+Pb 在 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特 [24] 下的测量数据，与 ATLAS 合作组已发表的 Pb+Pb 碰撞在 $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ 太电子伏特 [15] 下的结果进行比较，以研究能量差异带来的变化。图中的误差框表示系统不确定度，误差棒表示统计不确定度，后者采用泊松自助法 [59]估算。系统不确定度源于径迹筛选、中心度校准以及顶点在 z 方向上的位置。对于2011年数据采集 [60]中外围 Pb+Pb 碰撞，同一或相邻束团交叉中同时发生的碰撞（堆积）影响可以忽略不计。在图1a和1b中，我们分别观察到，随着碰撞变得更加外围， v_0 逐渐增大；同时也观察到归一化协方差的形状，它凸显了“跷跷板”行为：在完整径迹样本 [2]的 $p_T \approx \langle p_T \rangle$ 处，所有 p_T^{ref} 区间的数值均具有共同的零交叉点。在图2a中，我们观察到，在低-p_T 区域（低于约 3 吉电子伏特）， $v_0(p_T)$ 几乎不受 $p_T^{\rm ref}$选择的影响。这一行为支持该区域中的因子化假设，并且与用有效单体分布 [19]描述的结果一致。对参考区间不敏感，表明低 p_T 处的主要关联来自集体动力学，而非与参考选择相关的运动学偏差。在改变 $\eta_{\rm gap}$时，图2b中也显示出类似的稳健性。在不同的赝快度间隔下，该观测量基本保持不变，仅在较高的 p_T处表现出轻微依赖性。这种对探测器接受度的弱敏感性表明， $v_0(p_T)$主要由长程关联主导，这是集体流现象的典型特征，而非

[2]对于两种碰撞能量， $\langle p_T \rangle$ 预计相似（由于较高碰撞能量下径向推动增强，5.02 太电子伏特时略高 [61]），但在本分析中两者更加接近，因为我们测量的是 0.5–10 GeV 范围内的 p_T $\langle p_T \rangle$

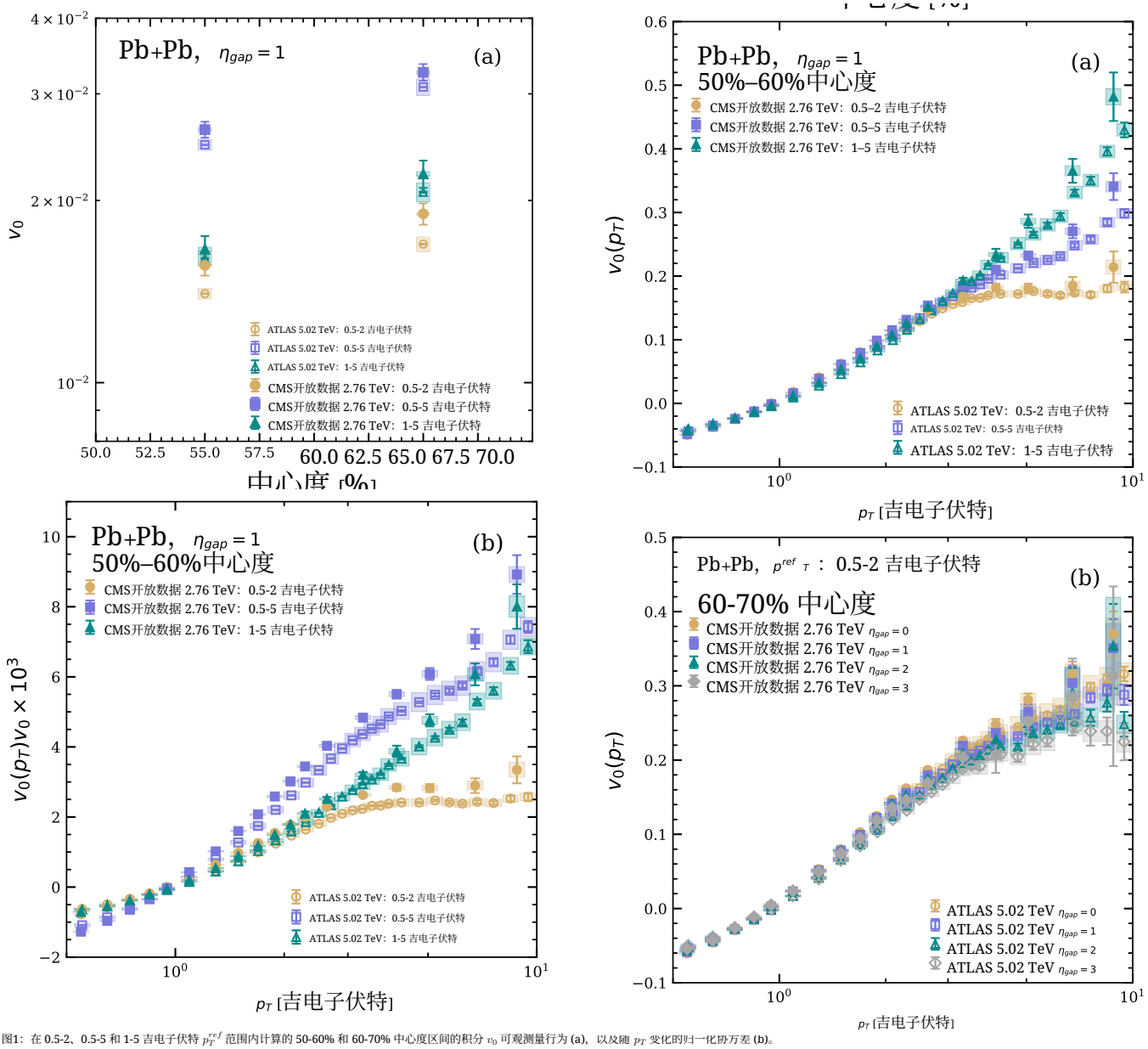

图1：在 0.5-2、0.5-5 和 1-5 吉电子伏特 p_T^{ref} 范围内计算的 50-60% 和 60-70% 中心度区间的积分 v_0 可观测量行为 (a)，以及随 p_T 变化的归一化协方差 (b)。

图2：在50%–60%中心度下，使用不同 p_T^{ref} 范围并固定 $\eta_{gap} = 1$ 评估的微分径向流系数 $v_0(p_T)$（a），以及在60%–70%中心度下，使用不同 η_{gap} 并固定 p_T^{ref} 范围 [0.5–2]吉电子伏特评估的微分径向流系数（b）。

而不是短程非流效应。采用 $\eta_{gap} = 1$ 和 $p_T^{ref} \in [0.5, 2]$ 吉电子伏特作为默认参数，图 3a 展示了 50–60% 和 60–70% 中心度类别中的$v_0(p_T)$。可以观察到明显的能量依赖性：在相同中心度区间内，CMS 在$\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特下的数据所对应的 $v_0(p_T)$ 值系统性地高于 ATLAS 在 $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ 太电子伏特下的数据。这一差异反映了横动量激落的总体幅度，而该幅度对碰撞能量和系统动力学较为敏感。然而，考虑图 3b 所示的标度比$v_0(p_T)/v_0$后，能量依赖性基本消失。在低p_T区域，该比值几乎

在重离子碰撞的标准模型与数据分析中（例如，文献 [25, 33, 38]），径向流涨落通过积分相对均值-p_T方差纳入分析，其定义为 $\frac{\delta p_T}{\langle p_T \rangle} = \frac{p_T - \langle p_T \rangle}{\langle p_T \rangle}$，而 v_0与该量直接相关。

B. 探索模型参数空间

本节中，我们考察模型在其整个参数空间内的表现。这种探索有两个主要目的。首先，它能在先验假设下，对模型的内在变化性和预测能力进行基准表征。其次，它为定量评估后验约束提供参考基准。这种方法遵循贝叶斯分析中的标准策略：在对数据进行标定之前，先考察先验预测分布，以识别不确定性的主要来源和参数敏感性 [62, 63]。采用与第 II A 节所述 CMS 和 ATLAS 实验测量数据相同的运动学切选，我们将$\eta_{\rm gap} = 1$ 和 $p_T^{\rm ref} \in [0.5, 2]$ 吉电子伏特设为所有理论计算的默认参数。我们使用 500 个设计点训练了高斯过程模拟器，从而高效覆盖模型的参数空间 [25]。这些模拟器使我们能够生成统计稳健的预测，并传播模型参数先验分布所带来的不确定性，而无需额外进行耗费资源的逐事件模拟。本节中，我们将模拟器对三个可观测量的预测表示为 90% 可信区间带：

- (i) 微分径向流系数 $v_0(p_T)$；
- (ii) 其关于 p_T 积分的对应量 v_0；
- (iii) 比值 $v_0(p_T)/v_0$，该比值独立于整体归一化，能够分离出 p_T 依赖关系的形状信息。

我们首先考察 p_T积分可观测量 v_0，它反映了径向流涨落的整体幅度。图 4 展示了在 Grad黏性修正方案下，全局 v_0 随碰撞中心度的变化。灰色带（“Jetscape 先验 90% 置信区间”）表示将完整的先验分布通过模拟器传播后得到的 90% 可信区间。因此，该带反映了在标定之前，与当前模型参数范围相关的理论不确定性。 p_T积分 v_0 的相对标准差随着碰撞变得更加外围而增大。这一趋势表明，外围事件对模型参数变化更为敏感，尤其是控制初始态几何和涨落强度的参数。在中心碰撞中，由于参与碰撞的核子数量较多，几何涨落会被部分平均掉，因此先验带相对较窄。相比之下，外围碰撞会放大核子层级涨落和自由流动力学的影响，从而使预测结果的分布更加分散。先验带上还叠加了以下不同校准策略得到的预测：蓝色带对应仅使用$U(x_T)$ [33] 可观测量进行的校准，而橙色带表示在 Jetscape框架 [25]内仅使用 p_T积分可观测量进行的校准。正如预期，由 p_T积分可观测量约束的后验分布（橙色带）显著降低了全局v_0 的不确定性，并更好地描述了 ATLAS Pb+Pb $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV 数据。这表明积分流观测量对径向流涨落归一化具有很强的约束力。该图展示了这一可观测量的能量依赖性；对于更中心的区域，例如 0–10%，我们可以看到，2.76 TeV 的先验范围无法完全覆盖 5.02 TeV 的实验数据，如模型与数据底部面板所示。

在下文中，我们分析了微分可观测量 $v_0(p_T)$，它为径向流涨落的动量依赖性提供了补充信息。图 5 展示了铅铅碰撞在 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特下 50–60% 中心度区间的模拟器预测。灰色阴影带表示由完整先验参数空间得到的 90% 可信区间。该区间量化了标定前固有的理论不确定性，并反映了 $v_0(p_T)$ 对模型参数变化的敏感性。先验区间的宽度相当显著，尤其是在中高p_T区域，这表明该微分可观测量除了受积分量约束的部分之外，仍对模型假设具有显著敏感性。彩色带对应不同黏性修正方案的后验预测。具体而言，橙色带表示参考文献 [25] 中仅使用 p_T 积分可观测量进行标定所得的后验分布，同时展示了相应的后验中位数及其可信区间。我们发现，与先验区间相比，依据积分可观测量进行标定显著降低了理论不确定性，这表明全局约束会以非平凡的方式传递到微分可观测量上。然而，在较高的 p_T 区域，模型与数据之间仍存在偏差，这表明径向流涨落的动量依赖性比积分测量提供了额外的约束能力。下方面板展示了模型预测与实验数据之比，从而可以更定量地评估整个 p_T 范围内的一致性。在不确定性范围内，后验预测对低横动量和中等横动量区域的数据描述尚可；而在较大的横动量处，张力则更为明显，此处非流效应或黏性修正方案的局限性可能起到一定作用。

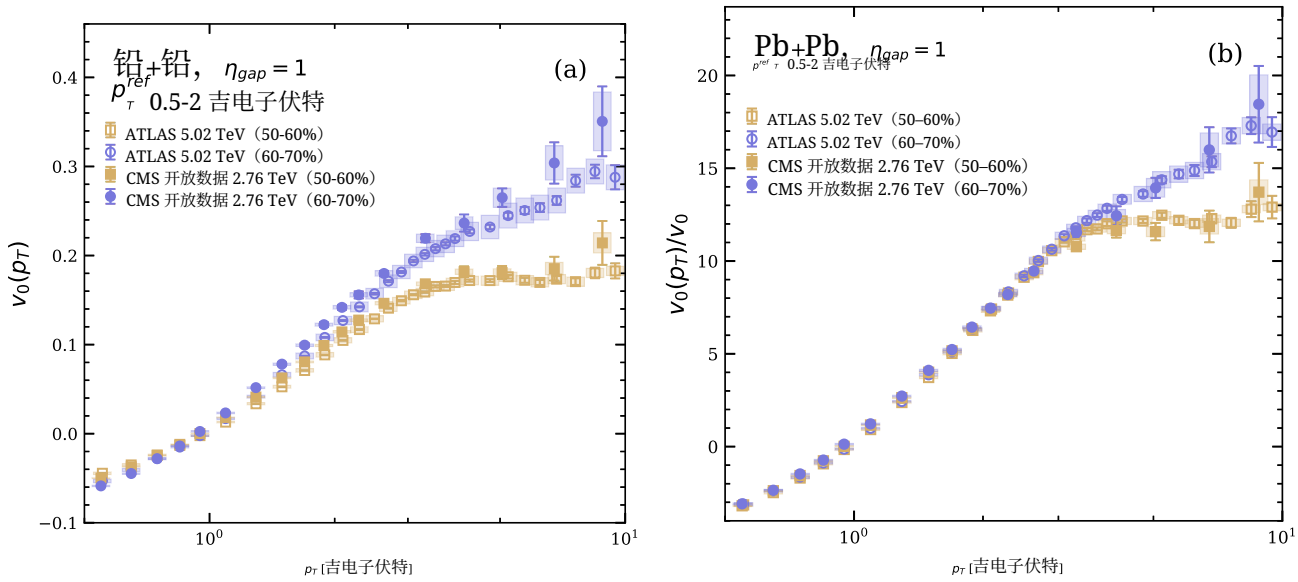

图 3：（a）在 50–60% 和 60–70% 中心度类别下，Pb+Pb 碰撞中 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV（CMS开放数据）和 $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV（ATLAS）的微分径向流系数 $v_0(p_T)$，以及（b）标度比 $v_0(p_T)/v_0$。分析使用了 $\eta_{\mathrm{gap}} = 1$ 和 $p_T^{\mathrm{ref}} \in [0.5, 2]$ 吉电子伏特。（a）显示出 $v_0(p_T)$ 整体幅度明显的能量依赖性，其中 2.76 TeV 下的数值更大。（b）表明，通过积分后的 v_0 进行标度，可以在很大程度上消除这种能量依赖性，从而揭示出近似普适的动量依赖性；该依赖性在低 p_T 下几乎与中心度无关，并且在达到 $p_T \sim 3$ 吉电子伏特之前仍保持相似。

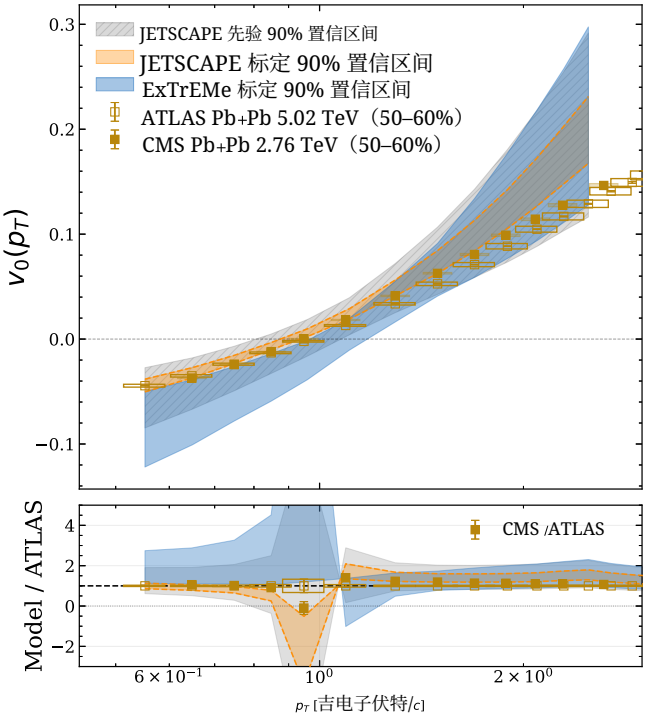

图 5：模拟器预测的 $v_0(p_T)$，对应于 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特下 50–60% Pb+Pb 碰撞。灰色带表示来自 [25] 的 90% 先验可信区间。橙色带表示基于积分观测量 [25] 校准的后验分布。蓝色带表示基于缩放谱 [33] 校准的后验分布。图中还展示了 ATLAS/CMS 实验数据以供比较。底部面板突出显示模型与数据之比。

先验模型预测通过在用于模拟器训练的预定义设计范围内，对完整参数空间进行均匀采样而获得。对于每种黏性修正方案，我们生成 2,000 个独立参数点，

$$\boldsymbol{\theta}_i \sim \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_{\min}, \boldsymbol{\theta}_{\max}), \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}_{\min}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_{\max}$ 分别表示先验范围的下限和上限。关于先验区间和模型参数的详情，请参阅文献 [33] 中的表 I。这种抽样策略确保对物理上允许的参数空间进行一致且无偏的探索。

对于每个抽样得到的参数向量，均对训练好的模拟器进行评估，以预测与 v_0、$v_0(p_T)$ 和 $v_0(p_T)/v_0$ 的主成分分析表示相关的主成分系数。模拟器不确定性在主成分层面予以保留，并传播至可观测量空间，具体如下所述。

本文展示的结果聚焦于具有代表性的中外围中心度类别，即 50–60% 和 60–70%，在这些类别中，径向流效应仍然显著，而非流贡献有所减弱。结果以横动量为函数展示，并在 p_T 中采用对数刻度，以突出径向流效应最明显的低动量区域。模型仅在最高至 $p_T = 2.5$ 吉电子伏特/c的范围内进行模拟，因此理论预测也限于此范围，尽管实验数据延伸至更高的 p_T。我们针对全部四种黏性修正方案训练了模拟器；不过，我们

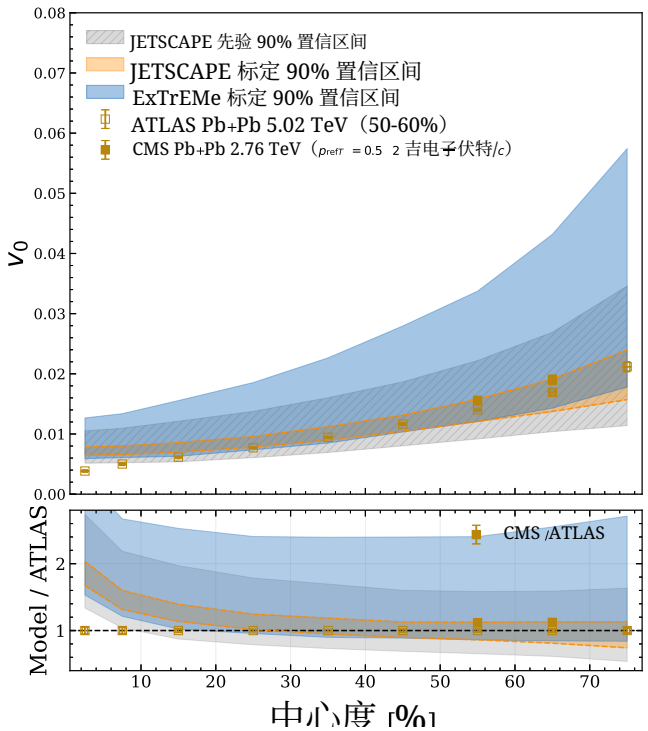

图 4：Grad黏性修正下，全局 v_0 随中心度的变化。灰色带（标记为“Jetscape先验90%置信区间”）表示从 [25] 的完整先验参数空间中获得的、针对 Pb+Pb $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 参数标定的90%可信区间。彩色带对应于采用不同校准策略得到的后验预测：蓝色带来自仅包含 U（x_T）可观测量 [33], 的标定，而橙色带则对应于在 Jetscape框架 [25] 中仅使用 p_T-积分观测量的标定。我们观察到，ATLAS Pb+Pb$\sqrt{s_{NN}}$ = 5.02太电子伏特数据能够被 p_T-积分观测量约束的后验分布（橙色带）很好地再现，这与预期一致。我们纳入了 CMS Pb+Pb $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特。

在本文中仅展示 Grad 结果，因为对于本文研究的可观测量，各方案之间的差异可以忽略不计。其他方案对应的图表可在公共代码仓库 [64]中获取。此外，为了了解哪些参数对径向流膨胀最为重要，我们进行了全局敏感性分析，并计算了图 6 所示的全部 Sobol 指数。我们使用 Sobol 指数进行基于方差的全局敏感性分析，以确定对积分可观测量 v_0、微分系数 $v_0(p_T)$及其比值 $v_0(p_T)/v_0$影响最大的模型参数。据我们所知，这是首次针对这些径向流可观测量，在一个先进的混合重离子模型的完整高维先验范围内开展系统的参数空间敏感性分析；此前唯一的先例是敏感性分析 Jetscape 多系统分析中报告的 $\delta p_T/\langle p_T\rangle$ [25], , 与 v_0 直接相关。

分析显示，核子涨落参数 σ_k 是影响 v_0 方差的首要因素，其次是核子宽度 w、自由流动指数 α 和自由流时间尺度 τ_R。提醒读者，参数 σ_k 控制用于调节每个参与核子对初始能量密度 [25] 贡献的 Γ 分布宽度；核子权重的逐事件涨落越大，平均横向动量的涨落也越大，而这正是 $v_0 \equiv \sigma[p_T]/\langle p_T\rangle$ 所测量的量。核子宽度 w 决定了核子厚度函数的空间范围（参考文献 [25] 的式（6））：更窄的核子轮廓会产生更大的局部能量密度梯度，从而导致径向推动的逐事件涨落更强。自由流动参数 τ_R 和 α 决定了非平衡前阶段的持续时间及其对能量密度的依赖性（参考文献 [25] 的式（19））；较长的自由流动时间使系统在流体动力学开始前形成更大的横向流，从而增大 v_0。值得注意的是，如图 6(a) 所示，v_0 对体黏度参数的敏感性相对较低，这与其作为径向流涨落的综合量、而非动量形状探针的作用相符。

对于图 6(b) 中所示的微分可观测量 $v_0(p_T)$，主导参数转变为 σ_k、τ_R、α、w和体黏度峰值 $(\zeta/s)_{\max}$。$(\zeta/s)_{\max}$ 跻身主要贡献因素之列，体现了谱形状对体黏性效应众所周知的敏感性：体黏度会使粒子化时的局部动量分布趋于各向同性，抑制高-p_T 产额，并将粒子重新分配至较低动量区域，从而改变$v_0(p_T)$在 p_T 范围 [2, 4, 13]内的协方差结构。与 v_0 相比，τ_R 的作用增强，这与如下预期相符：径向流涨落的动量依赖性保留了早期动力学的记忆。自由流动的持续时间不仅影响径向推动的大小，也影响其形状；这种推动是在流体动力学接管之前赋予系统的。

C. 径向流 $v_0(p_T)$ 的标度关系

为研究径向流的动量依赖性并尽量减小共同的系统不确定度，我们分析了缩放观测量 $v_0(p_T)/v_{0\circ}$。该比值为膨胀的横动量分布提供了稳健约束，不受整体流大小的影响。图 7 展示了$\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV下的 Grad黏性修正方案与 ATLAS 对+Pb 碰撞在$\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV、50–60% 中心度区间内实验数据的比较。由彩色带表示的模拟器预测，即 90% 可信区间，表明在整个 p_T 范围内均与测量数据点吻合良好。然-

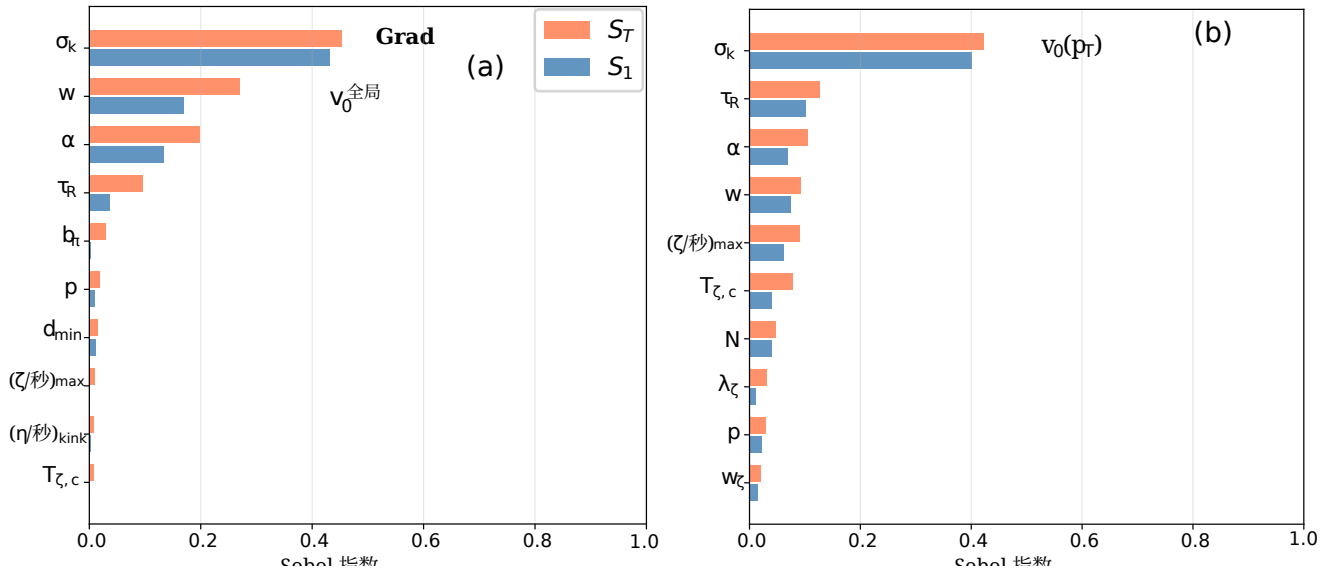

图 6：Grad黏性修正方案下的全局敏感性分析。面板 (a) 展示了对积分可观测量 v_0 影响最大的十个参数，按其总阶 Sobol 指数 S_T （橙色）和一阶指数 S_1 （蓝色）排序；这些指数针对每个保留的主成分系数分别计算，此处展示的是主导主成分。面板 (b) 展示了微分可观测量 $v_0(p_T)$ 的对应排序。在两个面板中，初态参数都主导着敏感性谱：核子涨落参数 σ_k 和核子宽度 w 是方差的主要来源，其次是自由流参数 τ_R 和 α。与 v_0 相比，体黏度峰值 $(\zeta/s)_{\max}$ 对 $v_0(p_T)$ 的相对重要性更大，这反映了谱形状对粒子化时体黏性修正的敏感性。

而模型标定主要使用 2.76 TeV 数据 [25, 33], , 该框架仍能成功描述 5.02 TeV 下的测量结果，证实了不同碰撞能量下底层流体动力学描述具有一定程度的普适性。这种跨能量一致性表明，Grad黏性修正能够捕捉径向流演化的关键物理。成功再现比值 $v_0(p_T)/v_0$ （其碰撞能量不同于用于标定的能量）表明不同碰撞能量之间存在近似普适性，这一点也已被以往研究指出 [2–4, 15]。对于图 8 所示的缩放比，敏感性排序变为 σ_k、 τ_R、$(\zeta/s)_{\max}$、w和 α。最显著的特征是，$(\zeta/s)_{\max}$ 相对于 v_0 和 $v_0(p_T)$的重要性提高了。由于比值$v_0(p_T)/v_0$ 隔离了动量依赖性的形状，同时消除了整体归一化， σ_k 和 w 中所包含的共同初态涨落会在比值中部分抵消，使体黏性修正成为相对更显著的驱动因素。这一结果与早期流体动力学研究一致；这些研究指出， $v_0(p_T)/v_0$ 对体黏性特别敏感 [2–4, 15], , 进一步支持了这样一种观点：与绝对可观测量相比，缩放比是探测输运系数的更清晰手段。自由流参数τ_R 和 α 仍具有显著影响，表明径向流剖面的形状在预平衡阶段形成，并未被后续过程完全抹去，直至随后-

随后的流体动力学演化。

IV. 结论

我们利用 CMS 开放数据，对 Pb+Pb 碰撞中中心度为 50–60% 和 60–70% 的中外围中心度类别，系统研究了微分径向流系数 $v_0(p_T)$、其对 p_T 积分后的对应量 v_0，以及标度比 $v_0(p_T)/v_0$；碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ 太电子伏特。

在实验方面，与 ATLAS 在 $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$TeV 下的测量结果相比，测得的 $v_0(p_T)$ 分布在整体幅度上表现出明显的能量依赖性。然而，按积分可观测量 v_0进行缩放后，这种能量依赖性在很大程度上被消除，所得比值 $v_0(p_T)/v_0$ 呈现出近似的普适性：在低 p_T下，它几乎独立于碰撞能量和中心度，并持续至$p_T \sim 3$ 吉电子伏特。这一行为表明，积分v_0 包含了大部分与能量相关的信息，而在所考察的运动学范围内，径向流涨落的动量依赖性则由一种基本上与碰撞能量无关的机制所支配。在不同的p_T^{ref}范围和赝快度间隔取值下，对将$v_0(p_T)$与归一化横动量协方差及积分 v_0 联系起来的因子化假设进行了验证，证实了其在低-p_T 区域的稳健性。

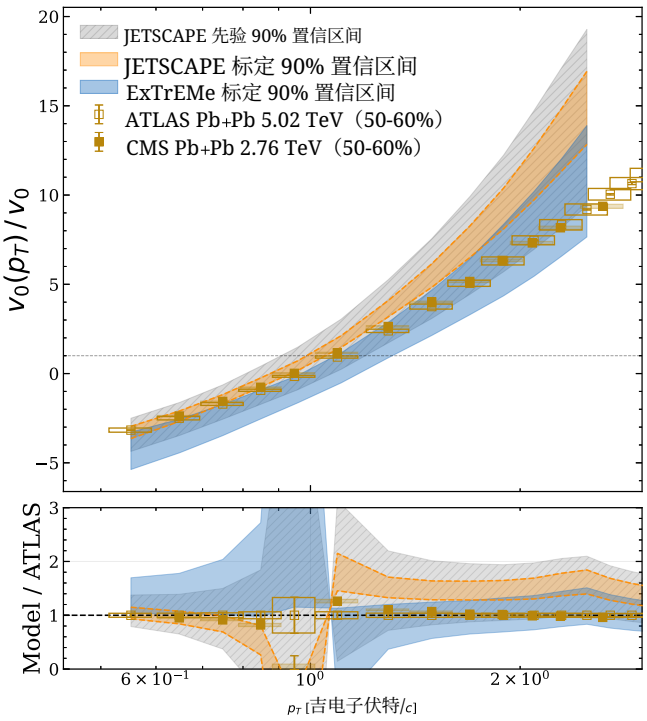

图 7：模拟器对 50–60% Pb+Pb 碰撞中缩放径向流$v_0(p_T)/v_0$ 的预测，碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$太电子伏特。灰色带表示完整先验参数空间 [25]的 90% 可信区间。橙色带对应于基于积分可观测量 [25]校准的后验分布。蓝色带表示基于缩放谱 [33]校准的后验分布。下方面板显示模型预测与 CMS 和 ATLAS 数据的比值。

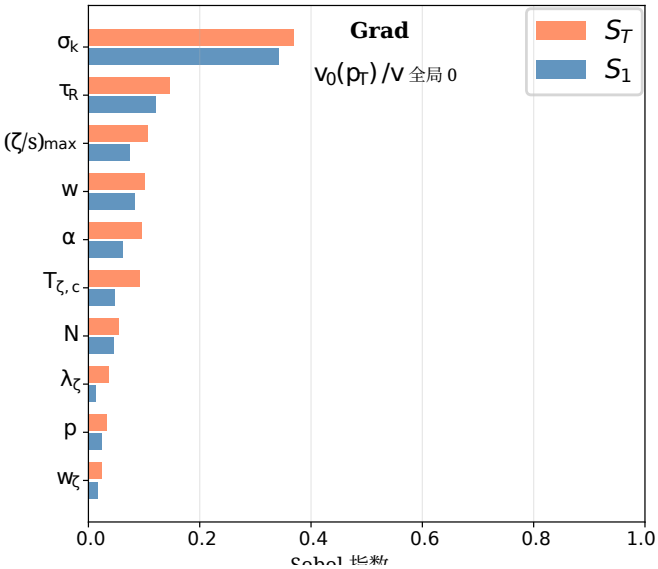

图 8：Grad黏性修正方案下，缩放比值 $v_0(p_T)/v_0$ 的全局敏感性分析。柱形表示按总阶 Sobol 指数 S_T（橙色）和一阶指数 S_1（蓝色）排序后影响最大的十个参数。核子涨落参数 σ_k 和自由流时间尺度 τ_R 仍是主要驱动因素，而体黏度峰值 $(\zeta/s)_{\max}$ 的相对重要性比在 v_0 和 $v_0(p_T)$ 中更高，这与早期研究的结论一致：$v_0(p_T)/v_0$ 是探测体黏性修正的首选可观测量 [2–4, 15]。

在理论方面，我们为 v_0和 $v_0(p_T)$训练了模拟器，并利用先前对该模型进行贝叶斯校准所得的参数后验分布生成预测；这些校准未使用 v_0、$v_0(p_T)$或 $v_0(p_T)/v_0$。其中包括基于 p_T-积分观测量 [25] 进行校准的后验分布，以及基于缩放谱 [33]进行校准的后验分布。它们能够在低横动量和中等横动量区域合理描述实验数据。值得注意的是，在 2.76 TeV 下校准的参数同样能够描述 ATLAS 在 5.02 TeV 下关于比值 $v_0(p_T)/v_0$的数据，从而进一步证明了径向流动量依赖性在不同碰撞能量下近似具有普适性。

我们利用 Sobol 指数进行了全局基于方差的敏感性分析，以确定对微分和积分径向流动力学影响最大的模型参数。在所有考察的黏性修正方案中，核子涨落参数 σ_k 都是起主导作用的参数，而核子宽度 w、自由流指数 α 和自由流时间尺度 τ_R 也发挥着重要作用。值得注意的是，积分可观测量 v_0 对体黏度参数的敏感性相对较低，与微分可观测量 $v_0(p_T)$ 形成对照，凸显了这两种探针在约束夸克-胶子等离子体的输运性质方面具有互补性。未来可进一步开展这项分析：将 p_T 轴按平均横向动量重新缩放，研究 $v_0(p_T)/v_0$ 与 $p_T/\langle p_T\rangle$的关系。预计这种缩放会进一步降低对初态参数的敏感性，并增强体黏性修正的相对贡献，从而有望使这一可观测量成为探测夸克-胶子等离子体体黏度的更直接手段 [2–4, 15]。

本研究未来的拓展方向包括：在完整的贝叶斯推断框架中，将 $v_0(p_T)$ 用作直接标定可观测量；扩展至更中心的碰撞类别和其他碰撞系统；并在统一的模拟策略中研究径向流与各向异性流之间的相互作用。当前结果表明，$v_0(p_T)$ 是探测超相对论重离子碰撞中形成的高温 QCD 介质集体动力学和输运性质的有力且互补的手段。

致谢

我们感谢 Jetscape 合作组提供其混合模拟框架和分析脚本的使用权限，也感谢 CMS合作组通过欧洲核子研究中心开放数据门户公开其数据。A. E. F. G. F 感谢巴西联邦研究生教育支持与评估机构（CAPES）通过硕士奖学金（档案编号 88887.372908/2026-00）提供支持。T.S.D. 感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）通过博士奖学金（项目编号 141432/2025-0）、INCT-FNA 项目（编号 464898/2014-5）以及 CAPES 奖学金（项目编号 88881.220538/2025-01）提供的经费支持。M.L. 获得了 FAPESP 项目 2017/05685-2 和 2018/24720-6，以及 INCT-FNA 项目（编号 464898/2014-5）的支持。C. A. B. 感谢 CNPq（项目编号 309962/2023-4）和 FAPESP（项目编号 2018/25225-9）提供资助。*AI* 工具的使用。 作者使用了大语言模型 Claude Fable 5、Claude Opus 5.1 和 Claude Opus 5.5（Anthropic），以协助提升手稿文本的清晰度并编写绘图脚本。作者审阅并编辑了所有 AI 辅助材料，并对本文内容（包括科学结果和结论）承担全部责任。

数据可用性

本研究同时使用了由作者生成的理论模拟数据和公开可用的实验数据。CMS 数据可从欧洲核子研究中心开放数据门户 [24], 获取，ATLAS 测量数据可从 HEPData [15]获取。复现结果所需的模拟数据集、训练好的仿真器、设计点、参数范围和分析脚本，均可在与本工作关联的 GitHub 仓库 [64]中获取。

附录 A：主成分分析

为在保留可观测量主要物理特征的同时，高效降低其维度，我们对在所有设计点和黏性修正设定下获得的模型计算结果执行主成分分析。该过程能够利用可观测量的降维潜在表示构建精确的代理模型，同时保持较高的重构保真度。

对于每个 δf 模型（Grad、CE、PTM 和 PTB），我们根据可观测量的模型计算构建数据矩阵

$$\mathcal{O}_m \in \{v_0,\, v_0(p_T)\}\,. \tag{A1}$$

对于由 i 编号的给定设计点，可观测量向量定义为

$$\mathbf{y}_i^{(m)} = \left\{\mathcal{O}_m^{(c_k)}(p_{T,j})\right\}, \qquad \begin{matrix} j = 1,\ldots,N_p, \\ k = 1,\ldots,N_c, \end{matrix} \tag{A2}$$

其中， N_p 表示横动量区间的数量， N_c 表示中心度类别的数量。上标 (c_k) 标记中心度区间，而 $p_{T,j}$ 对应于第 j个横动量区间的中心。因而，可观测量向量 $\mathbf{y}_i^{(m)}$ 包含第 i 个设计点下可观测量 $\mathcal{O}_m$ 在所有动量区间和中心度区间中的完整数值集合。随后，将完整的设计矩阵组装为

$$\mathbf{Y}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{(m)} \\ \mathbf{y}_2^{(m)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N_{\text{design}}}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{A3}$$

维度为 $N_{\text{design}} \times N_{\text{bins}}$，其中 $N_{\text{bins}} = N_p \times N_c$。在执行主成分分析之前，根据以下方式将每个可观测分量标准化为均值为零、方差为一：

$$\widetilde{Y}_{ij}^{(m)} = \frac{Y_{ij}^{(m)} - \mu_j^{(m)}}{\sigma_j^{(m)}}, \tag{A4}$$

其中， $\mu_j^{(m)}$ 和 $\sigma_j^{(m)}$ 分别是第 j 个可观测分量在所有设计点上的均值和标准差。此预处理步骤确保所有动量和中心度区间在分解中具有相近的贡献，并防止绝对值较大的区间主导主成分。标准化矩阵$\widetilde{\mathbf{Y}}^{(m)}$ 通过奇异值分解（SVD）进行分解： [65],

$$\widetilde{\mathbf{Y}}^{(m)} = \mathbf{U}^{(m)}\mathbf{S}^{(m)}\left(\mathbf{V}^{(m)}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{A5}$$

其中，$\mathbf{U}$包含左奇异向量，$\mathbf{S}$ 是由奇异值组成的对角矩阵 s_k，而$\mathbf{V}$ 包含与可观测量空间中正交归一方向相对应的右奇异向量。SVD 分解使用 Numpy 生态系统计算 [66]。与第 k 个主成分相关的解释方差比为：

$$\lambda_k^{(m)} = \frac{\left(s_k^{(m)}\right)^2}{\sum_\ell \left(s_\ell^{(m)}\right)^2}. \tag{A6}$$

我们不预先固定保留的主成分数量先验，而是确定满足以下条件的最小数量N_{PC} ： 累积解释方差满足

$$\sum_{k=1}^{N_{\text{PC}}} \lambda_k^{(m)} \geq 0.90, \tag{A7}$$

从而保留原始可观测量空间总方差的至少 90%。与第 i 个设计点相关的主成分得分定义为

$$\mathbf{z}_i^{(m)} = \sqrt{N_{\text{design}} - 1}\,\mathbf{U}_{i,\,1:N_{\text{PC}}}^{(m)}, \tag{A8}$$

它们构成了降维后的潜在目标变量。对于全局可观测量 v_0，主成分分析表明，前五个主成分捕获了总方差的 99% 以上，如图9所示。相比之下，微分可观测量 $v_0(p_T)$ 在各个中心度区间中的方差分布更广，且对于所有黏性修正，至少需要九个主成分才能达到 90% 的累积方差阈值。更多详情请参阅与本文相关的 GitHub 仓库 [64]。

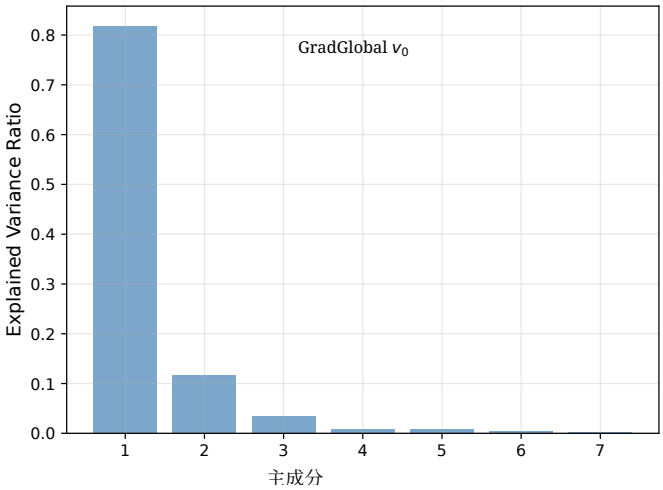

图9：使用 Grad黏性修正时，全局 v_0 的主成分分解的解释方差比。仅用 3 个主成分，我们就能解释所有 N_{bins} 中 95% 以上的累积方差。

为量化保留 N_{PC} 个分量所引入的截断误差，我们通过截断后的得分重构物理可观测量矩阵 $\widehat{\mathbf{Y}}^{(m)}$，方法如下：

$$\widehat{Y}_{ij}^{(m)} = \mu_j^{(m)} + \sigma_j^{(m)} \sum_{k=1}^{N_{\text{PC}}} Z_{ik}^{(m)} V_{jk}^{(m)}, \tag{A9}$$

其中 $Z_{ik}^{(m)} = \sqrt{N_{\text{design}} - 1}^{-1} U_{ik}^{(m)} S_{kk}^{(m)}$。我们计算所有设计点和运动学区间上的均方根相对重构误差：

$$\epsilon_{\text{recon}}^{(m)} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{design}} N_{\text{bins}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{design}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{bins}}} \left(\frac{\widehat{Y}_{ij}^{(m)} - Y_{ij}^{(m)}}{Y_{ij}^{(m)}} \right)^2}. \tag{A10}$$

在所有四种黏性修正方案中，对于 v_0，ϵ_{recon} 始终低于 0.7%；对于 $v_0\,(p_T)$，则低于 1.1%。这一可忽略不计的重构误差证实，N_{PC} 主成分能够捕捉主要的物理变化，同时不丢失相关的物理信息。

附录 B：模拟器验证

为评估高斯过程模拟器的预测准确性，我们直接在潜在主成分得分空间 [33]中进行留一法（LOO）交叉验证。对于每个设计点 i，我们使用其余所有点重新训练模拟器，并预测留出的主成分得分 $\widehat{z}_{ik}$。对于一个以输入 $\mathbf{X}$ 训练、核矩阵为 $\mathbf{K}$ 且噪声方差为 σ_n^2的高斯过程，第 i 个点的留一法预测及其不确定性为

$$\widehat{z}_{ik}^{\text{LOO}} = z_{ik} - \frac{\left[\mathbf{K}_n^{-1}\,\mathbf{z}_k\right]_i}{\left[\mathbf{K}_n^{-1}\right]_{ii}}, \qquad \sigma_{ik}^{\text{LOO}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\mathbf{K}_n^{-1}\right]_{ii}}}, \tag{B1}$$

其中，$\mathbf{K}_n = \mathbf{K} + \sigma_n^2\,\mathbf{I}$ 为经过噪声正则化的核矩阵。通过决定系数来衡量每个主成分 k 的留一法预测质量

$$R_k^2 = 1 - \frac{\sum_i \left(z_{ik} - \widehat{z}_{ik}^{\text{LOO}}\right)^2}{\sum_i \left(z_{ik} - \langle z_k \rangle\right)^2}, \tag{B2}$$

并同时计算均方根误差（RMSE）以及在 1σ 和 2σ 水平上的覆盖率。校准良好的模拟器应产生与名义高斯值相符的 68% 和 95% 覆盖率，而$R_k^2 \gtrsim 0.95$ 则表明高斯过程几乎捕捉到了主成分得分中的全部方差。图 10 展示了 Grad 黏性修正方案下积分 v_0 可观测量的留一法散点图，其中第一主成分的真实得分绘于横轴，留一法预测得分绘于纵轴，点的颜色表示标准化残差 $|z_{ik} - \widehat{z}_{\text{LOO}ik}|/\sigma_{ik}^{\text{LOO}}$。与本研究相关的公共代码库 [64]中收录了 CE、PTM 和 PTB 黏性修正对应的类似图示，此处不再展示。对于在 $v_0\,(p_T)$ 中训练的模拟器，也采用了相同的验证流程。

在全部四种黏性修正方案下，前几个主成分在留一法指标上均达到 $R_k^2 > 0.95$，其覆盖率与名义上的 68% 和 95% 数值相差仅几个百分点。拉量分布大致以零为中心，标准差接近 1，表明高斯过程不确定性估计经过了良好的校准。这证实了模拟器在整个参数空间内都能作为完整混合模型的高保真且可靠的替代方案。

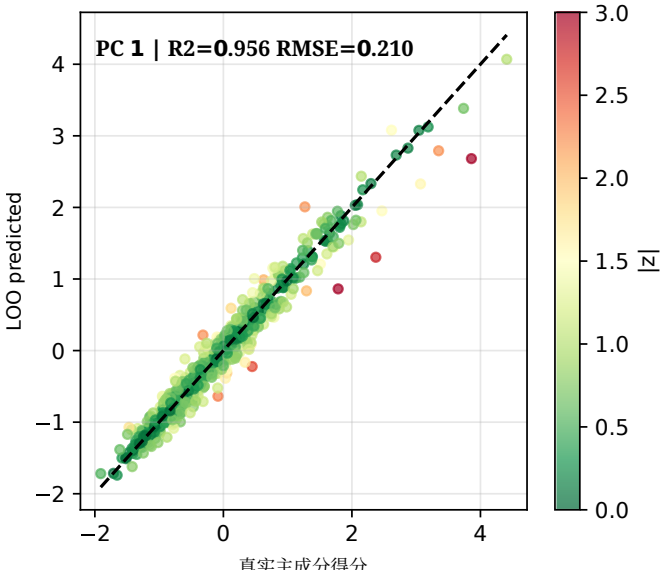

图 10：采用 Grad黏性修正方案，对积分 v_0 可观测量的高斯过程模拟器进行留一交叉验证所得的散点图。这里展示了第一主成分的真实得分与留一交叉验证预测得分。数据点根据标准化残差 $|y - \hat{y}|/\sigma$ 以不同颜色标示；完美的模拟器应位于虚线对角线上。文中报告了 R^2 和 RMSE 值，以及经验 1σ 和 2σ 覆盖率。

[1] F. G. Gardim、F. Grassi、P. Ishida、M. Luzum 和 J.-Y. Ollitrault，《物理评论 C》100，054905（2019），arXiv:1906.03045 [nucl-th]。[2] B. Schenke、C. Shen 和 D. Teaney，《物理评论 C》102，034905 2020 2004（），arXiv:。00690 [nucl-th]。[3] T. Parida、R. Samanta 和 J.-Y. Ollitrault，《物理快报 B》857，138985（2024），arXiv:2407.17313 [nucl-th]。[4] L. Du，《物理评论 C》113，014901（2026），arXiv:2508.07184 [nucl-ex]。[5] S. Saha、R. Singh 和 B. Mohanty，《物理评论 C》112，024902 2025 2505（），arXiv:。19697 [nucl-ex]。[6] J. Zhu、X.-Y. Wu 和 G.-Y. Qin，（2026），arXiv:2602.04148 [nucl-th]。[7] S. Bhatta、A. Dimri 和 J. Jia，（2025），arXiv:2504.20008 [nucl-th]。[8] J. Wan、C.-Z. Wang、Y.-G. Ma 和 Q.-Y. Shou，（2025），arXiv:2509.24889 [nucl-th]。[9] M. L. Sambataro、S. Plumari、S. K. Das 和 V. Greco，（2025），arXiv:2510.19448 [hep-ph]。[10] L. Du 和 P. M. Jacobs，（2025），arXiv:2512.10265 [nucl- th]。[11] R. Agarwala、D. Basak 和 K. Dey，（2025），arXiv:2512.15026 [nucl-ex]。[12] T. Parida、R. Samanta 和 J.-Y. Ollitrault，《EPJ 网络会议论文集》364，05004（2026），arXiv:2601.09890 [nucl-th]。[13] J. Jia，《物理评论快报》136，112301（2026），arXiv:2507.14399 [nucl-th]。

[14] S. Thakur 和 P. P. Bhaduri，（ 2026 2610 41607 ），ar[ ]Xiv：。nucl-ex。[15] G. Aad 等（ATLAS），《物理评论快报》136，032301（2026），arXiv:2503.24125 [nucl-ex]。[16] S. Acharya 等（ALICE），《物理评论快报》136，032302（2026），arXiv:2504.04796 [nucl-ex]。[17] S. Acharya 等（ALICE），《物理快报 B》850，138541（2024），arXiv:2308.16217 [nucl-ex]。[18] S. Acharya 等（ALICE），《欧洲物理杂志C辑》85，776（2025），arXiv:2411.09334 [nucl-ex]。[19] G. Aad 等（ATLAS），《物理评论快报》133，252301（2024），arXiv:2407.06413 [nucl-ex]。[20] CMS合作组，《利用CMS开放数据通过横向动量微分径向流系数 v0(pT) 探究径向流》，技术报告（欧洲核子研究中心，日内瓦，2026）。[21] Z. Wang（STAR），《亚原子粒子与宇宙学杂志》6，100515（2026），arXiv:2608.00190 [nucl-ex]。[22] H. Song 和 U. W. Heinz，《物理评论 C》81，024905（2010），arXiv:0909.1549 [nucl-th]。[23] J. Qian、U. W. Heinz 和 J. Liu，《物理评论 C》93，064901（2016），arXiv:。02813 [nucl-th]。[24] CMS合作组，“2011年2.76 TeV铅-铅运行中的RECO格式HIMinBiasUPC主数据集（/HIMinBiasUPC/HIRun2011-12Jun2013-v1/RECO）”，欧洲核子研究中心开放数据门户（2020）。[25] D. Everett 等（JETSCAPE），《物理评论 C》103，054904（2021），arXiv:。01430 [hep-ph]。

[26] S. Chatrchyan 等（CMS），《高能物理学杂志》02，088（2014），arXiv:1312.1845 [nucl-ex]。[27] I. P. Lokhtin 和 A. M. Snigirev，《欧洲物理杂志C辑》45，211（2006），arXiv:hep-ph/0506189。[28] Geant4 合作组，《核仪器与方法A辑》506，250（2003）。[29] S. Chatrchyan 等（CMS），《物理评论 C》87，014902（2013），arXiv:1204.1409 [nucl-ex]。[30] S. Bhatta，“ATLAS铅-铅碰撞中集体径向流性质的证据”，（2025），夸克物质2025。https://indico.cern.ch/event/1334113/contributions/6394983/。[31] S. Bhatta，“利用ATLAS在大型和小型碰撞系统中的最新流与关联测量”，（2025），初始阶段2025。https://indico.cern.ch/event/1479384/contributions/6663079/。[32] D. Everett 等（JETSCAPE），《物理评论快报》126，242301（2021），arXiv：。03928 [hep-ph]。[33] T. S. Domingues 等，（2026），arXiv:2602.22490 [nucl-th]。[34] H. Roch、S. A. Jahan 和 C. Shen，《物理评论 C》110，044904（2024），arXiv：。12019 [nucl-th]。[35] S. A. Jahan、H. Roch 和 C. Shen，《亚原子粒子与宇宙学杂志》4，100209（2025）。[36] J. Auvinen、K. J. Eskola、H. Hirvonen 和 H. Niemi，（2026），arXiv:2603.26413 [hep-ph]。[37] F. Pedregosa、G. Varoquaux、A. Gramfort、V. Michel、B. Thirion、O. Grisel、M. Blondel、P. Prettenhofer、R. Weiss、V. Dubourg、J. Vanderplas、A. Passos、D. Cour-napeau、M. Brucher、M. Perrot 和 E. Duchesnay，《机器学习研究杂志》12，2825（2011）。[38] J. E. Bernhard、J. S. Moreland 和 S. A. Bass，《自然·物理》15，1113（2019）。[39] G. Nijs、W. van der Schee、U. Gürsoy 和 R. Snellings，《物理评论 C》**103**，054909 2021 2010 15134 （），[ ] arXiv：。nucl-th。[40] G. Nijs、W. van der Schee、U. Gürsoy 和 R. Snellings，《物理评论快报》**126**，202301 2021 2010 15130 （），[ ] arXiv：。nucl-th。[41] J. E. Parkkila、A. Onnerstad 和 D. J. Kim，《物理评论 C》104，054904（2021），arXiv:2106.05019 [hep-ph]。[42] H. Mäntysaari、B. Schenke、C. Shen 和 W. Zhao，《物理快报B》833，137348（2022），arXiv:2202.01998 [hep-ph]。[43] M. R. Heffernan、C. Gale、S. Jeon 和 J.-F. Paquet，《物理评论快报》**132**，252301 2024 2306 09619 （），[ ] arXiv：。nucl-th。[44] H. Grad，《纯粹与应用数学通讯》2，331（1949）。[45] K. Dusling、G. D. Moore 和 D. Teaney，《物理评论C》81，034907（2010），arXiv:0909.0754 [nucl-th]。[46] M. McNelis、D. Everett 和 U. Heinz，《计算物理通讯》258，107604（2021），arXiv:1912.08271 [nucl-th]。[47] D. Teaney，《物理评论C》68，034913（2003），arXiv:nucl-th/0301099。[48] A. Monnai 和 T. Hirano，《物理评论 C》80，054906（2009），arXiv:0903.4436 [nucl-th]。[49] K. Dusling 和 T. Schäfer，《物理评论 C》85，044909（2012），arXiv:1109.5181 [hep-ph]。[50] G. S. Denicol、H. Niemi、E. Molnar 和 D. H. Rischke，《物理评论D》85，114047（2012），[勘误: Phys.Rev.D 91，039902（2015）], arXiv:1202.4551 [nucl-th]。[51] J. L. Anderson 和 H. R. Witting，Physica 74，466（1974）。[52] A. Jaiswal、R. Ryblewski 和 M. Strickland，《物理评论 C》90，044908（2014），arXiv:1407.7231 [hep-ph]。[53] S. Pratt 和 G. Torrieri，《物理评论 C》82，044901（2010），arXiv:1003.0413 [nucl-th]。[54] J. E. Bernhard、J. S. Moreland、S. A. Bass、J. Liu 和 U. Heinz，《物理评论 C》94，024907（2016），arXiv:1605.03954 [nucl-th]。[55] I. Sobol’，《数学与计算机仿真》55，271（2001），第二届IMACS蒙特卡罗方法研讨会。[56] A. Saltelli，《计算机物理通讯》145，280（2002）。[57] T. Iwanaga、W. Usher 和 J. Herman，《社会—环境系统建模》4，18155（2022）。[58] J. Herman 和 W. Usher，《开放源代码软件期刊》2（2017），10.21105/joss.00097。[59] R. Beran、G. Ducharme 和蒙特利尔大学数学研究中心，《统计学自助法的渐近理论》，CRM出版社（CRM出版社，1991）。[60] CMS合作组，《高能物理学杂志》2014（2014），10.1007/jhep02(2014)088。[61] B. B. Abelev 等（ALICE），《物理快报 B》728，25（2014），arXiv:1307.6796 [nucl-ex]。[62] Z. Hu 和 J. D. McEwen，载于第44届贝叶斯推断与科学和工程最大熵方法国际研讨会（2026 2601 15132 ）[ ] arXiv: . stat.ME . [63] Z. Han、K. Ye 和 M. Wang，《美国统计学家》77，12–19（2022）。[64] https://github.com/ThiagoSDomingues/JETSCAPE_studies/tree/main/CMS_v0_analysis。[65]G. H. Golub 和 C. F. Van Loan，《矩阵计算》第4版（约翰斯·霍普金斯大学出版社，费城，PA，2013）https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781421407944 . [66] C. R. Harris、K. J. Millman、S. J. van der Walt、R. Gom- mers、P. Virtanen、D. Cournapeau、E. Wieser、J. Tay- lor、S. Berg、N. J. Smith、R. Kern、M. Picus、S. Hoyer、M. H. van Kerkwijk、M. Brett、A. Haldane、J. F. del Río、M. Wiebe、P. Peterson、P. Gérard-Marchant、K. Shep- pard、T. Reddy、W. Weckesser、H. Abbasi、C. Gohlke 和 T. E. Oliphant，《自然》**585**，357（2020年）。