双随机矩阵的特征向量几何与谱

Brecht Verbeken[a]、[b]、[*]、Vincent Ginis[a]、[b]、[c]

[a]商业技术与运营系、数据分析实验室、布鲁塞尔自由大学（*VUB*），*Pleinlaan 2*，*1050*，布鲁塞尔，比利时[b] *imec-SMIT*，布鲁塞尔自由大学，*Pleinlaan 9*，*1050*，布鲁塞尔，比利时[c]工程与应用科学学院，哈佛大学，剑桥，马萨诸塞州 *02138*，美国

arXiv:2611.30905v1 [math.SP] 23 Nov 2026

摘要

令 U_N 为所有 $1 \le k \le N$的 k次单位根的凸包的并集。我们证明，对于 $N \ge 10^{213}$，任意两个 N 阶置换矩阵的凸组合，其谱均位于 U_N 中。各行中选取的有序列对构成有向环。证明使用了绕原点的绕数，以及沿一个环的特征向量坐标的傅里叶系数。对于任意双随机矩阵，我们通过将不同的列分配给选定的特征向量坐标来构造一个多边形。在精确 $q \le N$阶单位根附近，完整的特征值区域在局部与正则 $q\lfloor N/q \rfloor$边形一致。对于 $N \ge 256$，设某个特征值位于 U_N之外。在每个以 $\max_i |v_i| = 1$ v 正规化的对应特征向量中，都有一个坐标 v_j严格位于这些坐标的凸包内部，并满足 $|v_j|^2 > 1 - 100/N$。

关键词：双随机矩阵、特征值区域、置换矩阵、Perfect–Mirsky 猜想、凸多边形

2020 MSC：15B51、15A18、15A60

1. 引言

双随机矩阵的元素非负，且其各行各列之和均为 1。记 $\sigma(A)$ 为 A 的特征值集合。令 D_N 为所有 A 阶双随机矩阵的 $\sigma(A)$ 的并集。对于 $k \ge 1$，记作

$$\Pi_k = \mathrm{conv}\{e^{2\pi ij/k} : 0 \le j < k\}, \qquad U_N = \bigcup_{k=1}^{N} \Pi_k.$$

因此 $\Pi_1 = \{1\}$ 以及 $\Pi_2 = [-1, 1]$。包含关系 $U_N \subseteq D_N$ 来自单个循环移位。令 C 为置换矩阵，其作用为 $(Cw)_i = w_{i+1}$，其中指标按模 k 计算。对于$v = (1, \xi, \ldots, \xi^{k-1})^\top$，其中 $\xi = e^{2\pi i/k}$，有 $C^j v = \xi^j v$。 C 的幂的凸组合可以实现 Π_k 中的每一点，而加入固定标号即可得到一个 N 阶矩阵。对于边上的任意一点，只需两个相邻的幂。

Perfect 和 Mirsky 曾提出疑问： $D_N = U_N$ 并证明在三阶及以下时等号成立 [1]。Levick、Pereira 和 Kribs 解决了四阶情形 [2]。在五阶时，两个置换矩阵的凸组合已经不满足等号 [3]。这个反例带来了一个自然的问题：随着阶数增大，这样的凸组合是否仍可能有一个特征值位于 U_N?

定理 1.1。 对于每个充分大的 N，所有阶为 N 的置换矩阵 P, Q，以及所有$0 \le t \le 1$,

$$\sigma((1-t)P + tQ) \subseteq U_N.$$

界限 $N \ge 10^{213}$ 已经足够。

[*]通讯 通讯作者

*Em*电子邮箱： brecht.verbeken@vub.be(Brecht Verbeken), vincent.ginis@vub.be (Vincent Ginis)

在每条射线上，U_N 最外侧的点都位于其某个多边形的一条边上。通过循环构造，可以用两个置换矩阵的凸组合达到该点。因此，定理 1.1 确定了这一族在每条射线上的外半径。Harlev、Johnson 和 Lim 猜想，D_N 的每个边界点都可以通过这样的凸组合 [4,猜想 2。7]在定理1.1所述的阶数下，只需证明每条射线上 D_N 最外侧的点满足这一性质即可。事实上，在模最大的坐标处应用行方程可得$|z| \le 1$。满足特征方程的点对 (A, z) 构成双随机矩阵集合与闭单位圆盘的乘积中的一个闭子集。将这个紧集投影，即可得出 D_N的紧致性。对于$N \ge 2$，与射线的交集是一个从原点出发的区间。如果 D_N 在该射线上的最外侧点属于 U_N，那么 D_N中离原点更近的每一点也都属于该集合。

特征向量揭示了所有可能性及其限制。若 $Av = zv$，则每个 zv_i都位于 v各坐标的凸包内。这个包含关系仅利用了非负元素和行和为一这两个条件，它们正是行随机矩阵的定义条件。这是 Karpelevič 定理 [5]的不变多边形方法的起点。对于双随机矩阵，所有行中分配给每个坐标标签的权重总和为一。第 2.1 节展示了这一约束如何确定 Mashreghi–Rivard 例子中的全部五行。在第 2.2 节中，我们在只对选定的一组行计分时仍保留这一约束。由此得到的多边形使我们能够证明以下适用于任意双随机矩阵的结论。

定理 1.2。 设 ω 是一个阶为 $q \le N$的单位根，因此 q 是满足$\omega^q = 1$的最小正整数。令 $M = q\lfloor N/q \rfloor$。记 $B(\omega, \varepsilon)$ 为以 ω为圆心、半径为 ε 的开圆盘。存在一个$\varepsilon > 0$ 使得

$$D_N \cap B(\omega, \varepsilon) = U_N \cap B(\omega, \varepsilon) = \Pi_M \cap B(\omega, \varepsilon).$$

因此，对于每个固定的 N，都存在一个 $r_N < 1$，使得 $D_N \cap \{|z| > r_N\} = U_N \cap \{|z| > r_N\}$。

定理 1.3。 设 $Av = zv$ 是一个 $N \ge 256$ 阶双随机矩阵的特征对。将最大值$_i\, |v_i| = 1$ 归一化，并令 $K = $凸包$\{v_1, \dots, v_N\}$。若 $z \notin U_N$，则存在一个标签 j，使得

$$v_j \in \operatorname{int} K, \qquad |v_j|^2 > 1 - \frac{100}{N}.$$

Johnson、Newman 和 Spitkovsky 使用数值域研究了 $D_N \subseteq U_N$在 U_N [6]角点附近的包含关系。对于一个固定的方阵 C，其数值域由以下取值构成：u^*Cu对单位向量 u。定理 1.2 确定了每个阶不超过 N的单位根邻域内的特征值区域。例如，五阶情况下 -1 附近的边界沿着正方形的两条相邻边。在六阶情况下，$e^{2\pi i/3}$ 附近的边界沿着六边形的两条相邻边。在这两个例子中，每条边都可由相应循环移位的两个连续幂的凸组合得到。

Levick、Pereira 和 Kribs 利用特征向量坐标之和的凸包研究列平衡 [2, 推论 2]。Bouthat、Mashreghi 和 Morneau-Guérin 宣布了包含关系Π_N，条件是每个特征向量坐标都位于其他坐标的凸包之外 [7,幻灯片 30–31]。定理1.3 同样适用于重复坐标以及位于 K 一条边上的点。对于 $N \ge 256$ 和最大值$_i\, |v_i| = 1$，只要每个严格内部坐标都满足 $|v_i|^2 \le 1 - 100/N$，该定理便给出 $z \in U_N$。证明通过指派将不同的列分配给边界标签。足够大的径向间隙会迫使这一指派留在边界上，而其循环顺序决定了比较多边形。

当 P 遍历 N 阶置换矩阵时，其各次幂的凸组合的谱之并为 U_N [8, 9]。对于两个任意置换矩阵的凸组合，每一行都给出一对坐标标签。相对置换将每对中的第一个标签映射到第二个标签，因此这些有序对构成有向环。这两个置换存在共同分块分解。如果它们的凸组合在某个块上的限制具有特征值 z，则该块支撑特征值 z。如果 N 足够大且 $z \notin U_N$，

该块上的特征向量坐标的模几乎相等。相对置换的一个环将包含该块中几乎所有标签，并绕原点一周。第 4–7 节将利用这些信息，将其与正多边形的一条边进行比较。

2. 返回三角形与指派多边形

2.1. 从五状态示例还原各行

对于置换 p，其矩阵 P 的作用为 $(Pv)^i = v_{p(i)}$。Mashreghi–Rivard 例子使用 $(P+Q)/2$，其中 P 和 Q 分别是按照 [4, 第 4] 节中的标记，对 (145)(23) 和 (1425) 表示的矩阵。依次将指标为 3、2、5、1、4 的坐标标记为 X、Y、Z、A、B。这两个置换变为 $(XY)(ZAB)$ 和 $(YZAB)$。第二个固定 X。在中点处，特征向量方程为

$$\begin{aligned} zX &= \tfrac{1}{2}(X+Y), & zY &= \tfrac{1}{2}(X+Z), & & \\ zZ &= A, & zA &= B, & zB &= \tfrac{1}{2}(Y+Z). \end{aligned} \tag{2.1}$$

从 $X=1$ 开始，我们得到 $Y=2z-1$、$Z=4z^2-2z-1$、$A=zZ$ 和 $B=z^2Z$。最后一行给出 $(z-1)(4z^4+2z^3+z^2-z-1)=0$。我们取四次多项式的上半平面根 $z=z_*$。附录 A 直接表明 $z_*\notin U_5$ 且 $|z_*|^2<2/3$。因此，添加一个固定标签会保留特征值，并使其位于 Π_6 的内切圆盘内。

X 和 Y 处的行各自在一步内对 X、Y、Z 中的两个坐标取平均。从 Z 出发，我们先沿着确定性转移 $Z\to A\to B$ 前进。第三步时，B 处的行对 Y 和 Z 取平均。这三个返回点为

$$zX=\tfrac{1}{2}(X+Y), \qquad D=zY=\tfrac{1}{2}(X+Z), \qquad C=z^3Z=\tfrac{1}{2}(Y+Z).$$

的不同次幂记录了到达相应返回点所需的步数。三个返回点构成了 XYZ 的中位三角形，如图 1左图所示。令 $K=$ 凸包$\{X、Y、Z、A、B\}$。中图展示了凸包 K 及其像 $zK=\{zw:\ w\in K\}$。

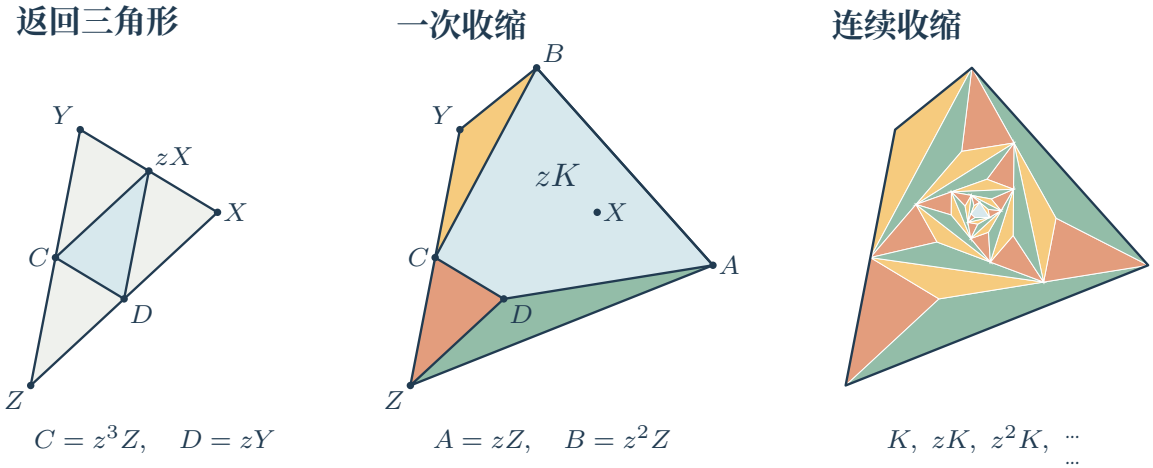


图 1。五状态回返三角形和嵌套坐标凸包。左图，X、Y、Z 的返回点分别是 XY、XZ、YZ 的中点。中图，中间坐标 A、B 构成四边形。边 AB 同时属于 K 和 zK。右图，将三个彩色三角形分别乘以 z 的连续幂，填满一直延伸到原点的壳层。OpenAI Codex (GPT-6.2) 协助编写了 TikZ 代码。

的顶点 K 按循环顺序依次为 Z、A、B、Y。剩余的坐标 X 严格位于 K 内部。我们记作 $K=[Z,A,B,Y]$，并用方括号表示所列点的凸包。附录 A 在 XYZ 的仿射坐标中检验这些关联关系。乘以 z 会将 K 的四个顶点依次映射到 A、B、C、D。两个凸包共享边 AB，且 C 位于

YZ。从 B 到 C，外边界经过 Y，内边界沿着 BC。从 C 到 A，外边界经过 Z，内边界沿着 D。线段 ZD 将这第二部分一分为二。因此，闭壳层，即 $K \setminus zK$ 的闭包，由以下部分组成

$$[B, Y, C], \qquad [Z, D, C], \qquad [Z, A, D].$$

它们的内部互不相交。列和给出 $z\sum_i v_i = \sum_i v_i$，因此原点是这五个坐标的质心，并且严格位于 K 内部。由于 $|z| < 1$，嵌套凸包不断收缩至原点。每个壳层都是第一个壳层的旋转缩放副本。

图示还确定了行权重。输出 A 只能通过将整行权重放在 A 处唯一的列上来得到，因为 A 是一个顶点。同样的辐角适用于 B。A、B 所在的列现在已经获得了各自完整的单位权重。因此，位于 X、Y、B 的各行只能使用位于 X、Y、Z 的列，分别得到 zX、D、C。由于 X、Y、Z 不共线，将一个点表示为它们的凸组合的权重是唯一的。每个中点分别为其两个端点赋予权重 $1/2$。我们根据带标签的点和 z，恢复了（2.1）中的每一行及其权重。

2.2. 为选定的行集评分

设 $Av = zv$ 是一个阶为 n的双随机矩阵 A 的特征对。用 $\mathfrak{S}_n$ 表示 $\{1, \ldots, n\}$的所有排列所构成的集合。根据伯克霍夫–冯·诺依曼定理，我们可以将 A 写成置换矩阵的凸组合。对 v 应用同样的凸组合，就会使 zv 落在 v的置换轨道的凸包中

$$zv \in \mathcal{O}(v) = \operatorname{conv}\{(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}) : \pi \in \mathfrak{S}_n\}.$$

反过来，任意此类凸组合的系数都会给出一个实现该特征对的双随机矩阵。每个加项都恰好使用每个目标标签一次。

当 A 中的对应元素为正时，就在一行和一列之间连一条边。匹配是这些边的一个集合，其中每行和每列至多出现一次。若某行或某列与所选边之一相接，则称其已匹配。任意 k 行的总权重为 k。每列从这些行接收的权重至多为一，因此它们至少有 k 个相邻列。

选择一个边数尽可能多的匹配。假设有一行 r_0 未匹配。从该行出发，沿着匹配之外的边从行走向列，再沿着匹配中的边从列走向行。如果到达一列未匹配的列，就取一条通往该列的最短路径，这样不会有顶点重复出现。在这条路径上，从匹配中移除已匹配的边，并加入其他边。每个内部顶点仍有一条匹配边，而两个端点都各增加一条边。新匹配的边数多一条，这与我们选择了最大规模的匹配相矛盾。

因此，我们能够到达的每一列都与一个已到达的行匹配。这些匹配的行彼此不同，且都不是 r_0。已到达行的每个相邻列也都是已到达列。可以沿着该行中匹配之外的一条边继续前进，而匹配中的那条边正是我们到达该行所经过的边。因此，相邻列的数量少于已到达行的数量，这与上面的计数相矛盾。

因此，该匹配覆盖了所有行。令 P 为它的置换矩阵，λ 为最小的匹配元素。则 $A - \lambda P$ 的元素非负，所有行和与列和均等于 $1 - \lambda$，且正元素的数量少于 A。若 $\lambda = 1$，则有 $A = P$。否则，$B = (A - \lambda P)/(1 - \lambda)$ 是双随机的。方程 $A = \lambda P + (1 - \lambda)B$ 使我们能够用 B重复这一论证。每一步中，正元素的数量都会减少，因此该过程最终会终止。

令 S 为一组行标签。对于 $\mathcal{O}(v)$ 中的每个向量，将其第 i 个坐标乘以 v_i，并对 $i \in S$ 求和。这个凸包在复平面中的像就是选定轨道多边形

$$\begin{aligned} H_S(v) &= \operatorname{conv}\left\{ \sum_{i\in S} \overline{v_i}\, v_{\pi(i)} : \pi \in \mathfrak{S}_n \right\}, \\ W_S &= \sum_{i\in S} |v_i|^2, \qquad zW_S \in H_S(v). \end{aligned} \tag{2.2}$$

共轭权重给出 $\bar{v}_i(zv_i) = z|v_i|^2$，因此特征值方程的归一化得分为$z$，其中 $W_S > 0$。我们可以用从 S 到列标签的单射代替排列，因为每个单射都可扩展为一个排列。位于同一点的两个标签仍是不同的列。因此，对于单位法向量 η，$H_S(v)$ 的支撑就是实分数的最大值

$$F_\eta(\pi, v) = \Re\left(\bar{\eta} \sum_{i\in S} \bar{v}_i v_{\pi(i)} \right).$$

由于 $zW_S \in H_S(v)$，我们有

$$W_S \Re(\bar{\eta} z) \le \max_{\pi\in\mathfrak{S}_n} F_\eta(\pi, v).$$

最大值通过对所有选定的行使用同一个排列来实现。在第3 节中，我们选择行，使得得分控制正多边形的一条边。

对于五状态特征向量，取这些行 Y，B。目标对 $(U,\ V)$ 给出的归一化得分为

$$h(U,V) = \frac{\overline{Y}\, U + \overline{B}\, V}{|Y|^2 + |B|^2}.$$

具有不同标签的二十个数对给出的点，其凸包为 $H_{\{Y,B\}}(v)/W_{\{Y,B\}}$。实际排列使用数对 $(X,\ Z)$ 和 $(Z,\ Y)$，从而得到 $z_* = \frac{1}{2}(h(X,\ Z) + h(Z,\ Y))$。

如果每一行都能独立选择目标，会有什么变化？对于第 Y 行，$I(YU)/|Y|$表示 U 到从原点指向 Y的直线的有向距离。对于第 B 行，使用从原点指向 B的直线。要使任一项最大，就沿有向距离增大的方向平行移动相应直线，直到它成为支撑 K的直线。附录 A 说明，每条支撑直线与 K 仅在 Z处相交。点 $h(Z,Z)$ 达到两个单独最大值之和，因此它是图 2中虚线多边形的顶角。若采用公共指派，要达到这一高度，就必须两次使用第 Z 列。这正是 $zK \subseteq K$ 中所没有的约束。

3. 任意双随机矩阵的谱界

这两个证明在 (2.2) 中选择了不同的标签。在外围根附近，我们保留极限特征向量的非零标签。对于位于 U_n 之外的特征值，我们保留其坐标凸包边界上的标签。本节中，我们用 n 表示阶。

3.1. 外围根附近的区域

定理 *1.2* 的证明。 取一个阶为 ω 的根 $q \le n$，并令 $M = q\lfloor n/q \rfloor$。引言中的循环构造给出 $\Pi_M \subseteq U_n \subseteq D_n$。对于 $M \ge 3$，只需检验 Π_M 在靠近 ω的特征值所满足的两条相邻边不等式。

选择极限处的标签。首先，假设 $q \ge 2$ 和 $M \ge 3$。令 $\alpha = \pi/M$ 和 $\xi = e^{2i\alpha}$。两条相邻边的外向单位法向量为 $\eta = \omega e^{\pm i\alpha}$，其支撑不等式为$R(\bar{\eta} z) \le \cos\alpha$。在 ω处，其他边的不等式均为严格不等式。若结论不成立，取特征值$z_k \notin \Pi_M$ 收敛到 ω，其中 $A_k u_k = z_k u_k$、A_k 均为双随机矩阵，且 $\|u_k\|_2 = 1$。沿某个子列取极限$A_k \to A$ 和 $u_k \to v$。我们有 $Av = \omega v$ 和 $\|v\|_2 = 1$。

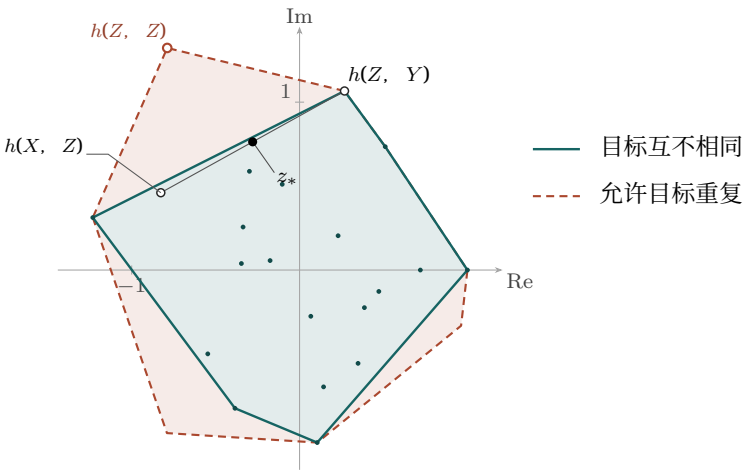


图2. 五状态示例中行 Y 和 B 的归一化得分。实心多边形是目标互不相同的得分的凸包。由黑色线段连接的空心圆表示中点矩阵中的两种指派。虚线轮廓允许目标重复，包括 $h(Z,\ Z)$。TikZ代码由 OpenAI Codex (GPT-6.2) 协助生成。

在 A的置换分解中，每个权重为正的项都将 v 映射到 ωv。事实上，置换后的向量范数均为一，而它们的平均向量的范数仍为一。固定一个这样的置换 R，其中 $v_{R(i)} = \omega v_i$。我们选定的标签是 $S = \{i : v_i \neq 0\}$。记 $m = |S|$。其坐标多重集由完整的 ω-轨道构成，并按重数计数。因此，q 整除 m、$m \leq M$和 $\sum_{i\in S} v_i = 0$。特别地，模最大的坐标至少出现 q 次。

固定 S 并令 $u \in \mathbb{C}^n$。对于置换 $p \in \mathfrak{S}_n$，由 (2.2) 得到的得分及其归一化形式为

$$F_\eta(p,u) = \Re\left(\bar\eta \sum_{i\in S} \bar u_i u_{p(i)}\right), \qquad W(u) = \sum_{i\in S} |u_i|^2.$$

考虑 η 中的加号，并令 $T = R^{-1}\circ p$。在极限向量处，得分变为$R(e^{-i\alpha}\sum_{i\in S}\bar v_i v_{T(i)})$。箭头 $i \to T(i)$若两端都在 S中，则构成互不相交的路径和环。离开 S 的箭头贡献为零。路径的长度按其顶点数计算；孤立标签也算作一条只有一个顶点的路径。我们将比较每个分量的贡献与 $\cos\alpha$ 乘以其平方范数。共轭给出了减号情形下的比较。

路径的贡献。 对于一个含有 $l \leq M$ 个顶点的环，设 C 为其置换矩阵，w 为该环上的坐标向量。将 w 在 C 的标准正交特征基下展开，可将$w^*Cw/\|w\|_2^2$ 写成 l次单位根的凸组合。这些单位根都不位于从 1 沿正方向到 ξ 的开弧上，因此得分至多为 $\cos\alpha$ 乘以 $\|w\|_2^2$。若 $l < M$，等号成立将迫使 w 为常数。若 $l = M$，则该环覆盖全部 S，等号成立时只能取特征值 1 和 ξ对应的特征空间。由于 $\sum_{i\in S} v_i = 0$，常数分量为零。

在按顺序排列的 l 个顶点的路径上，令 w 为其坐标向量，并令 J_l 为对角线上方紧邻位置为 1、其余位置为 0 的矩阵。得分为 $R(e^{-i\alpha}w^*J_lw)$。其厄米矩阵与 $(J_l + J_l^*)/2$ 对角酉相似，所用对角矩阵的对角元为 $e^{ij\alpha}$、$1 \leq j \leq l$。正弦向量 $(\sin(ij\pi/(l+1)))_{i=1}^{l}$ 给出特征值 $\cos(j\pi/(l+1))$，$1 \leq j \leq l$。当 $l \leq M-2$ 为偶数时，最大值严格小于 $\cos\alpha$。

在 $l = M-1$ 处，最大特征值等于 $\cos\alpha$。若要取等号，则需要 w_j 与 $e^{ij\alpha}\sin(j\alpha)$ 成比例，或 $w_j = c(\xi^j - 1)$ 满足 $c \neq 0$。这些 $M-1$ 个值的和为 $-Mc$。如果它们穷尽了 S，这就与中心化矛盾。否则，唯一剩余的坐标等于 Mc，其模严格大于 $2|c|$，因为 $M \geq 3$。所有显示出的坐标的模至多为 $2|c|$。这与最大模重复相矛盾。

由 M 个顶点构成的路径也覆盖了 S，因此 $\mathbf{1}^*w = 0$，其中 $\mathbf{1}$ 是全1向量。在这个

子空间上，所需的严格不等式就是其正定性

$$H = \cos\alpha\, I - \tfrac{1}{2}(e^{-i\alpha}J_M + e^{i\alpha}J_M^*).$$

正弦特征值表明， H 有一个负特征值和 $M-1$ 个正特征值。要确定其负方向相对于约束的位置，求解 $Hx = \mathbf{1}$。第 j 行的方程为

$$\cos\alpha\, x_j - \tfrac{1}{2}(e^{-i\alpha}x_{j+1} + e^{i\alpha}x_{j-1}) = 1, \qquad 1 \le j \le M,$$

其中 $x_0 = x_{M+1} = 0$。在施加这些端点条件之前，齐次递推关系的解为1和 ξ^j。将 $x_j = j$ 代入左侧，得到 i正弦 α，因此 aj 是一个特解，且 $a = 1/$（i正弦 α）。端点条件给出

$$x_j = a\left(j - (M+1)\frac{\xi^j - 1}{\xi - 1}\right).$$

由于 $\sum_{j=1}^{M}\xi^j = 0$ 和 $1/(\xi-1) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ 余切 α，对各项求和得到

$$\mathbf{1}^* H^{-1}\mathbf{1} = aM(M+1)\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\xi - 1}\right) = -\frac{M(M+1)\cot\alpha}{2\sin\alpha} < 0.$$

因此，由 $H^{-1}\mathbf{1}$张成的直线贡献了厄米型的唯一负方向。该型的正交补恰为 $\mathbf{1}^{\perp}$，因为（$H^{-1}\mathbf{1}$）$^*Hw = \mathbf{1}^*w$。由于 H 非奇异，它在该正交补上正定。因此，对整条路径也有严格不等式。

哪些等式仍然成立？我们已经证明 $F_\eta(p,\ v) \le \cos\alpha\, W(v)$。当 u_k足够大时，严格不等式仍然成立。若等号成立，则不存在路径，因此 $T(S) = S$ 且 $p(S) = S$。我们声称，对于每个 u，这个置换都满足相同的界。

当 T 的每个环上坐标都恒定时，在整个 S上都是如此。于是 $p|_S$ 的每个环的长度都能被 q整除，因为其坐标均非零。其 l次根包含ω，且它们之间的间距至少为 $2\pi/M$。它们都位于经过 ω、对应所选边的内侧半平面内。在另一种等号情形中， T 含有一个完整的 M环，而该环上对应于ξ 的特征向量列出了正多边形上 M 个互不相同的顶点。这里 $v_{p(i)} = \omega\xi v_i$；若取负号，则为 $\omega\xi^{-1}v_i$。这个乘子是一个 M次根。它的 M次方固定每个顶点，因此 $(p|_S)^M$在S上是恒等变换。因此， $p|_S$ 的矩阵的每个特征值都是一个 M次根。在这两种情形下，该矩阵都是正规矩阵，因此在标准正交特征基下进行计算可得，对于所有 u， $F_\eta(p,\ u) \le \cos\alpha\, W(u)$。

置换的数量和两条边法向量都是有限的。因此，对于所有充分大的 k，它们的不等式会在 u_k 处同时成立。对 A_k 的置换分解取平均。由行特征值方程可得 $R(\bar{\eta}z_k)W(u_k) \le \cos\alpha\, W(u_k)$，其中 $W(u_k) \to 1$。两条相邻的不等式均成立。再结合 ω 附近其他各边的严格不等式，这与 $z_k \notin \Pi_M$ 矛盾。

其余的根和环带。一阶时 $D_1 = \{1\}$。二阶时，对于 $0 \le a \le 1$，两行分别为 $(a, 1-a)$ 和 $(1-a, a)$，从而特征值为 1 和 $2a-1$。对于 $n \ge 3$ 和 $\omega = 1$，每个不同于零的置换特征角到零的圆周距离至少为 $2\pi/n$。因此，每个置换的数值域都满足 1 处 Π_n 的两条相邻不等式，对其取平均即可得到任意双随机矩阵的相应结论。满足 $M = 2$ 的唯一剩余情形是 $n = 3, \omega = -1$。此时，非实特征值 z 满足 $1 + 2Rz = \operatorname{tr} A \ge 0$。因此， $|z+1| < 1/2$ 中的每个特征值都属于 $[-1, 1] = \Pi_2$。

最后，根据其置换分解的范数相等论证，双随机矩阵的每个单位模特征值都是阶数至多为 n 的根。刚才找到的有限个邻域覆盖了 D_n 的模为单位的点。它们在 D_n 中的补集是紧集；若该补集非空，其最大模严格小于 1。由此得到所述环带。

□

3.2. 单位圆附近的内部坐标

对于 $m \geq 3$，将 $\rho_m(\psi)$ 记为满足 $re^{i\psi} \in \Pi_m$ 的最大 $r \geq 0$。在朝向外法线为 $e^{i\phi}$ 的边的扇形中，

$$\rho_m(\psi)\cos(\psi - \phi) = \cos(\pi/m), \qquad |\psi - \phi| \leq \pi/m.$$

由此可得，在每个边扇形上，$|(\log \rho_m)'| \leq \tan(\pi/m)$。径向公式在顶点处一致。记 $\operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y\in E} |x - y|$ 表示到集合 E 的距离，则有

$$|\log \rho_m(\psi) - \log \rho_m(\psi')| \leq \tan(\pi/m)\ \operatorname{dist}(\psi - \psi', 2\pi\mathbb{Z}). \tag{3.1}$$

定理 *1.3* 的证明。假设 $z = re^{i\theta} \notin U_n$。所有实特征值都属于 $\Pi_2 = [-1, 1]$，且单位模特征值必为阶数至多为 n 的单位根，这是置换分解中范数相等所致。特别地，z 是非实数，且 $0 < r < 1$。由行方程可得 $zK \subseteq K$，而 K 由归一化可知包含于闭单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中。

圆盘中有多大部分必须由 K 包含？在 $n+1$ 个角度 0、θ、……、$n\theta$ 中，圆上总有两个角度相距不超过 $2\pi/(n+1)$。因此存在某个 $1 \leq d \leq n$，

$$\alpha = \operatorname{dist}(d\theta, 2\pi\mathbb{Z}) \leq 2\pi/(n+1).$$

若 $\alpha = 0$，经过 z 的射线经过一个阶不超过 n的根，且从零到该根的径向线段位于 U_n中。因此 $\alpha > 0$。令 $m = d\lfloor n/d \rfloor \geq n/2$。按角度计算，最近的 d次根是 Π_m的一个顶点，与 z的角距离为 α/d。界（3.1）约束了边界半径的对数。其在该顶点处的值为零。因此，由外部性可得

$$d(-\log r) < \alpha \tan(\pi/m) \leq \alpha \tan(2\pi/n).$$

从模为一的坐标 v_* 出发。点 $z^{jd}v_*$ 都位于 K中。对于 $0 \leq j \leq \lfloor 2\pi/\alpha \rfloor$，它们的方向每次前进 $\pm\alpha$，因此最大间隙不超过 α。每个点的模至少为$\exp[-2\pi\tan(2\pi/n)]$。在任意方向上，列表中都有一个点与其夹角不超过 $\alpha/2$。因此，其投影给出

$$a\mathbb{D} \subseteq K \subseteq \mathbb{D}, \qquad a = 1 - 40/n.$$

事实上，每个支撑值至少为$\exp[-2\pi\tan(2\pi/n)]\cos(\pi/n)$。对于 $n \geq 256$，利用$\cos(2\pi/n) > 0.9996$、$\sin u \leq u$, $1 - e^{-u} \leq u$（对于 $u \geq 0$）以及 $1 - \cos u \leq u^2/2$。与1的差至多为$(4\pi^2/0.9996 + \pi^2/(2n))/n < 40/n$。

边界坐标可以使用哪些目标？令 $S = \{i : v_i \in \partial K\}$ 和 $s = |S|$，并将同一点处的标签分别计数。圆盘界给出 $s \geq 3$。设 $M = s\lfloor n/s \rfloor$。我们有 $s \leq M \leq n$和 $M \geq n/2$。由于 $z \notin \Pi_M$，存在一条外法线为 $e^{i\phi}$的边，使得 $\Re(e^{-i\phi}z) > \cos(\pi/M)$。式 (2.2) 给出一个单射 $\sigma : S \to \{1, \ldots, n\}$，其得分为

$$H(\sigma) = \Re \sum_{i\in S} e^{-i\phi}\overline{v_i}v_{\sigma(i)}$$

至少为 $R(e^{-i\phi}z)W_S$。选取得分最大的单射，并令 $W' = \sum_{i\in S} |v_{\sigma(i)}|^2$。展开平方距离可得

$$\sum_{i\in S} |e^{i\phi}v_i - v_{\sigma(i)}|^2 + (W_S - W') = 2(W_S - H(\sigma)) < 2(1 - \cos(\pi/M))W_S \leq \frac{\pi^2 s}{M^2} \leq \frac{2\pi^2}{n}. \tag{3.2}$$

假设每个严格内部坐标的模平方都不超过 $1 - 100/n$。每个边界坐标的模平方都至少为 a^2。如果该单射使用了任何内部目标，就会遗漏数量相同的边界标签，因此

$$W_S - W' \ \geq\ a^2 - (1 - 100/n) = 20/n + 1600/n^2 > 2\pi^2/n.$$

这与（3.2）矛盾。如果没有内部标签，该单射已经映射到 S上。无论哪种情况，它都会置换 S，$W' = W_S$，且平方距离之和小于 $2\pi^2/n$。

为什么指派会保持循环顺序？每个旋转后的源点 $e^{i\phi}v_i$ 及其指派的目标点$v_{\sigma(i)}$ 的模至少为 a。角差为 $u \in [-\pi, \pi]$ 且模为上述数值的两点之间的弦长至少为 $2a|$正弦$(u/2)|$。由（3.2）可知，每个旋转后的源点与其指派的目标点的辐角之差小于

$$\delta = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2\pi^2/n}}{2a}\right) < 0.34.$$

为控制边界点之间弦的方向，记 $\rho(\theta)$ 为 K 的半径，并令 $\gamma = \arccos a < 0.57$。关于 δ，γ 的界，由 $\pi < 22/7$ 以及在 $u = 0.17$，0.57 处的泰勒界 $\sin u \geq u - u^3/6$ 和 $\cos u \leq 1 - u^2/2 + u^4/24$ 已可直接得到。外法线在 ψ 处的边到原点的距离为 $h \geq a$。沿着该边，$\rho(\theta)\cos(\theta - \psi) = h$。由于 $\rho \leq 1$，$\log \rho$ 的绝对导数至多为正切γ。由连续性可知，该界在顶点处也成立，并且对旋转多边形 $e^{i\phi}K$ 同样成立。

考虑两个按递增角度顺序排列、间隙为 $0 < g < \pi$ 的边界点，其半径分别为 r_1，r_2。将坐标轴旋转至其中间角后，它们的弦具有径向和切向分量

$$(r_2 - r_1)\cos(g/2), \qquad (r_2 + r_1)\sin(g/2).$$

切向分量为正。两个分量的绝对值之比为

$$\left|\tanh\left(\tfrac{1}{2}\log(r_2/r_1)\right)\right| \cot(g/2) \leq (g/2)\tan\gamma \cot(g/2) \leq \tan\gamma.$$

因此，弦的方向与中间角处圆的前向切线所成的角小于 γ。

按角度对旋转后的源点 $e^{i\phi}v_i$ 排序，并使用长度为 2π 的区间内的实数代表元。对于每个指定的目标点，选择其角度的一个代表元，使其与源点角度相差不超过 δ。在每 s 项之后添加 2π，将两个列表按周期方式延拓。从不同源点角度之间的间隔处开始。位于同一角度的源点重合，因为它们位于包含 $a\mathbb{D}$ 的同一个凸体的边界上。在每个这样的群内对指定角度排序，同时保持得分不变。

如果两个相邻目标点的顺序严格递减，那么它们对应的源点必定不同。从第一个源点到第二个源点，以及从第二个目标点到第一个目标点的两个前向角间隙都小于 2δ。根据目标角与源点角之间两组差值的平均值，两个中间角的差至多为 δ。因此，两条前向弦之间的夹角至多为 $2\gamma + \delta < 1.48 < \pi/2$。它们的点积为正。源点 a 与目标点 b 配对时，其得分为 $a \cdot b = R(\bar{a}b)$。对于源点 a_1，a_2 及其目标点 b_1，b_2，交换目标点会使得分增加

$$a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = (a_2 - a_1) \cdot (b_1 - b_2) > 0.$$

交换会使目标保持互异。这一增大与极大性矛盾，包括反向的一对跨越列表开头的情形。

因此，目标角单调不减。相同的目标点可以按其循环顺序重新标记。s 边界标签上的指派现在是一次循环移位。令 v_S 为按此循环顺序排列的边界坐标向量，每个标签对应一个分量。按此顺序表示的移位矩阵Q 的特征值属于 s次单位根。将 v_S 在 Q的标准正交特征基下展开，得到 $v_S^* Q v_S / W_S \in \Pi_s \subseteq \Pi_M$，因为 s整除 M。它在所选法向量上的投影为 $H(\sigma)/W_S >$ cos(π/M)，这就产生了矛盾。因此，某个严格位于内部的标签，其模平方大于 $1 - 100/n$。

□

如果每个特征向量坐标都位于 ∂K上，定理 1.3 给出 $z \in U_n$ 对于 $n \geq 256$，其中也包括带有重合标签或坐标位于边的内部的配置。至于定理 1.2中的环带，估计式 $r_n \leq$cos(π/n) 将得到 $D_n = U_n$，因为剩下的圆盘已经位于 Π_n中。

4. 相对置换及其标记边

令 P, Q 为阶数为 N的置换矩阵，并记 $A=(1-t)P+tQ$。在 $t=0$ 和$t=1$处， A 是一个置换矩阵，其特征值是阶数至多为 N的单位根。对于 $0<t<1$，我们可以交换 P 和 Q，取 $0<t\le 1/2$。我们采用行约定（Pv）$_i = v_{p(i)}$ 和（Qv）$_i = v_{q(i)}$。如果 $A_{ij}>0$，则 A 的图中有一条箭头 $i\to j$。由 p, q 生成的群的轨道给出一个共同分块分解。这些块是不可约的，即在每个块内，每个标签都可以沿有向箭头到达其他任意标签。事实上，我们可以沿两个置换移动，而有限集合上的逆置换是其非负次幂之一。固定 A 的一个特征值 z，并选择一个阶数为 n的支撑块。将其标签编号为从 1 到 n。下文中， A, P, Q 以及 p, q 表示它们限制在这些标签上的部分。选择一个关于 z 的特征向量 v，并将 $\max_{1\le j\le n}|v_j|=1$归一化。

置 $R=q\circ p^{-1}$。我们在标签上使用箭头 $i\to p(i)$ 和 $i\to R(i)$，并将它们在平面中画成连接相应坐标的线段。如果某一行使用的第一个坐标是 v_j，那么第二个坐标就是 $v_{R(j)}$。在从v_j 到 $v_{R(j)}$ 的有向边上标记点

$$b_j=(1-t)v_j+tv_{R(j)}.$$

找到这些标记有两种方法。我们可以像上面那样在每条边上放置一个标记，也可以将所有坐标乘以 z。特征值方程 $b_{p(i)}=zv_i$ 表明，这两种操作得到的列表相同，只是顺序可能不同。特别地，下面的计算会分别计算标签，即使两个坐标占据同一个点。

设 $z=re^{i\theta}$。两个置换矩阵的凸组合对于欧几里得范数来说是收缩，因此 $r\le 1$。当 $r=1$ 时，等号成立迫使 $Pv=Qv=zv$，这使得 z 属于阶至多为 n的单位根。以下设 $z\notin U_N$。内接于 Π_N的圆盘半径为 $\cos(\pi/N)$，其中 $N\ge 3$，因此 $\cos(\pi/N)<r<1$。设 $\delta=1-r$并令 $x=-\log r$。二者都衡量半径的损失，其中 $0<\delta\le x$。令

$$\Delta_j=v_{R(j)}-v_j,\qquad S=\sum_j|\Delta_j|^2,\qquad V=\sum_j|v_j|^2.$$

对于复数 a, b，展开 $|(1-t)a+tb|^2$ 可得 $(1-t)|a|^2+t|b|^2-t(1-t)|a-b|^2$。对各条边求和。两组端点的平方范数均为 V，而标记列表的平方范数为 r^2V。此外 $v_{p(i)}-zv_i=-t\Delta_{p(i)}$。因此

$$t(1-t)S=(1-r^2)V,\qquad \|(P-zI)v\|_2^2=t^2S. \tag{4.1}$$

这些标记是 $(zv_1,\ \ldots\ldots,\ zv_n)$ 的重排，因此 $\prod_{j=1}^n b_j=z^n\prod_{j=1}^n v_j$。若每个 v_j 均非零，则除以 $\prod_{j=1}^n v_j$ 并利用 $b_j=v_j+t\Delta_j$，得到

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+t\,\frac{\Delta_j}{v_j}\right)=z^n. \tag{4.2}$$

第一个恒等式给出了多边形边长度的界。对乘积取辐角，可将特征值角度与沿这些边转过的圈数联系起来。

引理 4.1。假设 $N\ge 1000$，且该块的支撑包含一个位于 U_N 之外的特征值。令 α 为从 $e^{i\theta}$ 到一个阶为 $d\le N$ 的单位根 ω 的圆周角距离。则

$$x<7\alpha/N,\qquad x\le 1000t/N^2,\qquad S\le 4000n/N^2.$$

证明。取 $M=d\lfloor N/d\rfloor\ge N/2$。根 ω 是 Π_M的一个顶点，且 $r>\rho_M(\theta)$。由 (3.1)，$x<$正切$(\pi/M)\alpha\le 7\alpha/N$。

我们可以选择一个根，使特征值方程本身就给出 α 的界。将 v 在置换矩阵 P 的标准正交特征基下展开。商 $\|(P-zI)v\|_2^2/V$ 是 $\lambda\in\sigma(P)$ 上 $|\lambda-z|^2$ 的加权平均。对于其中一个单位根，

$$|\lambda-z|^2\le\frac{t(1-r^2)}{1-t}\le 4tx.$$

其阶至多为 n。令 $\alpha_\lambda\in[0,\pi]$ 为其与 $e^{i\theta}$之间的角距离。由弦公式和正弦$(\alpha_\lambda/2)\ge\alpha_\lambda/\pi$ 可得

$$|z-\lambda|^2=(1-r)^2+4r\sin^2(\alpha_\lambda/2)\ge\frac{4r}{\pi^2}\alpha_\lambda^2.$$

由于 $r>0.99$，可知 $\alpha_\lambda\le 2|z-\lambda|$。现在由第一个界可得 $x\le 28\sqrt{tx}/N$。除以$\sqrt{x}$开平方。由（4.1）、$1-r^2\le 2x$，$V\le n$ 以及 $1-t\ge 1/2$，可得能量界。 □

引理 4.2。若 $N\ge 1000$，则每个支撑着 U_N 之外特征值的块，其大小为 $n>N/1000$。

证明。设 $n\le N/1000$。由柯西–施瓦茨不等式，$\sum_j|\Delta_j|\le\sqrt{nS}\le 64n/N$。为比较 i 和 $p(i)$ 处的模，先比较$v_{p(i)}$ 与 zv_i。于是得到

$$\sum_i\big||v_{p(i)}|-|v_i|\big|\le t\sum_j|\Delta_j|+n(1-r).$$

沿着 p和 R的箭头，各模的全变差至多为 $(1+t)64n/N+nx<0.1$。它们的无向图是连通的，因为 $q=R\circ p$。沿着一条从模为一的位置到任意其他位置的简单路径，所经历的全变差至多为这个总全变差。因此，所有模都大于 0。9，所以我们可以取每个坐标的辐角。

记非零复数 w的主辐角为 $\operatorname{Arg}w\in(-\pi,\pi]$。每条边的长度至多为 $64n/N<0.9$，且不经过零点。沿着从 v_j 到 $v_{R(j)}$的线段前进时，辐角的变化量为 $\operatorname{Arg}(v_{R(j)}/v_j)$。一个环绕零点的绕数等于这些变化量之和除以 2π。它是整数，因为环会回到起点。弦公式给出了任意 环上这些变化量绝对值之和的上界 $2\sum_j|\Delta_j|/0.9<1$。因此，每个环的绕数都是零。

令 $y_j=\Delta_j/v_j$。这里 $|y_j|<0.1$。稍后我们还将使用以下估计。两个主值对数中的线性项相互抵消，剩下的收敛级数满足

$$|\log(1+ty)-t\log(1+y)|\le\sum_{k\ge2}\frac{|t^k-t|}{k}|y|^k\le 2t|y|^2,\qquad |y|\le 0.1. \tag{4.3}$$

由于 $1+y_j=v_{R(j)}/v_j$，我们有 $\sum_{j\in C}\log(1+y_j)=0$ 在每个环 C上。实部望远镜式相消，虚部之和为 2π 乘以绕数。对（4.2）两边取辐角，并将估计除以 n，我们得出从 z 到最近的 n次单位根的角度至多为

$$\frac{2t}{n}\sum_j|y_j|^2\le\frac{3tS}{n}\le 12x.$$

最后一个不等式由（4.1）得出。将引理 4.1 应用于这个根会得到 $x<84x/N$，这与假设矛盾。 □

如果 $N\ge 10^{213}$，引理 4.2 给出 $n>10^{210}$。由于 $U_n\subseteq U_N$，该特征值也位于 U_n之外。因此，在接下来的三节中，我们可以使用引理4.1，用 n代替 N。

5. 为什么坐标模几乎相等

我们研究一个阶为 n 的不可约块，并通过 $\max_i |v_i| = 1$ 将特征向量 v 归一化。两个模较小的坐标之间的一条短弦，可能在原点处张开很大的角度。因此，在利用边长估计一个环转过了多少圈之前，我们必须知道坐标可能有多小。我们需要的界是：只要 $z \notin U_n$ 且 $n \geq 10^{210}$，就有 $\min_i |v_i| > 1 - 10^{-7}$。

考虑将所有坐标同时旋转相同的角度。由于 $A^j v = z^j v$ 和 $|z|$ 接近于 1，对于形如 $j\theta$的角度（其中 $\theta = \arg z$），我们可以用很小的均方成本在原坐标与旋转后的坐标之间输运质量。首先，通过纳入原点集经过适当单位根的幂次旋转所得的点集，将这一估计推广到任意角度。然后，我们考察模减小会付出什么代价。连接所有坐标的树中一条路径必须穿过最大模与最小模之间的所有半径。某种旋转会使这条路径上的许多顶点远离整个点集，从而给出相同输运成本的一个下界。

5.1. 旋转坐标的成本

固定一个阶为 $d \leq n$的单位根 ω，令 α 表示其辐角与 $\theta = \arg z$之间的圆周距离。给这 nd 个点 $\omega^a v_i$, $0 \leq a < d$, $1 \leq i \leq n$各赋予质量 $1/(nd)$，重复出现的点按其重数计数。记 μ 为该概率测度，记 μ_u 为将其旋转 u所得的测度。对于两个质量为 ν 的分布，ν'，记

$$W_2^2(\nu, \nu') = \inf \mathbb{E}|X - Y|^2.$$

下确界取遍 X、Y 的联合分布，其中 X 服从分布 ν，而 Y 服从分布 ν'。这些联合分布称为耦合。耦合规定了第一分布中每个点的多少质量转移到第二分布中的每个点。期望是所行距离的平方的平均值，而下确界给出了可能的最小成本。由于交换 X 和 Y不会改变 $|X - Y|^2$，因此成本是对称的。加入 ω 的幂次后，μ 在旋转 $2\pi/d$下保持不变。我们稍后再选择 ω。

引理 5.1。如果 $n \geq 1000$ 和 $z \notin U_n$，那么对于每个 $u \in \mathbb{R}$，

$$W_2^2(\mu, \mu_u) \leq \frac{202}{dn} + 2\alpha^2. \tag{5.1}$$

证明。令 $\delta = 1 - r$。由引理 4.1，$0 < \delta \leq x < 8\alpha/n$，因此 $\alpha > 0$。对于非负整数 j，均匀地选择一个标签 I，并进行 j 步，每一步从 a到 b的概率为 A_{ab}。记 J 为最终标签。列和等于一使得 J 也服从均匀分布。由于$A^j v = z^j v$，给定 I时 v_J的条件均值为 $z^j v_I$。因此 $\mathbb{E}[v_J \bar{v}_I] = z^j V/n$，而均匀性给出 $\mathbb{E}|v_I|^2 = \mathbb{E}|v_J|^2 = V/n$。展开平方得

$$\mathbb{E}|v_J - e^{ij\theta} v_I|^2 = 2(1 - r^j)\frac{V}{n} \leq 2j\delta.$$

同时乘以独立选取的均匀幂 ω，得到两个分布分别为 μ和$\mu_{j\theta}$ 的随机变量，且它们的期望平方距离相同。

给定角度 u，我们需要多少步？令 $H = 2\pi/d$。ω 的辐角是 H的整数倍，因此对于符号 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$，有 $\theta \equiv \varepsilon\alpha$ （模 H）。将 εu 模 H 表示为$y \in [0, H)$，并取 $j = \lfloor y/\alpha \rfloor$。那么 $j \leq H/\alpha$，并且

$$u - j\theta \equiv \varepsilon(y - j\alpha) \pmod{H}, \qquad 0 \leq y - j\alpha < \alpha.$$

当 $j = 0$ 时，这也涵盖 $\alpha \geq H$。将第二个变量旋转右侧的代表元后，其分布为 μ_u，因为 μ 在旋转 H 后保持不变。它在单位圆盘内额外移动的距离至多为 α。不等式 $|b + c|^2 \leq 2|b|^2 + 2|c|^2$ 将代价界定为 $4j\delta + 2\alpha^2$。由于 $\delta < 8\alpha/n$，第一项至多为 $64\pi/(dn) < 202/(dn)$。

□

现在我们来寻找一种代价超过5.1所允许的旋转。用一棵树连接这些标签，使每一对标签之间都有唯一的简单路径。在平面中绘制这棵树时，我们可以将标签i 放在任意 $w_i = \omega^{a_i} v_i$ 处，其中 $a_i \in \mathbb{Z}$。所有 d 副本仍具有相同的测度 μ。因此，我们可以选择这些副本，使树中相邻顶点彼此靠近，同时每个顶点都保持其原有的模。

引理 5.2。设一棵树以 n 位置点为顶点，顶点位于 $w_i = \omega^{a_i} v_i$，且满足 $a_i \in \mathbb{Z}$。令 E 为其各边上 $|w_i - w_j|^2$ 之和，并设 $L = 2d\sqrt{nE}$。假设 $0 < g \le 0.01$ 且 最小值$_i\, |v_i| \le 1 - g$。若$\eta > 0$ 满足

$$\sqrt{E} \le \eta, \qquad 16\pi(\eta L + 2d\eta^2) < 0.1g, \tag{5.2}$$

then

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} W_2^2(\mu, \mu_u) \ge \frac{g^2\eta^2}{2nE}. \tag{5.3}$$

证明。令 Γ 由这棵树的直边及其在 ω各次幂作用下的所有像组成。它包含 μ的支撑。在 μ_u 与 μ的任意耦合中，从 y 出发的质量至少移动 dist(y, Γ)。因此

$$W_2^2(\mu, \mu_u) \ge \int \operatorname{dist}(y, \Gamma)^2 \, d\mu_u(y).$$

我们对 u取平均来估计右侧。半径为 s 的顶点会遍历半径为 s的整个圆。

先考察环带 $1 - g \le |y| \le 1$ 中有多少部分可能靠近 Γ。我们可以沿一条路径遍历一棵树，并使每条边经过两次。根据柯西–施瓦茨不等式，这条路径的长度至多为 $2\sqrt{nE}$，因此这些d 条路径的总长度至多为 L。沿每条路径每隔弧长 η 选取一个中心，并包括端点。以这些中心为圆心、半径为 4η 的圆盘覆盖了 3η-邻域 Γ。这样的圆盘至多有 $L/\eta + 2d$ 个，因此它们的总面积小于 $0.1g$，依据（5.2）。

如果某个半径对应的角度中，至少有一半会产生距离 3η 大于 Γ 的点，就称 $s \in [1 - g, 1]$ 为良好半径。良好半径的总长度至少为 $g/2$。否则，其余半径的总长度大于 $g/2$。对于其中每个半径，至少有一半的角度落在该邻域内。极坐标积分给出的面积至少为 $(1 - g)\pi g/2 > 0.1g$。

接下来要统计这些半径附近的实际顶点。从一个模为 1 的顶点到一个模至多为 $1 - g$ 的顶点，沿唯一的树路径前进。连续两个端点的模之间的区间覆盖 $[1 - g, 1]$，即使某些边上的模有所增加也是如此。选出区间与某个良好半径相交的边。若选出的边有 M 条，则由柯西–施瓦—茨不等式，它们的长度总和至多为 $\sqrt{ME}$；又因为它们的径向区间覆盖所有良好半径，长度总和至少为 $g/2$ 。模的下降给出 $E > 0$，因此有 $M \ge g^2/(4E)$。这些边的起始顶点互不相同。对于每个这样的起始顶点 $w_i = r_i e^{i\varphi_i}$，在其对应边的区间内选取一个良好半径 s 。于是 $|r_i - s|$ 至多为边长，因而至多为 $\sqrt{E} \le \eta$。当该顶点旋转到 $e^{iu} w_i$ 时，将它与$se^{i(u+\varphi_i)}$进行比较。这两个点之间的距离至多为 η 。对于至少一半的角度，半径为 s 的点到 Γ 的距离大于 3η 。由三角不等式，旋转后的顶点到 Γ 的距离至少为 2η （图 3）。

每个选定的标签及其 d 个副本的质量为 $1/n$。它对所示积分平均值的贡献至少为$(2\eta)^2/(2n)$。乘以 $M \ge g^2/(4E)$ 即得（5.3），因为对 u取上确界至少不小于其平均值。

□

5.2. 在支撑块上选择一棵树

命题 5.3. 设 P, Q 是 $n \ge 10^{210}$ 阶置换矩阵，并固定 $0 < t \le 1/2$。若$A = (1 - t)P + tQ$ 不可约且具有特征值 $z \notin U_n$，则每个满足 最大$_i\, |v_i| = 1$ 的对应特征向量都满足 最小$_i\, |v_i| > 1 - 10^{-7}$。

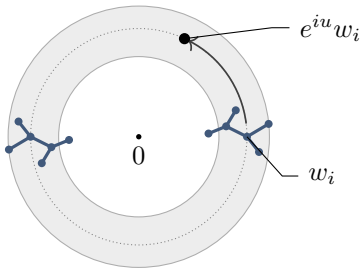


图 3。 展示 $d = 2$ 的一棵树及其半周旋转示意图，其中环带经过放大。随着 u 变化，顶点w_i 沿虚线圆移动。当 $e^{iu}w_i$ 位于一段远离两棵树的弧上时，它到两棵树并集的距离，是它在任何耦合中的移动距离的下界。OpenAI Codex (GPT-6.2) 协助编写了 TikZ代码。

证明. 令 $g = 10^{-7}$, $t_0 = g/10^4$ 和 $B = 10^{13}g^{-2}$。假设某个坐标的模不超过$1 - g$。引理 4.1 和 (4.1) 得到

$$x \le \frac{1000t}{n^2}, \qquad S \le \frac{4000}{n}, \qquad \sum_i |v_{p(i)} - zv_i|^2 = t^2 S. \tag{5.4}$$

特别地，沿 p 的箭头求和的模的变差至多为 $t\sqrt{nS}+n\delta \le 64t$。当 t 有下界时，取自$\overline{A}$ 支撑的一棵树很有用。对于较小的 t，恒等式 (5.4) 中的最后一个等式让我们可以先沿着 P 的环进行处理。

情形 *1*。假设 $t \ge t_0$。 $j\theta/(2\pi)$ 的 $n+1$ 个小数部分中，有两个落在 $[0,1)$ 的 n 个等长子区间中的同一个区间内。因此，我们可以选取一个根 $\omega = e^{2\pi ia/k}$，使得 $1 \le k \le n$，且角距离为 $\alpha \le 2\pi/(kn)$。它的阶 d 整除 k，因此 $\alpha \le 2\pi/(dn)$。

忽略 A 图中的方向，并在其所有标签上选取一棵树。对于树的每条边，选取一个定向 $i \to j$，满足 $A_{ij} > 0$。记 $w_i = s_i v_i$，其中 s_i 是 ω的幂。从一个顶点处的 $s_i = 1$ 开始，并对选定的箭头施加 $s_j = s_i\bar{\omega}$。树为每个位置提供一条唯一的路径，进而 $|w_j - w_i| = |v_j - \omega v_i|$。引理 5.1 中的一步计算$\sum_{ij} A_{ij}|v_j - e^{i\theta}v_i|^2 = 2\delta V$。每个选定的元素都至少为 t。利用 $|e^{i\theta} - \omega| \le \alpha$ 和 $\delta < 8\alpha/n$，得到

$$E \le 4n\delta/t + 2n\alpha^2 \le \frac{1000}{tdn}, \qquad L = 2d\sqrt{nE} \le 64\sqrt{d/t}.$$

我们将这些界与下面的旋转估计进行比较。

情形*2*。假设 $t < t_0$ 且 $|1 - z^k| > B/n$ 对所有 $1 \le k \le B$均成立。令 $e_i = v_{p(i)} - zv_i$。一个包含 i 个标签的 p环，其中 k，给出

$$(1 - z^k)v_i = \sum_{a=0}^{k-1} z^{k-1-a} e_{p^a(i)}.$$

如果 $k \le B$ 和 $|v_i| \ge 1/2$，由柯西–施瓦茨不等式可知，该环对 $\sum_j |e_j|^2$ 的贡献至少为 $|1-z^k|^2/(4k) \ge B/(4n^2)$。总和至多为 $1000/n$。至多有 $4000n/B$ 个这样的短环达到模 $1/2$，且长度大于 B 的环至多有 n/B 个。

为 p 的每个环各取一个顶点，构成一个图。如果两个环的标签之间存在箭头$i \to R(i)$，则将相应的两个顶点连接起来，忽略方向。由于$q = R \circ p$，该图是连通的。从模为 **1** 的某个坐标所在的环，取一条简单路径通往模不超过 $1 - g$ 的坐标所在的环。如果存在一个所有模都低于$1/2$的环，则在到达第一个这样的环时停止。在停止或到达目的地之前，我们离开的每个环都包含一个模至少为 $1/2$ 的坐标。上面的两个计数表明，这样的环至多有 $4001n/B$ 个。简单路径至多经过每个环一次，因此至多穿过 $4001n/B$ 条边。在访问到的每个环内，选择一条不重复边的路径。这些路径上的模变化之和为

至多为 $64t$。根据柯西–施瓦茨不等式，合计的下降量至多为

$$64t+\sqrt{(4001n/B)S}\le 64g/10^{4}+\sqrt{4001\cdot 4000/B}<g.$$

由于 $1-g>1/2$，该路径不可能首先进入模低于 $1/2$ 的环。它到达指定坐标，而根据假设，该坐标的下降量至少为 g。

情形 3。设对于某个 $1\le k\le B$，有 $t<t_0$ 和 $|1-z^k|\le B/n$。弦长界和 $|1-e^{ik\theta}|\le 2|1-z^k|$ 给出一个 k 次根 ω，其角距离为 $\alpha\le 4B/(kn)$。根据 p 和 R的箭头，在这些标签上选取一棵树，忽略方向。对于树的每条边，保留一条生成该边的箭头。如情形 1，写下 $w_i=s_iv_i$，并从一个顶点开始取 $s_i=1$。在一条箭头 $i\to p$（i）上设$s_{p(i)}=s_i\bar{\omega}$，并在一条箭头 $i\to R$（i）上设 $s_{R(i)}=s_i$。对于前一类边，我们可以使用（5.4）；对于后一类边，则使用原始能量 S。由于 $|z-\omega|\le\delta+\alpha\le 2\alpha$，且 ω 的阶 d至多为 B，因此得到

$$E\le S+2t^2S+2n|z-\omega|^2\le\frac{4\cdot 10^{4}B^{2}}{n},\qquad L\le 400B^{2}.$$

现在还需比较情形 1 和情形 3 中的传输成本。使用 $\eta=g\sqrt{t}/d/10^{5}$ 于情形 1，并使用 $\eta=g/(10^{6}B^{2})$ 于情形 3。对 L 的界给出 $\eta L+2d\eta^{2}<g/1000$ 在两种情形下均成立。条件 $E\le\eta^{2}$ 对 $n\ge 10^{13}/(g^{2}t^{2})$ 在情形 1 中成立，而 $n\ge 4\cdot 10^{16}B^{6}g^{-2}$ 在情形 3 中成立。两个条件均由 $n\ge 10^{210}$ 推出，并且在情形 1 中还由 $t\ge t_0$推出。因此，引理 5.2 和 5.1 给出

$$\begin{aligned}\text{Case 1}\quad & g^{4}t^{2}/(2\cdot 10^{13}) &&\le \sup_{u} W_2^{2}(\mu,\mu_u) &&\le\ 250/(dn),\\ \text{Case 3}\quad & g^{4}/(8\cdot 10^{16}B^{6}) &&\le \sup_{u} W_2^{2}(\mu,\mu_u) &&\le\ 240/n.\end{aligned}$$

对于上界，分别代入 $\alpha\le 2\pi/(dn)$ 和 $\alpha\le 4B/(kn)$，并在情形 3 中使用 $n\ge B^{2}$。在使用 $t\ge t_0$时，情形 1 中的两个不等式对于 $n>10^{25}g^{-6}$是不相容的。在情形 3 中，它们对于 $n>2\cdot 10^{19}B^{6}g^{-4}=2\cdot 10^{209}$ 是不相容的。这证明了该命题。 □

6. 绕原点的环

在坐标为 $e^{2\pi ij/n}$ 的正则 n-环上，每条边使辐角增加 $2\pi/n$。对于任何避开原点的闭多边形，总辐角增量仍必须是整圈数。令 K 表示各环上这些整数的总和，并将逆时针圈数计为正。如果 $K=0$，标记的乘积在辐角上会过于接近 n 次单位根 z。对于其余取值，边长平方之和给出一个与 K^{2}成正比的下界，而正则 n-边形的边允许给出一个与 $|K|$ 成正比的界。当 $|K|=1$ 时的近等号情形还将告诉我们转角是如何分布的。

命题 6.1。令 P、Q 为 $n\ge 10^{210}$ 阶置换矩阵，并固定 $0<t\le 1/2$。设 $A=(1-t)P+tQ$ 不可约，并具有特征对 $Av=zv$，其中 $z\notin U_n$ 且$\max_j|v_j|=1$。P、Q 的相对置换 R 恰有一个环具有非零的绕原点的绕数。必要时经过复共轭后，该绕数为 1。令 m 为其长度，并令$h=n-m$。则 $h/m<2.1\cdot 10^{-6}$。按环顺序将其坐标从0 编号至 $m-1$，我们有

$$\xi=e^{2\pi i/m},\qquad c_1=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}v_j\xi^{-j},\qquad v_j=c_1\xi^{j}(1+w_j),\quad |c_1|>0.99,\quad \max_j|w_j|<0.02.$$

证明。设 $\gamma=1-$最小值$_j\,|v_j|$。命题 5.3 给出 $\gamma\le 10^{-7}$，而引理 4.1 给出 $S\le 4000/n$。每条边的长度都小于 $1-\gamma$，因此其线段不经过原点。设 $a_j=\operatorname{Arg}(v_{R(j)}/v_j)$ 为其辐角主值变化。记 $k_C=(2\pi)^{-1}\sum_{j\in C}a_j$为一个环的绕数 C，并设 $K=\sum_C k_C$。

为了比较角度与边长，注意到

$$|\Delta_j|^2 = (|v_{R(j)}| - |v_j|)^2 + 4|v_{R(j)}v_j|\sin^2(a_j/2) \geq 4(1-\gamma)^2\sin^2(a_j/2).$$

先在 $[0,\pi/2]$ 上使用正弦 $u \geq 2u/\pi$，得到 $|a_j| \leq 200/\sqrt{n}$。在这个短得多的区间上，正弦 $^2\, u \geq u^2(1-u^2/3)$。因此

$$\sum_j a_j^2 \leq (1+5\gamma+10^4/n)S. \tag{6.1}$$

事实上，右侧所需的因子至多为 $(1-\gamma)^{-2}(1-40000/(12n))^{-1}$。我们需要这个系数接近于 1，因为我们将使用柯西–施瓦茨不等式的等号情形作为比较。

式（4.3）中的对数比较了第 j 个标记相对于v_j 的角度与 ta_j的角度。这里$|\Delta_j/v_j| \leq \sqrt{S}/$（$1-\gamma$）$< 0.1$。求和，取虚部，并使用（4.2），可得

$$\operatorname{dist}(n\theta - 2\pi tK, 2\pi\mathbb{Z}) \leq 3tS. \tag{6.2}$$

如果 $K=0$，则 z 的辐角与某个 $3tS/n$ 次根的辐角相差不超过 n。从 Π_n 的这个顶点出发，由径向斜率界可得 $x <$ （$4/n$）（$3tS/n$）。但是，根据（4.1）， $S \leq 4nx/t$ 这将得到 $x < 48x/n$，因此 $K \neq 0$。

现在需要求出由 K 选定角度处多边形的半径。令 $u = \{n\theta/(2\pi)\}$。在相邻顶点之间， u 表示已覆盖角区间的比例。在 $u=0$ 处，半径为 1。在 $u=1/2$ 处，我们正对着一条边的中点，此时半径最小。设$G(s) = \{s\}(1-\{s\})$，其中 $\{s\} = s - \lfloor s\rfloor$。于是 G 为偶函数，周期为 1，且为 1-利普希茨函数。式 (3.1) 前面的边公式给出

$$-\log\rho_n(\theta) = \log\frac{\cos((1-2u)\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \leq \frac{2\pi^2}{n^2}(1+20/n^2)G(u).$$

为证明该不等式，对 $\tan$ $s \leq s(1+20/n^2)$ 从 $|1-2u|\pi/n$ 积分到 π/n。因子 $G(u)$ 来自两个端点平方之差。由于 $z \notin \Pi_n$，左侧表达式大于 x。估计式 (6.2) 允许我们将 $G(u)$ 替换为 $G(tK)$，代价至多为 $3tS/(2\pi)$。除以 t 后，附加项至多为 $(1+20/n^2)3S/(2\pi) < 2000/n$，因为 $S \leq 4000/n$。我们得到

$$\frac{n^2x}{2\pi^2t} \leq (1+20/n^2)\frac{G(tK)}{t} + \frac{2000}{n}.$$

令 $F = G(tK)/(t(1-t))$。一方面 $2\pi\sum_C |k_C| \leq \sum_j |a_j| \leq \sqrt{n\sum_j a_j^2}$。另一方面，(6.1) 和 (4.1) 将 $\sum_j a_j^2$ 界定为 $(1+5\gamma+10^4/n)2nx/(t(1-t))$。合并可得

$$\left(\sum_C |k_C|\right)^2 \leq \frac{n}{4\pi^2}\sum_j a_j^2 \leq (1+5\gamma+2\cdot 10^4/n)F + 2\cdot 10^4/n. \tag{6.3}$$

最后一步比较不同整数 K对应的这个界。转一圈时， F 的分子为 $G(t) = t(1-t)$。转多圈时，代价至多线性增长，因为 G 是次可加的。为验证这一点，令 $a, b \in [0,1)$ 为两个辐角的小数部分。差值 $G(a) + G(b) - G(a+b)$ 在 $a+b \leq 1$时为 $2ab$，而在 $a+b \geq 1$时为 $2(1-a)(1-b)$。将这个不等式应用 $|K|-1$ 次，并利用偶性，可得 $F \leq |K|$。(6.3) 的左边至少为 K^2。对于整数 $|K| \geq 2$，这与右边小于$1.01|K| + 0.01$相矛盾。因此 $|K| = 1$ 且 $F = 1$。取 $\varepsilon = 20\gamma + 10^6/n < 2.1\cdot 10^{-6}$，(6.3) 现在给出

$$\sum_C |k_C| = 1, \qquad n\sum_j a_j^2 \leq 4\pi^2(1+\varepsilon).$$

第一个等式再次运用了整性。如有必要，对特征对取共轭，使唯一环上的绕数 C 等于 $+1$。

在此环上 $\sum_{j\in C} a_j = 2\pi$。由柯西–施瓦茨不等式可得 $4\pi^2/m \le \sum_{j\in C} a_j^2$，因此 $n/m \le 1+\varepsilon$。更准确地说，

$$m\sum_{j\in C}(a_j - 2\pi/m)^2 = m\sum_{j\in C} a_j^2 - 4\pi^2 \le 4\pi^2\varepsilon.$$

由柯西–施瓦茨不等式可知，偏差的任意部分和的模至多为 $2\pi\sqrt{\varepsilon}$，因为其中至多有 m 项。在正则环上，$v_j\xi^{-j}$ 将与 j无关。在 C上，从 v_0 到v_j 的步骤使辐角改变 $\sum_{\ell=0}^{j-1} a_\ell$，而乘以 ξ^{-j} 会减去 $2\pi j/m$。因此，$v_j\xi^{-j}$ 与 v_0 的辐角相差 $\sum_{\ell=0}^{j-1}(a_\ell - 2\pi/m)$，模 2π。每个 $v_j\xi^{-j}$ 与 v_0的距离都在$d_0 = \gamma + 2\pi\sqrt{\varepsilon}$ 以内，因为它们的模相差至多 γ，且 $|e^{is}-1| \le |s|$。它们的平均值 c_1 位于同一个圆盘内。因此，$|c_1| \ge 1-\gamma-d_0 > 0.99$ 和

$$\left|\frac{v_j}{c_1\xi^j} - 1\right| \le \frac{2d_0}{1-\gamma-d_0} < 0.02.$$

□

7. 将特征值与多边形边进行比较

在正则环 $v_j = ce^{2\pi ij/\ell}$、$0 \le j < \ell$ 上，取 $c \ne 0$ 和 $\ell \ge 3$，在每条边上标记比例为 t 的位置，会使每个顶点乘以

$$\lambda_\ell = 1 - t + te^{2\pi i/\ell}.$$

如果一个特征向量由一个包含所有 n 个位置点的正则环构成，则乘积恒等式变为$z^n = \lambda_n^n$。因此 z 必须是 n 个 λ_n 的旋转之一，每条 Π_n 边上各有一个。命题 6.1 中的特征向量，其环仅近似正则，且位置点可能少于 n 个。仅对角误差作出界定，仍不能排除 z 恰好位于某条边之外的可能。我们将比较该误差与 z 向内移入边内的半径距离。

考察我们能从标记点的两个平方和中分别了解到什么。令$\xi = e^{2\pi i/m}$，其中 $m \ge 3$，并取 $0 \le j < m$ 的试探坐标 $v_j = \xi^j + \beta\xi^{-j}$，其中 β 为实数。指标按模 m读取，标记点为

$$b_j = (1-t)v_j + tv_{j+1} = \lambda_m\xi^j + \beta\overline{\lambda_m}\xi^{-j}.$$

作为以 j为索引的向量，ξ^j 和 ξ^{-j} 的幂彼此正交。它们的乘子具有相同的模。因此，对每个 β，都有 $\sum_j |b_j|^2 = |\lambda_m|^2\sum_j |v_j|^2$。不进行复共轭而平方，会将每个频率与其相反数配对。由于 $\sum_j \xi^{2j} = 0$，可得

$$\frac{1}{m}\sum_j v_j^2 = 2\beta, \qquad \frac{1}{m}\sum_j b_j^2 = 2\beta|\lambda_m|^2.$$

若将试探坐标旋转并伸缩 λ_m，则后一个和会变为 $2\beta\lambda_m^2$。图4 展示了这一差异。对于特征向量，标记点的完整列表是 zv_1，……，zv_n的一个重排，因此 $\sum_{j=1}^n b_j^2 = z^2\sum_{j=1}^n v_j^2$。我们利用这个恒等式来界定命题6.1中环上的 ξ^{-j} 的系数。

命题 7.1。设 P、Q 是 $n \ge 10^{12}$阶置换矩阵，并固定 $0 < t \le 1/2$。设$z = re^{i\theta}$ 是 $A = (1-t)P + tQ$ 的一个特征值，且满足 $r >$ 余弦(π/n)。设 v 是一个特征向量，满足最大值$_j\,|v_j| = 1$。对于 P、Q的相对置换 R，令 $\Delta_j = v_{R(j)} - v_j$和 $S = \sum_j |\Delta_j|^2$。假设最小值$_j\,|v_j| \ge 0.99$ 且 $S \le 4000/n$。

假设在必要时经过共轭后，R 的某个环 C 的绕数为 *1*，而其余环的绕数均为 *0*。令 $m = |C|$、$h = n - m$，并假设 $h/m \le 0.01$。编号

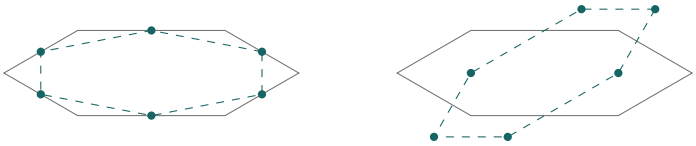


图4。 两个面板都从六个试探坐标 $v_j = \xi^j + \frac{1}{2}\xi^{-j}$开始， $0 \le j < 6$对应 $\xi = e^{i\pi/3}$（灰色）。取中点并乘以 λ_6后，利用 $t = \frac{1}{2}$可得到具有相同半径平方和的集合。它们的复数平方的平均值在左侧为 $3/4$ ，在右侧为（$3/4$）$e^{i\pi/3}$ 。OpenAI Codex (GPT-6.2) 协助编写了TikZ代码。

按循环顺序将 C 的坐标从0 编号至 $m-1$，并令 $\xi = e^{2\pi i/m}$ 和 $c_1 = m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1} v_j \xi^{-j}$。如果

$$v_j = c_1 \xi^j (1 + w_j) \quad (j \in C), \qquad \max_{j \in C} |w_j| \le 0.1,$$

然后 $z \in \Pi_n \cup \Pi_{2\lfloor n/2 \rfloor}$。

证明。 第二个多边形在偶数 n 时与 Π_n 一致，在奇数 n时为 Π_{n-1} 。它的顶点中既有1，也有 -1 ，我们将利用它们来控制 $|1 - z^2|$。设 z 位于这个偶数边形之外。我们通过将其与角度最接近的点 $e^{2\pi i k/n}\lambda_n$ 进行比较，证明 $z \in \Pi_n$ 。将半径平方之差记为 $L = |\lambda_n|^2 - r^2$ ，将角度之差记为

$$\varepsilon_\theta = \min_{k \in \mathbb{Z}} |\theta - 2\pi k/n - \arg \lambda_n|.$$

边界半径的对数在这两条射线之间的变化至多为（$4/n$）ε_θ 。我们要找一个非负的 T，使得 $L \ge 0.8T$ 和 $\varepsilon_\theta \le 6200T$。由于 $n \ge 10^{12}$，因此即使是任意小的正 T，由半径增加所获得的空间也会超过角度变化带来的损失。

令 $V = \sum_j |v_j|^2$ ，并设

$$u = \frac{h}{m}, \qquad W = \frac{1}{m}\sum_{j \in C} |v_j|^2, \qquad e = \frac{V - mW}{mW}.$$

这里， mW 是长循环上的平方范数，而 mWe 是剩余坐标上的平方范数。因此 $0.98 \le W \le 1$、 $We \le u$ 和 $e \le 1.03u$。

与边的径向距离。 对于 $0 \le k < m$，向量 $(\xi^{jk})_{j=0}^{m-1}$彼此正交。对于不同的 k， k' ，几何级数 $\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{j(k-k')}$ 为零，并且每个向量的模平方为 m。由此得到展开式 $v_j = \sum_k c_k \xi^{jk}$，其中 $c_k = m^{-1}\sum_{j=0}^{m-1} v_j \xi^{-jk}$。我们将频率指标按模 m读取。在环上前进一个位置，会使第 k项乘以 ξ^k。因此，从v_j 变为$b_j = (1-t)\,v_j + t v_{j+1}$ 会使其乘以 $1 - t + t\xi^k$。其模平方会改变一个因子 $1 - a_k(m)$ ，其中

$$a_k(\ell) = 4t(1-t)\sin^2(\pi k/\ell), \qquad a = a_1(m).$$

帕塞瓦尔恒等式给出 $W = \sum_k |c_k|^2$。常数项具有 $a_0(m) = 0$，而在其他项中， a 是模平方损失最小的项。 $k = 1$ 和 $k = -1$都能达到这一点。将 C 上的额外损失与其他环的贡献分开，写成

$$D = \frac{1}{W}\sum_{k \ne 0, \pm 1} (a_k(m) - a)|c_k|^2, \qquad E = \frac{t(1-t)}{mW}\sum_{j \notin C} |\Delta_j|^2.$$

要比较 与 Π_n的边相对应，我们还必须考虑 C之外的 h 位置点。我们将使用

$$T = D + E + \frac{th}{m^3}. \tag{7.1}$$

这三项均为非负数。在整个块上应用（4.1），并将 S 按 C 及其补集进行拆分。根据帕塞瓦尔恒等式，$t\,(1-t)\,\sum_{j\in C}|\Delta_j|^2$ 的贡献为 $m\sum_k a_k\,(m)\,|c_k|^2$。将整个块的恒等式除以 mW 可得

$$(1-r^2)(1+e) = a(1-|c_0|^2/W) + D + E.$$

对特征向量方程求和并利用列和可得 $z\sum_j v_j = \sum_j v_j$。由于$z \neq 1$，因此 $\sum_j v_j = 0$。于是 $m|c_0| \le h$。此外，根据对w_j的假设界，$|c_1| \ge 0.99/1.1 = 0.9$ 。

将 n 缩短至 m 会加大第一频率上的损失。之所以需要缩短这么多，是因为其他 h 个坐标也会使分母 $V = mW(1+e)$增大。将 $a_1(\ell)$视为实数 ℓ的函数。取 $y = \pi/\ell$ 时，其对数导数为 $-2y\cot(y)/\ell$。在 $[m,n]$ 上，由于 $m \ge n/1.01$，我们有$1.99 \le 2y\cot y \le 2$。积分得

$$1 + 1.99u \le (1+u)^{1.99} \le \frac{a}{a_1(n)} \le (1+u)^2.$$

由于 $1-|\lambda_n|^2 = a_1(n)$，范数恒等式变为

$$(1+e)L = D + E + (a - a_1(n)) - e a_1(n) - a|c_0|^2/W.$$

增益 $a - a_1(n)$至少为 $1.99u\,a_1(n)$。其中，$e a_1(n)$至多为 $1.03u\,a_1(n)$，而含有 c_0 的项关于 u是二次的。因此

$$(1+e)L \ge D + E + a_1(n)\left(0.96u - \frac{(1+u)^2u^2}{0.98}\right).$$

括号中的量至少为 $0.94u$ ，当 $u \le 0.01$时。由于 $a_1(n) \ge 8t/n^2$ 且 $n/m \le 1.01$，这一项至少为 $(0.94\cdot 8/1.01^2)th/m^3$。除以 $1+e \le 1.011$ ，得到

$$L \ge 0.8T. \tag{7.2}$$

反向旋转的系数。范数恒等式对 c_1 和 c_{-1} 一视同仁。在恒等式$\sum_j b_j^2 = z^2\sum_j v_j^2$中，它们的乘积的系数为$2(1-a-z^2)$，与试验示例中的情况相同。要除以这个系数，我们需要 $G = |1-a-z^2|$ 的下界。这一步用到了我们的假设，即 z 位于偶数边形之外。若 s 是 C上的主辐角增量，则其弦长至少为$2(0.99)|s|/\pi$。根据绕行假设，这些增量之和为 2π ，因此由柯西–施瓦茨不等式可得 $mS \ge (4\cdot 0.99)^2$。由(4.1)可知

$$x = -\log r \ge \tfrac{1}{2}(1-r^2) \ge \frac{t(4\cdot 0.99)^2}{4mn} > \frac{3t}{n^2}.$$

令 $d = \operatorname{dist}(\theta, \pi\mathbb{Z})$。径向函数在 $\Pi_{2\lfloor n/2\rfloor}$ 的两个实顶点处取值为 1。根据（ $4/n$3.1），其对数是 -利普希茨的。由于 z位于这个多边形之外，$x < 4d/n$。恒等式 $|1-z^2|^2 =(1-r^2)^2 + 4r^2$正弦$^2\,d$和 $r >$余弦(π/n) 给出

$$|1-z^2| \ge 2r\sin d \ge d > 0.75t/n.$$

由于 $m \ge n/1.01$，我们有 $a \le 40t/m^2 \le 41t/n^2$。从 $0.75t/n$ 中减去这个界，得到 $G \ge 0.7t/n$。再应用一次三角不等式可得 $|1-z^2|/G \le 1 + a/G \le 2$。

在 C 上，只有相反的频率在平方后求和时才会保留下来。所有频率指标均按模 m 计算时，这两个和为

$$\frac{1}{m}\sum_{j\in C} v_j^2 = \sum_k c_k c_{-k}, \qquad \frac{1}{m}\sum_{j\in C} b_j^2 = \sum_k (1-a_k(m))c_k c_{-k}.$$

事实上，这两个因子 $1-t+t\xi^{\pm k}$ 是复共轭。在其他每个环 C' 上，直接展开可得

$$\sum_{j\in C'} b_j^2 = \sum_{j\in C'} v_j^2 - t(1-t)\sum_{j\in C'}(\Delta_j)^2.$$

将这些表达式代入二阶矩恒等式并取绝对值。C外的各项和满足 $m^{-1}\sum_{j\notin C}|v_j|^2 = We$，因此得到

$$\left|\sum_k (1-a_k(m)-z^2)c_k c_{-k}\right| \le W(e|1-z^2|+E).$$

含有 $k=\pm 1$ 的两项相加为 $2(1-a-z^2)c_1c_{-1}$。为了界定其余各项，注意到对于 $k\neq 0,\ \pm 1$,

$$a_k(m)-a \ge t/m^2, \qquad \sum_{k\neq 0,\pm 1}|c_k|^2 \le Wm^2D/t.$$

事实上，在此范围内，$\sin^2(\pi k/m) \ge \sin^2(2\pi/m) \ge 3\sin^2(\pi/m)$。将 $|1-a_k(m)-z^2|$ 界定为$G+(a_k(m)-a)$，并对每个权重使用 $2|c_kc_{-k}| \le |c_k|^2+|c_{-k}|^2$。除以 G后，

$$2|c_1c_{-1}| \le 2(We+|c_0|^2) + W(D+E)/G + Wm^2D/t.$$

我们有 $We\le u$、$|c_0|\le u$、$0.9\le |c_1|$和 $|c_{-1}|\le \sqrt{W}\le 1$。由于 $1/G\le m^2/t$，这些界给出

$$|c_{-1}|^2 \le 3u + \frac{3m^2}{t}(D+E). \tag{7.3}$$

回到 $w_j = v_j/(c_1\xi^j)-1$。除法将频率 k 移至 $k-1$，并使第一谐波成为常数，因此作差 $\Delta w_j = w_{j+1}-w_j$ 会消去该谐波。对于$k\neq 0,\ \pm 1$ 和 $y=\pi/m$，加法公式给出

$$\sin^2((k-1)y) \le 2\big(\sin^2(ky)+\sin^2 y\big) \le 4\big(\sin^2(ky)-\sin^2 y\big).$$

频率 $k-1$ 上差分的平方乘子为 4 正弦$^2((k-1)y)$。因此，下面左侧为 $4t|c_1|^{-2}\sum_k$ 正弦$^2((k-1)y)|c_k|^2$。在 $k=0$ 处使用 $|c_0|\le u$，在 $k=-1$ 处使用正弦$^2(2y) \le 40/m^2$。利用前述不等式，其他项可由 D 界定，$W\le 1$和 $1-t\ge 1/2$也是如此。由此得到

$$\frac{t}{m}\sum_{j\in C}|\Delta w_j|^2 \le \frac{4}{|c_1|^2}\left(\frac{10tu^2}{m^2}+\frac{40t}{m^2}|c_{-1}|^2+2D\right) \le 1000T. \tag{7.4}$$

对于最后一个不等式，令 $J=tu/m^2=th/m^3$。括号中的第一项至多为 $0.1J$。根据（7.3），第二项至多为 $120(J+D+E)$。将两项之和乘以 $4/|c_1|^2<5$，至多为 $610T$。因此，同一个 T 既能界定径向裕度，也能界定误差 w_j的变差。

乘积的角度。 标记点是 zv 的一个置换，因此（4.2）给出 $z^n=\prod_j(b_j/v_j)$。在 C 上，令 $\tau=t\xi/\lambda_m$且 $f(w)=\log(1+w)$，选择满足 $f(0)=0$ 的分支。代入 v_j 的表达式可得

$$\frac{b_j}{v_j} = \lambda_m \exp\big(f(w_j+\tau\Delta w_j)-f(w_j)\big).$$

我们要对 C 周围的指数求和。从每个指数中减去 $\tau(f(w_{j+1})-f(w_j))$，总和保持不变，并消去了 Δw_j 中的线性项。为估计余项，注意到 $|\tau|\le 2t\le 1$ 以及从 w_j 到 $w_j+\tau\Delta w_j$ 和到 w_{j+1} 的两条线段都位于$|w|\le 0.3$ 中。在那里，$|f''(w)|<3$。泰勒公式在这些线段上给出了两个余项的界

分别为 $\tfrac{3}{2}|\tau|^2|\Delta w_j|^2$ 和 $\tfrac{3}{2}|\Delta w_j|^2$。将第二个界乘以 τ 后，合并得到的界为 $3\cdot 2(|\tau|^2+|\tau|)\cdot|\Delta w_j|^2 \le 6t|\Delta w_j|^2$。因此

$$\bigl|f(w_j+\tau\Delta w_j)-f(w_j)-\tau\bigl(f(w_{j+1})-f(w_j)\bigr)\bigr| \le 6t|\Delta w_j|^2.$$

在其他循环上取 $y_j = \Delta_j/v_j$。于是 $|y_j| \le \sqrt{4000/n/0.99} < 0.1$，且（4.3）给出 $|\log(1+ty_j) - t\log(1+y_j)|$ 的界为 $5t|\Delta_j|^2$。$\log(1+y_j)$ 的实部相消，而每个环上的虚部之和为零，因为其绕数为零。现在对乘积取辐角，得到

$$\operatorname{dist}(n\theta - m\arg\lambda_m, 2\pi\mathbb{Z}) \le 6t\sum_{j\in C}|\Delta w_j|^2 + 5t\sum_{j\notin C}|\Delta_j|^2. \tag{7.5}$$

两个比较角之间还存在差异。长循环给出的总角度为 $m\arg\lambda_m$，而一个 n 边形会给出 $n\arg\lambda_n$。令 $F(s) = \arg(1-t+te^{is})$，其中 $F(0)=0$。F 的线性项对每个 ℓ 在 $\ell F(2\pi/\ell)$ 中的贡献相同。我们通过求导来估计其余部分。对于 $|s|\le 1/2$，令 $q = te^{is}/(1-t+te^{is})$。由于分母的模至少为 $\cos(1/4)$，公式

$$\frac{d^3}{ds^3}\log(1-t+te^{is}) = -iq(1-q)(1-2q)$$

给出 $|F'''(s)| \le 10t$。由于 F 的奇性，$F''(0)=0$，因此 $|F''(s)| \le 10t|s|$。由此可得

$$|F(s)-sF'(s)| = \left|\int_0^s vF''(v)\,dv\right| \le (10/3)t|s|^3.$$

在 $s = 2\pi/\ell$ 处，左侧是 $\ell F(2\pi/\ell)$ 关于 ℓ 的绝对导数。它至多为 $3000t/\ell^3$。从 m 到 n 积分得

$$\frac{|m\arg\lambda_m - n\arg\lambda_n|}{n} \le \frac{3000th}{nm^3}.$$

将（7.5）除以 n。根据（7.4），长循环的贡献至多为 $6000(m/n)T$。其他循环的贡献至多为 $10E$，因为它们的能量为 $mWE/[t(1-t)]$。从 m 到 n 的变化贡献至多为 $3000T/n$。合并可得

$$\varepsilon_\theta = \min_{k\in\mathbb{Z}}|\theta - 2\pi k/n - \arg\lambda_n| \le 6200T. \tag{7.6}$$

取 k 使其达到最小值，并记 ρ_n 为 Π_n 的径向边界。在角度 $2\pi k/n + \arg\lambda_n$ 处，其值为 $|\lambda_n|$。由于 $r^2 \le |\lambda_n|^2 \le 1$，我们有 $\log|\lambda_n| - \log r \ge L/2$。利用 $4/n$ 两条射线之间的斜率界，（7.2）和（7.6）给出

$$\log\rho_n(\theta) - \log r \ge \frac{L}{2} - \frac{4}{n}\varepsilon_\theta \ge \left(0.4 - \frac{24800}{n}\right)T \ge 0.$$

当两条射线重合时，这也涵盖了 $T=0$。因此 $z\in\Pi_n$。 □

定理 *1.1* 的证明。 设特征值 z 属于 $A = (1-t)P + tQ$ 且位于 U_N 之外，满足 $N \ge 10^{213}$。端点情形显然，因此我们可以交换排列，得到 $0 < t \le 1/2$。选取一个阶为 n 的支撑块。引理 4.2 给出 $n > N/1000 \ge 10^{210}$。我们有 $U_n \subseteq U_N$，因此 $z\notin U_n$ 且 $|z| > \text{余弦}(\pi/n)$。

将块上的特征向量归一化，使其满足 $\max_j |v_j| = 1$。引理 4.1 给出其边能量的界 $4000/n$，命题 5.3 给出 $\min_j |v_j| > 1 - 10^{-7}$。如有必要，命题 6.1 在共轭后给出一个绕数为一的环。所有其他绕数均为零，$h/m < 2.1\cdot 10^{-6}$，并且 $\max_{j\in C}|w_j| < 0.02$。这些不等式满足命题 7.1 的假设。由此可得

$$z \in \Pi_n \cup \Pi_{2\lfloor n/2\rfloor} \subseteq U_N.$$

Both 个多边形在复共轭下保持不变。这与所选的 z. □

充分阶数来自命题中的情形 3 5.3。在该情形下，旋转代价的两个估计对于 $n > 2\cdot 10^{209}$ 不相容。引理 4.2 随后将支撑块上的界传递到整体阶数上。

附录 A. 五状态示例的计算

确定特征值的位置。令 $f(\zeta) = 4\zeta^4 + 2\zeta^3 + \zeta^2 - \zeta - 1$ 为式（2.1中的四次多项式。对其进行实数范围内的因式分解，可以同时界定根的实部和模。将一对候选非实根写作 $-u \pm iy$并令 $h = u^2 + y^2$。匹配 $f/4$ 的首项、三次项和常数项系数，可得候选因式分解式

$$(\zeta^2 + 2u\zeta + h)\left(\zeta^2 + (\tfrac{1}{2} - 2u)\zeta - \frac{1}{4h}\right).$$

匹配一次项系数可得 $h(\tfrac{1}{2} - 2u) - u/(2h) = -\tfrac{1}{4}$，因此 $u = u(h) = h(2h+1)/(2+8h^2)$。只剩二次项系数尚未匹配。它与目标值的差为

$$g(h) = h - \frac{1}{4h} + u(h)(1 - 4u(h)) - \tfrac{1}{4}.$$

取 $33/50 \le h \le 2/3$。这里 $u(h)$ 递增，因为其导数的符号与$1 + 4h - 4h^2$的符号相同。其端点值分别为 $957/3428 > 0.279$ 和 $7/25 = 0.28$。在左端点处，

$$g(33/50) < 0.66 - 25/66 - 0.279\cdot 0.116 - 1/4 < 0.$$

在右端点 $g(2/3) = 1/24 - 21/625 > 0$。因此，介值定理给出了在此区间内某个 h 的因式分解。第二个二次式有一正一负两个实根。第一个二次式有一个根 $z = -u + iy$，且

$$0.279 < u < 0.28, \qquad y = \sqrt{h - u^2} > 0.762.$$

对于六边形，我们已经有 $|z|^2 = h < 2/3 <$ 余弦$^2(\pi/6)$。对于正方形和三角形，不等式 $u + y > 1$ 和 $\sqrt{3}\,y - u > 1$ 表明，z 位于分别以 $3\pi/4$ 和 $\pi/3$为法向角的边之外。对于五边形，令 $c =$ 余弦$(2\pi/5) = (\sqrt{5}-1)/4 < 0.31$，且 $s =$ 正弦$(2\pi/5) > 0.95$。以 $3\pi/5$ 为法向角的边要求 $cu + sy \le$ 余弦$(\pi/5) = \tfrac{1}{2} + c$，而

$$sy > 0.95\cdot 0.762 > \tfrac{1}{2} + 0.31\cdot 0.721 > \tfrac{1}{2} + c(1-u).$$

这使得 z 位于所有 U_5之外，因为 Π_1 和 Π_2 都是实数。

坐标凸包的顶点。将返回三角形作为仿射坐标系。设其顶点坐标为 $X = (0,\ 0)$、$Y = (1,\ 0)$ 和 $Z = (0,\ 1)$。该三角形非退化，因为复比 $(Z - X)/(Y - X) = 2z + 1$ 是非实数。在新坐标系中，乘以z变为仿射映射 F。由中点方程可立即得出 $F(0,\ 0) = (1/2,\ 0)$，以及$F(1,\ 0) = (0,\ 1/2)$。因此，其线性部分的第一列为 $(-1/2,\ 1/2)^{\top}$。迹和行列式不因坐标系的选择而改变，因此它们分别为 $-2u$ 和 h。由此确定第二列，得到

$$F(x_1, x_2) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_1 - (a + \tfrac{1}{2})x_2,\ \tfrac{1}{2}x_1 - bx_2\right), \qquad a = 2(h-u),\quad b = 2u - \tfrac{1}{2}.$$

特别地，$A = F(Z) = (-a,\ -b)$。根据上述界，$3/4 < a < 4/5$ 和$0 < b < 1/16$ 均为负数。由于 $X = (A + aY + bZ)/(1 + a + b)$，该凸组合中的三个权重均为正。因此，$X$ 严格位于三角形 ZAY的内部。再次应用 F可得

$$B = (c_1, -d_1), \qquad c_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{a}{2} + (a + \tfrac{1}{2})b, \qquad d_1 = \tfrac{a}{2} - b^2.$$

同样的界给出 $0 < c_1 < 1$ 和 $d_1 > b$。在此坐标框架下，Z、A、B、Y因此分别是唯一的最高点、最左点、最低点和最右点。它们各自都是暴露顶点，其支撑方向恰好给出了图1中的循环顺序。

同一坐标框架解释了图2的上角。复平面原点是质心$O = (o_1, o_2)$，其中 $o_1 = (1 - a + c_1)/5$ 和 $o_2 = (1 - b - d_1)/5$。图示的界给出 $0 < o_1 < 1/4$、$0 < o_2 < 1/5$以及 $c_1 - d_1 = 1/2 + (a + 1/2)b + b^2 > 1/2$。因此，$Y - O$ 和 $B - O$ 都具有 $(p, -q)$ 的形式，其中 $p > q > 0$。从 Z 指向四边形内部的边方向为 $(-a, -1 - b)$ 和 $(1, -1)$。它们与 $(p, -q)$ 的行列式（取 $(p, -q)$ 在先）为 $-p(1 + b) - aq$ 和 $q - p$，均为负值。该坐标框架保持定向，因为 $\det((Z - X)/(Y - X)) > 0$。因此，图2中的两个有向高度仅在 Z 处达到最大值。

生成式人工智能和人工智能辅助技术声明

OpenAI GPT-6 Pro 对获得定理1.1的证明发挥了重要作用。在准备稿件期间，OpenAI Codex (GPT-6.2) 协助撰写和修改文稿、核查数学推导与参考文献，并根据文中给出的坐标和构造绘制 TikZ 图。作者根据需要审阅并编辑了 AI 辅助生成的内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

参考文献

[1] H. Perfect 和 L. Mirsky，《双随机矩阵的谱性质》，Monatsh. Math. 69 (1965)，35–57。doi:10.1007/BF01313442。[2] J. Levick、R. Pereira 和 D. W. Kribs，《四维 Perfect–Mirsky 猜想》，Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015)，1951–1956。doi:10.1090/S0002-9939-2014-12412-9。[3] J. Mashreghi 和 R. Rivard，《关于双随机矩阵特征值的一个猜想》，Linear Multilinear Algebra 55 (2007)，491–498。doi:10.1080/03081080600899296。[4] A. Harlev、C. R. Johnson 和 D. Lim，《双随机单特征值问题：计算方法》，Exp. Math. 31 (2022)，936–945。doi:10.1080/10586458.2020.1727799。arXiv:1908.03647。[5] B. F. Verbeken 和 V. Ginis，《通过不变多边形证明 Karpelevič 定理》，预印本（2026）。arXiv:2609.26058v3。[6] C. Johnson、S. Newman 和 I. Spitkovsky，《双随机单特征值问题的新视角》，Linear Multilinear Algebra 71 (2023)，1462–1469。doi:10.1080/03081087.2022.2064966。[7] L. Bouthat、J. Mashreghi 和 F. Morneau-Guérin，《双随机矩阵的谱刻画》，拉瓦尔大学分析研讨会，2025年11月28日。研讨会幻灯片。[8] E. Jankowski、C. R. Johnson 和 D. Lim，《矩阵群凸包的谱》，Linear Algebra Appl. 593 (2020)，74–89。doi:10.1016/j.laa.2020.01.018。arXiv:1909.10597。[9] J. D. Castañeda Betancourt、F. Morneau-Guérin 和 S. Singh，《结构化类随机矩阵的特征值区域与实现的最小维数》，Spec. Matrices 14 (2026)，第1期，文章编号20250067。doi:10.1515/spma-2025-0067。