arXiv:2611.30910v1 [cond-mat.stat-mech] 23 Nov 2026

活性物质中噪声碰撞的统计力学：Dyson-Landau 理论

Horst-Holger Boltz，* Max-Robin Schultz 和 Thomas Ihle物理研究所，格赖夫斯瓦尔德大学，*17489* 格赖夫斯瓦尔德，德国（日期：2026年11月24日）

活性系统及其他粗粒化描述通常采用广义动力学进行建模，即不受真正微观物理约束的有效运动方程。特别是，这些方程通常在所解析的最小尺度上呈现随机性。这给第一性原理统计物理学带来了挑战，因为后者通常从确定性相互作用出发，推导更大尺度上的涌现噪声。在这里，我们展示了如何在弱噪声（即高活性）极限下，将微观噪声系统地纳入动力学理论。通过对含噪自由传播子进行戴森展开，我们推导出了弱相互作用系统中 Landau 动力学方程的首阶修正。我们发现，将确定性碰撞积分与福克–普朗克方程的扩散项相结合这一常见做法，确实给出了正确的首阶结果。然而，对于干燥对齐型活性物质，修正项在噪声强度上是非解析的，因为近乎平行的粒子会以任意长的时间相互作用。对于仅在相互作用期间起作用的噪声，在随机相互作用的一个最小模型中，噪声与碰撞并不解耦：首阶修正是耦合强度的奇函数，且部分受到对数增强，其结果相当于一种依赖取向的有效噪声强度。基于智能体的模拟证实了所预测的依赖关系取决于耦合的符号。因而，即使在这一最小模型中，噪声对碰撞的影响也无法仅凭对称性推断出来。

I. 引言

在许多领域，基于智能体的建模是现代科学的基础方法 [1–3]。典型的时间和长度尺度分离使得我们能够将一个系统划分为（通常相同的）个体；这些个体在空间中具有一定的动力学，并与其他个体发生相互作用。无论内部自由度是否可访问，都不会对其进行显式解析。因此，运动方程所描述的是有效粗粒化模型。这类广义动力学不受真正微观动力学所遵循的相同约束。一般而言，这些广义动力学是非哈密顿的，通常既不守恒能量，也不守恒动量，而这与模型的对称性无关；尤其与本文相关的是，它们可以包含随机贡献。

这种更为多样的动力学给统计物理学带来了不容忽视的挑战。由于不存在底层哈密顿量，通常也就没有守恒的能量、可供假设的吉布斯–玻尔兹曼分布、可供极值化的熵或自由能，也不存在详细平衡。噪声并不与温度相联系，因此也没有直接的涨落耗散关系可供依赖 [4, 5]。因此，平衡统计力学通常的出发点均不可用，统计描述必须直接从运动方程构建。统计力学的一种不依赖模型结构先验的方法是动力学理论 [6–12], 即从实际的、特定于模型的运动方程系统地推导出系综层次描述。

这一思路中一种广泛采用的方法是平均场理论，它建立在分子混沌这一假设之上，即假设各个体在统计上相互独立。对于弱相互作用以及完全连接（每个个体都与其他所有个体相互作用）的极限情形，这一假设在渐近意义下是正确的。在平均场层次上，不存在离散的相互作用事件，内禀噪声对统计理论的影响也相当简单：它在福克–普朗克方程中产生扩散项；这些扩散项在概念上不受平均场闭合的影响，因此经过相应调整后，也会出现在所得的单粒子（概率密度）函数的类弗拉索夫方程中。平均场理论在定量和定性上都可能失效。例如，在某些内聚型和基于视觉的自推进活性粒子模型中，还存在一种额外的旋转对称性，导致平均场力消失 [13–18]。

系统的下一步是考虑在相互作用过程中形成的关联，同时假设单侧分子混沌：将粒子视为在碰撞开始时相互独立。追踪碰撞事件期间关联的形成，需要对双粒子动力学进行求解。如果借助完整的双粒子传播子来完成这一过程，即采用二体碰撞近似，便可推导出玻尔兹曼方程 [7, 19]。其碰撞积分很少能够进行解析求值。更普遍且更易处理的是导向一种动力学方法的
朗道方程 [6, 20],是关于相互作用的微扰理论，并使用自由双粒子传播子。

* horst-holger.boltz@uni-greifswald.de

在所有这些研究中，内禀噪声都仅作为一个独立的扩散项作用于单粒子函数，与碰撞算子相互独立；碰撞积分本身则建立在无噪声的确定性轨迹之上 [19, 21–25]。对于弱噪声情形，相互作用仍表现为明确的碰撞事件；据我们所知，目前尚无研究探讨微观随机性如何通过碰撞积分本身传播，也未研究连续时间动力学中噪声与相互作用的相互影响。对于相互作用瞬时发生的离散动力学，相关研究已取得进展 [26, 27], ；对于硬核主动布朗粒子，也已通过匹配渐近展开推导出连续介质理论 [28] ，但这些理论针对的是扩散主导粒子相遇的相反极限。这反映了一个更普遍的不平衡：低活性极限，即强噪声极限，可以通过围绕平衡态展开来处理，并已受到广泛关注 [29–31], ；而弱噪声极限下，相互作用表现为彼此独立的碰撞事件，对这一极限的研究则少得多 [32]。动力学理论的历史研究方向恰好相反：从确定性微观动力学推导粗粒化理论中的有效噪声。一个著名的例子是关于物理学公理的希尔伯特第六问题 [33], ，该问题推动了一项研究计划：通过玻尔兹曼方程，从硬球碰撞推导流体动力学方程 [34–36]。

在这项工作中，我们反向探究这一方向，考察内禀微观噪声如何改变碰撞积分本身，参见图1。自然的情形是噪声作用于自由单粒子动力学，我们将其称为自由飞行噪声。超越平均场的动力学理论所增加的内容，是将相互作用视为持续时间有限的独立事件。因此，自然需要探讨噪声在这些碰撞事件期间产生了何种影响。我们给出了一种在朗道动力学理论中系统纳入弱噪声的方案。困难在于，在存在噪声时，自由双粒子传播子包含扩散算子，因而不再能沿确定性特征线求值；同时，相互作用时间并不短，对于近乎平行的粒子甚至会发散，因此无法采用短时间展开。对此，我们在朗道理论相互作用强度的二阶基础上，对传播子按噪声强度进行一阶戴森展开。我们以干燥、对齐、稀释主动物质的Kuramoto-Vicsek模型为例，明确开展了这一计算 [37]。该模型的结构使得（大部分）解析求值成为可能，但计算仍然十分复杂，因为必须处理时间发散。

我们进一步考虑第二种在物理上截然不同的随机性，称为门控噪声：这种噪声只在智能体相互作用时起作用，是对相互作用过程中不完美感知和响应的最简模型。在这里，碰撞过程中积累的关联会与噪声直接耦合，而确定性碰撞时间的发散也因此变得重要。我们利用含噪双粒子动力学直接模拟得到的平均通过时间对其进行正则化，从而使动力学描述成为半解析的。

对于自由运动中的噪声，我们的主要结果是系统地论证了迄今为止所采用的处理方法 [21–25], ：噪声通过福克–普朗克方程中的扩散项起作用，但不进入碰撞积分。这是正确的主导阶近似；当噪声强度 $\mathrm{Pe}^{-1} \to 0$ 较小时，修正会消失。这里我们使用逆 P´eclet 数 Pe^{-1} （见下文）作为无量纲度量，尽管对齐模型中的碰撞时间没有上界。对于接触时门控的噪声，噪声与碰撞（其强度为 γ ，发生速率取决于邻居的典型数量 M，见下文）并不解耦，主导修正的阶为$\mathcal{O}(\gamma M \mathrm{Pe}^{-1})$，并带有一个对数因子，该因子取决于噪声强度以及耦合的大小和符号。基于智能体的模拟显示，存在相应的奇函数贡献，其关于 γ 为奇；自由运动中的噪声不会产生这一贡献，常规的弗拉索夫理论或朗道理论也无法捕捉到它。在自由飞行噪声情形下，这意味着采用确定性碰撞积分的动力学理论可作为本征含噪智能体模型的一种受控方法，并可与依赖模型较少的方法互为补充，例如玻尔兹曼–金兹堡–朗道方法 [38–41], ，后者依据对称性和物理直觉直接建模经噪声重整化的碰撞积分。在门控噪声情形下，动力学理论揭示了高度反直觉的非解析项的存在。

我们的结果还表明，从现象学角度对噪声影响碰撞进行建模存在局限性。即使是本文所考察的最简模型——具有有界相互作用和高斯白噪声——也会产生关于噪声强度的非解析贡献。这些贡献源于近乎平行的粒子对，其碰撞持续时间无界，并表现为取向依赖的有效噪声强度。对称性允许存在这样的项，但其系数（包括符号）只有通过系统推导才能确定。

本文其余部分的结构如下。在第II节中，我们推导自由飞行噪声对应的Dyson-Landau碰撞积分以及门控噪声对应的交叉项；朗道理论的标准推导和戴森展开的详细内容见附录A 和B。在第III节中，我们将二者应用于Kuramoto-Vicsek模型，并与基于智能体的模拟进行比较。碰撞积分和角积分的计算见附录C 至F。在第IIIC节中，我们讨论其对流体动力学理论的影响，并在第IV节作总结。

II. 弱噪声下的朗道动力学理论

在介绍形式体系之前，我们先概述其物理图像，参见图 1。动力学理论用单粒子分布函数描述系统，即在给定位置和取向处找到一个智能体的概率密度。

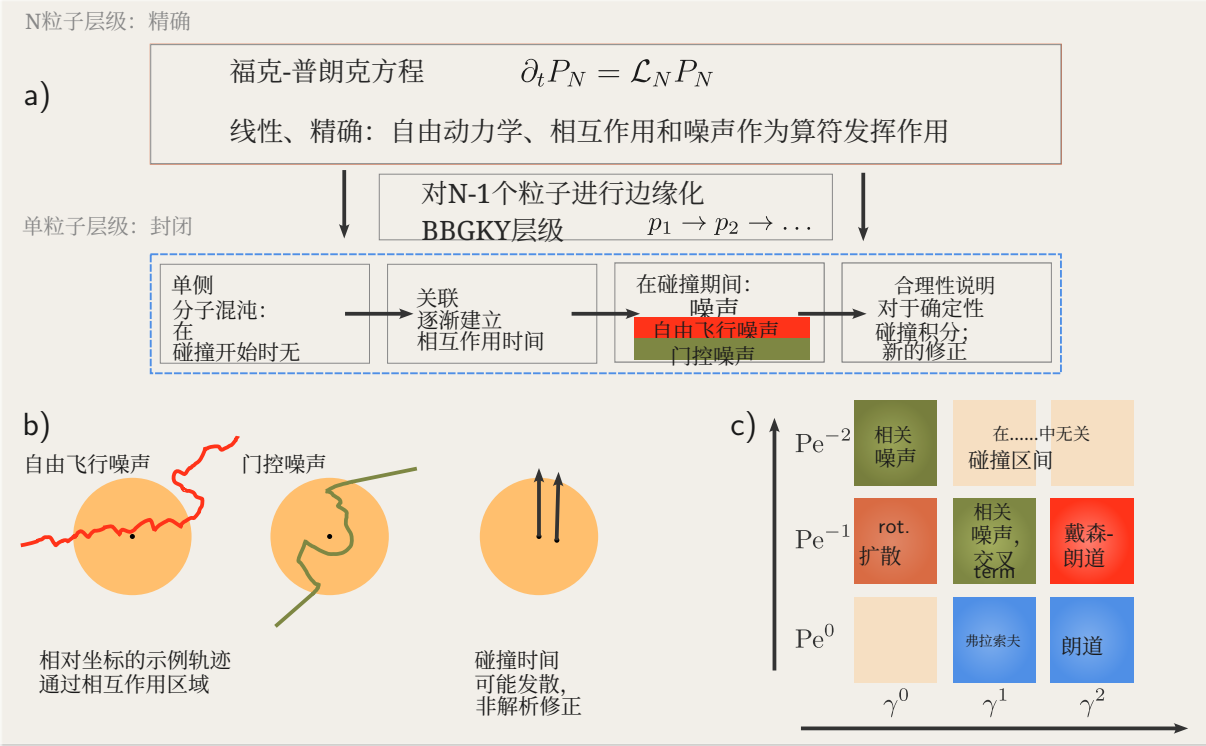


图 1。本手稿各项贡献的图示总结。a）在单粒子层面进行闭合会引入粒子之间的相互作用，进而影响随机性在有效动力学中的作用。我们表明，采用确定性碰撞积分确实是正确的最低阶近似，并讨论一些更高阶的修正（c）图）。特别地，我们关注一种典型的活性物质系统（b）图）：具有取向相互作用的自驱动粒子；对于该系统，我们讨论两种不同类型的噪声：一种是标准的无处不在的自由飞行噪声，即带噪声的自由粒子动力学；另一种是在接触时门控的噪声，代表随机相互作用。该系统不仅具有很强的现实意义，而且具备多种使其适合本研究的性质。对本研究而言，其关键性质在于：这是一个具有短程相互作用的碰撞系统，其中确定性碰撞时间可以任意大。因此，在某些区间内，任何噪声都是相关扰动，并会导致我们所讨论的非解析修正。c）图表示形式阶数，而对于该模型，实际贡献呈现为非解析形式。

其演化方程包含一个碰撞积分，用于描述个体对之间碰撞的影响。在平均场理论中，每个个体都响应其邻居的平均状态，碰撞不会作为独立事件出现。朗道理论更进一步，假设两个智能体进入彼此的相互作用范围时互不关联，并以相互作用强度的最低阶计算它们在接触期间产生的关联。对于确定性动力学，这只需考虑两个智能体在碰撞期间的直线轨迹。噪声会从两个方面改变这一情况。相对轨迹会变得随机，因此碰撞的持续时间和几何形态会发生波动；而相互作用所依赖的取向也会在碰撞期间波动。如果碰撞时间远短于噪声起作用的时间尺度，这两种效应都很小，我们便对它们作微扰处理。例外的是近乎平行的个体：它们的相对速度很小，因此会长时间保持接触，即使是弱噪声也会对它们产生影响。下文发现的非解析贡献正是源自这些粒子对。如果噪声只在个体相互作用时起作用（门控噪声），那么它恰好在碰撞期间起作用，其对关联的影响在相互作用强度的一阶就已显现。

本节中，我们推导弱噪声对朗道碰撞积分的主导修正。核心结果是，噪声仅通过一个对易子进入碰撞积分，见式（8），因此保留确定性碰撞积分就是正确的主导阶近似。

朗道动力学方程最初被引入为玻尔兹曼方程的微扰极限 [20]，，更准确地说，它是对弱相互作用多体系统的单粒子分布函数进行系统性微扰闭合的结果。其适用范围不同于玻尔兹曼方程；后者依赖二体碰撞近似，并且在密度方面具有渐近性：只要有效相互作用较弱，朗道方程就可以在任意密度下成为合适的描述 [22]。我们考虑具有以下广义动力学的 N 相同智能体，其单个体状态 $\boldsymbol{j}$ （位置和内部自由度）服从带有短程成对相互作用的朗之万型动力学

,

$$\partial_t \boldsymbol{j} = v_0 \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{j}) + \Gamma \sum_{k\neq j} a^R_{jk} \boldsymbol{F}_{jk}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) + \mathsf{A}_j \boldsymbol{\eta}_j, \tag{1}$$

$$a^R_{jk} = \Theta(R - \|\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\|), \tag{2}$$

采用依赖于模型的半范数 $\|\cdot\|$（通常为位置的欧几里得距离）、有界相互作用 $\boldsymbol{F}_{jk}$，以及具有单位方差且振幅矩阵相同并为对角矩阵的高斯白噪声 $\boldsymbol{\eta}_j$（A_j）$_{\alpha\beta} = \sqrt{2D D_\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}$。尺度由 D 设定，相对强度 D_α 允许某些自由度确定性地演化。该模型类别的适用范围与局限性将在 A 节讨论。将位置按 R 缩放、时间按 R/v_0 缩放后，系统由三个无量纲参数控制：耦合强度 $\gamma = \Gamma R/v_0$、佩克莱数 $\mathrm{Pe} = v_0/(RD)$，以及无量纲密度 $M = V(d)\,\rho$；其中 $V(d)$ 是相互作用区域的体积，ρ 是数密度。我们考虑任意 M 下的弱相互作用粒子 $\gamma \ll 1$，以及弱噪声 $\mathrm{Pe}^{-1} \ll 1$。

从与方程（1）等价的福克–普朗克方程出发，朗道动力学理论 [6, 20–22]在约化分布函数的第$\mathcal{O}(\gamma^2$阶截断BBGKY层级，并利用二体关联函数 g_2的阶为 γ（见A节）。由此得到

$$(\partial_t + \mathsf{F}_1) p_1(\mathbf{1},t) = -\gamma M \,\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int a_{1\,2} \boldsymbol{F}_{1\,2}\,(p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t) + g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t))\mathrm{d}\mathbf{2} \equiv \mathrm{J}_{\mathrm{coll}}\,, \tag{3a}$$

$$(\partial_t + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2)\, g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) = Q(\mathbf{1},\mathbf{2},t) = -\gamma\, a_{1\,2}\, \mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\, p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t), \tag{3b}$$

其中，自由单粒子福克–普朗克算子 $\mathsf{F}_i = \mathsf{L}_i + \mathrm{Pe}^{-1}\mathsf{N}_i$ 由刘维尔算子 $\mathsf{L}_i p_1 = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{i}} \cdot (\boldsymbol{v}_i p_1)$ 和噪声算子 $\mathsf{N}_i = -\sum_\alpha D_\alpha \partial^2_{(\boldsymbol{i})_\alpha}$ 组成；二体刘维尔算子为 $\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2} p_1 p_1 = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot (\boldsymbol{F}_{1\,2} p_1 p_1) + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{2}} \cdot (\boldsymbol{F}_{2,1} p_1 p_1)$。碰撞积分 $\mathrm{J}_{\mathrm{coll}}$ 包含来自对函数分解部分的平均场（弗拉索夫）贡献，以及来自对关联的朗道贡献。假设单侧分子混沌，即相互作用开始时粒子彼此不相关 t_0，则对关联可写为

$$g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) = \int_{t_0}^{t} \mathsf{U}_{1\,2}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})\, Q(\mathbf{1},\mathbf{2},t')\,\mathrm{d}t', \tag{4}$$

其中，自由双粒子传播子 $\mathsf{U}_{1\,2}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1}) = \mathrm{e}^{-(\mathsf{F}_1+\mathsf{F}_2)(t-t')}$。

无噪声时，$\mathsf{U}_{1\,2}$ 沿自由轨迹平移自变量，式（4）还原为熟知的朗道结果。有噪声时，自由传播子包含扩散算子，因而无法再沿确定性特征线求值。在所考虑的阶数下，单粒子函数在一次碰撞过程中自由演化，$p_1(\mathbf{1},t')p_1(\mathbf{2},t') = \mathsf{U}^{-1}_{1\,2}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})\; p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t)$，因此

$$g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) = -\gamma \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathsf{U}_{1\,2}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})\, a'_{1\,2} \mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\, \mathsf{U}^{-1}_{1\,2}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})\, p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t), \tag{5}$$

其中，撇号表示示性函数属于时间 t' 的源。将 Pe^{-1} 利用 Dyson方程（第 B 节）展开至一阶，对于任意算子 B,

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_{1\,2}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})\,\mathsf{B}\,\mathsf{U}^{-1}_{1\,2}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1}) &= \mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0)\,\mathsf{B}\,\mathsf{U}^{-1}_{1\,2}(t',t,0) \\ &\quad - \mathrm{Pe}^{-1}\int_{t'}^{t} \mathrm{d}s\; \mathsf{U}_{1\,2}(s,t,0)\big[\mathsf{N},\, \mathsf{U}_{1\,2}(t',s,0)\,\mathsf{B}\,\mathsf{U}^{-1}_{1\,2}(t',s,0)\big]\,\mathsf{U}^{-1}_{1\,2}(s,t,0),\end{aligned} \tag{6}$$

与 $\mathsf{N} = \mathsf{N}_1 + \mathsf{N}_2$。注意，最后一行包含对易子 $[\mathsf{C}, \mathsf{B}] = \mathsf{CB} - \mathsf{BC}$。为避免混淆，我们仅在对易子的语境中使用括号 $[\ldots]$。这相当于量子力学相互作用绘景中的一阶含时微扰理论，其中噪声算符 N 作为微扰 [42]，并且在非平衡统计力学的投影算符方法中也会出现类似的算符结构 [43]。零阶是确定性的朗道理论，一阶是新的戴森-朗道贡献 $\mathrm{Pe}^{-1}\mathrm{J}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{coll}}$,

$$\mathrm{J}_{\mathrm{coll}} = \mathrm{J}^{\mathrm{MF}}_{\mathrm{coll}} + \mathrm{J}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{coll}} + \mathrm{Pe}^{-1}\,\mathrm{J}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{coll}} \tag{7}$$

with

$$\mathsf{J}^{\mathrm{MF}}_{\mathrm{coll}} = -\gamma\, M\, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \boldsymbol{F}_{1\,2}\, p_1(\mathbf{1},t) p_1(\mathbf{2},t), \tag{8a}$$

$$\mathsf{J}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{coll}} = \gamma^2 M\, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \boldsymbol{F}_{1\,2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \left\{ \mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0) a'_{1\,2} \right\} \left\{ \mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0) \mathsf{L}^{(2)}_{1\,2} \right\} p_1(\mathbf{1},t) p_1(\mathbf{2},t), \tag{8b}$$

$$\mathsf{J}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{coll}} = -\gamma^2 M\, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \boldsymbol{F}_{1\,2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t'}^{t} \mathrm{d}s\; \mathsf{U}(s,t,0) \Big[\mathsf{N}, \mathsf{U}(t',s,0)\, a'_{1\,2} \mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\, \mathsf{U}^{-1}(t',s,0) \Big]\, p_1(\mathbf{1},s) p_1(\mathbf{2},s), \tag{8c}$$

其中，$p_1(\boldsymbol{j},\ s)$ 表示将 $p_1(\boldsymbol{j},\ t)$ 确定性自由演化回时间 s，其中 $s < t$，这在此阶已足够。

因此，噪声仅通过 N 与传播的源项之间的对易子进入碰撞积分。如果相互作用核和传播的相互作用区域都不依赖于受噪自由度，则该对易子为零。仅作用于单粒子函数的噪声（其已包含在 F_1, 中）会消失。相应地，$\mathsf{J}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{coll}}$ 分解为三个贡献，具体见第 B5节的公式（B）： j_1 描述相互作用核的展宽， j_3 描述相互作用几何，由此产生支撑于相互作用区域边界上的项，而 j_2 是一个混合项。

只要噪声在 τ_c 一次碰撞持续时间内的影响很小，该展开就受到控制。对于作用于决定速度的内部自由度上的噪声，自由传播会将这种噪声转化为位置扩散$\propto \mathrm{Pe}^{-1}\tau^3$，因此相关参数是 $\mathrm{Pe}^{-1}\tau_c^3$，而不是 Pe^{-1}。该展开仅在有界的碰撞持续时间内保持一致。在此范围内，将噪声纳入朗道理论的朴素做法——添加扩散算子，并从刘维尔方程转向福克–普朗克方程，同时保留确定性碰撞积分——在主导阶上是正确的。

A. 随机相互作用，门控噪声

在方程（1）中，噪声作用于自由动力学，因此是个体的内在属性。在许多情况下，将相互作用过程本身视为噪声源更为恰当。一般而言，我们在此考虑的广义粗粒化动力学中的主体相互作用，包括某种测量以及随后针对测量结果的调整。这两个步骤都可能存在误差，从而在模型层面产生噪声。与我们的框架相适应的一种最简形式，是将噪声限制在当前正在发生相互作用的粒子上，其形式为接触时门控的乘性噪声

$$\partial_t \boldsymbol{j} = v_0 \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{j}) + \Gamma \sum_{k \neq j} a^R_{jk} \boldsymbol{F}_{jk}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) + \sqrt{\sum_{k \neq j} a^R_{jk}}\, \mathsf{A}_j \boldsymbol{\eta}_j. \tag{9}$$

前因子 $\sqrt{\sum_{k\neq j} a^R_{jk}}$ 将作用于粒子 j 的噪声限制在 j 处于至少一个其他粒子的相互作用范围 R 内的时间段。当噪声仅在相互作用期间起作用时，它也会直接作用于对关联，而主要修正——噪声与相互作用的两个交叉项——在耦合强度的一阶中就已经出现。一般系统会结合多个噪声源，但我们将自身限制在这一最简情形中。我们进一步假设，噪声仅作用于 a_{jk} 不依赖的自由度；如下面的示例所示，此时 Itˆo 解释与斯特拉托诺维奇解释一致 [44]。

另一种模型选择是使用 $\Theta(\sum_{j\neq k} a^R_{jk})$ 作为前因子。这样，噪声要么开启，要么关闭，但不会随邻居数量增加。然而，接下来需要写成 $\Theta(\sum_{k\neq j} a^R_{jk})$ $=1-\prod_{k\neq j}(1-a^R_{jk})$，并在展开该乘积、按照所涉及的粒子数量进行分类后发现，这两条规则在对相互作用层面上是一致的。

源自确定性流 $\boldsymbol{F}$ 的动力学理论项保持不变。然而，噪声现在在两个位置进入层级方程。在 p_1 的方程中，扩散项由粒子 $\mathbf{1}$ 的邻居加权，因此涉及完整的对函数，

$$\begin{aligned}(\partial_t + \mathsf{L}_1) p_1(\mathbf{1},t) = &-\gamma M\, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \boldsymbol{F}_{1\,2} \left\{ p_1(\mathbf{1},t) p_1(\mathbf{2},t) + g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) \right\} \\ &- \mathrm{Pe}^{-1} M\, \mathsf{N}_1 \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \left\{ p_1(\mathbf{1},t) p_1(\mathbf{2},t) + g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) \right\}.\end{aligned} \tag{10}$$

在 g_2 的方程中，作用于接触粒子对的噪声本身就是关联的一个来源，此外还包括相互作用，

$$(\partial_t + \mathsf{L}_1 + \mathsf{L}_2)\, g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) = Q(\mathbf{1},\mathbf{2},t) - \mathrm{Pe}^{-1} a_{1\,2}(\mathsf{N}_1+\mathsf{N}_2)\, p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t), \tag{11}$$

由式 (3b) 中的 Q。由于它仅在相互作用范围内起作用，该源项不会因子化。粒子 1 与第三个粒子接触所产生的噪声会给出项 $-\mathrm{Pe}^{-1}\mathsf{N}_1\{M\int \mathrm{d}\mathbf{3}\, a_{1,3}[p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{3},t) + g_2(\mathbf{1},\mathbf{3},t)]\}\, p_1(\mathbf{2},t)$，粒子 2 的情况相应类似。这就是式 (10) 的噪声项乘以 $p_1(\mathbf{2},t)$，因此它在关于 $g_2 = p_2 - p_1 p_1$ 的方程中抵消。剩余的三粒子项涉及 $g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t)$、$g_2(\mathbf{2},\mathbf{3},t)$ 或 g_3，并且只有超出本文所考虑的阶数时，才会对单粒子动力学产生贡献。

我们关注确定性朗道理论的一阶修正，即对 Pe^{-1} 的修正；该理论在 $\mathrm{O}(\gamma^2 M)$ 阶上是正确的。若要确定 $\mathrm{O}(\mathrm{Pe}^{-1}\gamma^2 M)$ 阶的所有项，就像处理自由动力学中的噪声一样，需要考虑层级方程中的三粒子项。因此，我们将分析限制在两个领先阶 $\mathrm{O}(\mathrm{Pe}^{-1}M)$ 和 $\mathrm{O}(\mathrm{Pe}^{-1}\gamma M)$。在这一阶数下，式 (11) 采用式 (4) 中的确定性自由传播子求解，并且 g_2 分解为一个阶数为 γ 的相互作用诱导部分和一个阶数为 Pe^{-1} 的噪声诱导部分。噪声诱导部分仅在 $\mathrm{O}(\mathrm{Pe}^{-2}M)$ 阶才会进入式 (10) 的噪声项，这一阶我们将其忽略；但它会在 $\mathrm{O}(\gamma M\mathrm{Pe}^{-1})$ 阶进入相互作用项。令局部邻居数为 $M_1 = M\int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2}\, p_1(\mathbf{2},t)$，我们得到

$$\begin{aligned}(\partial_t + \mathsf{L}_1)p_1(\mathbf{1},t) = {}& \mathrm{J}^{\mathrm{MF}}_{\mathrm{coll}} + \mathrm{J}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{coll}} - \mathrm{Pe}^{-1} M_1 \mathsf{N}_1 p_1(\mathbf{1},t) \\ & + \gamma M \mathrm{Pe}^{-1}\, \mathsf{N}_1 \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \{\mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0)\, a'_{1\,2}\}\{\mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0)\, \mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\}\, p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t) \\ & + \gamma M \mathrm{Pe}^{-1}\, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2}\boldsymbol{F}_{1\,2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \{\mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0)\, a'_{1\,2}\}\{\mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0)\, (\mathsf{N}_1+\mathsf{N}_2)\}\, p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t).\end{aligned} \tag{12}$$

这里，$\mathrm{J}^{\mathrm{MF}}_{\mathrm{coll}}$ 和 $\mathrm{J}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{coll}}$ 分别是确定性的平均场贡献和朗道贡献，见式（8）。最后两行是噪声与相互作用的交叉项：噪声作用于相互作用建立的关联，以及相互作用作用于噪声建立的关联。对于这两项，在单粒子层面进行闭合只需要在相互作用期间对粒子对进行确定性传播，这与朗道理论所需的输入相同。最后一行中的项具有朗道碰撞积分的结构，其中以 $\mathsf{N}_1+\mathsf{N}_2$ 替代 $\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}$，因为碰撞时间总是与 $\boldsymbol{F}_{1\,2}$相乘出现。在第二行中则并非如此。对于对齐相互作用，$\boldsymbol{F}_{1\,2}$ 在平行粒子之间趋于零，而它们的碰撞时间发散，因此第二行中的项得到对数增强，并在主导对数阶上占主导地位，正如我们在第 IIIB节所示。

III. 干燥对齐型稀薄活性物质的应用

本节将这些结果应用于一种对齐型自驱动粒子模型。该模型的显著特征是，近乎平行的粒子会保持接触任意长的时间，从而使某些修正变得奇异。我们将这一一般方案应用于干燥对齐型稀薄活性物质 [37], ，对于这种物质，确定性朗道理论在概念上简单，但在实践中具有重要意义 [21, 22]。每个智能体的状态可分为其位置 $\boldsymbol{r}_j$ 和编码其取向的内部自由度 ϑ_j，$\boldsymbol{j} = (\boldsymbol{r}_j, \vartheta_j)^{\mathrm{T}}$。自由速度仅取决于取向，$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j(\vartheta_j)$，而相互作用仅取决于取向并作用于取向，$\boldsymbol{F}_{jk} = \boldsymbol{F}_{jk}(\vartheta_j, \vartheta_k)$。因此，取向没有自由动力学，速度在自由飞行期间保持不变，而相互作用区域仅由位置决定。具体而言，我们考虑如下模型 [45]

$$\partial_t \boldsymbol{r}_j = v_0\, \hat{\boldsymbol{n}}(\vartheta_j), \tag{13a}$$

$$\partial_t \vartheta_j = \Gamma \sum_{j\neq i} a^R_{jk} \sin(\vartheta_k - \vartheta_j) + \sqrt{2D}\, \eta_j, \tag{13b}$$

对于二维空间中的 N个粒子，其位置为 $\boldsymbol{r}_j$、角度为 ϑ_j，其中 $\hat{\boldsymbol{n}}(\vartheta_j) = (\cos\vartheta_j, \sin\vartheta_j)^{\mathrm{T}}$，$a^R_{jk} = \Theta(R - |\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k|)$，且 η_j 为高斯白噪声，满足 $\eta_j = 0$ 和 $\eta_j(t)\eta_k(t') = \delta_{jk}\delta(t-t')$。对于确定性动力学，该模型已在弗拉索夫 [45], 朗道 [21, 22], 和玻尔兹曼 [19] 层面得到研究；其非互易 [46, 47]版本也已在文献48中得到考虑。迄今为止，噪声仅被纳入福克–普朗克方程层面，但尚未用于碰撞积分的计算。

按照第 II 节中的记号，该模型对应于仅作用在角度上的噪声，其中

$$\mathsf{L}_i = \hat{\boldsymbol{n}}(\vartheta_i)\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_i}, \qquad \mathsf{N}_i = -\partial^2_{\vartheta_i}, \qquad \mathsf{L}^{(2)}_{1\,2} = (\partial_{\vartheta_1} - \partial_{\vartheta_2})\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1). \tag{14}$$

示性函数中的范数是位置之间的欧几里得距离，因此

$$\mathsf{U}(t',s,0)\,a'_{1\,2}=\Theta\big(1-\|\boldsymbol{r}_{12}-(s-t')\,\boldsymbol{v}_{\rm rel}\|\big) \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$和 $\boldsymbol{v}_{\rm rel}=\hat{\boldsymbol{n}}(\vartheta_2)-\hat{\boldsymbol{n}}(\vartheta_1)$， $\|\boldsymbol{v}_{\rm rel}\|=2|\sin(\Delta/2)|$， $\Delta=\vartheta_2-\vartheta_1$。下文中，我们考虑空间均匀的单粒子函数 $p_1(\mathbf{1},\ t)=p_1(\vartheta_1,\ t)$，并使用角傅里叶模，

$$\hat{p}_m(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\vartheta}\,p_1(\vartheta,t)\,\mathrm{d}\vartheta,\qquad p_1(\vartheta,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{p}_m(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta}, \tag{16}$$

其中 $\hat{p}_m=\hat{p}^*_{-m}$。对于均匀的 p_1，自由传播子仅作用于示性函数， p_1 的确定性自由演化是平凡的，因此公式（8）化简为

$$\mathsf{J}^{\rm L}_{\rm coll}=\gamma^2M\,\partial_{\vartheta_1}\!\int\!\mathrm{d}\mathbf{2}\,a_{1\,2}\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)\Big\{\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,1\Big\}\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\,p_1(\vartheta_1,t)p_1(\vartheta_2,t), \tag{17a}$$

$$\mathsf{J}^{\rm D}_{\rm coll}=-\gamma^2M\,\partial_{\vartheta_1}\!\int\!\mathrm{d}\mathbf{2}\,a_{1\,2}\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\;\mathsf{U}(s,t,0)\Big[\mathsf{N},\,\{\mathsf{U}(t',s,0)\,a'_{1\,2}\}\,\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\Big]\,p_1(\vartheta_1,t)p_1(\vartheta_2,t). \tag{17b}$$

$\mathsf{J}^{\rm L}_{\rm coll}$中大括号内的表达式在相互作用区域上积分后，给出平均碰撞持续时间。通过几何平均论证 [22] 或考虑傅里叶空间中 $t-t_0\to\infty$ 的极限，都可以轻易算出该值 [6, 21]。

A. 自由飞行噪声

我们利用附录中公式（B5）的分解来计算 $\mathsf{J}^{\rm D}_{\rm coll}$。 j_2 和 j_3 项包含传播后的指示函数（公式（15））对角度的导数。这些项仅在相互作用区域的边界上有贡献，而 j_1与朗道项一样，来自整个相互作用区域。具体的传播过程和积分计算见 C 节。近乎平行的粒子 $\|\boldsymbol{v}_{\rm rel}\|\to0$的碰撞持续时间会发散。在朗道项中，这由相互作用核 $\sin\Delta$补偿，因为它在相同极限下趋于零。这符合物理直觉：两个粒子若彼此靠近并保持较长时间，其取向就会相似，因此有效对齐作用可以忽略。在戴森-朗道项中，会出现更高次的碰撞持续时间幂，而 j_3 中的角积分在 $\Delta=0$处含有不可积奇异性。这表明，对于近乎平行的粒子对，一级戴森展开失效，因为它们的碰撞持续时间超过了噪声开始产生显著影响的时间尺度 $\mathsf{Pe}^{1/3}$。要进行一致的处理，必须用噪声本身对碰撞持续时间进行正则化。这会产生一个 $\mathsf{O}(\gamma^2M\mathsf{Pe}^{-2/3})$ 阶的贡献，其结构为 $\partial^2_\vartheta(p_1^2)$；该贡献对噪声强度呈非解析性，且其前因子取决于正则化的具体细节。由于这一贡献只会改变朗道碰撞积分中近乎平行粒子对所占的份额，因此它仍只是后者中的一小部分，量级为 $\mathsf{O}(\mathsf{Pe}^{-2/3})$，远低于第三节 B 中基于智能体的模拟的分辨率。因此，我们不对自由飞行噪声进行正则化。对于门控噪声，相应的奇异项是主导贡献，我们将在第三节 B 中详细展示正则化过程。此处给出角积分剩余的有限部分，并通过围道积分计算（F节）。在傅里叶空间中，$\mathsf{Pe}^{-1}\,\mathsf{J}^{\rm D}_{\rm coll}$ 的这些有限部分可分解为 $\hat{\mathsf{J}}_{\mathrm{D},1\ \mathrm{coll},\mathsf{n}}+\hat{\mathsf{J}}_{\mathrm{D},2\ \mathrm{coll},\mathsf{n}}+\hat{\mathsf{J}}_{\mathrm{D},3\ \mathrm{coll},\mathsf{n}}$，分别对应于 j_1、 j_2和 j_3，其中 $\gamma^{-2}M^{-1}\mathsf{Pe}\,\hat{\mathsf{J}}_{\mathrm{D},q\ \mathrm{coll},\mathsf{n}}=\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_kC_q(n,k)$，以及

$$C_1(n,k)=\frac{n\pi^2}{2}\Big\{6n\,\delta_{0,k}+\big(((n-2k)^2+2)\,\mathrm{sgn}(k)+3(n-2k)\big)\delta_{1,|k|}-2\big((n-2k)^2+2\big)\,\mathrm{sgn}(k)\Big\} \tag{18}$$

$$C_2(n,k)=-\frac{\pi^2n}{4}\Big\{16n\,\delta_{0,k}+\big(4(n-2k)+((n-2k)^2+4)\,\mathrm{sgn}(k)\big)\delta_{1,|k|}-4\big((n-2k)(n-6k)+4\big)\,\mathrm{sgn}(k)\Big\} \tag{19}$$

$$C_3(n,k)=-\frac{n\pi^2}{12}\Big\{-2n\,\delta_{0,k}+\big(n-2k+2\,\mathrm{sgn}(k)\big)\delta_{1,|k|}+4(6k^2-2kn+1)\,\mathrm{sgn}(k)\Big\} \tag{20}$$

其中我们采用约定 $\mathrm{sgn}(0)=0$ 表示符号函数。

三个有限部分的量级相同，且部分符号相反。因此，噪声的作用既不能简化为相互作用核的展宽（对应于 j_1），也不能简化为对相互作用几何和碰撞持续时间的修正（对应于 j_3）。相较于朗道项，戴森-朗道项在奇异部分中受到 $\mathsf{Pe}^{-2/3}$ 的抑制，在正则部分中受到 Pe^{-1} 的抑制。在武拉索夫层次上它无关紧要， [49] 该层次仅在 $\mathcal{O}(\gamma M)$ 精度上成立。

这些修正很难检测到。模态动力学由量级为 $\mathcal{O}(M\gamma)$ 的平均场贡献，以及量级为 $\mathcal{O}(M\gamma^2)$ 的朗道贡献主导；二者受到的抑制都弱于戴森–朗道修正。可以考虑将系统置于平均场转变点 $\mathrm{Pe}^{-1}=\pi M\gamma$，这样便可从极性动力学中消除裸的 Pe^{-1} 项和 $M\gamma$ 项。然而，在该处，戴森–朗道项在奇异部分中的量级为 $\mathcal{O}(M^{5/3}\gamma^{8/3})$，在正则部分中的量级为 $\mathcal{O}(M^2\gamma^3)$，因此与朗道闭合之外的贡献几乎无法区分，而我们无法处理这些贡献。同样，极性有序的出现 $\gamma_c(\mathrm{Pe}^{-1})$ 也无法提供明确的检验，因为度量型极性活性物质中的转变由密度涨落驱动，[50, 51]，而我们忽略了这些涨落。对于作用于自由运动的噪声，福克–普朗克方程中的扩散项之外、超出朗道理论的修正确实存在，并且关于噪声强度呈非解析性；但即便在这个碰撞时间无上界的模型中，它们仍只占朗道贡献的一小部分。

B. 门控噪声

对于接触时门控的噪声，式（9）中的裸噪声项由局部邻居数加权，而式（12）中噪声与相互作用的两个交叉项是主要修正，其阶数为 $\mathcal{O}(\gamma M\mathrm{Pe}^{-1})$。对于均匀单粒子函数 $M_1=M$，时间传播是平凡的，模方程为

$$\partial_t\hat{p}_n=\hat{J}_{\mathrm{coll},n}-n^2\mathrm{Pe}^{-1}M\hat{p}_n+\mathrm{Pe}^{-1}\gamma M\big(\hat{X}_n+\hat{Y}_n\big),\tag{21}$$

ˆ其中 $J_{\mathrm{coll},\ n}$ 包含确定性平均场项和朗道项，两个噪声积分为

$$X=\partial_{\vartheta_1}\int\mathrm{d}\mathbf{2}\,a_{1\,2}\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)\Big\{\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,1\Big\}(\mathsf{N}_1+\mathsf{N}_2)\,p_1(\vartheta_1,t)p_1(\vartheta_2,t),\tag{22}$$

$$Y=-\partial^2_{\vartheta_1}\int\mathrm{d}\mathbf{2}\,a_{1\,2}\Big\{\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,1\Big\}\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\,p_1(\vartheta_1,t)p_1(\vartheta_2,t).\tag{23}$$

二者都只需要对相互作用区域内的确定性碰撞持续时间积分，$\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\,a_{1\,2}\int\mathrm{d}t'\,1\ =4/(3|\sin(\Delta/2)|)$ [22]。与自由飞行噪声不同，碰撞期间单粒子函数的噪声演化在这一阶并无贡献，因为作用于单个粒子的噪声本身正比于 M。

积分 X 描述了作用于噪声所形成的对关联的相互作用。其结构与朗道碰撞积分相同，只是以 $\mathsf{N}_1+\mathsf{N}_2$ 取代 $\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}$，且碰撞持续时间总是与相互作用核 sin 相乘 Δ。因此，角积分收敛，与朗道项的情况相同，我们得到（第 E节）

$$\hat{X}_n=-\frac{32n^2}{3}\sum_k\frac{\big((n-k)^2+k^2\big)\big(4k(n-k)-1\big)}{(4k^2-1)\big(4(n-k)^2-1\big)}\,\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t),\tag{24}$$

其中，我们在 $k\to n-k$ 下对系数进行了“对称化”，因为只有对称部分对求和有贡献。对于 $|k|\gg n$，系数趋近于 $\frac{16}{3}n^2$。因此，与高模态的耦合与 k 无关；其形式为局域项 $\propto\partial^2_{\vartheta}(p_1^2)$ 的傅里叶变换。

积分 Y 描述了噪声对相互作用所形成的对关联的作用。在这里，噪声算符作用于碰撞积分之外，而碰撞持续时间中不包含相互作用核。在傅里叶空间中，我们得到（第E节）

$$\hat{Y}_n=\frac{2n^2}{3}\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\Big\{-4I_9(k)-\frac{32k(n-2k)}{4k^2-1}\Big\},\qquad I_9(k)=\int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\cos\Delta}{|\sin(\Delta/2)|},\tag{25}$$

且 I_9 在 $\Delta=0$处呈对数发散。这与第IIIA节中的自由飞行噪声情形相同：近乎平行的粒子对的确定性碰撞持续时间发散，对这些粒子对进行噪声的一阶处理会失效，而任何强度的噪声都会使其碰撞持续时间有限。不过在这里，奇异项属于噪声与相互作用的主导耦合，阶数为$\mathcal{O}(\gamma M\mathrm{Pe}^{-1})$，而非朗道项的小修正。因此，我们明确地进行正则化。由于发散仅源于碰撞持续时间，只需将确定性持续时间替换为含噪双粒子动力学下粒子对的平均通过时间。我们通过直接模拟粒子对动力学得到这些时间，并将其作为动力学理论的输入；这种做法与将静态结构因子用作位阻相互作用闭合的思路类似 [23]。相关的首次通过问题已针对圆盘中的单个活性粒子进行过研究 [52, 53], ，但研究的是强噪声这一相反极限。

正则化取决于碰撞过程中耦合与噪声的相对强度。耦合起作用的时间尺度为 $|\gamma|^{-1}$，而噪声则在时间尺度 $\mathrm{Pe}^{1/3}$上影响相对运动，参见第II节。我们首先讨论噪声主导情形，$|\gamma|\ll\mathrm{Pe}^{-1/3}$，这也涵盖了下文基于智能体的模拟所用的参数。

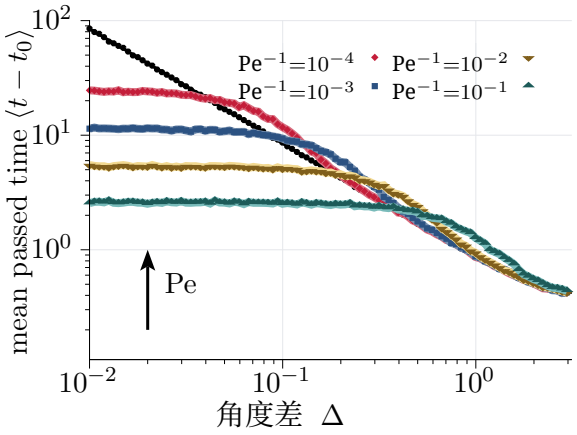


图 2. 数值计算得到的粒子对在相互作用区域内的平均通过时间随初始角度差变化的关系，采用双对数尺度。对于每个 Δ 和 Pe^{-1} 的取值，均采样了 3000 次实现。噪声的主要影响是将近乎平行粒子的发散通过时间 $\tau \sim (\sin(\Delta/2))^{-1}$ 正则化为有限值。对于中等角度差，含噪声时的通过时间长于确定性情形：这些轨迹大多沿确定性方向运动，但由于相对取向的噪声诱导涨落，净相对速度较小。从时间 $t > t_0$ 时的相对速度具有 Kratky-Porod 型行为 $\langle \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}(t) \rangle \sim \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}(t_0) \mathrm{e}^{-(t-t_0)\mathrm{Pe}}$ 可以看出这一点。

1. 噪声占主导，$|\gamma| \ll \mathrm{Pe}^{-1/3}$

图 2 显示了平均通过时间。对于平行粒子对，其最大值按 $\mathrm{Pe}^{1/3}$ 标度变化。通过标度论证可以直接理解这一点。在耦合可忽略的区间内，近乎平行的粒子对的相对运动由其角度差的扩散驱动，$(\Delta - \Delta_0)^2 = 4\mathrm{Pe}^{-1} t$。对于 $\Delta_0 = 0$，相对速度为 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} \approx \Delta(t)\, \hat{\boldsymbol{e}}_\perp$，其方向 $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ 基本固定，且垂直于平均取向，因此相对位移 $\Delta \boldsymbol{r} \approx \hat{\boldsymbol{e}}_\perp \int_0^t \mathrm{d}t'\, \Delta(t')$ 是随机游走的积分，并有 $\Delta \boldsymbol{r}^2 = \frac{4}{3} \mathrm{Pe}^{-1} t^3$。这对应于刚性蠕虫状链的横向偏转统计，其中时间取代弧长，Pe 扮演持久长度的角色，而离开相互作用区域对应于受限半柔性聚合物的偏转长度 [54, 55]。因此，通过相互作用区域需要 $\tau \sim \mathrm{Pe}^{1/3}$。耦合起作用的时间尺度为 $|\gamma|^{-1}$，两个尺度的比较决定了噪声主导区的范围。根据确定性结果 $t - t_0 = \frac{8}{3\pi} \frac{1}{2|\sin(\Delta/2)|}$ 以及这一标度分析，我们预期存在一个平滑函数 $g(u)$，使得

$$\frac{8}{3\pi} \langle t - t_0 \rangle^{-1} = 2|\sin(\Delta/2)| + g\big(2|\sin(\Delta/2)|/\varepsilon\big), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{Pe}^{-1/3}. \tag{26}$$

数据可以很好地用 $g(u) = \varepsilon\big(\sqrt{u^2+1} - u - a u^2 \mathrm{e}^{-b u^2}\big)$ 描述，其中 a、$b \approx$ 为常数，且 $\varepsilon \propto \mathrm{Pe}^{-1/3}$，见图 3。虽然小 u 时 $g(u)$ 的行为可由标度论证得出，但较大 u 时的尾部则完全是唯象拟合。我们用它来获得一种不含统计噪声、且至少原则上适用于解析计算的形式。基于测得的通过时间对模耦合系数进行数值求积，是一种可能的替代方法，无需进行这一步。I_9 的发散仅取决于小角度差时的行为，此处与 a 相关的部分无关。将 $|\sin(\Delta/2)|$ 替换为 $\sqrt{\sin^2(\Delta/2) + \delta^2}$，其中 $\delta = \varepsilon/2$，可得正则化积分（F 节）

$$\tilde{I}_9(k) = -4 \log \delta + 4 \log 4 + 2\big(R_{|k+1|} + R_{|k-1|}\big) + o(\delta^0), \qquad R_k = -2 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j-1} \sim -\log k - 2 \log 2 - \gamma_{\mathrm{EM}}. \tag{27}$$

对于 R_k的渐近行为，我们可以利用标准调和数 $H_k = \sum_{j=1}^{k} 1/k$，其中 $R_k = -2(H_{2k} - H_k/2)$，然后使用众所周知的欧拉-麦克劳林公式 $H_k \sim \log k + \gamma_{\mathrm{EM}}$ 以及欧拉-马歇罗尼常数$\gamma_{\mathrm{EM}} \approx 0.577\ldots$。因此，主导对数近似要求 $|k| \ll 1/\delta$。常数 $4 \log 4$ 取决于正则化的形式，可以吸收到 δ的前因子中，而 k相关项则与正则化无关。在主导对数阶下，当 $\delta \propto \mathrm{Pe}^{-1/3}$时，式（25）中的噪声积分变为

$$\hat{Y}_n = \frac{32 n^2}{9} \log(\mathrm{Pe}^{-1}) \sum_k \hat{p}_{n-k}(t) \hat{p}_k(t) + \mathcal{O}(\mathrm{Pe}^0). \tag{28}$$

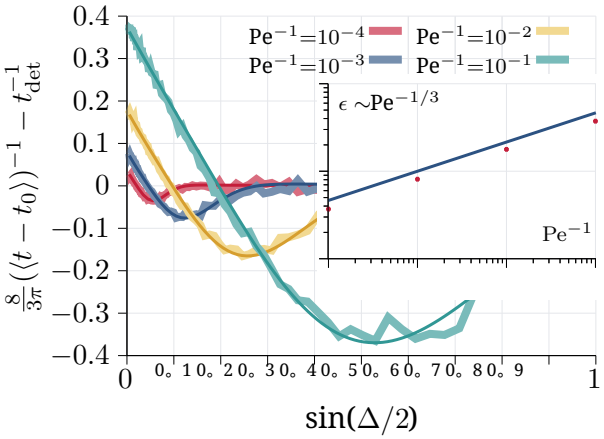


图 3. 噪声引起的平均通过时间修正，参见公式（26）。细虚线为以下形式的拟合： $g(u)=\varepsilon\left(\sqrt{u^2+1}-u-au^2\mathrm{e}^{-bu^2}\right)$ 其中 $u=2|\sin(\overline{\Delta/2})|/\varepsilon$。后一部分是通过现象学方法得到的。这种简单形式能够准确描述数据，尤其是在噪声较小时。插图：拟合值 ε（红点）遵循预期的标度 $\varepsilon\sim\mathrm{Pe}^{-1/3}$，蓝线为单项式 $\mathrm{Pe}^{-1/3}$，因此前因子为一阶量。

这是32 9 log(Pe)$\partial_{\tilde{v}}^2(p_1^2)$的傅里叶变换,它是一个依赖密度的转动扩散修正，并且关于噪声强度是非解析的。对于对齐相互作用，$\gamma>0$，近乎平行的粒子对会保持接触更长时间，因此在粒子数更多的取向上噪声会增强；而对于反对齐相互作用，$\gamma<0$，效果则相反。

2. 耦合占主导，$|\gamma|\gg\mathrm{Pe}^{-1/3}$

˜从公式 (27) 可以看出，I_9 的主导阶只取决于截断 δ，也就是说，只取决于最长的通过时间，而这由近乎平行的粒子对决定。对于 $\gamma\gg\mathrm{Pe}^{-1/3}>0$，我们可以将分析简化为横向相对坐标 y，它满足 $\ddot{y}\approx-2\gamma\dot{y}+\sqrt{4\mathrm{Pe}^{-1}}\,\xi$。在强耦合情况下，可以忽略惯性项，得到$\delta\sim\mathrm{Pe}^{-1}/\gamma^2$，对应于 $\tilde{I}_9\simeq-4\log(\mathrm{Pe}^{-1}/\gamma^2)$。对于 $\gamma<0$，存在一个禁区 [19]，$|\Delta|<\Delta_c\sim|\gamma|$，其中的˜小角度差无法通过确定性动力学到达。这导致 $\delta\sim|\gamma|$ 以及 $I_9\simeq-4\log|\gamma|$。同样的标度也可以从以下事实推出：确定性转向所需的时间为 $1/|\gamma|$，而到达足够大的角度差、使反对齐占据主导所需的扩散过程也需要相同的时间。这些渐近行为是一致的，因为它们与 $|\gamma|\sim\mathrm{Pe}^{-1/3}$时噪声占主导的结果相吻合。

3. *Crossover between the asymptotic regimes*

结合渐近区间，我们使用式（27）进行插值

$$\delta(\gamma,\mathrm{Pe}^{-1})=\begin{cases}\sqrt{\mathrm{Pe}^{-2/3}+\gamma^2} & \gamma\le 0\\ \dfrac{\mathrm{Pe}^{-1}}{\gamma^2+\mathrm{Pe}^{-2/3}} & \gamma>0\end{cases}. \tag{29}$$

在主导对数阶下，噪声积分可写为

$$\hat{Y}_n=\frac{32n^2}{3}\log\delta(\gamma,\mathrm{Pe}^{-1})\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)+\mathcal{O}(\delta^0), \tag{30}$$

完整表达式由式（25）和（27）得到。

4. 与基于智能体的模拟进行比较

我们在此的目的并非对这个玩具模型作出定量预测，而是要说明噪声与相互作用的交叉项存在于基于智能体的动力学中，并且可以被识别。这里的基于碰撞的方法要求

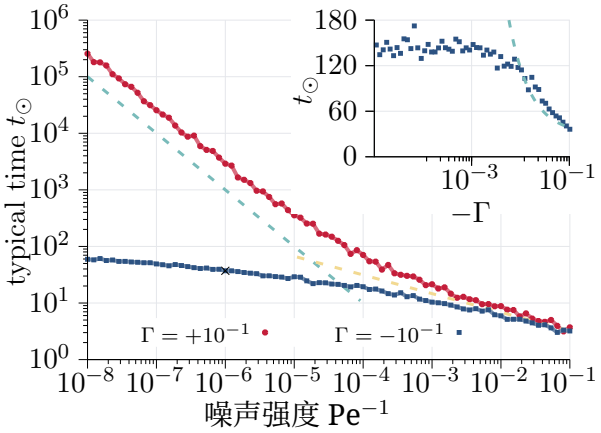


图4. 典型通过时间。为避免计算平均时间的成本，我们考虑一次实现：粒子从同一位置出发，且具有相同的取向。要计算实际的平均通过时间，则需要考虑终点圆内所有可能的终点，以及噪声的所有实现。由于时间较长，样本间涨落相对较小，因此这可以很好地反映通过时间的标度。分析预测的标度行为（虚线）得到了重现：对于对齐粒子且噪声较小的情况（耦合占主导，青绿色虚线），我们看到衰减形式为 $1/\mathrm{Pe}^{-1}$；而在噪声较大（占主导）时，对齐耦合和反对齐耦合均呈现缓慢的 $1/\mathrm{Pe}^{-1/3}$ 衰减（琥珀色虚线）。在反对齐的情况下，耦合占主导的区域（噪声较小）中，通过时间对噪声强度的依赖较弱。相反，它与耦合强度成反比（插图）。该截线在耦合轴上的位置由主图中的一个小黑色十字标示。

一种无序态。有序态具有几乎固定的相互作用拓扑 [56]，此时碰撞已不再有合理的定义。在图5中，我们因此将粒子初始化为空间均匀分布，取向则从双圆锥分布中抽取，这样只会激发偶模。极性模与所有平均场相互作用项耦合，因此始终为零，而向列模是剩余模态中最慢的一个。我们采用 $M = 0.1$，$\mathrm{Pe}^{-1} = 0.01$，以及$|\gamma| = 0.01$，它深处于噪声主导区，$|\gamma| \ll \mathrm{Pe}^{-1/3}$。需要指出的是，我们处于极性有序的平均场阈值之上，因此预期在长时间极限下会看到强烈的平均场耦合；但数值结果显示，在相对较短的模拟时间窗内，极性模始终足够小。

对于平均强度相同的加性噪声，$\mathrm{Pe}^{-1}M$下，平均场理论与模拟高度吻合。对于门控噪声，弛豫取决于 γ的符号。弗拉索夫理论或朗道理论都无法描述这种依赖，即便包含裸扩散项也是如此：对于这一初始条件，平均场项为零，而朗道项关于 γ是偶函数。在所考虑的阶数下，关于 γ 为奇函数的贡献只有交叉项 X 和Y，因为相互作用的高阶项受到 γ^2的抑制；而加性噪声不会出现这种分裂。该理论ˆ ˆ还预测了分裂的方向：在 X_2 和 Y_2 中，ˆp_0ˆp_2 的系数均为负，因此向列模在对齐相互作用下比在反对齐相互作用下弛豫得更快，与观察结果一致。

此外，门控噪声对应的两条曲线都比加性噪声对应的曲线弛豫得更慢。这种差异关于 γ 是偶函数，不能归因于朗道项，因为两种噪声的朗道项相同。这与我们忽略的$\mathcal{O}(\mathrm{Pe}^{-2}M)$阶贡献相符；在这些贡献中，噪声诱导的对关联会反馈到噪声项中。在 $|\gamma| = \mathrm{Pe}^{-1}$下，这些贡献与 X 和 Y同阶，并且会像 Y一样受到较长碰撞持续时间的增强。从物理上说，邻居数量会发生波动，因此作用于给定粒子的门控噪声具有间歇性，与平均强度相同的噪声相比，这会减缓模态衰减。原则上，我们无法排除 γ中的高阶项，例如$\mathcal{O}(M\gamma^3)$项，但我们强烈认为，这些项与此处考察的相对较短时间尺度无关。

除了主导对数项外，定量比较还需要角积分的正则部分，以及阶数为 $\mathcal{O}(\mathrm{Pe}^{-2}M$ 的偶次贡献。前者取决于超出其小角渐近范围的经过时间，参见图 3；以实测经过时间为输入，可通过数值求积获得。后者则需要对 Pe^{-1} 作二阶展开。两者都可行，但代价相当高，因此本文不作探讨。本例旨在说明，该方案适用于碰撞持续时间确实具有奇异性的碰撞问题，并展示如何处理由此产生的奇异性，而非为这一特定模型提供定量预测。

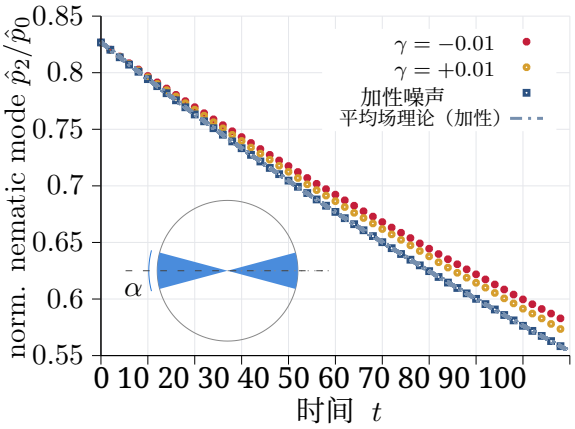


图5。对于 $M = 0.1$、$\mathrm{Pe}^{-1} = 0.01$ 和 $\gamma = \pm 0.01$，归一化向列模 $\hat{p}_2/\hat{p}_0$ 随时间的变化：来自基于智能体的模拟（符号），采用随机 Heun 格式，时间步长为 $\Delta t = 0.005$。所使用的参数值使该模拟处于噪声主导的状态。归一化使其能够与积分得到的模方程直接比较。对于强度为 $\mathrm{Pe}^{-1}M$ 的加性噪声，平均场理论（实线）与模拟结果高度吻合。对于门控噪声，弛豫过程取决于 γ 的符号，这是交叉项 X 和 Y 存在的标志；两条曲线的弛豫速度都比加性噪声情况下更慢，详见正文。插图：初始条件。粒子在空间上均匀分布，其取向从围绕 x-轴、张角为 $\alpha = \pi/6$ 的双圆锥中抽取。这样只激发偶模的实部，而极性模在整个过程中都为零。

C. 流体动力学含义

对齐型活性物质的流体动力学理论，要么从微观模型推导而来（大多采用平均场层次），要么根据对称性提出，其系数也可能通过现象学碰撞规则获得，如玻尔兹曼–金兹堡–朗道方法 [38–41]。上文发现的奇异贡献揭示了这两种路径之间的差距。对称性允许这些贡献存在，但平均场理论和采用确定性碰撞积分的朗道理论都不包含它们。其系数关于模型参数呈非解析性，取决于噪声是在自由飞行期间还是相互作用期间起作用；对于门控噪声，系数还会随对齐方向改变符号。这类系数既无法凭空猜出，也无法通过瞬时噪声碰撞规则获得，因为后者没有碰撞持续时间。它们只能通过对碰撞期间噪声的系统处理推导出来。下文将展示，这些贡献具有共同的结构 $\partial_\vartheta^2(p_1^2)$，并相当于一种依赖取向的有效噪声强度。

这种共同结构源于奇异贡献来自近乎平行的粒子对。对于门控噪声，Y 中的正则化碰撞持续时间会将角积分局域化在 $\Delta = 0$ 处，精确到主导对数阶，参见第F节，

$$\int \mathrm{d}\vartheta_2 \, \frac{4\,G(\vartheta_1,\vartheta_2)}{3\sqrt{\sin^2(\Delta/2)+\delta^2}} = \frac{16}{3}|\log\delta|\,G(\vartheta_1,\vartheta_1) + \mathcal{O}(\delta^0) \tag{31}$$

对于任意光滑函数 G。当 $\vartheta_2 = \vartheta_1$ 时，成对源项化简为一个局域表达式，

$$\mathsf{L}_{12}^{(2)}\, p_1(\vartheta_1,t)p_1(\vartheta_2,t)\big|_{\vartheta_2=\vartheta_1} = -2F'(0)\,p_1(\vartheta_1,t)^2, \tag{32}$$

其中 $F\ \Delta$ $F\ \Delta = \Delta$ $F'\ 0 = 1$ 13 $Y = (\,)$ 是对齐力矩，$(\,)\sin$，且对于模型方程 $(\,)$，$\frac{32}{3}F\ \ 0\,|\ \ \delta|\,\partial_\vartheta^2(p_1^2) + \ \ \delta^0$ 12 $(\,)$。因此，$\prime(\,)\log\mathcal{O}(\,)$，而方程 $(\,)$ 中的噪声项合并为

$$\mathrm{Pe}^{-1}M\,\partial_\vartheta^2\Big\{\Big(1+\frac{32}{3}\gamma F'(0)|\log\delta|\,p_1(\vartheta,t)\Big)\,p_1(\vartheta,t)\Big\}, \tag{33}$$

直到阶数为 $\mathcal{O}(\gamma M\mathrm{Pe}^{-1})$ 的常规贡献。有效噪声强度因此取决于取向。对齐相互作用会在近乎平行的粒子之间建立正相关，使它们长时间保持接触。因此，取向更集中的粒子平均而言拥有更多邻居，也会受到更多门控噪声的影响。对于反对齐相互作用，效果则相反。对于自由飞行噪声，j_3（第 IIIA 节）中的奇异部分源于相同的近乎平行粒子对，且具有相同的结构，其系数为$\mathcal{O}(\gamma^2 M\mathrm{Pe}^{-2/3})$，并取决于正则化的具体细节。

这种结构具有普遍性。局域于 $\Delta = 0$ 的贡献在取向上是局域的，且关于 p_1 为二次形式。粒子数守恒要求其形式为 $\partial_\vartheta J$；对于非手性相互作用，由于对称性$\vartheta \to -\vartheta$，电流 $J \propto p_1^2$ 被排除，因此 $J \propto \partial_\vartheta(p_1^2)$ 是最低阶形式。

就这些模而言，式（33）贡献了 $\propto n^2 \sum_k \hat{} p_{n-k} \hat{} p_k$。对于极性模，项 $2\hat{} p_0 \hat{} p_1$ 是对转动扩散的取向依赖修正，它在相对阶 $\mathcal{O}(\gamma|\log\delta|)$ 上移动有序-无序阈值。项 $2\hat{} p_{-1} \hat{} p_2$ 是极性模与向列相模之间的耦合；对向列相模进行绝热消去后，该项控制极性有序的饱和。更高阶模的方程中也会出现相应项。空间梯度在此尚未考虑，它们将产生更多此类项。

IV. 讨论

总之，我们通过对含噪自由传播子进行戴森展开，引入了一种系统方案，将朗道理论作为适用范围最广的动力学理论，从平均场方法推广到随机动力学。噪声以噪声算符与时间传播的关联源之对易子的形式进入碰撞积分。当相互作用核和相互作用几何都不依赖于受噪自由度时，该项为零。我们最重要的结果是，采用确定性碰撞积分以及来自福克–普朗克方程的标准扩散项的朴素处理确实给出了正确的领先阶。因此，我们能够为文献中定量工作的研究方法 [21–25]建立坚实的理论基础。然而，我们发现这实际上是关于碰撞时间的展开，因此，只有当这些时间有界时，该展开才是解析的。在活性物质的标准主力模型——具有取向相互作用的自驱动粒子——中，情况并非如此，并会出现 $\mathcal{O}(\gamma^2 M \mathrm{Pe}^{-2/3})$ 阶的非解析项。这些项以及 $\mathcal{O}(\gamma^2 M \mathrm{Pe}^{-1})$ 阶的常规有限部分，对于基于智能体的模拟而言都小到实际上无法分辨。不过，这很可能是模型特有的现象；我们可以设想，在特定应用中，这些高阶项会变得重要。在降低复杂度方面，我们发现，尽管能够将碰撞积分中新噪声修正的各个贡献识别出来，并赋予相对清晰的解释，但它们的阶数都相近，且彼此存在部分抵消。因此，无法将噪声效应简单归结为相互作用的展宽，也不能将其纳入有效碰撞时间。我们还考虑了只在相互作用期间起作用的噪声，并将其称为门控噪声，以区别于第一部分中的自由飞行噪声。在这种情况下，我们发现，噪声本身的限制与相互作用会诱导对关联；在单粒子层面上，这些对关联导致两个交叉项：相互作用的噪声修正和噪声的相互作用修正。尽管二者看似相似，但后者再次表现出非解析性。在这里，我们对噪声诱导的奇异摄动正则化进行了显式分析，并推导出对数修正。我们发现，这两个新项关于耦合强度均为奇函数，由此预测：即使通过选择初始条件抑制了平均场通道，弛豫行为仍会依赖符号。在基于智能体的模拟中也发现了这一点。由于 $\mathcal{O}(\mathrm{Pe}^{-2}M)$ 阶的贡献会造成定量比较受阻，这些贡献同样会受到对数增强，但关于 γ为偶函数，因此不会影响符号依赖性。我们没有计算这些项，因为我们的目标是获得一般性认识，而非实现定量一致性。此外，为了减少项的数量，并且由于我们系统地以碰撞相互作用为基础，而这更有利于无序相，我们主要将分析限制在空间均匀态。

本工作的一个更深层含义是提醒人们保持谨慎。我们研究了在这一背景下可以想象的、可能最简单的模型：具有度量有界有限程相互作用、白高斯噪声，以及高度有利的自由度结构，但即便如此，最终仍会得到形式上奇异的非解析项。这些项非常反直觉，无法从运动方程中显而易见地看出，在大多数对称性论证中也并不存在。因此，唯象理论很可能不会意识到这些陷阱。基于对称性和直觉对噪声重整化碰撞规则进行有效建模，极有可能遗漏由这些非平凡项诱导的物理效应，因为这类建模从未将它们纳入其中。此外，本工作也严肃提醒我们，在统计物理学的动力学方法中，碰撞时间 [19]的重要性不容忽视。有效瞬时规则永远无法再现这些非解析项。因此，至少在具有相同推进速度的更广泛 Vicsek 类模型中，预计也会出现类似发现。正如我们此前在玻尔兹曼理论中处理类似非解析行为时所展示的那样 [19], ，引入一种正则化的淬火速度无序可以消除这些非解析项。我们看到，噪声的来源至关重要；噪声的重要性取决于它何时发挥作用（在我们的情形中，是自由飞行阶段还是门控阶段）。据我们所知，这一建模决策的重要性迄今尚未得到应有的认识。

在这项工作中，我们关注的是一般性论述以及对理论结构的理解，而非作出定量预测。对于定量预测，我们主张采用半解析方法：将含噪相互作用的碰撞时间经验数据作为动力学理论的额外输入。从某种意义上说，这可以视为动力学上的类比：将静态结构因子用作位阻相互作用的闭合条件 [23]。另一种思路同样受到位阻相互作用的处理方式启发 [28], ：或许可以在具有发散时间的相互作用区域（在我们的情形中为近乎平行的粒子对）与其余区域之间采用匹配渐近展开。

有若干值得在未来研究中探讨的扩展方向。首先，我们将分析局限于空间均匀态。存在空间梯度时，自由传播子也会作用于位置，从而产生噪声与梯度的耦合。这些耦合是建立严格意义上的流体动力学方程所必需的，例如用于描述密度带形成。其次，该方案只要求自由动力学生成元可分解为确定性部分和一个小扰动。因此，它也适用于其他随机性的来源，例如翻滚运动、速度或手性的涨落，或通过辅助变量描述的有色噪声。对于手性粒子 [57, 58], , 对称性还允许出现漂移项 $\propto \partial_\vartheta(p_1^2)$，其出现与否将很有意思。第三，在活性物质的实验实现中，例如振动颗粒或机器人群体，噪声往往由接触产生，因此门控噪声是一种自然的模型。由于位阻排斥会限制碰撞持续时间，我们预计噪声与相互作用的交叉项（关于耦合为奇）出现在 $\mathcal{O}(\gamma M \mathrm{Pe}^{-1})$ 阶，但没有对数增强。最后，该方案也适用于非加和相互作用 [59], ，因为噪声仅通过自由传播子进入。

致谢

H-H. B 获得　　德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助 – 58710896　　3.

[1] F. Schweitzer，《布朗智能体与活性粒子：自然科学和社会科学中的集体动力学》（施普林格，2003）。[2] E. Bonabeau，基于智能体的建模：模拟人类系统的方法与技术，《美国国家科学院院刊》99，7280（2002）。[3] C. Castellano、S. Fortunato 和 V. Loreto，社会动力学的统计物理学，《现代物理评论》81，591（2009）。[4] S. A. M. Loos 和 S. H. L. Klapp，非互易相互作用引发的不可逆性、热流与信息流，《新物理学杂志》22，123051（2020）。[5] E. Fodor、R. L. Jack 和 M. E. Cates，活性物质中的不可逆性与偏置系综：随机热力学带来的启示，《凝聚态物理年度评论》13，215（2022）。[6] R. Balescu，《统计动力学：非平衡物质》（世界科学出版社，1997）。[7] H. J. Kreuzer，《非平衡热力学及其统计基础》（克拉伦登出版社，英国牛津，1981）。[8] C. Cercignani、R. Illner 和 M. Pulvirenti，稀薄气体的数学理论（施普林格科学与商业媒体，1993）。[9] C. Villani，碰撞动理学理论中的数学主题综述，《数学流体动力学手册》1，3（2002）。[10] C. Cercignani、U. Gerasimenko 和 D. Y. Petrina，《多粒子动力学与动理学方程》，第420卷（施普林格科学与商业媒体，2012）。[11] L. Pareschi 和 G. Toscani，《相互作用的多智能体系统：动理学方程与蒙特卡罗方法》（牛津大学出版社，牛津，2013）。[12] J. R. Dorfman、H. van Beijeren 和 T. R. Kirkpatrick，《当代物质动理学理论》（剑桥大学出版社，2021）。[13] R. S. Negi、R. G. Winkler 和 G. Gompper，具有视觉感知的活性布朗粒子的涌现集体行为，《软物质》18，6167（2022）。[14] S. A. M. Loos、S. H. L. Klapp 和 T. Martynec，具有视锥相互作用的非互易XY模型中的长程有序与定向缺陷传播，《物理评论快报》130，198301（2023）。[15] R. S. Negi、R. G. Winkler 和 G. Gompper，具有速度对齐和视觉感知的自转向活性粒子的集体行为，《物理评论研究》6，013118（2024）。[16] S. Das、M. Ciarchi、Z. Zhou、J. Yan、J. Zhang 和 R. Alert，转身避让实现群集，《物理评论X》14，031008（2024）。[17] J. Shea 和 H. Stark，内聚对齐粒子的涌现集体行为，《欧洲物理学杂志E》48，22（2025）。[18] Z.-F. Huang、M. te Vrugt、J. M. Martins、R. Wittkowski 和 H. L¨owen，由单组分非互易性涌现的活性图案形成（2025），arXiv:2404.10093 [cond-mat.soft]。[19] T. Ihle、H-H. Boltz、R. K¨ursten 和 B. Lindner，Kuramoto-Vicsek模型的渐近精确散射理论（2026），部分结果以较短形式发表于参考文献60，arXiv:2303.03357 [cond-mat.stat-mech]。[20] L. D. Landau，库仑相互作用情形下的动力学方程（德文题名：Die kinetische Gleichung f¨ur den Fall Coulombscher Wechselwirkung），《苏联物理学杂志》（1936），德文，英文译文见参考文献61。[21] A. Patelli，干燥对齐活性模型的朗道动力学方程，《统计力学杂志》2021，033210（2021）。[22] H-H. Boltz、B. Kohler 和 T. Ihle，具有向列对齐的自驱动粒子动力学理论，《熵》26，1054（2024）。[23] R. Soto、M. Pinto 和 R. Brito，活性布朗粒子运动性诱导相分离的动力学理论，《物理评论快报》132，208301（2024）。[24] M. Pinto-Goldberg 和 R. Soto，高持久性区域中活性布朗粒子的流体动力学方程，《物理评论E》112，065413（2025）。

[25] M. Pinto-Goldberg 和 R. Soto，活性布朗粒子场方程的微观推导（2026），arXiv:2608.11184 [cond-mat.soft]。[26] A. Malevanets 和 R. Kapral，溶剂动力学的介观模型，《化学物理学杂志》110，8605（1999）；T. Ihle 和 D. M. Kroll，随机旋转动力学：一种用于流体流动的伽利略不变介观模型，《物理评论E》63，020201(R)（2001）。[27] T. Ihle，群集运动动力学理论：流体动力学方程的推导，《物理评论E》83，030901（2011）。[28] M. Bruna、M. Burger、A. Esposito 和 S. M. Schulz，相互作用的活性布朗粒子系统中的相分离，《工业与应用数学学会应用数学杂志》82，1635（2022）；E. Kalz、A. Sharma 和 R. Metzler，活性手性硬圆盘的场论：位阻相互作用的第一性原理方法，《物理学杂志A》57，265002（2024）。[29] M. I. Freidlin 和 A. D. Wentzell，《动力系统的随机扰动》，M. Artin 等编，《数学科学基础丛书》第260卷（施普林格美国，纽约，纽约州，1984）。[30] ´E. Fodor、C. Nardini、M. E. Cates、J. Tailleur、P. Visco 和 F. van Wijland，活性物质离平衡态有多远？《物理评论快报》117，038103（2016）。[31] M. te Vrugt、J. Bickmann 和 R. Wittkowski，如何推导活性布朗粒子的预测性场论：逐步教程，《凝聚态物理杂志》35，313001（2023）。[32] H-H. Boltz 和 T. Ihle，活性系统中的非平衡稳态：亥姆霍兹–霍奇视角，《熵》27，525（2025）。[33] D. Hilbert，《数学问题》，《哥廷根皇家科学学会通报：数学与物理学部》1900，253（1900），德文，英文译文见参考文献62。¨O. E. Lanford，大型经典系统的时间演化，载于《动力系统：理论与应用：1974年巴特尔西雅图研讨会》，J. Moser 编（施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，1975），第1–111页。[34] I. Gallagher、L. Saint-Raymond 和 B. Texier，从牛顿到玻尔兹曼：硬球与短程势（欧洲数学学会，苏黎世，2013）；T. Bodineau、I. Gallagher 和 L. Saint-Raymond，作为确定性硬球系统极限的布朗运动，《数学创刊》203，493（2016）。[35] Y. Deng、Z. Hani 和 X. Ma，从硬球动力学长期推导玻尔兹曼方程（2025），arXiv:2408.07818 [math.AP]；希尔伯特第六问题：通过玻尔兹曼动力学理论推导流体方程（2025），arXiv:2503.01800 [math.AP]。[37] H. Chat´e，干燥对齐型稀薄活性物质，《凝聚态物理年度评论》11，189（2020）。[38] E. Bertin、M. Droz 和 G. Gr´egoire，自驱动粒子的玻尔兹曼与流体动力学描述，《物理评论E》74，022101（2006）。[39] E. Bertin、M. Droz 和 G. Gr´egoire，自驱动粒子的流体动力学方程：微观推导与稳定性分析，《物理学杂志A》42，445001（2009）。[40] E. Bertin、H. Chat´e、F. Ginelli、S. Mishra、A. Peshkov 和 S. Ramaswamy，涨落活性向列相的介观理论，《新物理学杂志》15，085032（2013）。[41] A. Peshkov、E. Bertin、F. Ginelli 和 H. Chat´e，用于一般Vicsek类模型连续描述的玻尔兹曼–金兹堡–朗道方法，《欧洲物理学杂志专题》223，1315（2014）。[42] J. J. Sakurai 和 J. Napolitano，《现代量子力学》第3版（剑桥大学出版社，剑桥，2020）。[43] R. Zwanzig，《非平衡统计力学》（牛津大学出版社，2001）。[44] C. Gardiner，《随机方法》第4卷（施普林格柏林海德堡，2009）。[45] F. Peruani、A. Deutsch 和 M. B¨ar，一种描述通过速度对齐机制相互作用的自驱动粒子的平均场理论，《欧洲物理学杂志专题》157，111（2008）。[46] M. Fruchart、R. Hanai、P. B. Littlewood 和 V. Vitelli，非互易相变，《自然》592，363（2021）。[47] M. Fruchart 和 V. Vitelli，非互易多体物理（2026），arXiv:2602.11111 [cond-mat.stat-mech]。[48] J. Mihatsch 和 T. Ihle，非互易反对齐活性混合物：精确玻尔兹曼碰撞算符的推导，《物理评论E》112，054110（2025）。[49] 相比之下，玻尔兹曼方程对所有阶都成立，γ 但仅具有渐近性质。M若要在其中纳入噪声，就需要针对固定的噪声实现求解碰撞问题，然后再对噪声取平均。[50] A. Mart´ın-G´omez、D. Levis、A. D´ıaz-Guilera 和 I. Pagonabarraga，具有极性对齐的活性布朗粒子的集体运动，《软物质》14，2610（2018）。[51] Y. Zhao、C. Huepe 和 P. Romanczuk，具有无度量极性对齐的活性粒子涌现出的类度量状态，《物理评论快报》134，058201（2025）。[52] F. Di Trapani、T. Franosch 和 M. Caraglio，吸收边界圆盘中的活性布朗粒子，《物理评论E》107，064123（2023）。[53] S. A. Iyaniwura 和 Z. Peng，二维活性布朗粒子的平均首次通过时间，《新物理学杂志》27，104401（2025）。[54] T. Odijk，受限或缠结刚性聚合物的统计与动力学，《大分子》16，1340（1983）。[55] T. W. Burkhardt，半平面中的半柔性聚合物与布朗曲线积分的统计，《物理学杂志A：数学与一般》26，L1157（1993）。[56] T. Mora、A. M. Walczak、L. Del Castello、F. Ginelli、S. Melillo、L. Parisi、M. Viale、A. Cavagna 和 I. Giardina，鸟群中的局域平衡，《自然·物理》12，1153（2016）。[57] T. Markovich、E. Tjhung 和 M. E. Cates，手性活性物质：微观“力矩偶极子”不止一种流体动力学描述，《新物理学杂志》21，112001（2019）。[58] B. Liebchen 和 D. Levis，手性活性物质，《欧洲物理快报》139，67001（2022）。

[59] A. Bera、H.-H. Boltz 和 T. Ihle，《超越可加性：活性物质中多体相互作用的平均场动理学理论》（2026），已提交发表。[60] T. Ihle、H-H. Boltz、R. K¨ursten 和 B. Lindner，《活性玻尔兹曼方程：从稀薄碰撞到精确动理学理论》（2026），arXiv:2303.03354 [cond-mat.stat-mech]。[61] D. ter Haar 编，《L. D. Landau 论文集》（Gordon and Breech，Science Publishers，1965）。[62] D. Hilbert，《数学问题》，《美国数学会通报》8，437（1902）。[63] J. de Boer 和 G. E. Uhlenbeck 编，《统计物理学研究》第1卷（North Holland，1962）。[64] M. Ballerini、N. Cabibbo、R. Candelier、A. Cavagna、E. Cisbani、I. Giardina、V. Lecomte、A. Orlandi、G. Parisi、A. Pro- caccini 等，《支配动物集体行为的相互作用取决于拓扑距离而非度量距离：一项实地研究的证据》，《美国国家科学院院刊》105，1232（2008）。[65] F. Ginelli 和 H. Chat´e，《无度量相互作用在群集现象中的重要性》，《物理评论快报》105，168103（2010）。[66] Y.-L. Chou、R. Wolfe 和 T. Ihle，《具有无度量相互作用的自驱动粒子系统的动力学理论》，《物理评论 E》86，021120（2012）。[67] P. Degond 和 M. Pulvirenti，《拓扑相互作用的混沌传播》，《应用概率年刊》29，2594（2019）。[68] R. K¨ursten，《相互作用的活性布朗粒子聚集不稳定性的普适标度》（），arXiv: . cond-mat.soft 。[69] H. Risken，《福克-普朗克方程》（施普林格，1989）。[70] H. D. Ursell，《非理想气体吉布斯相积分的求值》，《剑桥哲学学会数学会刊》23，685–697（1927）。[71] J. E. Mayer 和 M. Goeppert Mayer，《统计力学》（John Wiley & Sons，1940）。[72] J. Yvon，《流体统计理论与状态方程》（the statistical theory of fluids and the equation of state），载于《科学与工业纪事》203卷《力学理论》，Y. Rocard 编（Hermann & Cie，1935），法文。[73] N. N. Bogoliubov，《统计物理学中的动力学理论问题》（Federal Publishing House for Technical-Theoretical Literature，1946），俄文版；英文译本见参考文献63。[74] M. Born 和 H. S. Green，《液体的一般动力学理论 I：分子分布函数》，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》188，10 （1946）。[75] J. G. Kirkwood，《输运过程的统计力学理论 I：一般理论》，《化学物理学杂志》14，180（1946）。[76] F. J. Dyson，《Tomonaga、Schwinger 和 Feynman 的辐射理论》，《物理评论》75，486（1949）。[77] R. P. Feynman，《一种用于量子电动力学的算符演算》，《物理评论》84，108（1951）。[78] L. V. Ahlfors，《复分析》（McGraw-Hill，纽约，1979）。[79] J. Hadamard，《线性偏微分方程中柯西问题讲义》（耶鲁大学出版社，纽黑文，1923）。[80] I. M. Gel'fand 和 G. E. Shilov，《广义函数》第1卷：性质与运算（Academic Press，纽约，1964）。[81] DLMF，NIST数学函数数字图书馆，https://dlmf.nist.gov/，2026年9月15日发布的1.2.8版（2026），由 F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。

附录 A：朗道动力学理论

在本附录中，我们概述方程（3a）、（3b）和（4）的标准推导，以及模型类别方程（1）所依据的假设。详情请参阅文献 6、7、22 。

1. 模型类别

我们仅考虑有界相互作用。这是朗道方法固有的局限，因为该方法以微扰方式处理相互作用。硬核排斥等奇异相互作用无法以微扰方式处理，而需要完整的玻尔兹曼理论 [6, 12, 19]。示性函数方程（2）将我们考虑的范围限制为具有固定作用范围的相互作用 R。这排除了两类值得注意的模型：长程相互作用（例如静电力），它们在动力学理论中通过伦纳德–巴列斯库方程处理 [6], ；以及无度量模型 [64–67], 在这类模型中，邻接关系由拓扑决定。尽管后一类模型的相互作用符合碰撞范式，但由于确定相互作用的起始和终止更为复杂，因此不在本文讨论范围内 [66, 68]。同样，我们不显式考虑非加性或真正的多粒子相互作用，但该方案仍可推广 [59]，因为噪声仅通过自由传播子进入。

尺度参数 v_0 和 Γ 使量纲分析成为可能，同时假定其余场$\boldsymbol{v}_j$、 $\boldsymbol{F}_{jk}$ 均为一阶量。噪声强度的参数化方式类似：D 设定总体强度，而无量纲数 D_α 表示相对强度，其主要作用是允许某些自由度确定性地演化（对于某些 ν，$D_\nu = 0$ ）。采用单一的总体噪声强度只是为了简化表述，并非

该方法的根本限制。噪声为高斯白噪声，

$$\langle \boldsymbol{\eta}_j \rangle = 0, \qquad \langle (\boldsymbol{\eta}_j)_\alpha(t)(\boldsymbol{\eta}_k)_\beta(t')\rangle = \delta_{jk}\delta_{\alpha\beta}\delta(t-t'). \tag{A1}$$

Pe 的定义假设噪声作用于无量纲的内部自由度。对于位置噪声，相应的D_α 以 R^2为单位测量，因此重标度后的方程保持不变。

2. BBGKY层级

经过单位重标度，使得 $R = v_0 = 1$，标准随机微积分 [44, 69] 给出完整的 N粒子分布函数的福克–普朗克方程 P_N，它等价于朗之万方程，式（1），

$$\partial_t P_N(\{\boldsymbol{j}\}) = -\sum_{j=1}^{N}\left\{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{j}}\cdot(\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{j})P_N) + \gamma\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{j}}\cdot\left(\sum_{k=1,j\neq i}^{N} a_{jk}\boldsymbol{F}_{jk}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})P_N\right) - \mathrm{Pe}^{-1}\tilde{\Delta}_{\boldsymbol{j}}P_N\right\}, \tag{A2}$$

其中 $\tilde{\Delta}_{\boldsymbol{j}} = \sum_\alpha D_\alpha \partial^2_{j_\alpha}$ 是相对于属于粒子 j 的自由度进行适当加权的拉普拉斯算子。为提高可读性，本文及下文中省略的 P_N 参数在等式右侧与左侧相同。由于我们认为所有粒子都完全相同，大多数相关量，尤其是任何序参量，都应能化为对单粒子分布的积分。因此，我们通过对除前 k 个粒子的自由度以外的所有自由度积分，引入约化的 k 粒子分布函数，

$$p_k = \frac{N!}{(N-k)!}\left(\frac{1}{M}\right)^k \int P_N \prod_{j=k+1}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{j}. \tag{A3}$$

前置因子 $(1/M)^k$的选取使得对于均匀分布 P_N，所有 p_k均为 O(1) 量级。在自由情形下，$\gamma \equiv 0$，所有粒子彼此不相关（如果它们初始时不相关），且 k 粒子函数可分解为 $p_{k\mathrm{free}} = \prod_{i=1}^{k} p_1(\boldsymbol{i},\ t)$。因此，采用了以约化关联函数$g_k$ 为基础的乌瑟尔（或迈耶，或簇）展开 [70, 71]。关联函数 g_k 包含了关于 k粒子层级 p_k 的信息，而这些信息未包含在低阶的 p_j 和 g_j 中，其中 $j<k$。特别地，前三个关联函数为

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{1},t) &= g_1(\mathbf{1},t) \\ p_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) &= p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t) + g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) \\ p_3(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},t) &= p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t)p_1(\mathbf{3},t) + p_1(\mathbf{1},t)g_2(\mathbf{2},\mathbf{3},t) + \ldots + g_3(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},t) \end{aligned} \tag{A4}$$

其中省略号对应于两个指标置换项，形式为 $p_1 g_2$。边缘化导出了教科书中的 [6–10, 12]玻恩–博戈留博夫–格林–柯克伍德–伊冯（BBGKY）层级方程 [72–75]，，其中 k 粒子函数的演化取决于（$k+1$）粒子函数。在朗道动力学理论中，对 γ 进行系统展开 [6, 20–22]。其结果之一是关联函数按 $g_k \sim \gamma^{k-1}$缩放，从而自然地可以在固定的 γ阶截断层级方程以闭合方程组。取到 $\mathcal{O}(\gamma^2$阶，可得方程（3a）和（3b）。

在式（3b）中，我们将示性函数 $a_{1\,2}$与二体刘维尔算子 $\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}$ 分开处理，因为这有助于进行计算。这一处理预设 $\boldsymbol{F}_{1\,2}$ 在 $a_{1\,2}$ 所依赖的自由度方向上没有分量，正如第 III节所考虑的对齐相互作用的情形。否则，会出现一个额外的项 $\propto \boldsymbol{F}_{1\,2}\cdot\boldsymbol{\nabla}a_{1\,2}$，其支撑集位于相互作用区域的边界上。对于互易相互作用，$\boldsymbol{F}_{2\,1} = -\boldsymbol{F}_{1\,2}$，二体算子可简化为 $\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2} = (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{2}})\cdot\boldsymbol{F}_{1\,2}$。

3. 对关联

方程（3b）允许直接形式地求得从属解，即通过常数变易法（杜阿梅尔原理），确定 g_2 作为 $g_2[p_1]$ 的泛函，其中 $g_2[p_1]$ 是单粒子函数。

$$g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t) = \mathsf{U}_{1\,2}(t_0,t,\mathrm{Pe}^{-1})g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t_0) + \mathsf{U}_{1\,2}(t_0,t,\mathrm{Pe}^{-1})\int_{t_0}^{t}\mathsf{U}^{-1}_{1\,2}(t_0,t',\mathrm{Pe}^{-1})Q(\mathbf{1},\mathbf{2},t')\,\mathrm{d}t', \tag{A5}$$

其中自由双粒子传播子

$$\mathsf{U}_{12}(t_0,t,\mathrm{Pe}^{-1})=\mathrm{e}^{(-\mathsf{F}_1-\mathsf{F}_2)(t-t_0)}=\mathrm{e}^{-\mathsf{F}_1(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathsf{F}_2(t-t_0)}, \tag{A6}$$

这里我们用到了不同粒子的自由传播子彼此对易这一性质。对时间演化作任何近似所产生的误差通常都会随着传播时间增长，因此需要合理选择 t_0，并确定该时刻的 g_2 值。在这里考虑的弱相互作用情形中，同一粒子对的连续两次碰撞之间通常会有较长的时间间隔。这自然引出了单侧分子混沌假设：在相互作用开始时，粒子被视为彼此不相关；对于有限的 R，这一时刻显然定义为 [6, 7, 22]。这与更常见的分子混沌假设形成对照，后者认为多粒子概率函数始终可以因子分解。完全忽略关联会导出平均场（或弗拉索夫）动力学，其精度达到 $\mathsf{O}(\gamma M)$ 阶。将 t_0 视为相互作用的开始时刻，单侧分子混沌可表示为 $g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t_0)=0$。利用传播子性质 $\mathsf{U}_{12}(t_0,t,\mathrm{Pe}^{-1})\mathsf{U}_{12}^{-1}(t_0,t',\mathrm{Pe}^{-1})=\mathsf{U}_{12}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})$，即可得到式（4）。

附录 B：碰撞积分的戴森展开

1. 一阶戴森展开

在确定性情形下，$\mathrm{Pe}^{-1}=0$，自由传播子沿自由轨迹移动参数，这些轨迹由对 $\partial_t\boldsymbol{i}=\boldsymbol{v}_i$积分得到，从而得到众所周知的性质 $\mathsf{U}(t',t)A(t')B(t')=A(t)B(t)$ 确定性传播子的性质 [43]。对于有限 Pe，这一性质不再成立。相反，我们按逆佩克莱数的一阶展开传播子，′。

$$\mathsf{U}_{12}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})=\mathsf{U}_{12}(t',t,0)-\mathrm{Pe}^{-1}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\mathsf{U}(s,t,0)\mathsf{N}\mathsf{U}(t',s,0), \tag{B1}$$

这将计算化简为确定性自由传播子的计算。为此，注意到 $\partial_t\mathsf{U}_{12}(t_0,t,\mathrm{Pe}^{-1})=-(\mathsf{F}_1+\mathsf{F}_2)\mathsf{U}_{12}(t_0,t,\mathrm{Pe}^{-1})$。当 $\mathsf{N}=\mathsf{N}_1+\mathsf{N}_2$，时，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\mathsf{U}_{12}(s,t,0)\mathsf{U}_{12}(t',s,\mathrm{Pe}^{-1})\}=-\mathrm{Pe}^{-1}\mathsf{U}_{12}(s,t,0)\mathsf{N}\mathsf{U}_{12}(t',s,\mathrm{Pe}^{-1}). \tag{B2}$$

对 s 从 t' 到 t 积分可得精确的 Dyson 方程 [76, 77]。将其右侧的完整传播子替换为确定性传播子，可得关于 Pe 的一阶方程（B1）$^{-1}$。相应地，逆传播子为

$$\mathsf{U}_{12}^{-1}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})=\mathsf{U}_{12}^{-1}(t',t,0)+\mathrm{Pe}^{-1}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\mathsf{U}^{-1}(t',s,0)\,\mathsf{N}\,\mathsf{U}^{-1}(s,t,0), \tag{B3}$$

其中，我们使用了 $\mathsf{U}(t',t,0)=\mathsf{U}(s,t,0)\mathsf{U}(t',s,0)$。将两个展开式代入 $\mathsf{U}_{12}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})\,A\,\mathsf{U}_{12}^{-1}(t',t,\mathrm{Pe}^{-1})$，并收集一阶项，得到式（6）。

2. 显式形式

将式（6）应用于式（5），并使用确定性反向演化 $\mathsf{U}_{12}^{-1}(s,t,0)\;p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t)=p_1(\mathbf{1},s)p_1(\mathbf{2},s)$，我们得到

$$\begin{aligned}
g_2(\mathbf{1},\mathbf{2},t)=&-\gamma\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,\{\mathsf{U}_{12}(t',t,0)a'_{12}\}\{\mathsf{U}_{12}(t',t,0)\mathsf{L}_{12}^{(2)}\}p_1(\mathbf{1},t)p_1(\mathbf{2},t)\\
&+\gamma\,\mathrm{Pe}^{-1}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\mathsf{U}(s,t,0)\mathsf{N}\{\mathsf{U}(t',s,0)a'_{12}\}\{\mathsf{U}(t',s,0)\mathsf{L}_{12}^{(2)}\}p_1(\mathbf{1},s)p_1(\mathbf{2},s)\\
&-\gamma\,\mathrm{Pe}^{-1}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\mathsf{U}(s,t,0)\{\mathsf{U}(t',s,0)a'_{12}\}\{\mathsf{U}(t',s,0)\mathsf{L}_{12}^{(2)}\}\,\mathsf{N}\,p_1(\mathbf{1},s)p_1(\mathbf{2},s).
\end{aligned} \tag{B4}$$

最后一行源于利用含噪自由传播子将 $p_1(t')$ 表示为 $p_1(t)$。这消除了碰撞期间单粒子函数的自由扩散，而自由扩散已经包含在它们从 t' 到 t的演化中。

3. 分解

从概念上讲， t_0 是碰撞的开始时间，而 $t > t_0$ 不能超过碰撞的结束时间。因此，所有量都是在碰撞期间进行评估的，人们会希望令 $\{\mathsf{U}_{1\,2}(t',t,0)a'_{1\,2}\} = \{\mathsf{U}(t',s,0)a'_{1\,2}\} = 1$。前者没有问题，但后者并非如此，因为 N 作用于传播后的指示函数，而其导数是相关的。在后续积分中需要格外谨慎，因为 Heaviside函数的导数支撑在时间积分的边界上。不过，对于相空间坐标**2**而言，这些是内部点。这些导数产生了支撑在相互作用区域边界上的 δ 项和 δ' 项。还注意到相互作用和噪声都不显含时间，我们得到

$$\mathrm{J}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{coll}} = \gamma^2 M\ \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \boldsymbol{F}_{1\,2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \{\mathsf{U}(t',t,0)\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\} p_1(\mathbf{1},t) p_1(\mathbf{2},t) \tag{B5a}$$

$$\mathrm{J}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{coll}} = -\gamma^2 M\ \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{1}} \cdot \int \mathrm{d}\mathbf{2}\, a_{1\,2} \boldsymbol{F}_{1\,2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t'}^{t} \mathrm{d}s\, \{j_1 - 2j_2 + j_3\} \tag{B5b}$$

$$j_1 = \mathsf{U}(s,t,0)\Big(\mathsf{N}\{\mathsf{U}(t',s,0)\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\} - \{\mathsf{U}(t',s,0)\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\}\,\mathsf{N}\Big) p_1(\mathbf{1},s) p_1(\mathbf{2},s) \tag{B5c}$$

$$j_2 = \mathsf{U}(s,t,0) \sum_{i=1,2;\alpha} D_\alpha \{\partial_{i_\alpha} \mathsf{U}(t',s,0) a'_{1\,2}\} \partial_{i_\alpha} \{\mathsf{U}(t',s,0)\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\} p_1(\mathbf{1},s) p_1(\mathbf{2},s) \tag{B5d}$$

$$j_3 = \mathsf{U}(s,t,0)\{\mathsf{N}\mathsf{U}(t',s,0) a'_{1\,2}\}\{\mathsf{U}(t',s,0)\mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\} p_1(\mathbf{1},s) p_1(\mathbf{2},s). \tag{B5e}$$

j_1 结合了两项：噪声作用于传播后的源项，以及噪声仅作用于单粒子函数，这两项来自方程（B4）的最后一行。由于两项也会产生相同的角积分，我们在全文中将它们一并处理。最终，拆分为 j_1、 j_2和 j_3 只是形式上的；尤其是在使用傅里叶表示时，可以直接采用方程（8）的对易子形式。

附录C：Dyson-Landau碰撞积分的求值

在本附录中，我们针对具有空间均匀单粒子函数的方程（13）模型，计算 $\mathrm{J}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{coll}}$（方程（B5））中的三个贡献项 j_1、 j_2和 j_3 。我们使用第 III节引入的角傅里叶模 $\hat{}p_m$ 。这些模不仅自然地表征取向有序，也是噪声算符的本征模。我们将 $K(\vartheta_1、\ \vartheta_2、\ t) = \mathsf{L}^{(2)}_{1\,2}\, p_1(\vartheta_1、\ t) p_1(\vartheta_2、\ t)$记作，其傅里叶系数为

$$\hat{K}_{mk} = \int \frac{\mathrm{d}\vartheta_1}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}\vartheta_2}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\vartheta_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vartheta_2} K(\vartheta_1,\vartheta_2,t) = \frac{1}{2}(m-k)\big(\hat{p}_{m+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t) - \hat{p}_{m-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big). \tag{C1}$$

对于均匀的 p_1，自由传播不会影响模态的时间参数。我们进一步写成 $\tau_s = s - t'$以及 $\tau = t - t'$。根据式（15），传播后的指示函数关于角度的导数为

$$\partial_{\vartheta_i} \mathsf{U}(t',s,0)\, a'_{1\,2} = \tau_s\, (\partial_{\vartheta_i} \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}) \cdot (\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})\, \delta\big(1 - \|\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\|\big), \tag{C2}$$

$$\begin{aligned} \partial^2_{\vartheta_i} \mathsf{U}(t',s,0)\, a'_{1\,2} = {} & \Big\{\tau_s (\partial^2_{\vartheta_i} \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}) \cdot (\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}) - \tau_s^2 + \big(\tau_s (\partial_{\vartheta_i} \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}) \cdot (\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})\big)^2 \Big\}\, \delta\big(1 - \|\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\|\big) \\ & + \frac{\big\{\tau_s (\partial_{\vartheta_i} \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}) \cdot (\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})\big\}^2}{\|\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\|^2}\, \delta'\big(1 - \|\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\|\big). \end{aligned} \tag{C3}$$

从 s到 t的后续传播将 $\boldsymbol{r}_{12} - \tau_s \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$移位至 $\boldsymbol{r}_{12} - \tau \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$，而前因子 τ_s不受影响。因此，这些前因子构成了被积函数对 s的唯一依赖，并且 $\int_{t'}^{t} \mathrm{d}s\, \tau_s^n = \tau^{n+1}/(n+1)$。

1. 相互作用项 j_1

我们从 j_1开始，它描述了噪声对相互作用核的展宽。这里，示性函数不涉及导数，因此时间演化可以像在确定性Landau情形中那样求得，而空间积分只给出碰撞持续时间的二阶矩，见第 D 节，

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\, a_{1\,2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t'}^{t} \mathrm{d}s\, 1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\, a_{1\,2}\, \frac{(t-t_0)^2}{2} = \frac{\pi}{2v_{\mathrm{rel}}^2} = \frac{\pi}{8\sin^2(\Delta/2)}. \tag{C4}$$

在傅里叶空间中，噪声算符是对角的，$\mathsf{N} \to m^2+k^2$，而 j_1 中的对易子可直接由 $\hat{} K_{mk}$ 得出。若将傅里叶变换记为 $\mathcal{F}$，使得 $\hat{} p_k = \mathcal{F}(p_1)_k$，则可得

$$\mathcal{F}\big([\mathsf{N},\mathsf{L}_{1\,2}^{(2)}]\,p_1 p_1\big)_{mk} = -(m-k)\big\{(m-k+1)\,\hat{p}_{m+1}\hat{p}_{k-1} + (m-k-1)\,\hat{p}_{m-1}\hat{p}_{k+1}\big\}. \tag{C5}$$

傅里叶变换后的碰撞积分贡献为

$$\hat{\mathrm{J}}^{\mathrm{D},1}_{\mathrm{coll,n}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta_1}\ \mathrm{J}^{\mathrm{D},1}_{\mathrm{coll}}\,\mathrm{d}\vartheta_1 \tag{C6}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{-2}M^{-1}\mathrm{Pe}\,\hat{\mathrm{J}}^{\mathrm{D},1}_{\mathrm{coll,n}} = &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta_1}\partial_{\vartheta_1}\!\int\!\mathrm{d}\vartheta_2\ \sin(\vartheta_2-\vartheta_1)\,\frac{\pi}{8\sin^2(\Delta/2)}\\ &\sum_{m,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vartheta_2}\,\big(-(m-k)\big)\big\{(m-k+1)\,\hat{p}_{m+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t) + (m-k-1)\,\hat{p}_{m-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big\}\end{aligned} \tag{C7}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta\!\int\!\mathrm{d}\Delta\sum_{m,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+k-n)\vartheta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\pi\sin\Delta}{8\sin^2(\Delta/2)}\\ &\quad (m-k)\big\{(m-k+1)\,\hat{p}_{m+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t) + (m-k-1)\,\hat{p}_{m-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big\}\end{aligned} \tag{C8}$$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{i}n\sum_k\int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\pi\sin\Delta}{8\sin^2(\Delta/2)}\,(n-2k)\\ &\quad \big\{(n-2k+1)\,\hat{p}_{n-k+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t) + (n-2k-1)\,\hat{p}_{n-k-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big\}\end{aligned} \tag{C9}$$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{i}n\sum_k \hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\pi\sin\Delta}{8\sin^2(\Delta/2)}\\ &\quad \big\{(n-2k-2)(n-2k-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta} + (n-2k+2)(n-2k+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta}\big\}\end{aligned} \tag{C10}$$

$$= \mathrm{i}n\sum_k \hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\pi\sin\Delta}{8\sin^2(\Delta/2)}\,\Big\{2\big((n-2k)^2+2\big)\cos\Delta - 6\mathrm{i}(n-2k)\sin\Delta\Big\}. \tag{C11}$$

因此还需计算两个积分，即

$$I_1 = \int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos\Delta}{\sin^2(\Delta/2)} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)(2-\delta_{k,1}-\delta_{k,-1}), \tag{C12}$$

$$I_2 = \int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin^2\Delta}{\sin^2(\Delta/2)} = 4\int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\cos^2(\Delta/2) = 2\int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}(1+\cos\Delta) = 2\pi(2\delta_{k,0}+\delta_{k,1}+\delta_{k,-1}). \tag{C13}$$

I_1 的被积函数在 $\Delta=0$处有一个奇奇异性，因此其柯西主值存在。详情见第F节。利用这些积分，我们得到

$$\begin{aligned}\gamma^{-2}M^{-1}\mathrm{Pe}\,\hat{\mathrm{J}}^{\mathrm{D},1}_{\mathrm{coll,n}} = &\frac{n\pi^2}{2}\sum_k \hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\\ &\Big\{6n\,\delta_{0,k} + \big(((n-2k)^2+2)\,\mathrm{sgn}(k) + 3(n-2k)\big)\delta_{1,|k|} - 2\big((n-2k)^2+2\big)\,\mathrm{sgn}(k)\Big\}.\end{aligned} \tag{C14}$$

2. 涂抹项 j_3

对于几何涂抹项，

$$j_3 = \{\mathsf{U}(s,t,0)\mathsf{N}\mathsf{U}(t',s,0)a'_{1\,2}\}\,K(\vartheta_1,\vartheta_2,t) \equiv \tilde{j}_3\,K(\vartheta_1,\vartheta_2,t), \tag{C15}$$

我们得到 $\Delta=\vartheta_2-\vartheta_1$ 和 $\sum_i \partial^2_{\vartheta_i}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = -\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$

$$\begin{aligned}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\tilde{j}_3 = &-\Big\{-\frac{\tau^2}{2}\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\cdot(\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}) - \frac{2\tau^3}{3} + \frac{\tau^3}{3}\sum_{i=1,2}\big((\partial_{\vartheta_i}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})\cdot(\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})\big)^2\Big\}\,\delta\big(1-\|\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\|\big)\\ &-\sum_{i=1,2}\frac{\tau^3}{3}\,\frac{\big\{(\partial_{\vartheta_i}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})\cdot(\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})\big\}^2}{\|\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\|^2}\,\delta'\big(1-\|\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\|\big).\end{aligned} \tag{C16}$$

我们可以将碰撞条件写为 $r_{12} = \tau v_{\rm rel}\cos\,\phi + \sqrt{v_{\rm rel}^2\cos^2\phi\,\tau^2 + 1 - \tau^2 v_{\rm rel}^2} \equiv r_c$，其中我们使用 $\cos\,\phi = (\boldsymbol{v}_{\rm rel}\cdot\boldsymbol{r}_{12})/(v_{\rm rel}r_{12})$。这样做很有好处，因为它将狄拉克 δ 函数的极点移到了 r_{12} 积分的内部。我们知道 $0 \le r_{12} \le 1$，由此得到 $0 \le \tau \le 2\cos\,\phi/v_{\rm rel}$。因此，只有在远离情形 $\cos\,\phi > 0$ 下才有贡献。我们陈述狄拉克 δ 分布对于某个函数 $f(x)$ 的熟知性质，该函数在 x_0 处有一个零点，

$$\int \mathrm{d}x\, g(x)\delta(f(x)) = g(x_0)/|f'(x_0)|, \tag{C17}$$

$$\int \mathrm{d}x\, g(x)\delta'(f(x)) = -\frac{1}{|f'(x_0)|f'(x_0)}\Big(g'(x_0) + \frac{g(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)}\Big). \tag{C18}$$

当然，只有当 x_0 位于积分区域内时，这些关系才成立。为避免计算第二行中的曲率贡献，我们对 $\boldsymbol{r}_2$ 积分作平移，$\boldsymbol{r}_2 \to \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}_{12} - \tau\boldsymbol{v}_{\rm rel}$。在一个以 $-\boldsymbol{v}_{\rm rel}$ 沿第一轴方向的参考系中，将 $\boldsymbol{q} = q$ 写作 $(\cos\,\alpha, \sin\,\alpha)$，由此得到 $\boldsymbol{v}_{\rm rel}\cdot\boldsymbol{q} = -v_{\rm rel}\,q\cos\alpha$。由于我们将 α 定义为相对于相对速度的量，因此其中隐含地依赖于角度 ϑ_i，在处理含导数的项时必须考虑这一点。在固定参考系中，我们写作 $\boldsymbol{q} = q(\cos\beta, \sin\,\beta)$，并利用 $c = \vartheta_1 + \vartheta_2$ 得到 $\boldsymbol{v}_{\rm rel}\cdot\boldsymbol{q} = 2\sin(\Delta/2)\;q\sin(\beta - c/2)$，以及 $(\partial_{\vartheta_i}\boldsymbol{v}_{\rm rel})\cdot\boldsymbol{q} = (\partial_{\vartheta_i}\Delta)\cos(\Delta/2)\,q\sin(\beta - c/2) \;-\sin(\Delta/2)\;q\cos(\beta - c/2)$。对于相关的平方和，这意味着 $\sum_i((\partial_{\vartheta_i}\boldsymbol{v}_{\rm rel})\cdot\boldsymbol{q})^2 = q^2(1 - \cos\,\Delta\cos(2\beta - c)) = q^2(1 + \cos\,\Delta\cos(2\alpha))$，因此

$$\begin{aligned}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\tilde{\jmath}_3 = \Big\{ &-\frac{\tau^2}{2}v_{\rm rel}\,q\cos\alpha + \frac{2\tau^3}{3} - \frac{\tau^3 q^2}{3}\big(1 + \cos\Delta\cos(2\alpha)\big)\Big\}\delta(1-q)\\ &-\frac{\tau^3}{3}\big(1 + \cos\Delta\cos(2\alpha)\big)\delta'(1-q),\end{aligned} \tag{C19}$$

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\, a_{12}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\tilde{\jmath}_3 = \int \mathrm{d}\alpha\,\Theta(\cos\phi)\,\Theta(2\cos\phi/v_{\rm rel} - \tau)\int \mathrm{d}q\,q\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\tilde{\jmath}_3. \tag{C20}$$

我们可以将 Θ-约束改写为

$$\Theta(\cos\phi)\,\Theta(2\cos\phi/v_{\rm rel} - \tau)\,\Theta(r_{12}) \to \Theta(\cos\alpha)\,\Theta(\cos\alpha - \tau v_{\rm rel}/2), \tag{C21}$$

这证实了它们确实独立于 q。更重要的是，这表明最终 τ-积分中的空间依赖关系使得交换积分次序是合理的。执行 q-积分可得

$$\int \mathrm{d}q\,q\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\tilde{\jmath}_3 = -\frac{\tau^2}{2}v_{\rm rel}\cos\alpha - \frac{2\tau^3}{3}\cos\Delta\cos(2\alpha). \tag{C22}$$

在这种形式下，我们现在可以安全地执行积分 $\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' = \int_0^{t-t_0}\mathrm{d}\tau \to \int^{2\cos_0}{}^{\alpha/v_{\rm rel}}\mathrm{d}\tau$，

$$\int_0^{2\cos\alpha/v_{\rm rel}}\mathrm{d}\tau\int \mathrm{d}q\,q\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\tilde{\jmath}_3 = \Big(-\frac{\tau^3}{6}v_{\rm rel}\cos\alpha - \frac{\tau^4}{6}\cos\Delta\,(2\cos^2\alpha - 1)\Big)\Big|_{\tau = 2\cos\alpha/v_{\rm rel}}. \tag{C23}$$

我们同样可以直接使用 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}x\cos^n x = \sqrt{\pi}\,\Gamma_{((n+1)/2)\,\Gamma(1+n/2)} = B((n+1)/2, 1/2)$，分别结合伽马函数和贝塔函数来执行 α-积分。综合所有结果，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\alpha\,\Theta(\cos\alpha)\int_0^{2\cos\alpha/v_{\rm rel}}\mathrm{d}\tau\int \mathrm{d}q\,q\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\tilde{\jmath}_3 = -\frac{\pi}{24}\frac{1 + \sin^2(\Delta/2)}{\sin^4(\Delta/2)}. \tag{C24}$$

我们写作

$$\mathrm{J}_{\rm coll}^{\rm D,3} = -\gamma^2 M\mathrm{Pe}^{-1}\,\partial_{\vartheta_1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{2}\,a_{1\,2}F_{1\,2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,j_3, \tag{C25}$$

$$\hat{\mathrm{J}}_{\rm coll,n}^{\rm D,3} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-in\vartheta_1}\;\mathrm{J}_{\rm coll}^{\rm D,3}\,\mathrm{d}\vartheta_1, \tag{C26}$$

并可应用我们的研究结果，得到

$$\gamma^{-2}M^{-1}\mathrm{Pe}\,\hat{\mathrm{J}}^{\mathrm{D},3}_{\mathrm{coll,n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta_1}\partial_{\vartheta_1}\!\int\!\mathrm{d}\vartheta_2\,\sin\Delta\,\frac{\pi}{24}\frac{1+\sin^2(\Delta/2)}{\sin^4(\Delta/2)} \sum_{m,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vartheta_2}(m-k)\big(\hat{p}_{m+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t)-\hat{p}_{m-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big) \tag{C27}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta\int\!\mathrm{d}\Delta\sum_{m,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+k-n)\vartheta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\sin\Delta\,\frac{\pi}{24}\frac{1+\sin^2(\Delta/2)}{\sin^4(\Delta/2)} \mathrm{i}n(m-k)\big(\hat{p}_{m+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t)-\hat{p}_{m-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big) \tag{C28}$$

$$= \frac{1}{2}\int\!\mathrm{d}\Delta\sum_{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\sin\Delta\,\frac{\pi}{24}\frac{1+\sin^2(\Delta/2)}{\sin^4(\Delta/2)} \mathrm{i}n(n-2k)\big(\hat{p}_{n-k+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t)-\hat{p}_{n-k-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big) \tag{C29}$$

$$= \frac{\mathrm{i}n}{2}\sum_{k}\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\sin\Delta\,\frac{\pi}{24}\frac{1+\sin^2(\Delta/2)}{\sin^4(\Delta/2)} \big((n-2k-2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta}-(n-2k+2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta}\big) \tag{C30}$$

$$= \mathrm{i}n\sum_{k}\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\sin\Delta\,\frac{\pi}{24}\frac{1+\sin^2(\Delta/2)}{\sin^4(\Delta/2)} \big(-2\cos\Delta+\mathrm{i}(n-2k)\sin\Delta\big). \tag{C31}$$

利用三角关系 $\cos\Delta\sin\,\Delta(1+\sin^2(\Delta/2)) = \frac{3}{2}\sin\,\Delta\cos\,\Delta - \frac{1}{2}\cos^2\Delta\sin\,\Delta$ and $\sin^2\Delta(1+\sin^2(\Delta/2)) = \frac{3}{2}\sin^2\Delta - \frac{1}{2}\cos\,\Delta\sin^2\Delta$，因此需要计算四个新的积分，

$$I_3 = \int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos\Delta}{\sin^4(\Delta/2)} = -8\pi(1+k^2)\,\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k), \tag{C32}$$

$$I_4 = \int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\cos^2\Delta\sin\Delta}{\sin^4(\Delta/2)} = -8\pi\mathrm{i}(2+k^2)\,\mathrm{sgn}(k) + 4\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)\,\delta_{1,|k|}, \tag{C33}$$

$$I_5 = \int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin^2\Delta}{\sin^4(\Delta/2)} = -16\pi k\,\mathrm{sgn}(k) - 8\pi\delta_{0,k}, \tag{C34}$$

$$I_6 = \int\!\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\cos\Delta\sin^2\Delta}{\sin^4(\Delta/2)} = -16\pi k\,\mathrm{sgn}(k) - 16\pi\delta_{0,k} - 4\pi\delta_{1,|k|}. \tag{C35}$$

这些积分在 $\Delta = 0$处不收敛。所给数值是它们的有限部分，通过围道积分求得，如第 F节所示。与下文的混合项不同，对 k求和时，发散部分不会相互抵消。正如第 IIIA节所述，这反映了近乎平行的粒子对所对应的一阶戴森展开失效。碰撞积分的有限部分为

$$\gamma^{-2}M^{-1}\mathrm{Pe}\,\hat{\mathrm{J}}^{\mathrm{D},3}_{\mathrm{coll,n}} = \mathrm{i}n\frac{\pi}{24}\sum_{k}\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\Big(-3I_3+I_4+\frac{\mathrm{i}(n-2k)}{2}(3I_5-I_6)\Big) \tag{C36}$$

$$= -\frac{n\pi^2}{12}\sum_{k}\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\Big(-2n\,\delta_{0,k}+\big(n-2k+2\,\mathrm{sgn}(k)\big)\delta_{1,|k|}+4(6k^2-2kn+1)\,\mathrm{sgn}(k)\Big). \tag{C37}$$

耦合系数为实数，$\hat{}p_0\hat{}p_n$ 前的线性项表示阻尼。

3. 混合项 j_2

混合项对噪声算符的二阶导数进行分配。对于模型方程（13），其形式为

$$j_2 = \mathsf{U}(s,t,0)\sum_{i=1,2}\{\partial_{\vartheta_i}\mathsf{U}(t',s,0)a'_{1\,2}\}\,\partial_{\vartheta_i}K(\vartheta_1,\vartheta_2,s). \tag{C38}$$

结合上文传播后的指示函数的一阶导数，可得

$$\mathsf{U}(s,t,0)\,\partial_{\vartheta_i}\mathsf{U}(t',s,0)\,a'_{1\,2}=\tau_s\,(\partial_{\vartheta_i}\boldsymbol{v}_{\rm rel})\cdot(\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\rm rel})\,\delta\big(1-\|\boldsymbol{r}_{12}-\tau\boldsymbol{v}_{\rm rel}\|\big),\tag{C39}$$

$$\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\mathsf{U}(s,t,0)\,\partial_{\vartheta_i}\mathsf{U}(t',s,0)\,a'_{1\,2}=\frac{\tau^2 q}{2}\big\{(\partial_{\vartheta_i}\Delta)\cos(\Delta/2)\sin(\beta-c/2)-\sin(\Delta/2)\cos(\beta-c/2)\big\}\,\delta(1-q).\tag{C40}$$

以 $-\boldsymbol{v}_{\rm rel}$ 为基准测量 α 时，我们有 $\sin(\beta-c/2)=-\operatorname{sgn}(\sin(\Delta/2))\cos\alpha$，而含有 $\cos(\beta-c/2)$ 的项关于 α 为奇函数，在对称区域上积分后为零。令 $v_{\rm rel}=2|\sin(\Delta/2)|$，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\alpha\,\Theta(\cos\alpha)\int_0^{2\cos\alpha/v_{\rm rel}}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}q\,q\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,\mathsf{U}(s,t,0)\,\partial_{\vartheta_i}\mathsf{U}(t',s,0)\,a'_{1\,2}=-\frac{\pi}{16}\,(\partial_{\vartheta_i}\Delta)\,\frac{\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}.\tag{C41}$$

可以独立验证：除去因子 τ_s/τ，其 s 积分给出权重 $\tau/2$，被积函数就是传播后的指示函数的角导数，因此结果等于 $\partial_{\vartheta_i}\int\boldsymbol{r}_2\,a_{1\,2}\int t'\,t-t'\,/2=\mathsf{of}\,\mathsf{d}\,\mathsf{d}\,(\,)\,(\,)\,(\,\sin\,())$, 参见第 D 节。取和，可得 $\pi/\,4v_{\rm rel}^2\;=\pi/\,16\quad{}^2\,\Delta/2\qquad\partial_{\vartheta_1}\Delta=-1\qquad\partial_{\vartheta_2}\Delta=1$

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\,a_{1\,2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,j_2=\frac{\pi}{16}\,\frac{\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}\,(\partial_{\vartheta_1}-\partial_{\vartheta_2})K(\vartheta_1,\vartheta_2,t)\tag{C42}$$

并可继续计算其对碰撞积分的相应贡献。根据式（B5），它带有因子 -2,

$$\mathrm{J}^{\mathrm{D},2}_{\rm coll}=2\gamma^2 M\mathrm{Pe}^{-1}\,\partial_{\vartheta_1}\int\mathrm{d}\mathbf{2}\,a_{1\,2}F_{1\,2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t'}^{t}\mathrm{d}s\,j_2,\tag{C43}$$

$$\hat{\mathrm{J}}^{\mathrm{D},2}_{\rm coll,n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta_1}\,\mathrm{J}^{\mathrm{D},2}_{\rm coll}\,\mathrm{d}\vartheta_1,\tag{C44}$$

$\gamma^{-2}M^{-1}$佩克莱数 $\hat{}\mathrm{J}_{\mathrm{D},2}$ 碰撞，$^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Delta\sum\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+k-n)\vartheta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\underline{\sin\;\Delta\cos(\Delta/2)}$

$$\mathrm{n}=-\frac{1}{32}\int\qquad{}_0\qquad\qquad{}_{m,k}\,\sin^3(\Delta/2)\tag{C45}$$

$$n(m-k)^2\big(\hat{}p_{m+1}(t)\hat{}p_{k-1}(t)\;-\hat{}p_{m-1}(t)\hat{}p_{k+1}(t)\big)$$

$$=-\frac{\pi n}{16}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Delta\sum_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}\,(n-2k)^2\big(\hat{p}_{n-k+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t)-\hat{p}_{n-k-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big)\tag{C46}$$

$$=-\frac{\pi n}{16}\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}\,\big((n-2k-2)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta}-(n-2k+2)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta}\big)\tag{C47}$$

$$=-\frac{\pi n}{16}\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}\,\big(-8(n-2k)\cos\Delta+2\mathrm{i}((n-2k)^2+4)\sin\Delta\big).\tag{C48}$$

因此，需要计算两个新的积分，

$$I_7=\int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos\Delta\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}=-8\pi k\,\mathrm{sgn}(k)-8\pi\delta_{0,k}-2\pi\delta_{1,|k|},\tag{C49}$$

$$I_8=\int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin^2\Delta\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}=8\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)\,\delta_{1,|k|},\tag{C50}$$

相关细节见第F节。 I_8 的被积函数具有奇奇异性，因此其柯西主值存在。I_7 仅以有限部分的形式存在，其发散部分与 k 无关，并带有因子 $n-2k$，因此在对 k求和时会相互抵消，因为 $\hat{}p_{n-k}\hat{}p_k$ 在 $k\to n-k$下具有对称性。对于碰撞积分的贡献，我们得到

$$\gamma^{-2}M^{-1}\mathrm{Pe}\,\hat{\mathrm{J}}^{\mathrm{D},2}_{\rm coll,n}=-\frac{\pi n}{16}\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\big(-8(n-2k)I_7+2\mathrm{i}((n-2k)^2+4)I_8\big)\tag{C51}$$

$$=-\frac{\pi^2 n}{4}\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\,\hat{p}_k(t)$$
$$\Big\{16n\,\delta_{0,k}+\big(4(n-2k)+((n-2k)^2+4)\,\mathrm{sgn}(k)\big)\delta_{1,|k|}-4\big((n-2k)(n-6k)+4\big)\,\mathrm{sgn}(k)\Big\}.\tag{C52}$$

耦合系数为实数。与另外两项贡献不同，ˆp_0ˆp_n 前的线性项是反阻尼。

附录 D： τ^2 的计算

在本节中，我们计算自碰撞开始以来经过的时间在相互作用区域上取平均后的二阶矩，对于自由活性粒子，有

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\left(\frac{x+\sqrt{1-y^2}}{v_{\mathrm{rel}}}\right)^2 = \frac{2}{\pi v_{\mathrm{rel}}^2}\int_0^1\frac{8}{3}\,(1-y^2)^{3/2}\,\mathrm{d}y = \frac{16}{3\pi v_{\mathrm{rel}}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 z\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{3\pi v_{\mathrm{rel}}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\cos(4z)+4\cos(2z)+3\big)\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3\pi v_{\mathrm{rel}}^2}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{v_{\mathrm{rel}}^2},\end{aligned} \tag{D1}$$

其中我们代入了 $y=$ 正弦 z。有关该计算的详细信息，请参见文献中关于一阶矩的讨论 [19, 22]。

附录 E：门控噪声的噪声积分

对于均匀单粒子函数，式（21）中的两个噪声积分仅涉及在相互作用区域上积分的确定性碰撞持续时间， $\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\,a_{12}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,1 = 8/（3v_{\mathrm{rel}}）= 4/（3|$正弦（$\Delta/2$）$|）$ [22], 以及第 K_{mk} C节中的傅里叶ˆ系数。

1. 积分 X

在傅里叶空间中， $\big((\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2)\;p_1p_1\big)$ 对应于 (m^2+k^2) ˆp_mˆp_k，我们得到

$$\hat{X}_n = \frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\vartheta_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta_1}\,\partial_{\vartheta_1}\int\mathrm{d}\vartheta_2\,\sin\Delta\,\frac{4}{3|\sin(\Delta/2)|}\sum_{m,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vartheta_2}\,(m^2+k^2)\,\hat{p}_m(t)\hat{p}_k(t) \tag{E1}$$

$$= \frac{4\mathrm{i}n}{3}\sum_k\big((n-k)^2+k^2\big)\,\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\,I_{10}(k), \tag{E2}$$

with

$$I_{10}(k) = \int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{\sin\Delta}{|\sin(\Delta/2)|} = 4\mathrm{i}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\Delta\,\sin(k\Delta)\cos(\Delta/2) = \frac{16\mathrm{i}k}{4k^2-1}, \tag{E3}$$

其中我们使用了 $\sin\;\Delta/|\sin(\Delta/2)| = 2\,\mathrm{sgn}(\Delta)\cos(\Delta/2)$ 关于 $(-\pi,\pi)$ 对系数进行对称化后， $k\to n-k$ 得到式 (24)。被积函数有界，因此，对碰撞持续时间进行正则化只会使 ˆ X_n 在 $\mathcal{O}(\delta)$ 阶发生变化。

2. 积分 Y

ˆ利用 K_{mk}，我们得到

$$\hat{Y}_n = -\frac{1}{3\pi}\int\mathrm{d}\vartheta_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta_1}\,\partial_{\vartheta_1}^2\int\mathrm{d}\vartheta_2\sum_{m,k}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vartheta_2}}{|\sin(\Delta/2)|}(m-k)\big(\hat{p}_{m+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t)-\hat{p}_{m-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big) \tag{E4}$$

$$= \frac{n^2}{3\pi}\int\mathrm{d}\vartheta\sum_{m,k}\int\mathrm{d}\Delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+k-n)\vartheta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\;\frac{m-k}{|\text{正弦}(\Delta/2)|}\big(\hat{}p_{m+1}(t)\hat{}p_{k-1}(t)-\hat{}p_{m-1}(t)\hat{}p_{k+1}(t)\big) \tag{E5}$$

$$= \frac{2n^2}{3}\sum_k\int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}\,\frac{n-2k}{|\sin(\Delta/2)|}\big(\hat{p}_{n-k+1}(t)\hat{p}_{k-1}(t)-\hat{p}_{n-k-1}(t)\hat{p}_{k+1}(t)\big) \tag{E6}$$

$$= \frac{2n^2}{3}\sum_k\hat{p}_{n-k}(t)\hat{p}_k(t)\int\mathrm{d}\Delta\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta}}{|\sin(\Delta/2)|}\big(-4\cos\Delta+2\mathrm{i}(n-2k)\sin\Delta\big), \tag{E7}$$

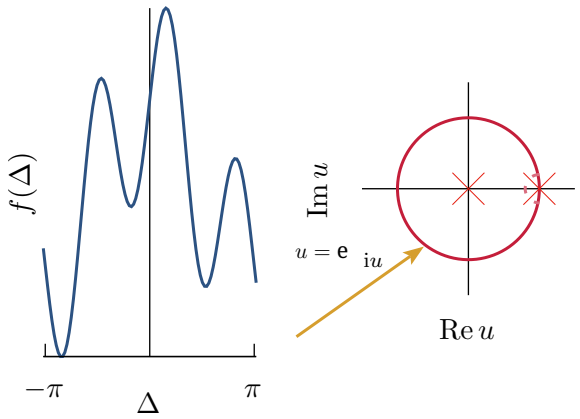


图 6. 积分方法示意图。对周期函数的积分可转化为沿复平面单位圆的围道积分，并利用留数定理求值。通过一个小的绕行缺口避开围道上的极点，该极点的留数贡献一半。由此可得柯西主值；对于高阶极点，则可得那些不能作为反常黎曼积分存在的积分的阿达玛有限部分。

结合 I_9 和 I_{10} 可得方程（25）。 的被积函数是偶函数，因此其虚部为零，而其实部在 $\Delta = 0$ 处呈对数发散。

附录 F：角积分的求值

1. 方法

所有角积分 I_1 到 I_8 均为以下形式：$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\Delta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta} F(\Delta)$，其中 F 是 2π-周期函数，化简后是关于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta}$ 的有理函数，且仅在 $\Delta = 0$ 处有极点。令 $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta}$，并令 $\mathrm{d}\Delta = \mathrm{d}u/(\mathrm{i}u)$，则这些积分可化为有理函数 f 的围道积分 $\oint_{|u|=1} f(u)\, \mathrm{d}u$；这些有理函数在围道内的 $u = 0$ 处以及围道上的 $u = 1$ 处有极点，见图 6。

若 F 在 $\Delta = 0$ 处有一个简单极点（如 I_1 和 I_8），则该积分作为反常黎曼积分并不存在，但其柯西主值存在。通过在积分路径上设置一个小的绕行缺口排除 $u = 1$ 后，该极点的贡献为其留数 [78], 的一半

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\Delta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta} F(\Delta) = \pi \mathrm{i}\, \mathrm{Res}(f, 1) + 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Res}(f, 0). \tag{F1}$$

柯西主值是对称正则化积分的极限，例如令两个粒子的速度略有差异，从而使 v_{rel} 对 $\Delta = 0$ 有限。

若 F 有高阶极点（如从 I_3 到 I_7），其洛朗展开的偶部 F（Δ）$= \sum_{j \geq 1} b_j \Delta^{-j} +$ 正则，会使积分发散，因此只有阿达玛有限部分有定义 [79, 80],

$$\mathrm{FP} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\Delta\, F(\Delta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon < |\Delta| < \pi} \mathrm{d}\Delta\, F(\Delta) - \sum_{j \text{ even}} \frac{2 b_j}{j - 1}\, \varepsilon^{1-j} \right\}. \tag{F2}$$

方程 (F1) 对有限部分也成立。在单位圆上，$(u - 1)^{-n}$ 在 $n \geq 2$ 时的挖去积分是关于 ε 的奇函数，因此没有与 ε 无关的部分；而 $n = 1$ 给出 $\pi\mathrm{i}$。 f 在 $u = 1$ 处的正则部分，其留数对轮廓内部的积分作出贡献。凡是柯西主值存在之处，它都与有限部分相等。对于奇异分母的正则化 $\sin^2(\Delta/2) \to \sin^2(\Delta/2) + \delta^2$，正则化积分的表现为 $c/\delta + \mathrm{FP} + \mathrm{O}(\delta)$。在第三节A中， I_3 到 I_6 的发散部分产生非解析贡献，而有限部分则产生其余的正则贡献。 I_7 的发散部分在对傅里叶指标求和时相消，见第二节C。

下文中， $\Theta(0) = 0$ 和 $\mathrm{sgn}(0) = 0$。

2. 含简单极点的积分

我们首先详细讨论 I_1。利用

$$\sin\Delta\cos\Delta=\frac{u^4-1}{4\mathrm{i}u^2},\qquad \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)=-\frac{(u-1)^2}{4u},\tag{F3}$$

我们得到

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos\Delta}{\sin^2(\Delta/2)}=\oint_{|u|=1}f_1(u)\,\mathrm{d}u,\qquad f_1(u)=u^{l-2}\,\frac{(u^2+1)(u+1)}{u-1}.\tag{F4}$$

被积函数在 $u=1$ 处有一个简单极点，其 $\mathrm{Res}(f_1,1)$ 为 $=4$。对于 $l<2$，它还在 $u=0$处有一个极点。其留数可由洛朗级数得到，

$$f_1(u)=-\big(u^{l+1}+u^l+u^{l-1}+u^{l-2}\big)\sum_{n=0}^{\infty}u^n,\tag{F5}$$

其中，四项分别在 -1对 u^{-1}的系数有贡献，当 $n=-l-2$、$-l-1$、$-l$或 $1-l$分别为非负数时。因此，$\mathrm{Res}(f_1,0)=-\max\big(0,\min(4,2-l)\big)$，而式（F1）给出

$$I_1=4\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f_1,0)=2\pi\mathrm{i}\times\begin{cases}2 & l\geq 2\\ 1 & l=1\\ 0 & l=0\\ -1 & l=-1\\ -2 & l\leq -2\end{cases}=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(l)\big(2-\delta_{|l|,1}\big).\tag{F6}$$

对于 I_8，被积函数可化简为 $\sin\Delta=2\sin(\Delta/2)\cos(\Delta/2)$，即 $4\cos^3(\Delta/2)/\sin(\Delta/2)$，它关于 Δ为奇函数。结合 Δ 和 $-\Delta$，奇点相消，

$$I_8=\int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta}\,\frac{\sin^2\Delta\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)}=8\mathrm{i}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\Delta\,\sin(l\Delta)\,\frac{\cos^3(\Delta/2)}{\sin(\Delta/2)}=8\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(l)-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(l)\,\delta_{1,|l|},\tag{F7}$$

其中我们使用了 $\cos^3x/\sin x=\cot x-\frac{1}{2}\sin(2x)$ 和 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\Delta\sin(l\Delta)\cot(\Delta/2)=\pi$对于 $l\geq 1$。方程 (F1) 给出相同的结果。

3. 高阶极点的积分

其余积分也用同样的方法求值，这里仅给出被积函数和留数。对于 I_3，我们得到

$$I_3=\int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos\Delta}{\sin^4(\Delta/2)}=\oint_{|u|=1}f_3(u)\,\mathrm{d}u,\qquad f_3(u)=\frac{4u^{l-1}(1+u)(1+u^2)}{(1-u)^3},\tag{F8}$$

其中 $\mathrm{Res}(f_3,1)=-8(1+l^2)$ 和 $\mathrm{Res}(f_3,0)=8(1+l^2)\Theta(-l)+4\delta_{0,l}$。将这些结果合并，得到

$$I_3=\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}(f_3,1)+2\,\mathrm{Res}(f_3,0)\big)=-8\pi(1+l^2)\,\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(l).\tag{F9}$$

对于 I_4，我们得到

$$I_4=\int\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta}\,\frac{\sin\Delta\cos^2\Delta}{\sin^4(\Delta/2)}=\oint_{|u|=1}f_4(u)\,\mathrm{d}u,\qquad f_4(u)=\frac{2(u+1)\left(u^2+1\right)^2u^{l-2}}{(1-u)^3},\tag{F10}$$

其中 $\mathrm{Res}(f_4,1)=-8(2+l^2)$ 和 $\mathrm{Res}(f_4,0)=8(2+l^2)\Theta(-l)+2\,\mathrm{sgn}(l)\delta_{1,|l|}+8\delta_{0,l}$，其给出 es

$$I_4=-8\pi\mathrm{i}(2+l^2)\,\mathrm{sgn}(l)+4\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(l)\,\delta_{1,|l|}.\tag{F11}$$

对于 I_5，我们得到

$$I_5 = \int \mathrm{d}\Delta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta} \frac{\sin^2\Delta}{\sin^4(\Delta/2)} = \oint_{|u|=1} f_5(u)\,\mathrm{d}u, \qquad f_5(u) = \frac{4\mathrm{i}(u+1)^2 u^{l-1}}{(u-1)^2}, \tag{F12}$$

其中 $\mathrm{Res}(f_5,\ 1) = 16\mathrm{i}l$ 和 $\mathrm{Res}(f_5,\ 0) = -16\mathrm{i}l\,\Theta(-l) + 4\mathrm{i}\delta_{0,\ l}$，由此得到

$$I_5 = -16\pi l\,\mathrm{sgn}(l) - 8\pi\delta_{0,l}. \tag{F13}$$

对于 I_6，我们得到

$$I_6 = \int \mathrm{d}\Delta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta} \frac{\sin^2\Delta\cos\Delta}{\sin^4(\Delta/2)} = \oint_{|u|=1} f_6(u)\,\mathrm{d}u, \qquad f_6(u) = \frac{2\mathrm{i}(u+1)^2\left(u^2+1\right)u^{l-2}}{(u-1)^2}, \tag{F14}$$

其中 $\mathrm{Res}(f_6,\ 1) = 16\mathrm{i}l$ 和 $\mathrm{Res}(f_6,\ 0) = -16\mathrm{i}l\,\Theta(-l) + 8\mathrm{i}\delta_{0,\ l} + 2\mathrm{i}\,\delta_{1,\ |l|}$，由此得到

$$I_6 = -16\pi l\,\mathrm{sgn}(l) - 16\pi\delta_{0,l} - 4\pi\delta_{1,|l|}. \tag{F15}$$

对于 I_7，我们首先利用 $\sin\ \Delta = 2\sin(\Delta/2)\cos(\Delta/2)$ 化简被积函数，

$$I_7 = \int \mathrm{d}\Delta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta} \frac{\sin\Delta\cos\Delta\cos(\Delta/2)}{\sin^3(\Delta/2)} = 2\int \mathrm{d}\Delta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\Delta} \frac{\cos\Delta\cos^2(\Delta/2)}{\sin^2(\Delta/2)} = \oint_{|u|=1} f_7(u)\,\mathrm{d}u, \tag{F16}$$

$$f_7(u) = \frac{\mathrm{i}(u+1)^2\left(u^2+1\right)u^{l-2}}{(u-1)^2}, \tag{F17}$$

其中 $\mathrm{Res}(f_7,\ 1) = 8\mathrm{i}l$ 和 $\mathrm{Res}(f_7,\ 0) = -8\mathrm{i}l\,\Theta(-l) + 4\mathrm{i}\delta_{0,\ l} + \mathrm{i}\,\delta_{1,\ |l|}$，由此得到

$$I_7 = -8\pi l\,\mathrm{sgn}(l) - 8\pi\delta_{0,l} - 2\pi\delta_{1,|l|}. \tag{F18}$$

˜4. 正则化积分 I_9

与 I_1 to I_8 不同， I_9 的被积函数在 $1/|\Delta|$ 处发散，而这并非极点。这种发散是对数型的，其有限部分会依赖于截断尺度。因此，我们通过显式正则化来计算 I_9 ，$|\sin(\Delta/2)| \to \sqrt{\sin^2(\Delta/2)+\delta^2}$，

$$\tilde{I}_9(k) = \int \mathrm{d}\Delta\, \frac{\cos(k\Delta)\cos\Delta}{\sqrt{\sin^2(\Delta/2)+\delta^2}}. \tag{F19}$$

利用 $\cos(k\Delta)\cos\Delta = \frac{1}{2}\big(\cos((k+1)\Delta)\ + \cos((k-1)\Delta)\big)$，可将其化简为

$$\tilde{I}_9(k) = \frac{1}{2}\big(C_{k+1} + C_{k-1}\big), \qquad C_k = \int \mathrm{d}\Delta\, \frac{\cos(k\Delta)}{\sqrt{\sin^2(\Delta/2)+\delta^2}}. \tag{F20}$$

我们将 $\cos(k\Delta)\ = 1 + (\cos(k\ \Delta) - 1)$ 拆分，这将得到奇异贡献 S 和正则部分 R_k，其中 $\varphi = \Delta/2$ ，

$$C_k = 4(S + R_{|k|}), \qquad S = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi+\delta^2}}, \qquad R_k = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi\, \frac{\cos(2k\varphi)-1}{\sqrt{\sin^2\varphi+\delta^2}}, \tag{F21}$$

这里我们可以安全地 在 R_k 中设定 $\delta \to 0$ 。奇异部分是第一类完全椭圆积分 [81],

$$S = \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-c^2\cos^2\varphi}} = \frac{K(c)}{\sqrt{1+\delta^2}}, \tag{F22}$$

其中 $c^2 = 1/(1+\delta^2)$。对于 $\delta \to 0$，我们关注极限 $c \to 1$。利用 $c \to 1^-$ 的渐近形式 [81] $K(c)\ \to \log(4/c')$，其中 $c' = \sqrt{1-c^2} \to \delta$，可得

$$S = -\log\delta + \log 4 + o(1). \tag{F23}$$

对于正则部分，我们使用 $(\cos(2k\varphi) - 1)/\sin\varphi = -2\sum_{j=1}^{k}\sin((2j-1)\varphi)$，这是由正弦乘积公式得到的。由此可得

$$R_k = -2\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}, \tag{F24}$$

因此 $R_k \sim$ –对数 k 在较大 k时成立；在 Pe 固定时，这仅对高模态变得重要$^{-1}$。结合两部分得到公式（27）。