技术说明 | Kadloor & Santhi（2010年）的配套证明

大型全连接电网中$d_{\text{critical}}(a_0)$ 的闭式公式

arXiv:1011.4098v1（第4节，0802.tex）中递归系统的精确代数解

范围。 在 S. Kadloor 和 N. Santhi（2010年）的第4节中，《理解电网中的级联故障》（arXiv:1011.4098v1 中的源文件 0802.tex）给出了大型全连接网络（$N \to \infty$）上级联故障演化的四变量递归系统，其变量序列为$(a_n, \mu_{n-1}, \mathcal{D}_n, p_n)$。本说明完全采用论文中的精确记号、符号和索引，证明耦合递推可化简为单个一维映射$a_{n+1} = g(a_n)$，从而得到临界平均扰动$d_{\text{critical}}(a_0)$ 的闭式表达式，其中使用 Lambert$W$ 函数的下实分支W_{-1}。

arXiv:2611.30922v1 [math.PR] 23 Nov 2026

1 系统模型、记号与递归方程

我们考虑第 2 节和第 4 节所述的由 N $= |V|$ 个发电机节点组成的齐次大型全连接网络 G(V,E) [1]：每个节点 v $\in$ V 的最大负载容量为 $L_{\max} = 1$，初始负载为常数 $a_0 \in [0, 1)$，并在时间 0 接收一个均值为 $d_m > 0$ 的独立加性扰动 $D_v(0) \sim$，该扰动服从指数分布(d_m)。表 1 将每个符号与 0802.tex 直接对应。

表 1： 与0802.tex（arXiv:1011.4098v1，第 2 节和第 4 节）对应的符号术语表。

符号	论文中的位置	含义
$L_{\max}$	第2节	每个发电机节点的最大容量（$L_{\max} = 1$ 单位；一般而言 $L_{\max} > 0$ 见推论 2）。
a_0	第2节	每个节点的初始稳态负载，$a_0 \in [0, 1)$（论文重点讨论$a_0 \in$（0, 1））。
$\mathcal{L}_0$	第4节	初始负载的随机变量：$\mathcal{L}_0 \sim \delta$（$l$ $-a_0$）（在a_0处为常数）。
$\mathcal{D}_0$	第4节	初始扰动随机变量：$\mathcal{D}_0 \sim$指数分布(d_m)，密度 $^1{}_d$ $\frac{}{m} e^{-}x/d^m$ ($x \geq 0$).
d_m	第2节	初始指数分布扰动的均值 $\mathcal{D}_0$ ($d_m > 0$；[1] 假设 $d_m < 1$)。
$\mathcal{L}_n$	第4节	阶段n存活节点上的负载分布随机变量。
$\mathcal{D}_n$	第4节	阶段$n \geq 1$重新分配给每个存活节点的确定性负载。
p_n	第4节	存活至阶段n 的节点在阶段n结束时失效的条件概率。
μ_n	第4节	在阶段n ($n \geq 0$)结束时失效的节点k_i 的平均负载$\mathbf{E}$（L_{k_i}（n））。
a_n	第4节	存活密度的下端点（最小平移负载）$\mathcal{L}_n$（$a_1 = a_0, a_n = a_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1}$）。
d_{critical}	第2节	d_m的临界阈值：若$d_m \leq d_{\text{critical}}$，级联将停止；若$d_m > d_{\text{critical}}$，则会完全停电。

递归方程（0802.tex，第4节，第 211–222 行）级联完全由以下内容支配：

- **初始化**（$n = 0$，1）：其中 $\mu_0 = \mathbf{E}(L_{k_i}(0)) = 1 + d_m$，

$$p_0 = e^{-\frac{1-a_0}{d_m}}, \qquad \mathcal{D}_1 = \frac{p_0}{1-p_0}(1+d_m), \qquad a_1 = a_0, \qquad p_1 = \frac{e^{-\frac{1-a_1}{d_m}}}{1-e^{-\frac{1-a_1}{d_m}}}\left(e^{\frac{\mathcal{D}_1}{d_m}} - 1\right). \tag{1}$$

- **迭代**（$n = 2$，3，.....）：如果 $\mathcal{D}_{n-1} \geq 1 - a_{n-1}$（等价地，$a_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1} \geq 1$），则停止（所有剩余节点的容量都超过 $L\max = 1$，整个电网都会失效）。否则，计算：

$$a_n = a_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1}, \tag{2a}$$

$$\mu_{n-1} = 1 + d_m - \frac{\mathcal{D}_{n-1}}{e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m} - 1}, \tag{2b}$$

$$\mathcal{D}_n = \frac{p_{n-1}}{1-p_{n-1}}\mu_{n-1}, \tag{2c}$$

$$p_n = \frac{e^{-\frac{1-a_n}{d_m}}}{1-e^{-\frac{1-a_n}{d_m}}}\left(e^{\frac{\mathcal{D}_n}{d_m}} - 1\right). \tag{2d}$$

记号说明：在（1）–（2）中，每一项 $\mathcal{D}_n\,(n \geq 1)$ 均严格为正，而 $a_n < 1$；根据（2a），移位后的最小负载满足 $a_n = a_0 + \sum^{n-1}{}_{k=1}\,\mathcal{D}_k$。因此，在阶段 n 之前，添加到每个存活节点上的累积负载就是$a_n - a_0$。

主定理（$d$critical 的精确解析公式）

定理 1。固定 $a_0 \in [0,1)$，并考虑递归系统（1）–（2），其平均初始扰动为 $d_m > 0$。存在唯一的常数 $d_{\text{critical}} = d_{\text{critical}}(a_0) \in (0,\ 1-a_0)$，该常数由下式隐式定义：

$$1 - a_0 \;=\; d_{\text{critical}}\left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{d_{\text{critical}}}\right)\right), \tag{3}$$

并且可显式表示为闭 式，通过 *Lambert W* 函数的下实分支 W_{-1}：$(-e^{-1},\ 0) \to (-\infty,\ -1)$ ：

$$d_{\text{critical}}(a_0) \;=\; \frac{1-a_0}{-W_{-1}\!\left(-(1-a_0)\,e^{-(2-a_0)}\right) - (1-a_0)}. \tag{4}$$

序列 $\{a_n\}$ 在 $d_{\text{critical}}(a_0)$ 处呈现锐阈值二分：
（*i*）亚临界与临界存活（$d_m \leq d_{\text{critical}}(a_0)$）：级联永远不会触发停止保护条件（$\mathcal{D}_{n-1} < 1 - a_{n-1}$ 对所有 $n \geq 2$ 均成立）。序列 $\{a_n\}$ 严格递增并趋于极限 $a^* = \lim_{n\to\infty} a_n \in (a_0, 1)$，其中 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_n = 0$ 且$\lim_{n\to\infty} p_n = 0$。在临界状态下（$d_m = d_{\text{critical}}$），极限最小负载恰为 $a^* = a_0 + d_{\text{critical}}$。
（*ii*）超临界停电（$d_m > d_{\text{critical}}(a_0)$）：在有限步数 $n \geq 2$ 内，序列触发停止保护条件$\mathcal{D}_{n-1} \geq 1 - a_{n-1}$（$a_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1} \geq 1$ 且 $p_{n-1} \geq 1$），因此所有存活节点均过载，网络遭受完全停电。

2 定理1的证明

证明直接依据（1）–（2），分三步简要展开：（1）利用精确的代数望远镜恒等式消去$(\mu_{n-1}, \mathcal{D}_n, p_n)$，无需任何启发式近似；（2）证明所得一维迭代 $a_{n+1} = g(a_n)$的单调性和凹性；（3）借助 Lambert$W$ 函数证明（3）的唯一性并求逆。

为简洁起见，对于任意 $a \in [a_0, 1)$ 以及 $d_m > 0$，定义

$$r(a) \;:=\; e^{-\frac{1-a}{d_m}} \in (0,1), \qquad h(a) \;:=\; (a - a_0) - (1 + d_m)\,r(a), \qquad g(a) \;:=\; \frac{a_0 + (1 + d_m - a)\,r(a)}{1 - r(a)}.$$

注意，$r(a_0) = p_0$，，且代数上

$$g(a) - a \;=\; \frac{(1+d_m)\,r(a) - (a - a_0)}{1 - r(a)} \;=\; \frac{-h(a)}{1 - r(a)}. \tag{5}$$

引理 1（精确望远镜恒等式及化简为一维映射）。沿着（1）–（2）的轨迹，只要 $a_n < 1$（即$\mathcal{D}_{k-1} < 1 -$ 对所有 $2 \leq k \leq n$ 均有 a_{k-1}），则 $a_n \in [a_0, 1)$、$\mathcal{D}_n > 0$，且 $p_{n-1} \in (0,1)$，并且迭代序列满足

$$(a_n - a_0) + \mathcal{D}_n \;=\; \left(1 + d_m + \mathcal{D}_n\right) e^{-\frac{1-a_n}{d_m}} \qquad (n \geq 1). \tag{6}$$

等价地，$\mathcal{D}_n = \left[(1+d_m)r(a_n) - (a_n - a_0)\right] / \left[1 - r(a_n)\right]$，因此如果更新持续到第 n 阶段，$+1$ 那么

$$a_{n+1} \;=\; a_n + \mathcal{D}_n \;=\; g(a_n) \qquad (n \geq 1). \tag{7}$$

此外，逐阶段生存概率会逐项相消：对于每个满足 $a_{k+1} < 1$ 的 $k \geq 1$,

$$1 - p_k \;=\; \frac{1 - r(a_{k+1})}{1 - r(a_k)}, \qquad \textit{and hence} \qquad \prod_{k=0}^{n-1}(1 - p_k) \;=\; 1 - e^{-\frac{1-a_n}{d_m}}. \tag{8}$$

证明。我们对 $n \geq 1$使用归纳法。对于基础情形 $n = 1$，$a_1 = a_0$ 给出 $a_1 - a_0 = 0$，且 $r(a_1) = p_0 \in (0, 1)$。由 (1)，$(1 - r(a_1))\ \mathcal{D}_1 = (1 + d_m)\, r(a_1)$，立即整理得 $\mathcal{D}_1 = (1 + d_m + \mathcal{D}_1)\, r(a_1)$，从而验证了 $n = 1$（其中 $\mathcal{D}_1 > 0$）时的 (6)。

现在令 $n \geq 2$，并假设 (6) 在索引 $n-1$ 处成立，且 $a_n = a_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1} < 1$，其中 $\mathcal{D}_{n-1} > 0$。由于 $r(a_{n-1})\, e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m} = e^{-(1-a_{n-1}-\mathcal{D}_{n-1})/d_m} = e^{-(1-a_n)/d_m} = r(a_n) < 1$，在索引 $n-1$ 处代入 (2d) 得

$$1 - p_{n-1} \;=\; 1 - \frac{r(a_{n-1})\left(e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m} - 1\right)}{1 - r(a_{n-1})} \;=\; \frac{1 - r(a_{n-1})\, e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m}}{1 - r(a_{n-1})} \;=\; \frac{1 - r(a_n)}{1 - r(a_{n-1})} \;>\; 0, \tag{9}$$

这就证明了（8）的第一部分（并确保 $p_{n-1} \in (0,1)$，因为 $\mathcal{D}_{n-1} > 0$）。将（9）对 $k = 1, \ldots\ldots, n-1$相乘，再结合 $1 - p_0 = 1 - r(a_1)$，即可证明（8）中的累积存活乘积。
由（2d）和（9）可知，分母 $1 - r(a_{n-1})$ 在比值中抵消

$$\frac{p_{n-1}}{1 - p_{n-1}} \;=\; \frac{r(a_{n-1})\left(e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m} - 1\right)}{1 - r(a_n)}.$$

将其与（2b）代入（2c）后，因子 $(e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m} - 1)$ 完全抵消：

$$\begin{aligned}\left(1 - r(a_n)\right)\mathcal{D}_n &= r(a_{n-1})\left(e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m} - 1\right)\left(1 + d_m - \frac{\mathcal{D}_{n-1}}{e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m} - 1}\right) \\ &= (1 + d_m)\left(r(a_n) - r(a_{n-1})\right) - \mathcal{D}_{n-1}\, r(a_{n-1}).\end{aligned}$$

注意，由于对于所有 $x > 0$，都有 $e^x - 1 > x$，令 $x = \mathcal{D}_{n-1}/d_m$，可得 $\mu_{n-1} > 1 > 0$，进而得到 $\mathcal{D}_n > 0$。将 $-r(a_n)\,\mathcal{D}_n$ 移至等式右侧，即可将各指标清晰地分离为一个望远镜差：

$$\mathcal{D}_n \;=\; \left(1 + d_m + \mathcal{D}_n\right) r(a_n) - \left(1 + d_m + \mathcal{D}_{n-1}\right) r(a_{n-1}).$$

将归纳假设 $a_n - a_0 = (a_{n-1} - a_0) + \mathcal{D}_{n-1} = (1 + d_m + \mathcal{D}_{n-1})\, r(a_{n-1})$ 代入后，整个 $(n-1)$ 项被抵消，得到 $(a_n - a_0) + \mathcal{D}_n = (1 + d_m + \mathcal{D}_n)\, r(a_n)$，即式 (6)。由式 (6) 解得 $\mathcal{D}_n\, g(a_n)/(1 - r(a_n))$，因此由式 (5) 得 $a_n + \mathcal{D}_n = g(a_n)$。 □

备注 1（通过总负载守恒进行物理解释）。恒等式 (6) 直接体现了全连接网络 G(V, E) 上的负载守恒。在第 n 阶段之前，每个存活节点承载 $a_0 + \mathcal{D}_0 + (a_n - a_0) = a_n + \mathcal{D}_0 < 1$，因此，已经失效的节点恰好是初始扰动为 $\mathcal{D}_0 \geq 1 - a_n$（比例为 $r(a_n) = e^{-(1-a_n)/d_m}$）的节点。由于所有重新分配的负载都源自先前失效节点的初始负载（不存在重复计数），利用指数分布(d_m)的无记忆性，仅对 $\mathcal{D}_0 \geq 1 - a_n$ 的初始负载求和，得到 $\mathbb{E}[(a_0 + \mathcal{D}_0)\, \mathbf{1}_{\mathcal{D}_0 \geq 1 - a_n}] = (a_0 + 1 - a_n + d_m)\, r(a_n)$（其中 $\mathbf{1}_{\mathcal{D}_0 \geq 1 - a_n}$ 是事件 $\mathcal{D}_0 \geq 1 - a_n$ 的指示随机变量）。将该负载平均分配给存活比例 $1 - r(a_n)$，得到下一次累积偏移 $a_{n+1} - a_0 = (1 - a_n + a_0 + d_m)\, r(a_n)/(1 - r(a_n))$，经变换后与式 (6) 完全相同。

Le引理 2（g的严格单调性及h的凹性）。对于每个 $a_0 \in [0, 1)$ 以及 $d_m > 0$:

（a）g 在 $[a_0, 1)$ 上严格递增，其导数为

$$g'(a) \;=\; \frac{r(a)}{d_m\left(1 - r(a)\right)^2}\left[(1 - a) + a_0 + d_m\, r(a)\right] \;>\; 0.$$

（b）$h(a) = (a - a_0) - (1 + d_m)\, r(a)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格凹，且具有唯一的全局最大值点

$$a_{\text{peak}} \;=\; 1 - d_m \ln\left(1 + \frac{1}{d_m}\right) \;<\; 1, \qquad h(a_{\text{peak}}) \;=\; (1 - a_0) - d_m\left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{d_m}\right)\right).$$

证明。（a）由于 $r'(a) = r(a)/d_m$，将 $g(a) = u(a)/v(a)$ 记作，其中 $u(a) = a_0 + (1 + d_m - a)\, r(a)$，而 $v(a) = 1 - r(a)$。于是 $u'(a) = -r(a) + (1 + d_m - a)^{r(a)}\, d_m = r(a)\, d_m\, (1 - a)$，且 $v'(a) = -r(a)\, d_m$。应用商法则：

$$\begin{aligned}u'(a)v(a) - u(a)v'(a) &= \frac{r(a)}{d_m}\left[(1 - a)\left(1 - r(a)\right) + a_0 + (1 + d_m - a)\, r(a)\right] \\ &= \frac{r(a)}{d_m}\left[(1 - a) + a_0 + d_m\, r(a)\right].\end{aligned}$$

对于 $a \in [a_0, 1)$，我们有 $1 - a > 0$、$a_0 \geq 0$、$r(a) > 0$ 和 $d_m > 0$，因此 $g'(a) > 0$。

(b) 对h 求两次导数，得到

$$h'(a) = 1 - \frac{1+d_m}{d_m}\, e^{-\frac{1-a}{d_m}}, \qquad h''(a) = -\frac{1+d_m}{d_m^2}\, e^{-\frac{1-a}{d_m}} < 0 \quad (\forall\, a \in \mathbb{R}).$$

求解 h′(a^peak) = 0 可得 e^−(1−a^peak)/d^m = d_{1+m}, 即 a_peak = 1 − d_m ln(1 + 1/d_m) < 1。此时 (1 +d_m) r(a^peak) = d_m，因此 h(a^peak) = a^peak − a_0 − d_m = (1 − a_0) − d_m (1 + ln(1 + 1/d_m))。 □

引理 *3*（存在性、唯一性与 *Lambert* W_{-1} 求逆）。对于 $d > 0$，定义 $\psi(d) := d(1 + ln(1 + 1/d))$。则$\psi$ 在 $(0, \infty)$ 上严格递增，且 $lim_{d\to 0^+} \psi(d) = 0$， $\psi(1) = 1 + ln\ 2 > 1$。因此，对每个 $a_0 \in [0, 1)$，方程 *(3)*（$\psi(d_{\text{critical}}) = 1 - a_0$）都有唯一解 $d_{\text{critical}} \in (0, 1 - a_0)$，其显式表达式由 *(4)* 给出。

证明。 对 $\psi(d)$求导，得到

$$\psi'(d) = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) - \frac{1}{1+d} = \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \frac{d}{1+d} > 0 \quad (\forall\, d > 0).$$

由于对所有 d > 0， ψ(d) > d，因此 ψ(d) = 1 − a_0 迫使 d < 1 − a_0。此外，lim_{d→0^+} d ln(1 + 1/d) = 0，且 ψ(1) = 1 + ln 2 ≈1.693 > 1 ≥ 1 − a_0。根据介值定理和严格单调性，存在唯一根 d_critical ∈ (0, 1 − a_0)。

为求 得 (4)，令 $c := 1 - a_0 \in (0, 1]$ 且 $u := 1 + 1/d_{\text{critical}} > 1$，于是 $d_{\text{critical}} = (u - 1)^{-1}$。那么

$$\psi(d_{\text{critical}}) = c \iff \frac{1 + \ln u}{u - 1} = c \iff \ln u - cu = -(1 + c).$$

两边取指数并乘以 −c，得到 (−cu) e^−cu = −c e^−(1+c)。令 w := −cu。由于 u > 1，我们有 ln u > 0，因此 cu = 1 + c + ln u > 1 + c > 1，所以 w < −1。此外，在 (0, 1] 上，映射 c ↦ c e^−c 在 c = 1处取得最大值，从而

$$-c\, e^{-(1+c)} = -e^{-1}\left(c\, e^{-c}\right) \in \left[-e^{-2}, 0\right) \subset \left(-e^{-1}, 0\right).$$

因此，w 严格位于兰伯特 W 函数的下实分支上：$w = W_{-1}\left(-ce^{-(1+c)}\right)$。代入$1 + 1/d_{\text{critical}} = u = -w/c$ 得到 $d_{\text{critical}} = c/(-w - c)$，即式（4）。 □

定理 *1* 的证明。根据引理 3，令 $d_{\text{critical}} = d_{\text{critical}}(a_0)$。由引理 2(b)，$h(a^{\text{peak}}) = (1 - a_0) - \psi(d_m)$，因此 $h(a^{\text{peak}}) \geq 0$ 当且仅当 $d_m \leq d_{\text{critical}}$ （因为 ψ 严格递增）。
情形（i）： d_m ≤ d_critical(a_0)。此处 h(a^peak) ≥ 0，这意味着 a^peak = a_0 + d_m + h(a^peak) > a_0。在[a_0, a_peak]的端点处，我们有 h(a_0) = −(1 + d_m) r(a_0) < 0 且 h(a^peak) ≥ 0。由于 h 在[a_0,a_peak]上严格递增且连续，因此存在一个唯一最小根 a^* ∈ (a_0, a_peak]，满足 h(a^*) = 0，即 g(a^*) = a^*。（注意，a^* < 1，因为 a_peak < 1；当 d_m = d_critical时，h(a^peak) = 0 给出 a^* = a^peak = a_0 + d_critical。）
在 [a_0,a^*) 上，h(a) < 0，因此由 (5) 可得 g(a) > a。我们用归纳法证明，对于每个 n ≥ 1，都有 a_n ∈ [a_0, a^*) 且 a_{n+1} > a_n。当 n = 1时，a_1 = a_0 < a^*。假设 a_n ∈ [a_0,a^*)，则由 g 的严格单调性（引理 2(a)）可得

$$a_n < g(a_n) < g(a^*) = a^* < 1.$$

因此 $\mathcal{D}_n = g(a_n) - a_n < 1 - a_n$，所以 (2) 中的停止条件永远不会触发，并且 a_{n+1} = g(a_n) ∈ (a_n, a^*)。由单调收敛定理，a_∞ := lim_{n→∞} a_n 存在，且属于 (a_0, a^*]。由于 g 在 [a_0,a^*] 上连续，a_∞ = g(a_∞)，即 h(a_∞) = 0。由于 a^* 是 h 在 [a_0,a^*] 中的唯一根，因此我们得出 a_∞ = a^*。因此， $\mathcal{D}_n = a_{n+1} - a_n \to 0$，由 (2d) 得

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{r(a^*)}{1 - r(a^*)}\left(e^0 - 1\right) = 0.$$

情形（ii）： $d_m > d_{\text{critical}}(a_0)$。这里 $h(a^{\text{peak}}) = (1 - a_0) - \psi(d_m) < 0$。根据$h$ 在 $\mathbb{R}$ 上的严格凹性，

$$\max_{a\in[a_0,1]} h(a) = -\varepsilon < 0, \qquad \text{where} \qquad \varepsilon := \begin{cases} -h(a_{\text{peak}}) & \text{if } a_{\text{peak}} \geq a_0, \\ -h(a_0) = (1 + d_m)\, r(a_0) & \text{if } a_{\text{peak}} < a_0. \end{cases}$$

每当$a_n \in [a_0, 1)$，引理 1 和（5）意味着

$$\mathcal{D}_n \;=\; \frac{-h(a_n)}{1-r(a_n)} \;\geq\; -h(a_n) \;\geq\; \varepsilon \;>\; 0.$$

因此，只要迭代继续进行，$a_{n+1} = a_n + \mathcal{D}_n \geq a_0 + n\,\varepsilon$。对于某个阶段 $k \leq N_{\max} := \lceil (1-a_0)/\varepsilon \rceil$，我们必定会达到 $\mathcal{D}_k \geq 1 - a_k$，从而触发式（2）中的停止保护条件，迭代次数为 $n = k+1$，并在有限步内导致完全停电。 □

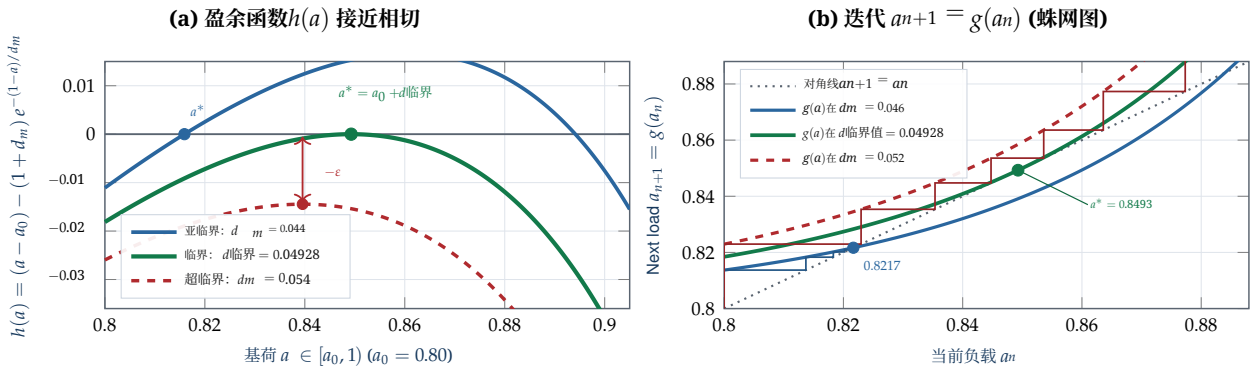

图1：$a_0 = 0.80$ 时证明的几何图示。(a) g 的不动点是严格凹盈余函数 h(a) 的零点。当 d_{critical} ($d_m = 0.044$) 以下时，h 在 $a^* = 0.8159$ 处穿过零点；当 $d_{\text{critical}} = 0.04928$ 时，h 在 $a^* = a_0 + d_{\text{critical}} = 0.8493$ 处与零点相切；当 d_{critical} ($d_m = 0.054$) 以上时，$h(a) \leq -\varepsilon < 0$ 处处如此。(b) $a_{n+1} = g(a_n)$ 的蛛网图：单调阶梯在 $d_m = 0.046$ 时收敛至 $a^* = 0.8217$，而在 $d_m = 0.052$ 时则从对角线上方的间隙逃逸至 1。

3 直接推论

推论 1 (临界存活比例跃变)。 当 $d_m = d_{\text{critical}}(a_0)$ 时，级联完成后存活节点的比例严格大于零：

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1-p_k) \;=\; 1 - e^{-\frac{1-a^*}{d_{\text{critical}}}} \;=\; 1 - \frac{d_{\text{critical}}}{1+d_{\text{critical}}} \;=\; \frac{1}{1+d_{\text{critical}}(a_0)},$$

而对于所有 $d_m > d_{\text{critical}}(a_0)$，存活比例会不连续地降至 0 （一级相变）。

证明。 根据引理 2(b)，在 (8) 中取 $n \to \infty$，令 $a^* = a_{\text{peak}} = 1 - d_{\text{critical}}\ln(1 + 1/d_{\text{critical}})$，则 $e^{-(1-a^*)/d_{\text{critical}}} = d_{\text{critical}}$ $1+d_{\text{critical}}$。 □

推论 2 (任意均匀容量 $L_{\max} > 0$)。 若每台发电机的容量均为 $L_{\max} > 0$，且初始负载为 $a_0 \in [0, L_{\max})$，将负载按 $L_{\max}$ 缩放后，阈值条件仍为无量纲形式，并可得

$$L_{\max} - a_0 \;=\; d_{\text{critical}}\left(1 + \ln\left(1 + \frac{L_{\max}}{d_{\text{critical}}}\right)\right), \qquad d_{\text{critical}}(a_0; L_{\max}) \;=\; L_{\max}\cdot d_{\text{critical}}\left(\frac{a_0}{L_{\max}}\right).$$

推论 3 (精确的 $d_{\text{critical}}(a_0)$ 曲线下方面积)。 $d_{\text{critical}}\colon [0,1] \to [0, d_{\text{critical}}(0)]$ 下方的面积为

$$\int_0^1 d_{\text{critical}}(a_0)\,da_0 \;=\; \frac{1}{2}\,\ln\!\big(1 + d_{\text{critical}}(0)\big) \;=\; 0.191248771449\ldots$$

证明。 由于d_{critical} 严格递减，并且可通过$a_0(d) = 1 - d - d\ln(1 + 1/d)$ 从$d = 0 (a_0 = 1)$到$d_0 := d_{\text{critical}}(0)$ $(a_0 = 0)$连续求逆，因此交换积分轴：

$$\int_0^1 d_{\text{critical}}(a_0)\,da_0 \;=\; \int_0^{d_0} a_0(d)\,dd \;=\; \int_0^{d_0}\big(1 - d - d\ln(1+1/d)\big)\,dd.$$

利用原函数 $\frac{d}{dd}\left[\frac{1}{2}\big(d^2\ln(1+1/d) + d - \ln(1+d)\big)\right] = d\ln(1+1/d)$，我们在 $[0, d_0]$ 上求值，并用 $d_0\ln(1+1/d_0) = 1 - d_0$（即 $d_0^2\ln(1+1/d_0) = d_0 - d_0^2$）进行化简：

$$\int_0^{d_0} a_0(d)\,dd \;=\; d_0 - \frac{d_0^2}{2} - \frac{1}{2}\Big[(d_0 - d_0^2) + d_0 - \ln(1+d_0)\Big] \;=\; \frac{1}{2}\,\ln(1+d_0).$$ □

4 数值验证及关于2010年图表的说明

表2直接在 $(a_0, d_m) = (0.80, 0.048)$ 处验证引理 1：根据 (1)–(2) 计算 $(a_n, \mu_{n-1}, \mathcal{D}_n, p_n)$，所得结果与标量映射 $g(a_n)$ 在机器精度范围内一致（$\le 1.1 \times 10^{-16}$ 涵盖所有轮次）。表3列出了根据 (4) 得到的 $d_{\text{critical}}(a_0)$ 的精确值。

表2： 逐项比较(1)–(2) 与一维约化 $a_{n+1} = g(a_n)$ 在 $a_0 = 0.80$、$d_m = 0.048$ 时的结果。极限载荷为 $a^* = 0.8309841098$。

n	a_n	μ_{n-1}	$\mathcal{D}_n$	p_n	$\lvert$甲$_n + \mathcal{D}_n) -$ 伽(甲$_n)\rvert$
1	0.80000000	1.048000*	1.6504×10^{-2}	6.4621×10^{-3}	0.0×10^{0}
2	0.81650391	1.007780	6.5547×10^{-3}	3.2709×10^{-3}	1.1×10^{-16}
3	0.82305860	1.003203	3.2921×10^{-3}	1.8252×10^{-3}	1.1×10^{-16}
4	0.82635073	1.001627	1.8315×10^{-3}	1.0729×10^{-3}	1.1×10^{-16}
5	0.82818224	1.000910	1.0750×10^{-3}	6.4976×10^{-4}	1.1×10^{-16}
10	0.83071515	1.000078	9.8735×10^{-5}	6.2371×10^{-5}	0.0×10^{0}
15	0.83095660	1.000008	1.0055×10^{-5}	6.3790×10^{-6}	1.1×10^{-16}
25	0.83098382	1.000000	1.0655×10^{-7}	6.7624×10^{-8}	1.1×10^{-16}
40	0.83098411	1.000000	1.1643×10^{-10}	7.3901×10^{-11}	1.1×10^{-16}

*当 $n = 1$，$\mu_0 = 1 + d_m = 1.048$ 和 $p_0 = e^{-0.2/0.048} = 1.5504 \times 10^{-2}$。

表3： 所选精确值 $d_{\text{critical}}(a_0)$ 取自 (4)，极限载荷 $a^* = a_0 + d_{\text{critical}}$，存活比例 $(1 + d_{\text{critical}})^{-1}$，以及与图5–7中出现的符号翻转 (+)错误值的比较 [1]。

a_0	精确 $d_{\text{critical}}(a_0)$	$a^* = a_0 + d_{\text{critical}}$	剩余分数。$1 + \frac{1}{d_{\text{critical}}}$	(+)-错误阈值	残差 (3)
0.00	0.465941272385	0.46594127	0.682156	0.393108 (−15.6%)	0.0×10^{0}
0.01	0.459126812951	0.46912681	0.685341	0.388101 (−15.5%)	0.0×10^{0}
0.20	0.336129355299	0.53612936	0.748431	0.295103 (−12.2%)	-1.1×10^{-16}
0.50	0.171002214031	0.67100221	0.853969	0.159722 (−6.6%)	-1.1×10^{-16}
0.80	**0.049281593062**	**0.84928159**	**0.953033**	0.048460 (−1.7%)	0.0×10^{0}
0.90	0.020345784230	0.92034578	0.980060	0.020227 (−0.6%)	-1.4×10^{-17}
0.95	0.008689097104	0.95868910	0.991386	0.008671 (−0.2%)	$+6.9 \times 10^{-18}$
0.99	0.001308924995	0.99130892	0.998693	0.001309 (−0.02%)	0.0×10^{0}

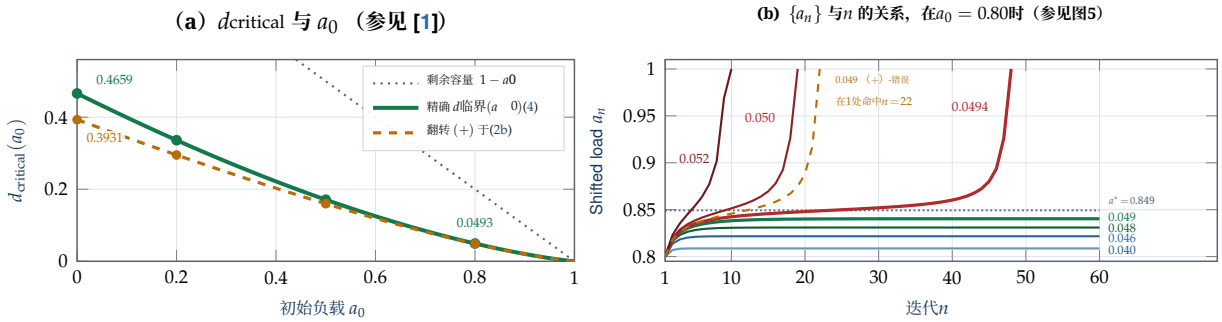

图2：（a）由(4)得到的精确临界阈值 dcritical(a_0)，与剩余容量 $1 - a_0$ 以及将(2b)中的 $-$ 替换为 $+$ 所得曲线的比较。（b）在 $a_0 = 0.80$ 时，精确递推(1)–(2)的样本 $\{a_n\}$ 轨迹。请注意，在精确递推下，$d_m = 0.049$ 最终收敛至0.8403；而将符号翻转的（+）版本（琥珀色虚线）经过 $a_{21} = 0.9175$，并在 $n = 22$时穿过1。

关于 arXiv:1011.4098v1 图5–7所绘阈值的备注arXiv:1011.4098v1 在0802.tex中，方程(2b)印有正确的减号，$\mu_{n-1} = 1 + d_m - \mathcal{D}_{n-1} e^{\mathcal{D}_{n-1}/d_m - 1}$。然而，~~[1] 中~~的嵌入图在 $a_0 = 0.80$ 时报告 $d_{\text{critical}} \approx 0.048$（具体为 0.048460），而非 0.049282。在 μ_{n-1} 中将 $-$ 替换为 $+$，即可定量解释所有初始负载下绘制的曲线（表3和图2）：符号翻转时，$d_m = 0.049$ 在 $a_{21} = 0.9175$ 处停止（与 [1]图5中1之前的最后一个标记相符）；而在精确递推下，它在 $a^* = 0.840313$ 时仍无限期存续。直接进行 $N = 100{,}000$ 次有限网络蒙特卡洛模拟，证实了精确阈值（$a_0 = 0.80$：$d_m = 0.0488$ 在3/3次模拟中存续，且有 $\approx 96.4\%$ 存活；$d_m = 0.0497$ 在3/3次模拟中失败；$a_0 = 0.20$：$d_m = 0.310 > 0.295$ 在3/3次模拟中存续，且有$\approx 86.8\%$ 存活）。

参考文献

[1] S. Kadloor 和 N. Santhi，“理解 电网中的级联故障”，arXiv:1011.4098v1 [physics.soc-ph]，2010年11月（0802.tex ）。