arXiv:2611.30926v1 [math.DG] 23 Nov 2026

双曲乘积中的余维二补空间

HYERAN CHO、JEAN-FRANC.OIS LAFONT、NICHOLAS MILLER、BARRY MINEMYER

Abstract. 设 M 是一个以 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$ 为模型的有限体积局部对称流形，并设 S 是 M 中一个以 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 为模型的紧致、全测地余维二子流形。本文开启了对形如 $N = M \setminus S$ 的流形的研究。当 M 是乘积且 S 连通时，我们证明这类 N 存在完备、有限体积、 A-正则且具有非正截面曲率的度量。我们还推导出关于 N 的一些拓扑性质，以及关于 $\pi_1(N)$ 的代数性质。当 M 不可约时，我们证明 N 具有 *almost non-positive curvature*。对于流形 X_d，也有类似结果；它们是 M 沿 S 分歧的 d 重分支覆盖。在此过程中，我们证明这类配对 $(M,\ S)$ 存在无穷多个可公度类，并推导出双重扭曲乘积度量的一般曲率公式，这些公式本身也可能具有独立的研究价值。

1. Introduction

在对非正曲率黎曼流形的研究中，一个长期存在的问题是例子的相对匮乏。一个常见主题是寻找从现有例子构造新例子的程序。为此，设 M 是一个有限体积、完备的非正曲率黎曼流形，且 $S \subset M$ 是一个嵌入的全测地余维二子流形。令 $N = M \setminus S$，并且对于某个整数 $d > 2$，假设存在一个光滑流形 X_d，它是关于 S 的 d 重分歧分支覆盖，覆盖 M。

关键问题： 从微分几何的角度来看，核心问题如下：

(1) N 是否允许一个完备、有限体积的非正曲率度量？(2) X_d 是否允许一个非正曲率黎曼度量？

当 (M, S) 以一个负曲率对称空间和一个全测地余维二对称空间为模型时，这些问题已经得到了详细研究。对于分支覆盖构造 X_d，最早的成果由 Gromov–Thurston [19] 在 M 为实双曲的情形下获得，其中该对以 $(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^{n-2})$ 为模型。他们构造了这样的例子：奇异拉回度量可以经过光滑化，使其曲率任意接近 -1。最近，Stover–Toledo [36] 在某些复双曲流形上构造了分支覆盖，而 Minemyer [29] 解决了光滑化问题，构造出夹挤常数接近 1 的负曲率度量

/4 在这些分支覆盖上。这对应于情形（$\mathbb{CH}^n$，$\mathbb{CH}^{n-1}$）。其他一些有趣的黎曼平滑化已

Date: 2026年11月24日。

在 Stover–Toledo 例子上构造出来，参见例如 Zheng [37], Guenancia– Hamenst¨adt [20], 和 Lafont–Minemyer [26]。

对于补集 N，Belegradek [4],研究了实双曲情形，而以 $(\mathbb{CH}^n, \mathbb{CH}^{n-1})$ 为模型的复双曲情形则在随后的一篇论文 [3] 中得到了处理。在这两种情形下，补集 N 上都存在完备的有限体积负曲率度量。以全实嵌入 $(\mathbb{CH}^2, \mathbb{H}^2)$ 为模型的特殊情形由 Minemyer [28]，研究，他构造出了所需的度量。

转向非正曲率情形后，问题变得更具挑战性。关键在于，负曲率是一个开条件，而对非正曲率度量进行小幅扰动往往会引入正曲率。Stadler [35] 的一项突破性结果表明，对于以对角嵌入 $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2, \Delta(\mathbb{H}^2))$ 为模型的分支覆盖情形，存在这样的例子：分支覆盖 X_d **并不**承载任何非正曲率黎曼度量。这是唯一考虑过这一问题的情形。

一般情形。 在本文中，我们开始研究这样一种情形下的问题：该对偶模型建立在 $(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n,\ \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1})$ 上，其中 $m,\ n \geq 2$。虽然我们无法解决原问题，但可以证明，光滑流形X_d 和 N 是几乎非正曲率的。我们的主要结果如下：

定理 1.1。 设(M, S) 局部建模于对$(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n, \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1})$，并设 N 和 X_d 如上所定义。则对于任意 $\varepsilon > 0$，有

(1) 非紧流形 N 具有一个完备黎曼度量 g_ε，使得所有截面曲率均为 $\leq \varepsilon$，并且 $\mathrm{Vol}(g_\varepsilon) \leq V$，其中 V 为某个一致常数（与 ε无关）。（2）分支覆盖 X_d 具有一个黎曼度量 h_ε，使得所有截面曲率均为 $\leq \varepsilon$。此外，给定任意 $\xi > 0$, 度量h_ε 可以选取为满足 $\mathrm{Vol}(X_d, h_\varepsilon) \leq d\,\mathrm{Vol}(M) + \xi$。

注意，在上述定理中，体积的一致上界 V 被用作归一化条件。否则，只需在 M 上取任意完备黎曼度量，再对该度量进行缩放，使截面曲率为 $\leq \epsilon$ 即可。

在这两种构造中，方法都是利用扭曲积构造，在 S 的一个极小邻域内修改对称度量。此时，非正曲率约束转化为一组非线性偏微分不等式。利用构造中的对称性，可以将其重新表述为某个二阶矩阵族为负半定的条件。对这一矩阵族的谱性质进行分析，便得到了我们的结果。

这些平滑化问题相当微妙。举一个说明性的例子，考虑双曲型对合，它可实现为平坦二维环面上的一个等距对合。其商空间在拓扑上是一个二维球面，配备了一个带有四个锥角为 π 的奇点的平坦度量。虽然可以在奇点的任意小邻域内光滑化这四个奇点，但高斯–博内定理迫使该邻域内的曲率趋于 $+\infty$。事实上，高斯–博内定理意味着它**并非**几乎处处具有非正曲率。

与此相反，我们的结果表明，只要允许出现任意小的正曲率，就可以将分支覆盖X_d中的奇点光滑化。我们的光滑化也可以在任意小的邻域内进行

分支轨迹 S （不过在这种情况下，会有切二维平面的截面曲率趋于 $-\infty$）。感兴趣的读者还可以将此与 Gromov–Thurston 例子 [19] 以及 Stover–Toledo 例子 [29], 进行比较：在这些例子中，要在保持曲率紧贴对称度量的同时进行光滑化，需要奇异轨迹 S周围具有较大的法向单射半径。

乘积情形。 由于我们无法仅通过局部方法构造出非正曲率的光滑度量，因此考虑加入一些全局假设是自然的。

当 M 是一个乘积时，问题变得容易处理得多，我们可以证明：

定理 1.2。 设 (M, S) 局部模型为对子 $(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n, \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1})$，并假设 M 是一个乘积，且 S 是连通的。如果 N 和 X_d 如上所定义，则

(1) N 承认一个完备、有限体积的 A-正则[1], 非正曲率黎曼度量，并且 *(2)* X_d 承认一个非正曲率黎曼度量。

上述陈述 (2) 归因于 Fornari–Schroeder [16], ，此处列出是为了完整起见。这里的思路是利用全局乘积结构，在 M 上构造一个非正曲率度量，使其在子集 S 的横向上局部平坦，即相对于 S，该度量局部等距于 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$。随后，Fornari–Schroeder 证明，保持非正曲率的同时，可以在S 附近对 X_d 上的拉回度量进行局部光滑化。对于陈述 (1)，我们将 Belegradek 在 [3] 中的 A-正则度量构造加以改编，以说明如何在 S 的一个（去掉中心的）管状邻域内修改横向局部平坦的度量，从而构造出所需的尖点。这类似于 Avramidi 和 Nguyen-Phan 在 [1]中的“漏斗”构造。定理 1.2 在更一般的情形下仍然成立。只要其在各因子上的投影彼此不相交，子流形 S 不必是连通的。

拓扑与代数应用。 当一个流形支持非正曲率度量时，会产生一些强有力的拓扑与代数推论。作为第一个应用，注意到定理 1.2 中的流形 N 可以¯紧致化为一个带边界 ∂N的非球面流形。结合 Farrell–Jones [15] 的工作，我们可以得出一个拓扑刚性结果：

推论 1.3 （Borel 猜想）。 设 (M, S) 如定理 *1.2* 所述，并假设 维数 $M \geq 5$。设 N'为一个带边界 $\partial N'$的非球面流形，并假设_ _ϕ：$(N', \partial N') \to (N, \partial N)$ 是一个同伦等价，并且在边界上是同胚。那么， ϕ 可以相对于边界同伦为一对流形之间的同胚。

从群论视角来看，穿孔流形 N 的基本群与 M 的基本群之间的关系十分复杂。$\pi_1(N)$ 是 Gromov 意义下的超格例子：它们是附带到一致格的自然满射的 Pg 126], 群。在 M 负曲率且 S 全测地的情形下，Belegradek–Hruska [5] 证明了 $\pi_1(N)$ 是相对双曲的，从而得以推导出_ _$\pi_1(N)$ 的大量性质（另见 [4], [3]）。相比之下，在我们的设定中，数对 $(\pi_1(N)\ \pi_1(\partial N))$ 不能

[1]参见定义 5.1。

由于远离端部存在大量 $\mathbb{Z}^2$-子群，因而是相对双曲的。尽管如此，在乘积情形下，我们有某些群图分解，可利用它们验证 $\pi_1(N)$ 的一些代数性质。

定理 1.4（代数性质）。假设 M 是紧致的、一个乘积，并且 S 是连通的。那么对于补空间 N、$\pi_1(N)$，满足以下性质：

（*1*）一致指数增长（*2*）蒂茨替代定理（*3*）*Kazhdan* 子群总是平凡的（*4*）有限渐近维数（*5*）鲍姆–康恩猜想（带系数）（*6*）*RD* 性质（快速衰减）

本文的结构。本文其余部分安排如下。第 2 节介绍以 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$ 为模型的局部对称空间的预备知识，并以定理 2.8 作为总结；该定理表明，对于 $m,\ n \geq 3$，存在无穷多个满足定理 1.1 假设的流形可公度类。在第 3 节中，我们解释并补充一项曾被简要概述的构造[16, 第 3] 节，并利用它证明定理 1.2（1）。此外，我们更详细地说明了当 M 不是乘积时该论证为何失效。我们还推导了与乘积度量 $\tilde{\mathfrak{h}}_m \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_n$ 相对应的扭曲乘积度量的曲率公式，该乘积度量是在 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 的一个副本周围用极坐标写出的。在第 4 节中，我们利用定理 3.7 的曲率公式证明定理 1.1。最后，在第 5.2 节中证明定理 1.4。

致谢： Cho 和 Lafont 得到了编号为 DMS–2407438 的资助的部分支持，Miller 得到了美国国家科学基金会编号为 DMS–2405264/2630020 的资助的部分支持。Minemyer 得到了 AMS-Simons 研究提升资助（主要面向本科院校教师）的部分支持。

在撰写本文时，使用了公开可用版本的 ChatGPT 来构造一些光滑化函数。为方便读者起见，与人工智能相关的论证已集中放在附录中。附录中论证的正确性已由作者独立验证。本文其余部分（第 1–5 节）未使用人工智能。最终稿由 ChatGPT 进行了校对，并根据人工智能报告进行了小幅修改。

2. Lattices in Isom($\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$)

2.1. 关于以 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$ 为模型的局部对称空间的一般性。 在本小节中，我们回顾一些关于局部对称轨形 M 的基本事实，其万有覆盖等距于 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$，其中 $m,\ n \geq 3$。

全文中，我们用 q_m 表示 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的标准二次型，其定义公式为

$$q_m(x_1, \ldots, x_{m+1}) = x_1^2 + \cdots + x_m^2 - x_{m+1}^2. \tag{2.1}$$

双曲空间的双曲面模型随后给出为

$$\mathbb{H}^m = \left\{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid q_m(x_1, \ldots, x_{m+1}) = -1,\ x_{m+1} > 0\right\}, \tag{2.2}$$

而该模型的保向等距变换群 Isom$^+(\mathbb{H}^m)$ 为

$$\mathrm{SO}_0(m,1) = \left\{A \in \mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R}) \mid q_m(Ax) = q_m(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^{m+1}\right\}^\circ,$$

其中，方程右侧的上标表示单位连通分支。特别是，

(2.3) $\mathrm{SO}_0(m,\ 1)\times\mathrm{SO}_0(n,\ 1)\cong\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m)\times\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)\leq_{f.i.}\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)$,

其中，该记号表示这是一个有限指数子群。为简化记号，在本节余下部分我们记 $G_k=\mathrm{SO}_0(k,\ 1)$。

回顾一下，若存在 $g\in\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)$，使得 $\Gamma\cap g\Gamma' g^{-1}$ 是 Γ 和 $g\Gamma' g^{-1}$ 的有限指数子群，则两个离散子群 $\Gamma,\ \Gamma'<\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)$ 是<通过广义意义上的>可公度的。几何上，这等价于 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)/\Gamma$ 和 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)/\Gamma'$ 具有一个公共有限覆盖。可公度性构成一个等价关系，我们主要关注子群（等价地，轨形）的可公度类。因此，方程 (2.3) 表明，我们可以将注意力集中于子群 $\Gamma<G_m\times G_n$。

如果 $\Gamma<G_m\times G_n$ 是一个格，那么 Γ 是离散的，且商空间 $(G_m\times G_n)/\Gamma$ 的哈尔测度有限；等价地说，轨形空间 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)/\Gamma$ 具有有限体积。如果格 Γ 还无挠，那么商空间 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)/\Gamma$ 就是有限体积流形。这类格总是有限生成的 $[32,\text{ 推论 }13.15]$，因此塞尔伯格引理 $[34,\text{ 引理 }8]$ 允许我们找到一个有限指数子群$\Gamma'\leq\Gamma$，该子群无挠，因而是有限体积流形 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)/\Gamma'$，并且有限覆盖 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n)/\Gamma$。因此，现阶段我们暂且搁置要求格无挠这一问题。

定义 2.1。如果格 $\Gamma<G_m\times G_n$ 在 G_m、G_n 上的投影均为稠密的，则称其为不可约；否则称为可约。

注记 2.2。通过令 $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$，其中 $\Gamma_1<G_m$ 和 $\Gamma_2<G_n$ 是格，可以直接构造可约格；事实上，所有可约格都有一个形如 $[32,\text{ Ch }5]$ 的有限指数子群。

众所周知，在 $G_m\times G_n$ 中存在不可约格，当且仅当 G_m 和 G_n 同型，也就是说，它们的复化的单因子等价（例如参见 $[30,\text{ Ch 5F}]$）。通过简单的维数论证可知，当且仅当 $m=n$ 或 $m,\ n\in\{2,3\}$ 时，这才有可能。当 $m=n$ 时，根据 Margulis 的开创性工作，不可约格必为算术格 $[27,\text{ Ch IX}],$，因为 $G_m\times G_n$ 是一个高秩李群。

2.2. **双曲空间乘积中的最简单型算术格**。本小节将介绍如何在 $G_m\times G_n$ 中构造不可约算术格族，只要 $m=n\geq 2$。事实上，由于只需少量额外工作，我们将介绍如何为任意 $k\in\mathbb{N}$ 在 $(G_m)^k$ 中构造无穷多个可公度类的算术格，因而也能构造形如 $(\mathbb{H}^m\times\cdots\times\mathbb{H}^m)/\Gamma$ 的有限体积轨形。在本小节中，固定一个 $k\in\mathbb{N}$ 的选取。

设 K 是一个全实数域，满足 $d=[K:\ \mathbb{Q}]$，并将 $\sigma_i:\ K\to\mathbb{R}$ 记为 K 的伽罗瓦嵌入，其中 $1\leq i\leq d$。在下文中，我们始终要求 $d\geq k$。设 q 是定义在 K-向量空间 K^{m+1} 上的非退化 K-二次型，那么如果各形式 $q^{\sigma_1},\ldots,q^{\sigma_k}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的惯性指数均为 $(m,1)$，且对于任意 $i>k$，q^{σ_i} 都是定号的，我们就称这一对 (q,K) 是可容许的。

给定域 E 以及向量空间 E^{m+1}上的二次型 q，令 B_q 表示 q 在标准基下对应的矩阵。那么，与 $(E,\ q)$ 相关联的特殊正交群为

$$\mathrm{SO}_q(E)=\{A\in\mathrm{SL}_{m+1}(E)\mid A^TB_qA=B_q\}.$$

特别重要的一种情形是 $(q,\ K)$ 为可容许对，此时根据西尔维斯特惯性定律可得

$$\mathrm{SO}_{q^{\sigma_i}}(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathrm{SO}(m,1), & 1 \le i \le k \\ \mathrm{SO}(m+1), & i > k \end{cases}. \tag{2.4}$$

特别地，我们有嵌入

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{SO}_q(K) &\hookrightarrow \underbrace{\mathrm{SO}(m,1) \times \cdots \times \mathrm{SO}(m,1)}_{k \text{ times}} \times \prod_{i>k} \mathrm{SO}(m+1), \\ g &\mapsto (\sigma_1(g), \ldots, \sigma_k(g), \sigma_{k+1}(g), \ldots, \sigma_d(g)) \end{aligned}$$

其中，我们不严谨地省略了与方程（2.4）中的同构进行复合的步骤。如果 $\mathcal{O}_K$ 表示 K 的整数环，并且

$$\Lambda = \mathrm{SO}_q(\mathcal{O}_K) = \left\{ A \in \mathrm{SL}_{m+1}(\mathcal{O}_K) \mid A^T B_q A = B_q \right\},$$

那么 $\psi(\Lambda)$ 在 $\mathrm{SO}(m,1)^k \times \mathrm{SO}(m+1)^{d-k}$ 中是离散的。事实上，这是因为借助由伽罗瓦嵌入诱导的类似映射，$\mathcal{O}_K$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是离散的。此外，Borel–Harish-Chandra 的一个重要定理表明，$\psi(\Lambda)$ 是该乘积中的一个格。

令 π 表示从该乘积到 $\mathrm{SO}(m,1)^k$ 因子的投影，则可得 $\Gamma = \pi(\psi(\Lambda)) \cap (G_m)^k$ 是 $(G_m)^k$ 中的一个格。事实上，π 的核是紧群 $\prod_{i>k} \mathrm{SO}(m+1)$。同样可以直接从构造中验证，当 $k \ge 2$ 时，$(G_m)^k$ 在每个 G_m 因子上的投影都是稠密的，因此 Γ 是 $(G_m)^k$ 中的不可约格。

定义 2.3. 我们将 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m \times \cdots \times \mathbb{H}^m)$ 中任何与上述构造的某个 Γ 可公度的格称为**最简型不可约算术格**。给定这样一个格，我们将用于构造 Γ 的有序对 (q, K) 称为与该格相关联的**算术数据**。

由此定义可得出几个事实，我们将其列为备注。

备注 2.4. 给定两个最简单型算术格 Γ、Γ'，其相关联的算术数据分别为 (q, K)、(q', K')，则 Γ 与 Γ' 可公度，当且仅当 $K \cong K'$、q 和 q' 属于同一个 K-相似类。后者意味着，对于某个 $\lambda \in K^*$，q 与 $\lambda q'$ 是 K-等距的。特别地，数域 K 和 q 的 K-相似类构成可公度类的完全不变量。

注记 2.5。根据戈德芒紧致性判据 [30, 命题 5.26]，最简单型的算术格 Γ 及其相关算术数据 (q, K) 是余紧的，当且仅当 q 是各向异性的，也就是说，不存在非零的 $v \in K^{m+1}$ 使得 $q(v) = 0$。否则，我们称 q 是各向同性的。这些概念是可公度不变量。此外，哈塞–闵可夫斯基定理表明，q 是各向同性的，当且仅当 q 在 K 的每个完备化上都是各向同性的。因此，每当 $d > k$，形式 q 必定是各向异性的，因为至少存在一个与伽罗瓦嵌入相关的完备化，使得 q 是正定的（因而也是各向异性的）。

为具体起见，我们以几个由上述构造得到的格的简单示例族结束本小节。

例 2.6. 设 $k=1$ 为上述讨论中的对象，下面我们构造 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m)$ 中最简单型算术格的两个示例族。设 $K_D=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$，其中 $D\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ 无平方因子，并定义以下两个二次型

$$\begin{aligned} q_m(x_1,\dots,x_{m+1}) &= x_1^2+\cdots+x_m^2-x_{m+1}^2,\\ f(x_1,\dots,x_{m+1}) &= x_1^2+\cdots+x_m^2-\sqrt{D}x_{m+1}^2, \end{aligned}$$

其中前者是一个 $\mathbb{Q}$二次型，后者是一个 K_D二次型。显然，数对 $(q_m,\ \mathbb{Q})$ 是可容许的；若 $\sigma_1,\ \sigma_2$ 是 K_D 的伽罗瓦嵌入，则显然可见，f^{σ_1} 的惯性指数为 $(m,\ 1)$，而 f^{σ_2} 的惯性指数为 $(m+1,\ 0)$，因此数对 $(f,\ K_D)$ 同样是可容许的。特别地，

$$\Gamma_1=\pi(\psi(\mathrm{SO}_{q_m}(\mathbb{Z})))\cap G_m,\quad \Gamma_{2,D}=\pi(\psi(\mathrm{SO}_f(\mathcal{O}_{K_D})))\cap G_m,$$

分别是 G_m 中最简单型的不可约算术格，其算术数据分别为 $(q_m,\ \mathbb{Q})$、$(f,\ K_D)$。

根据注 2.5 中的讨论，不难验证，对于任意 $m\geq 2$，商空间 $\mathbb{H}^m/\Gamma_1$ 始终是有限体积的非紧致轨形。另一方面，由于 $d=2>k=1$，注 2.5 也表明，轨形 $\mathbb{H}^m/\Gamma_{2,\ D}$ 实际上始终是紧致的。此外，由于 $K_D\cong K_{D'}$ 当且仅当 $D=D'$，根据注 2.4 可知，对于任意 m，随着 D 遍历无平方因子自然数集合，后者这些轨形属于无限多个不同的可公度类。

例 2.7. 现在考虑 $k=2$ 的情形。令 K_D 与前面相同，并令 $L_{D,\ D'}=\mathbb{Q}(\sqrt{D},\ \sqrt{D'})$，其中 $D,\ D'\in\mathbb{N}$ 均无平方因子，且满足 $D<D'$。定义以下两个二次型

$$\begin{aligned} h_1(x_1,\dots,x_{m+1}) &= (D-\sqrt{D})x_1^2+\cdots+x_m^2-x_{m+1}^2,\\ h_2(x_1,\dots,x_{m+1}) &= x_1^2+\cdots+x_m^2-(\sqrt{D}+\sqrt{D'})x_{m+1}^2, \end{aligned}$$

前者是一个 K_D-二次型，后者是一个 $L_{D,\ D'}$-二次型。由于 h_1 是 K-定义的，$D-\sqrt{D}$ 在 K_D 中不是平方数，且 $D\pm\sqrt{D}>0$，由此可知 $h_1^{\sigma_1}$、$h_1^{\sigma_2}$ 的惯性指数为 $(m,\ 1)$，因此 $(h_1,\ K_D)$ 是可容许的。类似地可以验证，$(h_2,\ L_{D,\ D'})$ 是可容许的，因为 $\pm\sqrt{D}+\sqrt{D'}>0$ 和 $\pm\sqrt{D}-\sqrt{D'}<0$ 各自表示 $\sqrt{D}+\sqrt{D'}$ 在多二次扩张$L_{D,\ D'}/\mathbb{Q}$ 的某个伽罗瓦嵌入下的像。特别是，

$$\Gamma_{1,D}=\pi(\psi(\mathrm{SO}_{h_1}(\mathcal{O}_{K_D})))\cap(G_m)^2,\quad \Gamma_{2,(D,D')}=\pi(\psi(\mathrm{SO}_{h_2}(\mathcal{O}_{L_{D,D'}})))\cap(G_m)^2,$$

是 $G_m\times G_m$ 中具有算术数据 $(h_1,\ K_D)$、$(h_2,\ L_{D,\ D'})$（分别）的最简单型不可约算术格。

和之前一样，注 2.4 表明，当且仅当 $D=D'$ 时，$\Gamma_{1,\ D}$ 与 $\Gamma_{1,\ D'}$ 可公度。类似地，如果与 $(D,\ D')$、$(E,\ E')$ 相关的多二次扩张不同，则 $\Gamma_{2,\ (D,D')}$、$\Gamma_{2,\ (E,E')}$ 不可公度。此外，h_1 显然是各向同性的，因此根据注 2.5，有限体积轨形 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^m)/\Gamma_{1,\ D}$ 总是非紧。另一方面，由于 $[L_{D,D'}:\ \mathbb{Q}]=4>k=2$，同一注表明有限体积轨形 $(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^m)/\Gamma_{2,\ (D,D')}$ 总是紧致。

令 $D<D'$ 遍历所有无平方因子自然数，我们构造了两族两两不可公度、不可约的轨形，它们的万有覆盖都与 $\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^m$等距；一族总是闭的，另一族则总是有限体积且非紧。具体来说，

若（D，D'）遍历（2，p），其中 p 为奇素数，则所得的格 $\Gamma_{2,\ (D,D')}$ 两两不可公度。

2.3. 轨形中模仿 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$. 的全测地子空间。假设 M 是一个轨形，其万有覆盖等距于 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$，其中 m，$n \geq 3$；类似地，Z 是一个轨形，其万有覆盖等距于 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$。若映射 $\iota\colon Z \to M$ 满足 ι 是正规的，且其任一提升 $\widetilde{\iota}\colon \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1} \to \mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$ 都是全测地嵌入，则称其为**真全测地浸入**。相应地，我们称 $S = \iota(Z) \subset M$ 为**浸入的全测地子空间**。当 ι是嵌入时，我们称 S 为嵌入的；当 Z 是流形时，我们会注明这一点。

若 $\Gamma = \pi_1(M)$，正规的等价条件是要求子群

$$\Pi = \mathrm{stab}_\Gamma\left(\widetilde{\iota}\left(\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}\right)\right) < \Gamma,$$

稳定提升 $\widetilde{\iota}$，是 $\mathrm{stab}_{\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)}\left(\widetilde{\iota}\left(\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}\right)\right)$中的一个格。令

$$j : G_{m-1} \times G_{n-1} \hookrightarrow G_m \times G_n. \tag{2.5}$$
$$(A, B) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)$$

是从 $G_{m-1} \times G_{n-1}$ 到 $G_m \times G_n$的分块对角嵌入。于是 $j(G_{m-1} \times G_{n-1})$ 稳定 $\mathbb{H}^{m-1}{}_{\mathrm{std}} \times \mathbb{H}^{n-1}{}_{\mathrm{std}}$，其中 $\mathbb{H}^{m-1}{}_{\mathrm{std}}$ 表示通过在方程 (2.2) 中取 $x_1 = 0$ 而得到的 $\mathbb{H}^{m-1}$ 在 $\mathbb{H}^m$ 中的余维 1 等距嵌入副本（ $\mathbb{H}^n$的情形类似）。此外，$j(G_{m-1} \times G_{n-1})$是 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)$中 $\mathbb{H}^{m-1}{}_{\mathrm{std}} \times \mathbb{H}^{n-1}{}_{\mathrm{std}}$ 的完整稳定子的有限指数子群。

由于 G_m（分别地，G_n）在$\mathbb{H}^m$（分别地，$\mathbb{H}^n$）的余维 1 双曲子空间上传递地作用，因此存在 $g \in G_m \times G_n$，使得以下有限指数包含链成立

$$\begin{aligned} j(G_{m-1} \times G_{n-1})^g &\leq_{f.i} \mathrm{stab}_{G_m \times G_n}\left(\widetilde{\iota}\left(\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}\right)\right) \\ &= ((\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(m-1,1)) \times (\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n-1,1)))^g \cap (G_m \times G_n) \\ &\leq_{f.i} \mathrm{stab}_{\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)}\left(\widetilde{\iota}\left(\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}\right)\right), \end{aligned}$$

其中上标表示共轭。由于格这一性质在取有限指数子群时保持不变，因此我们得出结论：构造以 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 为模型的浸入的全测地子流形，等价于寻找满足下式的元素 $g \in G_m \times G_n$

$$\Delta = j(G_{m-1} \times G_{n-1})^g \cap \Gamma < G_m \times G_n,$$

是 $j(G_{m-1} \times G_{n-1})^g$ 中的一个格。

2.4.满足定理 1.2 和 1.1 的假设的流形例子。利用前面的小节，对于每一对 m，$n \geq 3$，我们现在给出无穷多个流形可公度类，定理 1.1 和 1.2 适用于这些流形。

定理 2.8。对于满足 m、$n \geq 3$ 的每个 m、$n \in \mathbb{N}$，都存在无穷多个有限体积流形的可公度类，其万有覆盖与 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n$ 等距，并且包含一个嵌入的紧致全测地子流形，该子流形的万有覆盖与 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 等距。此外，当 $m = n$ 时，这些流形可以取为可约或不可约。

我们并不声称定理 2.8 的陈述或证明具有新颖性；事实上，这对于熟悉算术构造的读者而言是众所周知的。然而，正如我们在上文所做的那样，我们试图为此前未在文献中见过此类构造的读者提供相关细节。

可约情形下定理 *2.8* 的证明。设 $\Lambda_1 < G_m$ 是一个固定的最简单型余紧算术格，且 $\Lambda_{2,\,i} < G_n$ 是一个由两两不可公度的最简单型余紧算术格组成的无限族。例如，可以具体取 $\Lambda_1 = \Gamma_{f,\,2}$，$\Lambda_{2,\,i} = \Gamma_{f,\,D_i}$，其中 D_i 遍历例 2.6 中的平方自由自然数集合。众所周知，由 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m)$ 中最简单型算术格的商所得到的轨形总是含有浸入的余维一全测地子空间（事实上有无穷多个）；此外，对于任意给定的紧致浸入余维一全测地子空间 $S_1 \subset \mathbb{H}^m/\Lambda_1$（分别为 $S_{2,\,i} \subset \mathbb{H}^n/\Lambda_{2,\,i}$），都存在一个有限指数子群$\Gamma_1 \leq_{f.i.} \Lambda_1$（分别为 $\Gamma_{2,\,i} \leq_{f.i.} \Lambda_{2,\,i}$），使得以下条件成立：

(1) Γ_1（分别为 $\Gamma_{2,\,i}$）是无挠的，并且（2）存在将 S_1 提升为 $\mathbb{H}^m/\Gamma_1$ 的提升 Y_1（分别为将 $S_{2,\,i}$ 提升为 $\mathbb{H}^n/\Gamma_{2,\,i}$ 的 $Y_{2,\,i}$），且该提升是嵌入的。

事实上，前者由塞尔伯格引理推出，后者的证明见 [8, 引理 1。7]（或者，我们将在下面不可约情形的证明中重述这一论证）。因此，$\Gamma_i = \Gamma_1 \times \Gamma_{2,\,i}$ 是 $G_m \times G_n$ 中的可约格，并具有以下性质：$S = Y_1 \times Y_{2,\,i}$ 是闭流形 $M_i = (\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)/\Gamma_i$ 的闭嵌入全测地子流形。此外，M_i 两两不可公度，是由 $\Gamma_{2,\,i}$ 两两不可公度推出的。□

不可约情形下定理 *2.8* 的证明。设（q，K）对于 $k = 2$ 是可容许的，其中 $d = [K : \mathbb{Q}] > 2$。在 K-相似意义下，不妨设 q 是对角的，即具有如下形式

$$q(x_1, \ldots, x_{m+1}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{m+1} x_{m+1}^2,$$

其中 $a_i \in K^*$，此外，我们还可以进一步假设，对于所有$1 \leq i \leq d = [K$，$\sigma_i(a_1) > 0$：$\mathbb{Q}]$，这是由符号条件得到的。我们令

$$\Lambda = \pi(\psi(\mathrm{SO}_q(\mathcal{O}_K))) \cap (G_m \times G_m) < G_m \times G_m,$$

为相应的格，如第 2.2 节所述。

令 $W \subset K^{m+1}$ 为由令 $x_1 = 0$ 成立所定义的 K-超平面，并注意到，根据关于 a_1 的条件，限制 $q_0 = q|_W$ 是 W 上的非退化二次型。此外，如果

$$\Xi = \pi(\psi(\mathrm{SO}_{q_0}(\mathcal{O}_K))) \cap (G_{m-1} \times G_{m-1}),$$

那么可得 $j(\Xi) < j(G_{m-1} \times G_{m-1}) < G_m \times G_m$ 此外，根据构造，$j(\Xi)$ 也是 $j(G_{m-1} \times G_{m-1})$ 中的一个不可约格。因此，按照第2.3节中的讨论，存在一个子群 $\Pi < \Lambda$，使得$\left(\mathbb{H}^{m-1}{}_{\text{标准}} \times \mathbb{H}^{m-1}{}_{\text{标准}}\right)/\Pi$ 是 $(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^m)/\Lambda$ 中的一个浸入的全测地子空间。根据塞尔伯格引理，我们总能找到一个无挠有限指数子群 $\Upsilon \leq_{f.i.} \Lambda$，因此 $(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^m)/\Upsilon$ 是一个流形，并具有所需的浸入全测地子流形 $\left(\mathbb{H}^{m-1}{}_{\text{标准}} \times \mathbb{H}^{m-1}{}_{\text{标准}}\right)/(\Pi \cap \Upsilon)$。

最后，我们按如下方式将这一浸入提升为嵌入。子空间$\left(\mathbb{H}^{m-1}{}_{\text{标准}}\times\mathbb{H}^{m-1}{}_{\text{标准}}\right)/(\Pi\cap\Upsilon)$未嵌入，当且仅当集合
$\mathcal{B}=\left\{\upsilon\in\Upsilon\setminus\operatorname{stab}_{\Upsilon}\left(\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}}\times\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}}\right)\;\middle|\;\upsilon\left(\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}}\times\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}}\right)\cap\left(\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}}\times\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}}\right)\neq\emptyset\right\}$，
非空。令 $V=(\mathrm{O}(1)\times\mathrm{O}(m-1,1))^2$，为 $\mathrm{GL}^{2(m+1)}(\mathbb{R})$ 的一个实代数子集，其中 $\operatorname{stab}^{G_m\times G_m}\left(\mathbb{H}^{m-1}{}_{\mathrm{std}}\times\mathbb{H}^{m-1}{}_{\mathrm{std}}\right)\subset V$，则有以下包含链

$$\Upsilon<G_m\times G_m<\mathrm{O}(m,1)\times\mathrm{O}(m,1)<\mathrm{GL}_{2(m+1)}(\mathbb{R}).$$

由于 Υ 是有限生成的，子群

$$\operatorname{stab}_{\Upsilon}(\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}}\times\mathbb{H}^{m-1}_{\mathrm{std}})=V\cap\Upsilon=\Pi\cap\Upsilon,$$

由 [8, Lem 1.8]可分离。由于 q_0 在一个实位处是定的，商空间 $(\mathbb{H}^{m-1}{}_{\mathrm{std}}\times\mathbb{H}^{m-1}{}_{\mathrm{std}})/(\Pi\cap\Upsilon)$ 是紧致的。于是，针对可分离子群的标准紧致提升判据（例如参见 [8, Lem 1.7]）给出了一个包含 $\Pi\cap\Upsilon$ 的有限指数子群$\Gamma\leq_{f.i.}\Upsilon$，使得 $\mathcal{B}\cap\Gamma=\emptyset$。因此，$M=(\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^m)/\Gamma$ 是一个包含形如 $S=\left(\mathbb{H}^{m-1}\times\mathbb{H}^{m-1}\right)/(\Gamma\cap\Pi)$ 的嵌入的全测地子流形的流形。在证明开头满足该判据的格的一个无限可公度类族见例 2.7。□

注记 2.9。对于乘积 $G_m\times G_m$ 中的格，可用另一种几何判据来判断其可约性：取格作用下任意一点 $p\in\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^m$ 的轨道，并考察该轨道在某个 $\mathbb{H}^m$ 因子上的投影。当且仅当投影映射的像是 $\mathbb{H}^m$ 中的离散子集时，该格才是可约的。这立即意味着，如果环境算术格 Γ 是可约的，那么与子流形 Λ 相关联的格也必定是可约的。

3. 曲率公式

本节首先详细说明一项构造；该构造曾在 [16] 第 3 节的第二和第三段中简要概述。我们在此提供完整细节，原因有二。第一，这项构造对于我们证明定理 1.2 (1) 至关重要（见第 5 节），并且有助于说明为何这一论证只适用于乘积格。第二，这项计算可作为本文后续所用更复杂技巧的入门。随后，我们将推导一种更复杂的扭曲乘积度量的曲率公式（定理 3.7），这些公式将在第 4 节中用到。

3.1. 关于 $\mathbb{H}^n$ 上的 $\mathbb{H}^{n-1}$。

考虑流形 $\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^{n-1}\times(-\infty,\infty)$。若赋予 $\mathbb{R}^{n-1}$ 双曲度量 $\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1}$，并令 x_n表示最后一个坐标中的变量，则众所周知（例如参见[4]），$\mathbb{R}^n$ 上的双曲度量 $\mathfrak{h}_n$ 可写为

$$\tilde{\mathfrak{h}}_n=\cosh^2(x_n)\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1}+dx_n^2. \tag{3.1}$$

现在，令 $\sigma_n:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 为 x_n 的一个正实值函数。将方程 (3.1) 中的 $\cosh(x_n)$ 替换为 $\sigma_n(x_n)$，得到<style id='10'>扭曲积度量

$$\tilde{g}_n=\sigma_n^2(x_n)\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1}+dx_n^2. \tag{3.2}$$

$\tilde{g}_n$ 的截面曲率张量分量当然将是 σ_n 的函数。$\tilde{g}_n$ 的截面曲率张量公式同样是众所周知的（例如参见 [4, 方程 3.1、3.2]）。在建立适当的标架后，我们列出相关公式。以下段落中的所有计算均相对于 $\breve{}$ 双曲度量 $\mathfrak{h}_n$。

令 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ 为正交投影。令 $q\in\mathbb{R}^n$ 和$p=\varphi(q)$。在 p附近为 $T_p\mathbb{R}^{n-1}$选取一个标准正交标架 ($\breve{}X_1$、.....、$\breve{}X_{n-1}$)。由于 $\varphi\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-1}$ 是淹没映射，$d\varphi\colon T_q\mathbb{R}^n\to T_p\mathbb{R}^{n-1}$ 是满射。令 $\mathcal{H}$ 表示 $T_q\mathbb{R}^n$中 $Y_n:=\partial/\partial x_n$ 的正交补，则 $d\varphi|_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H}\to T_p\mathbb{R}^{n-1}$ 是一个同构。令 $X_i=d\varphi|_{\mathcal{H}}^{-1}(\breve{}X_i)\in\mathcal{H}$ 定义了一个正交标架 (X_1、.....、X_{n-1})，用于 q附近的 $\mathcal{H}$。由于对每个 i，$\tilde{\mathfrak{h}}_n(X_i, X_i)=\cosh^2(x_n)$，因此这个标架并非标准正交标架。所以向量组

$$Y_i=\frac{1}{\cosh(x_n)}X_i \quad \text{for } 1\le i\le n-1, \qquad Y_n=\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3.3}$$

$\breve{}$关于 q，相对于度量 $\mathfrak{h}_n$为 $T_q\mathbb{R}^n$ 的标准正交标架。

$\tilde{g}_n$ 相应的标准正交标架为

$$Y_i=\frac{1}{\sigma_n}X_i \quad \text{for } 1\le i\le n-1, \qquad Y_n=\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{3.4}$$

令 $K_n(A, B)$ 表示由向量 A 和 B 张成的二维平面相对于 $\tilde{g}_n$的截面曲率。相对于方程 (3.4) 中标架的 $\tilde{g}_n$ 的截面曲率公式为

$$K_n(Y_i,Y_j)=-\frac{1}{\sigma_n^2}-\left(\frac{\sigma_n'}{\sigma_n}\right)^2 \quad \text{for } 1\le i,j\le n-1 \text{ and } i\ne j. \tag{3.5}$$

$$K_n(Y_i,Y_n)=-\frac{\sigma_n''}{\sigma_n} \quad \text{for } 1\le i\le n-1. \tag{3.6}$$

此外，不存在混合项。方程 (3.4) 中的标架将对应于 $\tilde{g}_n$的曲率算子对角化。

命题 3.1。设 $\eta>0$。则存在满足 $0<\varepsilon_1、\ \varepsilon_2<(1/2)\eta$ 的 ε_1 和 ε_2，以及 $\mathbb{R}^{n-1}\times[-\eta,\eta]$ 上的非正曲率度量 g，使得

$$\begin{aligned}\tilde{g}&=\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1}+dx_n^2 \quad &over\ \mathbb{R}^{n-1}\times(-\varepsilon_1,\varepsilon_1),\\ \tilde{g}&=\tilde{\mathfrak{h}}_n \quad &over\ \mathbb{R}^{n-1}\times([-\eta,-\eta+\varepsilon_2)\cup(\eta-\varepsilon_2,\eta]).\end{aligned}$$

容易看出，对于满足给定不等式的任意 ε_1，ε_2，命题 3.1 都成立；然而，在下文中我们只需要上述较弱的表述。

证明。令 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=(1/8)\eta$。定义 $[0,\eta]$ 上的连续分段光滑函数 $\hat{}\sigma_n$为

$$\hat{\sigma}_n=\begin{cases}1, & \text{if } 0\le x\le\frac{1}{4}\eta\\ 1+\frac{\cosh\left(\frac{3}{4}\eta\right)-1}{\frac{1}{2}\eta}\left(x-\frac{1}{4}\eta\right), & \text{if } \frac{1}{4}\eta\le x\le\frac{3}{4}\eta\\ \cosh(x), & \text{if } \frac{3}{4}\eta\le x\le\eta\end{cases}$$

函数 $\hat{}\sigma_n$ 在 $(1/4)\eta$ 和 $(3/4)\eta$ 处有奇点，但很容易看出它满足附录中命题 5.6 的假设。该结论允许我们将 $\hat{}\sigma_n$ 替换为光滑函数 σ_n，并以对称方式延拓到区间 $[-\eta,\eta]$。然后，根据方程 (3.2) 中的公式给出的相关度量 $\tilde{g}_n$ 具有

所需的性质，这与我们此前关于曲率的计算（见方程 (3.5) 和 (3.6)）以及命题 5.6 中光滑化的性质一致。□

注 3.2。 命题 3.1 中的构造在$\mathfrak{h}_{n-1}$ 作用于 $\mathbb{R}^{n-1}$因子的等距变换下保持不变，并且在最后一个坐标上的对合 $x_n \mapsto -x_n$ 下也保持不变。因此，如果 S 是双曲流形 M内的一个闭嵌入全测地余维一子流形，那么可以修改 S 的 η-邻域内的度量，使其在 S附近局部等距于 $\mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}$ 。

注 3.3。 我们可以使用 $\mathbb{R}^{n-1} \times [-\eta, \eta]$ 上的恒等映射，将 $\tilde{g}$度量与命题 3.1 中的双曲度量 $\mathfrak{h}_n$ 进行比较。注意，对于所有切向量，我们都有一致界 $^1\cosh(\eta) \leq \frac{\tilde{g}}{\mathfrak{h}_n(v)}(v) \leq \cosh(\eta)$，因此两个度量彼此是 C-双利普希茨的，其中双利普希茨常数 $C := \cosh(\eta)$ 在 η 趋于零时趋于 1。这意味着相应体积形式具有逐点双利普希茨控制。特别地，对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以选取足够接近零的 η ，从而确保注 3.2 中讨论的扰动度量的体积与双曲度量的体积之差为 ϵ-小。

3.2. **乘积格情形下的局部扁平化**。 现在我们讨论一种应用：当 $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)$ 是乘积格，且 S 连通时。因此，存在 $\Gamma_1 < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^m)$ 和 $\Gamma_2 < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$，使得 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$。于是$M$ 等距地分解为直积 $M = X_1 \times X_2$，其中 $X_1 = \mathbb{H}^m/\Gamma_1$ 和$X_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$。根据我们的假设，余维二子流形 S 的万有覆盖与 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 等距。这意味着 S 自然地分解为乘积 $Y_1 \times Y_2$，其中 $Y_i \subset X_i$ 是一对连通、嵌入的余维一全测地子流形。下文中，我们用 e_2 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的欧几里得度量。

命题 3.4。 设 $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)$ 为乘积格，其商流形 $M = (\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n)/\Gamma$ 配备局部对称度量 $\mathfrak{h}_m \oplus \mathfrak{h}_n$。设 $S \subset M$ 是一个连通、嵌入的余维二全测地子流形，且其万有覆盖 $\tilde{S}$ 与 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 等距。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 M 上的度量 g，具有以下性质：

- g 是非正曲率的，
- g 在 S 的足够小邻域内与 $\mathfrak{h}_{m-1} \oplus \mathfrak{h}_{n-1} \oplus e_2$ 等距，
- $|\text{体积}(M, g) - \text{体积}(M, \mathfrak{h}_m \oplus \mathfrak{h}_n)| < \epsilon$。

证明。 考虑余维一子流形 $Y_1 \subset X_1$，它是 X_1 内一个连通、嵌入的全测地子流形。应用命题 3.1 和注 3.2， X_1 支持一个度量 g_1 ，该度量具有非正曲率，并且在 Y_1 的小邻域内局部为平坦乘积。此外，可以选择该度量，使其体积尽可能接近双曲度量的体积。类似地，另一个因子 X_2 在 Y_2 附近具有一个局部为乘积的度量 g_2 。于是，度量 g 定义为乘积黎曼度量 $g := g_1 \oplus g_2$ ，定义在 $M = X_1 \times X_2$ 上。显然，根据命题 3.1 和注 3.2， g 具有命题中列出的所需性质。□

注记 3.5. 请注意， S 连通性在我们的证明中作用不大。如果 S 有多个连通分支，主要需要考虑的是，通过投影到因子 X_i 之一而得到的余维一子流形可能会相交。

只要 S各个分量的投影两两不相交，就可以采用同样的论证。

注 3.6。 请注意，我们的证明关键依赖于流形 $M = X_1 \times X_2$ 上的全局乘积结构。度量 g_i 在 Y_i 周围的某个条带上不同于 $\mathfrak{h}_i$ 。因此，度量 g 和 $\mathfrak{h}_m \oplus \mathfrak{h}_n$ 在子集 $(Y_1 \times X_2) \cup (X_1 \times Y_2)$ 周围的条带上彼此不同——这个集合远大于子流形 $S = Y_1 \times Y_2$。换言之，度量 g**并非** 全测地余维二子流形 S 附近度量 $\mathfrak{h}_m \oplus \mathfrak{h}_n$ 的局部扰动，而是利用乘积结构进行的全局扰动。

如果我们改为考虑不可约格，那么就不再有可供利用的全局乘积结构。相反，我们必须考虑集中在子流形 S 附近的度量扰动。这需要采用下一节讨论的更精巧的扭曲积构造。

可以尝试将这一结果推广到可约 格的情形，方法是在一个乘积形式的有限覆盖上进行论证。但这样就会遇到一个问题： S 的提升可能不是连通的（参见上文注 3.5 中的讨论）。

3.3. **极坐标、扭曲积度量和曲率公式**。利用命题 3.4，可以通过几种简单的方法证明定理 1.2 (1)。然而，为了证明定理 1.1，我们将需要下面定理 3.7 中更为复杂的曲率公式。

考虑乘积 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m-1} \times (-\infty,\ \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty,\ \infty)$。根据方程 (3.1)，乘积双曲度量可以写成

$$\tilde{\mathfrak{h}}_m \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_n = \cosh^2(x_m)\tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + dx_m^2 + \cosh^2(y_n)\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + dy_n^2.$$

如果切换到极坐标

$$x_m = r\cos(\theta), \quad y_n = r\sin(\theta),$$

对于 $r \in [0, \infty)$ 和 $\theta \in \mathbb{S}^1$，则乘积双曲度量变为

$$\tilde{\mathfrak{h}}_m \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_n = \cosh^2(r\cos(\theta))\tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \cosh^2(r\sin(\theta))\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + r^2 d\theta^2 + dr^2. \tag{3.7}$$

相应的扭曲积度量为

$$\tilde{\lambda} = \alpha^2(r,\theta)\tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \beta^2(r,\theta)\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + f^2(r)d\theta^2 + dr^2, \tag{3.8}$$

其中， α 和 β 是 r 和 θ 的正函数，而 f 是 r的正函数。在定理 3.7 中，我们推导出 λ的截面曲率张量各分量的公式。当然，这些公式将是 α、 β和 f的函数。

与第 3 节一样，我们必须先为 λ 定义一个标准正交标架。对于 λ 中的双曲度量，我们使用半空间模型，并写作

$$\mathfrak{h}_{m-1} = \frac{1}{x_{m-1}^2}dx_1^2 + \cdots + \frac{1}{x_{m-1}^2}dx_{m-1}^2, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{h}_{n-1} = \frac{1}{y_{n-1}^2}dy_1^2 + \cdots + \frac{1}{y_{n-1}^2}dy_{n-1}^2. \tag{3.10}$$

令 $X_i' = \frac{\partial}{\partial x_i}$，对于 $1 \le i \le m-1$ 和 $Y_j' = \frac{\partial}{\partial y_j}$，对于 $1 \le j \le n-1$。那么 $(X_1', \ldots, X_{m-1}')$ 和 $(Y_1', \ldots, Y_{n-1}')$ 将构成 $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial r}\right)$ 的正交补的正交标架，其定义方式与第 3.1 小节完全相同。

我们将标准正交标架 $(X_1, \dots, X_{m-1}, Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z_\theta, Z_r)$ 定义为

$$X_i = \frac{x_{m-1}}{\alpha(r,\theta)} X_i' \quad \text{for } 1 \le i \le m-1, \tag{3.11}$$

$$Y_i = \frac{y_{n-1}}{\beta(r,\theta)} Y_i' \quad \text{for } 1 \le i \le n-1, \tag{3.12}$$

$$Z_\theta = \frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{3.13}$$

$$Z_r = \frac{\partial}{\partial r}. \tag{3.14}$$

对于函数 $\alpha(r,\theta)$ 和 $\beta(r,\theta)$，在下文中我们将使用标准记号

$$\alpha_r = \frac{\partial \alpha}{\partial r}, \quad \alpha_\theta = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta},$$

对于 β 以及二阶偏导数，也采用类似记号。需要注意的是，只有当下标用于函数 α 和 β 时，才表示偏导数。

定理 3.7。设 $\tilde{\lambda} = \alpha^2(r,\theta)\tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \beta^2(r,\theta)\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + f^2(r)d\theta^2 + dr^2$ 是方程 (3.8) 中定义的 $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \times [0,\infty)$ 上的度量。除曲率张量的对称性所确定的分量外，曲率张量的非零分量为：

$$K_\lambda(X_i, X_j) = -\frac{1}{\alpha^2}\left(1 + \alpha_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{f^2}\right) \quad where\ i \ne j, \tag{3.15}$$

$$K_\lambda(Y_i, Y_j) = -\frac{1}{\beta^2}\left(1 + \beta_r^2 + \frac{\beta_\theta^2}{f^2}\right) \quad where\ i \ne j, \tag{3.16}$$

$$K_\lambda(X_i, Z_\theta) = -\frac{1}{\alpha f}\left(\alpha_r f' + \frac{\alpha_{\theta\theta}}{f}\right), \tag{3.17}$$

$$K_\lambda(Y_i, Z_\theta) = -\frac{1}{\beta f}\left(\beta_r f' + \frac{\beta_{\theta\theta}}{f}\right), \tag{3.18}$$

$$K_\lambda(X_i, Z_r) = -\frac{\alpha_{rr}}{\alpha}, \tag{3.19}$$

$$K_\lambda(Y_i, Z_r) = -\frac{\beta_{rr}}{\beta}, \tag{3.20}$$

$$K_\lambda(X_i, Y_j) = -\frac{1}{\alpha\beta}\left(\alpha_r\beta_r + \frac{\alpha_\theta\beta_\theta}{f^2}\right), \tag{3.21}$$

$$K_\lambda(Z_r, Z_\theta) = -\frac{f''}{f}. \tag{3.22}$$

对于非零混合项，我们只有

$$< R_\lambda(X_i, Z_r)X_i, Z_\theta >_\lambda = \frac{1}{\alpha f}\left(\frac{\alpha_\theta f'}{f} - \alpha_{r\theta}\right), \tag{3.23}$$

$$< R_\lambda(Y_i, Z_r)Y_i, Z_\theta >_\lambda = \frac{1}{\beta f}\left(\frac{\beta_\theta f'}{f} - \beta_{r\theta}\right).$$

注 3.8：如果将函数 $\alpha = \cosh(r\cos\theta)$、$\beta = \cosh(r\sin\theta)$ 和 $f = r$ 代入方程 (3.8) 中的度量，那么该度量 λ 就是乘积双曲的~~度量 $\mathfrak{h}_m + \mathfrak{h}_n$。该度量 $\mathfrak{h}_m + \mathfrak{h}_n$ 的曲率如下：

$$
\begin{aligned}
&K_\lambda(X_i, X_j) = -1 && K_\lambda(Y_i, Y_j) = -1\\
&K_\lambda(X_i, Z_\theta) = -\sin^2(\theta) && K_\lambda(Y_i, Z_\theta) = -\cos^2(\theta)\\
&K_\lambda(X_i, Z_r) = -\cos^2(\theta) && K_\lambda(Y_i, Z_r) = -\sin^2(\theta)\\
&K_\lambda(X_i, Y_j) = 0 && K_\lambda(Z_r, Z_\theta) = 0\\
&\qquad < R_\lambda(X_i, Z_r)X_i, Z_\theta >_\lambda = \sin(\theta)\cos(\theta)\\
&\qquad < R_\lambda(Y_i, Z_r)Y_i, Z_\theta >_\lambda = -\sin(\theta)\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

可以验证，将定理 3.7 中列出的曲率公式代入 $\alpha = \cosh(r\cos\ \theta)$、 $\beta = \cosh(r\sin\theta)$ 和 $f = r$ 的特定值后，可化简为上述表达式。

证明。 作者使用两种不同的方法计算了上述公式，并且两种方法都得到了相同的结果。我们将介绍这两种方法，并通过详细展示若干计算来说明它们的用法。第一种方法用于计算公式（3.15）中的一个公式，第二种方法则用于计算公式（3.23）中的一个公式。

第一种方法是使用局部坐标和克里斯托费尔符号直接计算所有内容。回顾一下，对于度量 g 及其系数矩阵 $[g_{ij}]$，标准正交标架 $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 下曲率张量的公式为

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle_\lambda = R_{ijks} = \sum_l R^l_{ijk} g_{ls}, \tag{3.24}$$

其中

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}, \tag{3.25}$$

and

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}\right) g^{lm}. \tag{3.26}$$

注意，在公式（3.26）中，我们使用标准记号 $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$表示度量所对应矩阵的逆矩阵中的各项。

现在，对于度量 $\tilde{\lambda} = \alpha^2(r,\ \theta)\tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \beta^2(r,\ \theta)\tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + f^2(r)d\theta^2 + dr^2$ 及其正交标架 $(X'_1、\ \ldots\ldots、\ X'_{m-1},\ Y'_1、\ \ldots\ldots、\ Y'_{n-1},\ \frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial r})$，系数函数的 $(m+n)\times(m+n)$-矩阵

对于度量 λ，是对角矩阵

$$\left[\tilde{\lambda}_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{x_{m-1}^2} & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{\alpha^2}{x_{m-1}^2} & & & & \\ & & & \frac{\beta^2}{y_{n-1}^2} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \\ \vdots & & & & & f^2 & 0 \\ 0 & \dots & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

在这次计算中，我们将 $m+n$ 个指标编号，不仅从 1 到 $m+n$，还将前 $m-1$ 个指标标记为 $x_1,\dots,x_{m-1}$，接下来的 $n-1$ 个指标标记为 $y_1,\dots,y_{n-1}$，第（$m+n-1$）个指标标记为 θ，最后第（$m+n$）个指标标记为 r。根据公式（3.26），克里斯托费尔符号的非零项如下

$$\begin{array}{llll}
\Gamma^{x_i}_{x_i x_{m-1}} = -\frac{1}{x_{m-1}}, & \Gamma^{x_i}_{x_i r} = \frac{\alpha_r}{\alpha}, & \Gamma^{x_i}_{x_i \theta} = \frac{\alpha_\theta}{\alpha}, & \text{for } 1 \le i \le m-2. \\
\Gamma^{x_{m-1}}_{x_i x_i} = \frac{1}{x_{m-1}}, & \Gamma^{x_{m-1}}_{x_{m-1} r} = \frac{\alpha_r}{\alpha}, & \Gamma^{x_{m-1}}_{x_{m-1}\theta} = \frac{\alpha_\theta}{\alpha}, & \text{for } 1 \le i \le m-1. \\
\Gamma^{y_i}_{y_i y_{n-1}} = -\frac{1}{y_{n-1}}, & \Gamma^{y_i}_{y_i r} = \frac{\beta_r}{\beta}, & \Gamma^{y_i}_{y_i \theta} = \frac{\beta_\theta}{\beta}, & \text{for } 1 \le i \le n-2. \\
\Gamma^{y_{n-1}}_{y_i y_i} = \frac{1}{y_{n-1}}, & \Gamma^{y_{n-1}}_{y_{n-1} r} = \frac{\beta_r}{\beta}, & \Gamma^{y_{n-1}}_{y_{n-1}\theta} = \frac{\beta_\theta}{\beta}, & \text{for } 1 \le i \le n-1. \\
\Gamma^{\theta}_{x_i x_i} = -\frac{\alpha\alpha_\theta}{x_{m-1}^2 f^2}, & \Gamma^{\theta}_{y_i y_i} = -\frac{\beta\beta_\theta}{f^2 y_{n-1}^2}, & \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{f'}{f}, & \text{for all } i. \\
\Gamma^{r}_{x_i x_i} = -\frac{\alpha\alpha_r}{x_{m-1}^2}, & \Gamma^{r}_{y_i y_i} = -\frac{\beta\beta_r}{y_{n-1}^2}, & \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -ff', & \text{for all } i.
\end{array}$$

回忆一下，克里斯托费尔符号是对称的，即 $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$。

应用方程（3.24）和（3.25）中的公式，我们得到（4,0）-曲率张量的分量。下面以明确计算 $K_\lambda(X_i, X_j)$ 为例说明这一过程，其中 $1 \le i, j \le m-1$ 和 $i \ne j$。其他张量也可以类似地计算。首先注意到

$$K_\lambda(X_i, X_j) =< R(X_i, X_j)X_i, X_j >= \frac{x_{m-1}^4}{\alpha^4} R_{x_i x_j x_i x_j} = \frac{x_{m-1}^4}{\alpha^4} \sum_l R^l_{x_i x_j x_i} \lambda_{l x_j}.$$

由方程 (3.27) 中的矩阵，我们得 ave,

$$\sum_l R^l_{x_i x_j x_i} \lambda_{l x_j} = R^{x_j}_{x_i x_j x_i} \frac{\alpha^2}{x_{m-1}^2}.$$

我们应用方程 (3.25) 和 (3.26) 中的公式，并进行化简，因为矩阵 Γ^{x_i} 除了 $\Gamma^{x_i}_{x_i x_{m-1}}$、$\Gamma^{x_i}_{x_i r}$ 和 $\Gamma^{x_i}_{x_i \theta}$ 外，其余项均为零（考虑对称性）。

$$\begin{aligned} R^{x_j}_{x_i x_j x_i} &= \sum_l \Gamma^l_{x_i x_i} \Gamma^{x_j}_{x_j l} - \sum_l \Gamma^l_{x_j x_i} \Gamma^{x_j}_{x_i l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^{x_j}_{x_i x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^{x_j}_{x_j x_i} \\ &= \Gamma^{x_{m-1}}_{x_i x_i} \Gamma^{x_j}_{x_j x_{m-1}} + \Gamma^r_{x_i x_i} \Gamma^{x_j}_{x_j r} + \Gamma^\theta_{x_i x_i} \Gamma^{x_j}_{x_j \theta} \\ &= \frac{1}{x_{m-1}} \frac{-1}{x_{m-1}} - \frac{\alpha \alpha_r}{x_{m-1}^2} \frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{\alpha \alpha_\theta}{f^2 x_{m-1}^2} \frac{\alpha_\theta}{\alpha} \\ &= -\frac{1}{x_{m-1}^2} \left(1 + \alpha_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{f^2} \right). \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} K_\lambda(X_i, X_j) &= \frac{x_{m-1}^4}{\alpha^4} R^{x_j}_{x_i x_j x_i} \frac{\alpha^2}{x_{m-1}^2} \\ &= -\frac{1}{\alpha^2} \left(1 + \alpha_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{f^2} \right). \end{aligned}$$

计算定理 3.7 中公式的第二种（等价）方法是：计算方程（3.11）–（3.14）中标准正交基的李括号，用它们计算 Levi-Civita联络，再利用该联络计算截面曲率张量的分量。

公式（3.23）所需的相关李括号为

$$[X_i, Z_\theta] = \frac{\alpha_\theta}{\alpha f} X_i, \quad [X_i, Z_r] = \frac{\alpha_r}{\alpha} X_i, \quad [Z_\theta, Z_r] = -\frac{f'}{f} Z_\theta.$$

利用标准正交基的 Koszul公式

$$\langle \nabla_A B, C \rangle = -\frac{1}{2} \left(\langle [B, C], A \rangle + \langle [A, C], B \rangle + \langle [B, A], C \rangle \right),$$

可计算得

$$\nabla_{X_i} X_i = -\frac{\alpha_r}{\alpha} Z_r - \frac{\alpha_\theta}{\alpha f} Z_\theta, \quad \nabla_{Z_r} X_i = 0, \quad \nabla_{Z_r} Z_r = 0, \quad \nabla_{Z_r} Z_\theta = 0.$$

我们在此简要指出，除上文列出的李括号外，没有其他李括号会对上述联络公式产生贡献。

最后，我们计算

$$\begin{aligned} \langle R_\lambda(X_i, Z_r) X_i, Z_\theta \rangle_\lambda &= \langle \nabla_{Z_r} \nabla_{X_i} X_i - \nabla_{X_i} \nabla_{Z_r} X_i + \nabla_{[X_i, Z_r]} X_i, Z_\theta \rangle_\lambda \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(-\frac{\alpha_r}{\alpha} Z_r - \frac{\alpha_\theta}{\alpha f} Z_\theta \right) - \nabla_{X_i}(0) + \frac{\alpha_r}{\alpha} \nabla_{X_i} X_i, Z_\theta \right\rangle_\lambda \end{aligned}$$

$$= \left\langle \frac{-\alpha_{rr}\alpha + (\alpha_r)^2}{\alpha^2} Z_r - \frac{\alpha_{r\theta} f \alpha - \alpha_\theta (f' \alpha + f \alpha_r)}{\alpha^2 f^2} Z_\theta + \frac{\alpha_r}{\alpha} \left(-\frac{\alpha_r}{\alpha} Z_r - \frac{\alpha_\theta}{\alpha f} Z_\theta \right), Z_\theta \right\rangle_\lambda$$

$$= \frac{f'}{\alpha f^2} \alpha_\theta - \frac{1}{\alpha f} \alpha_{r\theta} = \frac{1}{\alpha f} \left(\frac{\alpha_\theta f'}{f} - \alpha_{r\theta} \right).$$

最后请注意，上述计算也给出了 $K_\lambda(X_i, Z_r)$ 的公式。

□

推论 3.9。沿用定理 *3.7* 的记号，当 $\alpha = \beta = 1$ 唯一非零的 λ 曲率张量分量为

$$K_\lambda(X_i, X_j) = -1, \quad K_\lambda(Y_i, Y_j) = -1, \quad K_\lambda(Z_r, Z_\theta) = -\frac{f''}{f}.$$

4. Proof of Theorem 1.1

4.1. 将 S 变为 N的一个尖点。为证明定理 1.1 (1)，我们需要在 S 附近扭曲乘积双曲度量，以便将 S 变为 N的一个尖点。为此，我们在方程 (3.8) 中的 $(-\infty, \eta)$ 上定义函数 α 和 β，并在 $(-\infty, \eta)$ 上定义 f，其中 $\eta > 0$ 足够小。当径向参数 r 趋近于 $-\infty$时，这在几何上相当于将 S 变为 N的一个尖点。

注 4.1。根据 Fubini 定理，且由于 $\mathbb{S}^1$ 是紧致的，要使方程 (3.8) 中的度量 λ 下降为 $N = M \setminus S$ 上的有限体积度量，一个充分条件是：对于 $r \in (-\infty, \varepsilon)$，三个函数 α, β, 和 f均有界，并且至少有一个函数在 $r \to -\infty$时以指数速率衰减至 0。

令 $E = \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$，并考虑定义在 $E \times (0, \infty)$ 上的方程 (3.8) 中的度量 $\tilde{\lambda}$。令 $q \in E \times (0, \infty)$，设 $\sigma \subset T_q(E \times (0, \infty))$ 是一个二维平面，并考虑由方程（3.11）–（3.14）给出的关于 q 的标准正交标架。为 σ 选取一组标准正交基 (A, B)，使得 A 与 Z_r 正交；这总是可行的，因为 Z_r 的正交补的余维为一。

在 $T_q(E \times (0, \infty))$ 的 $\mathbb{H}^{m-1}$ 分量中选取一个单位向量 X_1，并在 $T_q(E \times (0, \infty))$ 的 $\mathbb{H}^{n-1}$ 分量中选取一个单位向量 Y_1，使得 X_1 平行于 $\mathrm{proj}_{\mathbb{H}^{m-1}}(A)$，且 Y_1 平行于 $\mathrm{proj}_{\mathbb{H}^{n-1}}(A)$。最后，选取相应的向量 X_2 和 Y_2，使得 $\mathrm{proj}_{\mathbb{H}^{m-1}}(\sigma) \subseteq \mathrm{span}(X_1, X_2)$，且 $\mathrm{proj}_{\mathbb{H}^{n-1}}(\sigma) \subseteq \mathrm{span}(Y_1, Y_2)$。于是存在常数 $a_1, a_3, a_5, b_1, b_2, \ldots, b_6$，使得

$$A = a_1 X_1 + a_3 Y_1 + a_5 Z_\theta \quad \text{and} \quad B = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 Y_1 + b_4 Y_2 + b_5 Z_\theta + b_6 Z_r.$$

注意，由于 A 和 B 是正交归一的，我们有

$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 = 1, \qquad b_1^2 + \ldots + b_6^2 = 1, \qquad a_1 b_1 + a_3 b_3 + a_5 b_5 = 0.$$

下文中我们使用以下记号。令

$$\Omega_1 = X_1, \quad \Omega_2 = X_2, \quad \Omega_3 = Y_1, \quad \Omega_4 = Y_2, \quad \Omega_5 = Z_\theta, \quad \Omega_6 = Z_r,$$

and

$$R_{ijk\ell} = \langle R(\Omega_i, \Omega_j)\Omega_k, \Omega_\ell \rangle_\lambda.$$

于是我们计算得

$$\begin{aligned} K_\lambda(\sigma) = \langle R(A, B)A, B\rangle_\lambda &= a_1^2 b_2^2 R_{1212} + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 R_{1313} + a_1^2 b_4^2 R_{1414} \\ &\quad + a_3^2 b_2^2 R_{2323} + a_5^2 b_2^2 R_{2525} + a_3^2 b_4^2 R_{3434} + a_5^2 b_4^2 R_{4545} + a_5^2 b_6^2 R_{5656} \\ &\quad + (a_1 b_5 - a_5 b_1)^2 R_{1515} + 2a_1 b_6 (a_1 b_5 - a_5 b_1) R_{1516} + a_1^2 b_6^2 R_{1616} \qquad (4.1) \\ &\quad + (a_3 b_5 - a_5 b_3)^2 R_{3535} + 2a_3 b_6 (a_3 b_5 - a_5 b_3) R_{3536} + a_3^2 b_6^2 R_{3636}. \qquad (4.2) \end{aligned}$$

式（4.1）和（4.2）可以改写为矩阵乘积

$$\begin{bmatrix} a_1 b_5 - a_5 b_1 & a_1 b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1515} & R_{1516} \\ R_{1516} & R_{1616} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 b_5 - a_5 b_1 \\ a_1 b_6 \end{bmatrix}, \qquad (4.3)$$

and

$$\begin{bmatrix} a_3b_5 - a_5b_3 & a_3b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{3535} & R_{3536} \\ R_{3536} & R_{3636} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3b_5 - a_5b_3 \\ a_3b_6 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

通过这些计算，我们已经准备好证明以下命题，该命题˜给出了一个相对简单的判据，用于准确确定 λ 何时具有非正曲率。

˜**命题 4.2.** 方程 (3.8) 中的度量 λ 是非正曲率的，当且仅当以下两个条件同时成立：

(1) 方程 (3.15)–(3.22) 中的所有曲率均为非正。*(2)* 所有形如

$$M_1 := \begin{bmatrix} K_\lambda(X_i, Z_\theta) & < R_\lambda(X_i, Z_r)X_i, Z_\theta >_\lambda \\ < R_\lambda(X_i, Z_r)X_i, Z_\theta >_\lambda & K_\lambda(X_i, Z_r) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

and

$$M_2 := \begin{bmatrix} K_\lambda(Y_i, Z_\theta) & < R_\lambda(Y_i, Z_r)Y_i, Z_\theta >_\lambda \\ < R_\lambda(Y_i, Z_r)Y_i, Z_\theta >_\lambda & K_\lambda(Y_i, Z_r) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

的矩阵均为负半定。

证明. 首先注意，方程 (4.5) 和 (4.6) 中的矩阵与方程 (4.3) 和 (4.4) 中的矩阵形式完全相同。

为证明该命题，我们首先假设条件 (1) 和 (2) 成立。于是，由 (2)，针对 $\langle R(A, B)A, B\rangle_\lambda$ 的计算中，第 (4.1) 行和第 (4.2) 行均为非正。˜由 (1)，前两行也为非正。因此，度量 λ 的截面曲率必定为非正。

因此，在假设 (1) 和 (2) 成立的条件下，此现在假设显然有截面曲率 λ 的非正。为了验证结论 (2)，我˜们考虑特定的二维平面 σ，它们对应于选取特定的系数 a_1，a_3，a_5，b_1，b_2，$\ldots b_6$。具体来说，我们首先指定

$$a_3 = a_5 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

在选择这些系数的情况下，计算 $\langle R(A, B)A, B\rangle_\lambda$ 中唯一非零的一项是 (4.1)。注意，$a_3 = a_5 = 0$ 迫使 $a_1 = \pm 1$。向量

$$\begin{bmatrix} a_1b_5 \\ a_1b_6 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

对于不同的 b_5 和 b_6 取值，可以实现 $\mathbb{RP}^1$ 中的任意方向。因此，要使 (4.1) 对这些变量的所有可能取值都非正，唯一的办法是矩阵

$$M_1 = \begin{bmatrix} R_{1515} & R_{1516} \\ R_{1516} & R_{1616} \end{bmatrix}$$

为负半定。相同的分析表明，我们还需要矩阵

$$M_2 = \begin{bmatrix} R_{3535} & R_{3536} \\ R_{3536} & R_{3636} \end{bmatrix}$$

为负半定，从而验证了条件 (2) 的必要性。 □

类似的论证可用于给出一个判据，保证截面曲率具有较小的正上界。

命题 4.3。 假设存在普适常数 $\kappa_{max} \geq 0$ 和 $\mu_{max} \geq \tilde{} 0$，使得方程 (3.8) 中的度量 λ 具有以下两种性质：

(1) 方程 (3.15)–(3.22) 中的所有曲率都是 $\leq \kappa_{max}$；*(2)* 矩阵 M_1、M_2 的最大特征值为 $\leq \mu_{max}$。

那么，度量 λ 的所有截面曲率都 $\leq 11\kappa_{max} + 10\mu_{max}$。

证明。 考察截面曲率的表达式，并记住所有系数 a_i，b_i 的范数为 ≤ 1，我们得到如下形式的上界：

$$\begin{aligned} K_\lambda(\sigma) &\leq 11\kappa_{max} + v_1 M_1 v_1^T + v_2 M_2 v_2^T, \\ &\leq 11\kappa_{max} + ||v_1||^2 \mu(M_1) + ||v_2||^2 \mu(M_2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

这里，$v_1 = \begin{bmatrix} a_1 b_5 - a_5 b_1 & a_1 b_6 \end{bmatrix}$、$v_2 = \begin{bmatrix} a_3 b_5 - a_5 b_3 & a_3 b_6 \end{bmatrix}$ 和 $\mu(M_i)$ 表示矩阵 M_i 的最大特征值。根据假设，有 $\mu(M_i) \leq \mu_{max}$。由于 a_i，b_i 位于区间 $[-1, 1]$ 内，向量 v_1，v_2 的平方范数有上界 $||v_i||^2 \leq 5$，从而证明了该命题。□

换言之，命题 4.3 表明，若要将截面曲率统一控制在一个较小的正数以下，只需将以下两者都（统一）控制在一个较小的正数以下：(1) 坐标超平面上的曲率；(2) 矩阵 M_1, M_2 的最大特征值。现在我们可以证明定理 1.1 (1) 了。

定理 *1.1 (1)* 的证明。 我们仍令 $E = \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$，并设 $\varepsilon > 0$ 已给定。取 $\eta \in$，使其属于 $(0, 1)$，且小于 S 在 M 中的法向单射半径。首先，我们通过在 $E \times \mathbb{R}$ 的不同部分为方程 (3.8) 中的函数 α、β 和 f 指定特定取值，定义一个分段光滑度量 $\tilde{g}'$。我们将证明，对于充分小的正参数 $\delta < \eta$，在 $\tilde{g}'$ 光滑的所有点处，其截面曲率都不超过 $\varepsilon/2$。随后我们将说明，可以用光滑度量 $\tilde{g}$ 对 $\tilde{g}'$ 作 C^2-逼近，使得曲率至多增加 $\varepsilon/2$（但随着 $\varepsilon \to 0$、$\tilde{}$ $\tilde{}$，其下界将无界下降，从而迫使 $\delta \to 0$）。度量 $\tilde{g}$ 在 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 的一个充分小的管状邻域之外与 $\mathfrak{h}_m \oplus \mathfrak{h}_n$ 一致，并且在保持 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 不变的 $\tilde{\mathfrak{h}}_m \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_n$ 的等距变换下不变。因此，将 $\tilde{g}$ 限制在 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$ 的小管状邻域上，便可下降为 M 中 S 的（去心）小管状邻域上的良定义度量 g。由于度量 g 在管状邻域边界附近与局部对称度量一致，我们可以用度量 g 替换管状邻域上的局部对称度量。这样便通过移除 S 在流形上挖出一个孔洞，并在 S 的管状邻域中嵌入一个尖点。

如上所述，度量 $\tilde{g}'$ 将依赖于一个小参数 $\delta > 0$。定义函数 f，φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(r) = \begin{cases} r & r \geq \eta \\ r & \delta < r < \eta \\ \delta & 0 < r \leq \delta \\ \delta e^{\delta r} & r \leq 0 \end{cases}, \qquad \varphi(r) = \begin{cases} 1 & r \geq \eta \\ h(r) & \delta < r < \eta \\ 0 & 0 < r \leq \delta \\ 0 & r \leq 0 \end{cases},$$

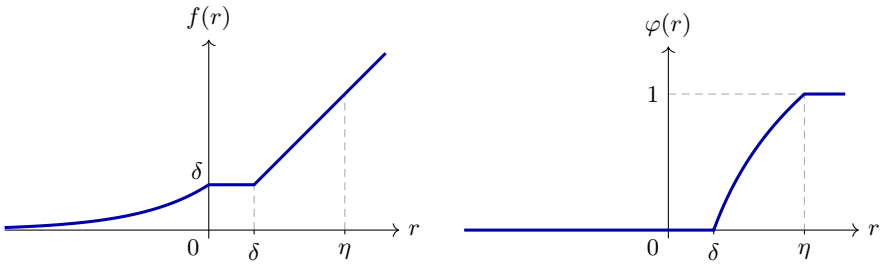

FIGURE 1. 函数 f 和 ϕ的图像

其中

$$h(r) = \frac{1}{\ln\left(\frac{\eta}{\delta}\right)} \ln\left(\frac{r}{\delta}\right).$$

根据上述对 $h(r)$ 的定义，显然 φ 在 $r = \delta$ 和 $r = \eta$处均连续。

为便于后续计算，先快速注意到

$$f'(r) = \begin{cases} 1 & r > \eta \\ 1 & \delta < r < \eta \\ 0 & 0 < r < \delta \\ \delta^2 e^{\delta r} & r < 0 \end{cases}, \qquad \varphi'(r) = \begin{cases} 0 & r > \eta \\ h'(r) & \delta < r < \eta \\ 0 & 0 < r < \delta \\ 0 & r < 0 \end{cases},$$

$$h'(r) = \frac{1}{r \ln\left(\frac{\eta}{\delta}\right)}, \qquad h''(r) = \frac{-1}{r^2 \ln\left(\frac{\eta}{\delta}\right)}.$$

还要注意，当 $\delta \to 0$时， f 在 $r = 0$ 处近似为 C^2，而 φ 在 $r = \eta$处近似为C^2。然而， f 和 φ 在 $r = \delta$处都远非 C^1。

我们通过方程 (3.8) 定义度量 $\tilde{g}'$。当然，我们使用上面的函数 $f(r)$作为 $d\theta^2$的系数。对于 α 和 β，我们定义

$$\alpha(r,\theta) = \cosh(\varphi(r) f(r) \cos(\theta)), \qquad \beta(r,\theta) = \cosh(\varphi(r) f(r) \sin(\theta)).$$

注意，对于 $r > \eta$，有 $\tilde{g}' = \mathfrak{h}_m \oplus \mathfrak{h}_n$。现在我们验证，若参数 δ 选得足够小，奇异度量 $\tilde{g}'$将给出一个所有截面曲率均为$< \varepsilon/2$的度量。

断言 1: 考虑奇异值 $r = 0$之外的奇异度量 $\tilde{g}'$， δ，以及 η。那么当 δ 足够小时，该奇异度量的所有坐标平面曲率均由方程 (3.15)–(3.22) 描述，并且是 $\leq \varepsilon/44$。

在方程 (3.15)–(3.22) 中的截面曲率中，很明显，(3.15)、(3.16) 和 (3.22) 均为非正。事实上，无论函数 φ 和 f 如何选择，(3.15) 和 (3.16) 中的表达式都是 ≤ 0；而 (3.22) 中表达式的符号仅取决于 f 的凹性（并且我们的函数在奇异集之外满足$f'' \geq 0$）。

对于式 (3.21) 中的截面曲率，经过简单计算可得

$$K(X_i, Y_j) = \Big(\cos(\theta)\tanh(\varphi f \cos(\theta))\Big)\Big(\sin(\theta)\tanh(\varphi f \sin(\theta))\Big)\Big(\varphi^2 - (\varphi' f + \varphi f')^2\Big).$$

这个乘积中的前两项始终为 ≥ 0，因此该表达式的符号仅取决于第三项。但除非 $r \in (\delta, \eta)$，否则第三项的值为零；在这种情况下，它等于

$$\varphi^2 - (\varphi' f + \varphi f')^2 = -2rhh' - r^2(h')^2.$$

由于在区间 (δ, η) 上 $h, h' \geq 0$，我们得出 (3.21) 中的曲率确实是 ≤ 0。

还需要进一步工作来估计方程 (3.17) – (3.20) 中的曲率项。这四项分别为 $K_{g'}(X_i, Z_\theta)$、$K_{g'}(X_i, Z_r)$、$K_{g'}(Y_i, Z_\theta)$、$K_{g'}(Y_i, Z_r)$。在证明的其余部分，我们只考虑 X_i的计算，因为 Y_i的计算完全相同。

利用定理 3.7 中的公式直接计算可知，方程 (3.17) 和 (3.19) 中的两项可化简为：

$$K_{g'}(X_i, Z_\theta) = -\varphi^2 \sin^2(\theta) - \boxed{\left(\varphi' f' + \varphi \frac{(f')^2 - 1}{f}\right) \cos(\theta) \tanh(\varphi f \cos(\theta))},$$

$$K_{g'}(X_i, Z_r) = -(\varphi' f + \varphi f')^2 \cos^2(\theta) - \boxed{(\varphi'' f + 2\varphi' f' + \varphi f'') \cos(\theta) \tanh(\varphi f \cos(\theta))}.$$

注意，上面两个方程中未加框的部分显然是 ≤ 0。因此，两个加框的项就是误差项，也是可能导致这些曲率表达式之一为正的唯一项。此外，根据我们对函数 f、φ 的选取，加框的项仅在 $r \in (\delta, \eta)$ 时非零。这表明，除了区域 (δ, η) 外，方程 (3.17) 和 (3.19) 中的截面曲率均为非正。

为了控制该区间上的曲率，我们按如下方式计算误差项的上界。首先注意，根据我们对函数的选择，有

$$\varphi((f')^2 - 1) \equiv 0,$$

从而简化了第一个误差项。接下来，回忆一下，对于所有 x，$|\text{双曲正切}(x)| \leq |x|$，便可得到这两个误差项的以下不等式

$$\begin{aligned} |(\varphi' f') \cos(\theta) \tanh(\varphi f \cos(\theta))| &\leq |\varphi'||f'||\varphi||f|, \\ &= |rh(r)h'(r)|, \\ |(\varphi'' f + 2\varphi' f' + \varphi f'') \cos(\theta) \tanh(\varphi f \cos(\theta))| &\leq |\varphi'' f + 2\varphi' f' + \varphi f''||\varphi||f|, \\ &= |rh(r)||rh''(r) + 2h'(r)|, \end{aligned}$$

其中，对于等式，我们用到了在区间 (δ, η) 上 $f(r) = r$, $\varphi(r) = h(r)$。现在可以利用函数 $h(r)$ 的具体形式给出上界：

$$|rh(r)h'(r)| \leq \left| \frac{1}{\ln(\eta/\delta)} \cdot \ln(r/\delta) \right| \left| \frac{1}{\ln(\eta/\delta)} \right| \leq \left| \frac{1}{\ln(\eta/\delta)} \right|, \tag{4.8}$$

$$|rh(r)||rh''(r) + 2h'(r)| \leq \left| \frac{r}{\ln(\eta/\delta)} \cdot \ln(r/\delta) \right| \left| \frac{1}{r \cdot \ln(\eta/\delta)} \right| \leq \left| \frac{1}{\ln(\eta/\delta)} \right|. \tag{4.9}$$

但由于 $\delta \to 0^+$，项 $\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}$ 趋于零。因此，只要选取足够小的 $\delta > 0$，方程 (3.17) 和 (3.19) 中的曲率就可以被上界

为 $\varepsilon/44$，如所需。如前所述，(3.18) 和 (3.20) 中截面曲率的估计完全相同。至此，**断言 1**得证。

断言 2： 当 δ 足够小时，奇异度量 $\tilde{g}'$ 在奇异集 $r=0$、δ、η之外具有如下性质：相应矩阵M_1、M_2 的特征值全部为 $\leq \varepsilon/40$。

我们将对矩阵 $M := M_1$ 验证这一点；对于 M_2 ，计算完全类似。回顾一下，M 由方程 (4.5) 描述。对角元由 (3.17) 和 (3.19) 中的曲率项给出，这些曲率项已在前文进行分析。非对角元由 (3.23) 中描述的混合项给出。对于我们的度量 $\tilde{g}'$，混合项具有如下形式

$$\langle R_{g'}(X_i, Z_r)X_i, Z_\theta\rangle = \varphi(\varphi' f + \varphi f')\sin(\theta)\cos(\theta) + \boxed{\varphi' \sin(\theta)\tanh(\varphi f \cos(\theta))},$$

其中，与之前一样，我们有一个框出的误差项。与前面的情形一样，对于局部对称度量，框出的误差项会消失。注意，φ' 除非 $r \in (\delta、\eta)$，否则均为零。在此范围内，框出的误差项可估计为不超过

$$|\varphi' \sin(\theta)\tanh(\varphi f\cos(\theta))| \leq |\varphi'||\varphi||f| = |rh(r)h'(r)|.$$

由方程 (4.8) 中的估计可知，通过选择使 δ 足够接近零，可以使这个上界任意小。

现在我们考虑感兴趣的四个区域中的每一个区域上的矩阵。将具体的函数 f，φ代入后，矩阵如下：

$$M = \begin{bmatrix} -\sin^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\cos^2(\theta) \end{bmatrix} \qquad \eta < r$$

$$M \approx M' = \begin{bmatrix} -h^2\sin^2(\theta) & h(rh'+h)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ h(rh'+h)\sin(\theta)\cos(\theta) & -(rh'+h)^2\cos^2(\theta) \end{bmatrix} \qquad \delta < r < \eta$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad r < \delta, r \neq 0$$

对于区间 $(\delta,\ \eta)$，我们只给出了 M 的一个近似 M'，其中省略了误差项。当 $r \in (0,\ \delta)$ 且 $r \in (-\infty,\ 0)$ 时，M 是零矩阵，因此其最大特征值为 $=0$。现在注意到，在两个区间 $(\delta,\ \eta)$ 和 $(\eta,\ \infty)$ 上，这些矩阵的迹均为非正，且行列式为零。这立即推出这些矩阵的最大特征值也是 $=0$。

这给出了所需的特征值界，但当$r \in (\delta,\ \eta)$时的区域可能除外，此时上面的矩阵 M'仅是 M的近似。矩阵 M 中的实际元素应包含带框项；我们已经看到，这些项会使 M'的所有元素发生一定程度的扰动，而该程度为 $O\left(\frac{-1}{\delta}\ln()\right)$。矩阵 2×2 的最大特征值关于矩阵元素连续变化。因此，对于任意单个矩阵，我们可以将 δ 选取得足够小，从而保持最大特征值$\leq \varepsilon/40$。但是，M'是一个由 $r \in (\delta,\ \eta)$ 参数化的连续矩阵族$\theta \in [0, 2\pi]$，我们需要确保能够为整个矩阵族[2] 选取统一的 δ 。

[2]函数 f 和 φ 在紧区间 $[\delta, \eta]$ 上连续，但当 $\delta \to 0$ 时 $\varphi' \to \infty$ 。因此，原则上，L^1估计可能会随着 $\delta \to 0$ 而变差。这就是为什么这里需要进一步分析。

为此，回顾一下， 2×2 矩阵 M 的特征多项式为

$$\chi(x) = x^2 - \mathrm{tr}(M)x + \det(M),$$

因此，最大的根将有如下界

$$\begin{aligned}\mu(M) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(M) + \sqrt{\mathrm{tr}(M)^2 - 4\det(M)}\right), \\ &\leq \mathrm{tr}(M) + |\mathrm{tr}(M)| + 2\sqrt{|\det(M)|}.\end{aligned}$$

如果我们通过将矩阵元素改动少量O（ϵ），把 M' 扰动为一个新矩阵 M，那么两个迹项会改变 O（ϵ）（其中一致常数）。根据行列式的公式，我们看到 $\det(M) = \det(M') + O_{M'}$（$\epsilon$），其中误差项中的常数取决于矩阵 M'的逐元素 L^1-范数，即矩阵元素绝对值之和。当 $r \in$ （δ，η）时，我们有h（r）$\in$（0，1），并且

$$rh'(r) + h(r) = \frac{1 + \ln(r/\delta)}{\ln(\eta/\delta)} \leq 2,$$

因此，我们的近似矩阵 M' 中的所有矩阵元素的范数都是 $\leq$ 2。由于近似矩阵满足 $\det(M') = 0$，我们得出，实际矩阵M在定义域（δ，η）上满足 $\det(M) = O$（ϵ），其中一致常数。最后，我们可以代入这些界，并回想近似矩阵满足 $\mathrm{tr}(M') \leq 0$和 $\det(M') = 0$，从而得到实际矩阵满足如下估计：

$$\mu_{max}(M) = O(\epsilon) + O(\sqrt{\epsilon}) = O\left(\sqrt{\frac{-1}{\ln \delta}}\right),$$

其中第二个等式由以下事实得出：$\epsilon = O\left(^{-1}{}_{\ln \delta}\right)$；由于 $0 < \epsilon < 1$，我们也有 $\epsilon < \sqrt{\epsilon}$。由于该估计在 $r \in (\delta,\ \eta)$ 所在区域上一致成立，因此取 δ 足够小即可保证矩阵 M 的最大特征值$\leq \varepsilon/40$，从而完成**断言 2**的证明。

现在我们可以令 $\kappa_{max} := \varepsilon/44$，并令 $\mu_{max} := \varepsilon/40$。然后，**断言 1** 和**断言 2** 中得到的估计表明，命题 4.3 的假设均得到满足。因此，当 δ 足够小时，奇异度量 $\tilde{g}'$ 的**所有**截面曲率$\leq \epsilon/2$。最后一步是在不引入过多额外正曲率的情况下，将奇点光滑化。

注 4.4。注意到，当 $\delta \to 0^+$时，**断言 1** 和**断言 2** 中的所有上界都趋近于零。这意味着在后续论证中，如有需要，我们仍可进一步缩小 δ。

断言 3： 奇异度量 $\tilde{g}'$ 可以在三个奇异集$r = 0$、δ、η附近光滑化为光滑度量 $\tilde{g}$。光滑化可以选取得仍满足命题 4.3 的假设，其中 $\kappa_{max} := \varepsilon/22$且 $\mu_{max} := \varepsilon/20$。因此，光滑化后的度量 $\tilde{g}$ 的所有曲率均为 $\leq \varepsilon$。

为了使奇异度量 $\tilde{g}'$ 光滑，我们只需在 $r = 0$ 和 δ 附近使函数 f 光滑，并在 $r = \delta$ 和 η 附近使 φ 光滑。为了控制 κ_{max} 和 μ_{max}，我们需要分析 f、φ 中的扰动如何影响以下表达式：(1) 沿坐标超平面的截面曲率；(2) 矩阵 M_i 的最大特征值。我们依次分析每个奇异值。

奇点位于 $r=0$: 在 $r=0$ 奇点的邻域中，注意到 $\varphi \equiv 0$（因此是光滑的）。所以我们只需使函数 f 光滑。在 $r=0$ 处的奇点附近，函数 f 定义如下:

$$f(r)=\begin{cases}\delta & r \geq 0 \\ \delta e^{\delta r} & r \leq 0\end{cases}$$

因此在奇点处是 C^0，但不是 C^1 。任何光滑化 f_ϵ 都会 C^0地逼近 f，所以特别是 f_ϵ在 δ附近有界。用 f'_ϵ来表示，这预计会从 $\approx \delta^2$ 过渡到零。

考察坐标平面曲率的表达式，我们注意到，无论 f、 φ如何，方程（3.15）和（3.16）都是 ≤ 0 。 φ 的消失还意味着，在 $r=0$的一个邻域内，方程（3.17）–（3.21）中的表达式无论 f的光滑化如何选择，都全部是 $\equiv 0$ 。这样就只剩下方程（3.22），我们回忆其指出 $K\left(Z_r, Z_\theta\right)=-f''/f$。

关于奇点 $r=0$附近的矩阵 M_1、 M_2 ，注意到 $\varphi \equiv 0$ 的消失立即意味着所有矩阵元素都消失（无论 f如何光滑化）。因此，这些矩阵的最大特征值为 0，正如所需。

因此，为了在 $r=0$ 附近对光滑化度量应用命题 4.3，只需确保我们的局部光滑化 f_ϵ 在 $r=0$ 附近满足 $-f''_\epsilon/f_\epsilon \leq \varepsilon/22$。附录中的引理 5.7 给出了一种这样的光滑化。

$r=\eta$ 处的奇点: 在 $r=\eta$ 奇点的一个邻域内，函数 $f(r)=r$ 已经是光滑的。因此，我们只需对函数 φ 进行光滑化。在 $r=\eta$ 处的奇点附近，函数 φ 由下式给出:

$$\varphi(r)=\begin{cases}1 & r \geq \eta \\ h(r) & r \leq \eta\end{cases}$$

因此它在 C^0 处是 C^1，但在奇点处不是。光滑化 φ_ϵ 将以 φ 为中心作 C^0 近似，因此在 η 附近会保持在 1 附近的有界范围内。此外， φ'_ϵ 预计会从一个值 $\approx \eta^{\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}}$ 过渡到零。

对于坐标平面曲率，方程（3.15）和（3.16）与 f、 φ 无关， ≤ 0 。方程（3.22）中的曲率表达式关于 $f'' \equiv 0$ 是线性的，因此也具有 $\equiv 0$。利用函数 f 的具体形式，可以很容易地验证，只要光滑化 φ_ϵ 在 $r=\eta$ 附近满足以下约束，其余坐标平面曲率就是 $\leq \varepsilon/22$:

- $\varphi'_\epsilon \geq -\varepsilon/22$，用于控制方程（3.17）、（3.18）、（3.21）中的曲率，
- $r\varphi''_\epsilon+2\varphi'_\epsilon \geq -\varepsilon/22$，用于控制方程（3.19）、（3.20）中的曲率。

注意，如果上面的两个表达式均为 ≥ 0，那么沿坐标平面的截面曲率将是非正的。然而，对函数 $r^2\varphi'_\epsilon(r)$的分析表明，**不存在**一个函数，能够在 $h(r)$与1之间插值，同时使这两个项都满足 ≥ 0。特别是，对φ 在 $r=\eta$ 附近进行任何光滑化，都会导致某些坐标超平面在 $r=\eta$附近具有正曲率。

接下来我们考虑矩阵 M_i 的特征值。如前所述，我们将矩阵 $M:=M_1$ 分解为和 $M=M'+M$ ，方法是分离未加框部分与 $\boxed{}$

每个矩阵元素的加框部分：

$$M' = \begin{bmatrix} -\varphi_\epsilon^2 \sin^2(\theta) & \varphi_\epsilon(r\varphi_\epsilon' + \varphi_\epsilon)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \varphi_\epsilon(r\varphi_\epsilon' + \varphi_\epsilon)\sin(\theta)\cos(\theta) & -(r\varphi_\epsilon' + \varphi_\epsilon)^2\cos^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{M} = \begin{bmatrix} -(\varphi_\epsilon')\cos(\theta)\tanh(r\varphi_\epsilon\cos\theta) & \varphi_\epsilon'\sin(\theta)\tanh(r\varphi_\epsilon\cos\theta) \\ \varphi_\epsilon'\sin(\theta)\tanh(r\varphi_\epsilon\cos\theta) & -(r\varphi_\epsilon'' + 2\varphi_\epsilon')\cos(\theta)\tanh(r\varphi_\epsilon\cos\theta) \end{bmatrix}$$

近似 M' 的行列式为零，且迹为非正，因此其最大特征值为 $= 0$。如**断言 2**中所述， M 的最大特征值将由 M 中最大的矩阵元素与矩阵族 M'的逐元素L^1-范数的乘积控制。 □

对于 L^1-范数，我们考察矩阵 M'中的元素。我们知道 $r \approx \eta$，由于 φ_ϵ C^0近似于 φ ，可得 $\varphi_\epsilon \approx 1$。因此，为了得到 M'的 L^1-范数的一致上界，我们只需确保所选的光滑化满足：

- φ_ϵ' 由一个一致常数所控制。

对于 M 的矩阵元素，我们希望将那些接近零的元素压缩到零附近。由于 $r \approx \eta$ 和 $\varphi_\epsilon \approx 1$，这将要求：

- φ_ϵ' 可以被任意压缩到接近零，
- φ_ϵ'' 可以任意地逼近零。

综合上述项目符号中列出的所有必要条件，我们看到，只需选择光滑化 φ_ϵ ，使得 $|\varphi_\epsilon'|$ 和 $|\varphi_\epsilon''|$ 都任意小，例如二者均为 $< \varepsilon/66$ 即可。所需的光滑化由附录中的引理 5.8 提供。

$r = \delta$处的奇点：在 $r = \delta$的邻域内，函数 f 和 φ 表示为：

$$f(r) = \begin{cases} r & \delta < r \\ \delta & r \le \delta \end{cases}, \qquad \varphi(r) = \begin{cases} h(r) & \delta < r \\ 0 & 0 < r \le \delta \end{cases}$$

由于这两个函数都是 C^0，但在 $r = \delta$处不是 C^1 ，因此都需要进行光滑化。此外，注意到光滑化 f_ϵ 具有 f_ϵ' ，其从 0 过渡到 1。而光滑化 φ_ϵ具有 φ_ϵ'，从 0 过渡到 $h'(\delta) \approx \frac{1}{\ln(\eta/\delta)}$。注意，当 $\delta \to 0^+$时，我们有 $h'(\delta) \to +\infty$，因此减小 δ 并不会使 φ 更“接近”a C^1-函数。

我们可以再次分析坐标平面曲率方程 (3.15)–(3.22)，并希望它们为 $\le \varepsilon/22$。与前面的情形一样进行论证后，这归结为选择光滑化 f_ϵ， φ_ϵ ，使其满足以下约束：

- $\varphi_\epsilon' f_\epsilon' \varphi_\epsilon f_\epsilon \ge -\varepsilon/44$，用于方程 (3.17) 和 (3.18)，
- $\varphi_\epsilon^2 \cdot ((f_\epsilon')^2 - 1) \ge -\varepsilon/44$，用于方程 (3.17) 和 (3.18)，
- $\varphi_\epsilon f_\epsilon (\varphi_\epsilon'' f_\epsilon + 2\varphi_\epsilon' f_\epsilon' + \varphi_\epsilon f_\epsilon'') \ge -\varepsilon/22$，用于方程 (3.19) 和 (3.20)，
- $\varphi_\epsilon^2 f_\epsilon^2 \left(\varphi_\epsilon^2 - (\varphi_\epsilon' f_\epsilon + \varphi_\epsilon f_\epsilon')^2\right) \le \varepsilon/22$，用于方程 (3.21)，
- $f_\epsilon'' \ge 0$，用于方程（3.22）。

关于控制矩阵 $M := M' + M$ 的特征值，这可分解为界定 M' 的 $\boxed{L^1}$-范数，并限制 M 的各个元素。考察 M' 的各个元素，并回想 $|\varphi_\epsilon|$ 是一致有界的， L^1-范数条件可转化为

- $|\varphi_\epsilon' f_\epsilon + \varphi_\epsilon f_\epsilon'|$ 一致有上界

观察 M 的各项时，压缩这些项就归结为选择一种光滑化，使得下列表达式任意接近于零

- $|\varphi_\epsilon' f_\epsilon' \varphi_\epsilon f_\epsilon|$,
- $\varphi_\epsilon^2 \cdot |(f_\epsilon')^2 - 1|$,
- $\left|\varphi_\epsilon f_\epsilon (\varphi_\epsilon'' f_\epsilon + 2\varphi_\epsilon' f_\epsilon' + \varphi_\epsilon f_\epsilon'')\right|$，并且
- $|\varphi_\epsilon' \varphi_\epsilon f_\epsilon|$。

现在回想一下，我们可以任意精确地选择逼近函数，使其在 C^0-度量下足够接近；这意味着近似 $f_\epsilon \approx \delta$，$\varphi_\epsilon \approx 0$ 可以任意接近。鉴于此，并综合以上项目符号列出的约束，我们看到，只需确保光滑化 f_ϵ，φ_ϵ 满足以下条件：

(1) $|f_\epsilon'|$一致有界，$f_\epsilon'' \geq 0$和 $f_\epsilon'' = O\left(\frac{1}{\delta}\right)$；(2) $f_\epsilon \varphi_\epsilon' = O\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right)$；(3) $f_\epsilon^2 \varphi_\epsilon'' = O\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right)$。

注意，最后两个条件是混合条件，因为它们要求两个光滑化 $f_\epsilon, \varphi_\epsilon$之间存在某种相互依赖关系。特别是，不能独立地选取这两个光滑化。在条件 (1)-(3) 中，隐含常数必须是普适的。

最后，我们指出，对于这三个奇点中的每一个，我们都已将曲率控制问题归结为构造具有某些指定性质的函数 f, ϕ 的光滑化。在附录中，我们构造了这些光滑化，见引理 5.7、5.8 和 5.9。这些光滑化依赖于参数 $\delta > 0$，选取足够接近 0 的 δ即可确保光滑化具有所需的控制。这就证明了**断言 3**。

为完成定理的证明，我们还需控制 (N, g) 的体积。我们用 Vol(S) 表示相对于局部对称度量 $\mathfrak{h}_{m-1} + \mathfrak{h}_{n-1}$ 而言 S 的体积。首先，我们估计奇异度量在 $r \leq 0$, $0 \leq r \leq \delta$, $\delta \leq r \leq \eta$这些区域中、靠近 S处的体积。注意，在范围 $r \geq \eta$ 内，奇异度量（因而其体积）与局部对称度量一致。在范围 $r \leq 0$内，奇异度量退化为局部乘积度量 $\mathfrak{h}_{m-1} + \mathfrak{h}_{n-1} + (\delta e^{\delta r})^2 d\theta^2 + dr^2$。因此，在空间的这一部分，体积恰好为

$$2\pi \cdot \mathrm{Vol}(S) \cdot \int_{-\infty}^{0} \delta e^{\delta r}\, dr = 2\pi \cdot \mathrm{Vol}(S).$$

当 $0 \leq r \leq \delta$ 时，奇异度量再次是一个局部乘积度量 $\mathfrak{h}_{m-1} + \mathfrak{h}_{n-1} + \delta^2 d\theta^2 + dr^2$，它给出一个径向距离为 r、以 S 为中心的圆柱，因此其体积为 $2\pi\delta^2 \cdot$Vol(S)。最后，在区域 $\delta \leq r \leq \eta$ 内，从局部对称度量到我们的扭曲度量的恒等映射是 1-Lipschitz 的（回想一下，$h(r) \leq 1$）。因此，在此区域内，体积不超过局部对称度量下的体积。对 S 附近各区域的这些不等式求和，可得对于奇异度量，Vol(N) $< V$，其中 V 是某个一致常数。根据我们的估计，常数 V 可以取任何大于以下数值的实数

$$\mathrm{Vol}(M) + 2\pi \cdot \mathrm{Vol}(S).$$

最后，光滑化仅使度量发生点态扰动，扰动量为$O(\delta)$，因此，当 δ 取得足够小时，光滑化度量仍满足相同的估计 $\mathrm{Vol}(N,\ g) < V$。这就完成了定理 1.1 (1) 的证明。

□

4.2. **分歧覆盖上的几乎非正曲率度量**。为了证明定理 1.1 (2)，我们需要用到 [16] 中的以下结果。

定理 4.5 ([16] 第 2 节)。设(M, g_M)是一个非正曲率流形，(S, g_S)是 M 的一个嵌入的全测地余维二子流形，并假设在 S 周围某个 r-管状邻域上，有 $g_M = g_S + e_2$。令 X_d 表示 M 沿 S 的 d 重循环分歧覆盖，$\phi_d : X_d \to M$ 为相应的分歧覆盖映射。那么，对于任意满足 $0 < \delta_1 < \delta_2 < r$ 的 $\delta_1, \delta_2 > 0$，存在 X_d 上的一个光滑非正曲率度量 g，使得

(1) 在 S 的 δ_1-邻域上，$g = g_M = g_S + e_2$；且 *(2)* 在 S 的 δ_2-邻域之外，$g = \phi_d^* g_M$。特别地，在 S 的(δ_2, r)-环带上，有 $g = g_S + \phi_d^*(e_2)$。

注意，在定理 4.5 中，我们滥用记号，也用 S 指代 X_d 的分歧轨迹。

注记 4.6。 (1) [16] 中进行的光滑化论证是在分支轨迹 $S \subset X_d$ 附近局部完成的。他们展示了如何在分支轨迹 S 的 δ_2-邻域内修改拉回度量 $\phi_d^* g_M$，以“抚平”奇点。此外，可以使光滑化后的黎曼度量的体积尽可能接近奇异拉回度量的体积。

(2) Fornari 和 Schroeder 在 [16] 中证明定理 1.2 (2) 时，定理 4.5 的应用至关重要。将黎曼度量自然地拉回到分支覆盖上，会得到一个在 S 方向上具有奇点的度量，这是由于分支覆盖构造产生的超额角所致。随后可以尝试光滑化这个奇点。定理 4.5 表明，当度量分裂出一个横向平坦因子时，这一过程可以实现。这为光滑化问题提供了另一种思路：可以转而尝试在原始的 M 上构造一个度量，使其在 S 附近满足局部横截平坦条件，然后借助定理 4.5 对 X_d 上的提升度量进行光滑化。

(3) 当 (M, S) 以 $(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^n, \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1})$ 为模型时，可以修改 Fornari 和 Schroeder 的论证，使得该度量的所有曲率都落在 $(-1-\varepsilon, 0]$ 内，其中 $\varepsilon > 0$ 可任意指定。给定一个较大的正常数k_0，他们的论证[3] 依赖于构造一个光滑函数 $\varphi(r)$，使其从$f(r) = r$ 变化到 $h(r) = d(r - k_0)$。可以以凸的方式做到这一点，从而使所有曲率都非正。如果只将这些函数的交点处平滑化，那么 $\varphi(r)$ 在该点附近会有较大的二阶导数，因此度量会有较大的负曲率。但当 k_0 足够大时，可以构造 $\varphi(r)$，使得对所有 r 都有 $\varphi'' < \varepsilon$。这样所有曲率都保持在 $-1-\varepsilon$ 以上。下文的注 4.7 仅需用到这一点。

现在，我们可以使用定理 4.5，并采用与定理 1.1 (1) 的证明基本相同的论证，来证明定理 1.1 (2)。

[3]在 [16], 中，作者使用 $\tilde{\rho}$ 表示 r，并使用 k 表示分支度 d。

定理 *1.1 (2)* 的证明。 鉴于定理 4.5，只需构造一个度量 g，使其在 M 上满足：(1) 在 S 的一个小管状邻域内具有非正曲率；(2) 在该小管状邻域之外几乎处处具有非正曲率；(3) 在管状邻域内满足“局部横截平坦性”条件。随后，定理 4.5 会在分支轨迹 $S \subset X_d$ 的小管状邻域内对 X_d 上的提升度量进行光滑化，同时保持管状邻域上的非正曲率。因此，最终得到的 X_d 上的光滑度量，其截面曲率的小正上界将与原度量 M 上的相同。

基本上，只需从定理 1.1 (1) 的证明中构造的度量里去掉尖点部分（对应于 $r<0$），就能在 M 上构造出这样的度量。特别地，对于 $\delta,\ \eta>0$ 按定理 1.1 (1) 的证明中的方式选取，我们定义 $\varphi\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi(r)=\begin{cases}1 & r\geq\eta\\ \frac{1}{\ln\left(\frac{\eta}{\delta}\right)}\ln\left(\frac{r}{\delta}\right) & \delta<r<\eta\\ 0 & 0\leq r\leq\delta\end{cases},$$

我们通过方程 (3.8) 定义度量 g'，具体来说，定义 f、α 和 β 如下：

$$f(r)=r,\qquad \alpha(r,\theta)=\cosh(\varphi(r)r\cos(\theta)),\qquad \beta(r,\theta)=\cosh(\varphi(r)r\sin(\theta)).$$

注意，对于 $0\leq r<\delta$，我们有

$$\alpha(r,\theta)=\cosh(0\cdot r\cos(\theta))=1,\qquad \beta(r,\theta)=\cosh(0\cdot r\sin(\theta))=1.$$

因此，对于 $0\leq r<\delta$，由 (3.8) 得

$$g'=\mathfrak{h}_{m-1}+\mathfrak{h}_{n-1}+r^2d\theta^2+dr^2=\mathfrak{h}_{m-1}+\mathfrak{h}_{n-1}+e_2.$$

此处定义的度量 g' 与定理 1.1 (1) 的证明中定义的度量并不等价。在区间 (0, δ) 上，此处有 $f(r)=r$，而在前面的论证中，我们有 $f(r)=\delta$。不过，容易验证，定理 1.1 (1) 的证明中的所有估计仍然适用，因为在此区域上 $\varphi\equiv 0$。因此，可以选取足够小的 $\delta,\ \eta>0$ 使得 g' 的截面曲率小于 $\varepsilon/2$，其中 $r\neq\delta$ 且 $r\neq\eta$。然后可以对 g' 进行光滑化，从而得到定义在 M 上的黎曼度量 g，且所有截面曲率都小于 ε。在 $r=\eta$附近，光滑化 φ_ϵ 与定理 1.1(1) 的证明中完全相同，同样的计算也给出相同的曲率上界。现在，在 $r=\delta$附近，我们使用引理 5.9 中构造的 φ_ϵ，同时使用 $f_\epsilon=f=r$。为了确认定理 1.1(1) 的证明中的约束在选择此 f_ϵ 后仍然成立，我们需要确保满足以下条件：

- $|f_\epsilon'|$ 是有界的，$f_\epsilon''\geq 0$，且 $f_\epsilon''=O\left(\frac{1}{\delta}\right)$；
- $r\varphi_\epsilon'=O\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right)$；
- $r^2\varphi_\epsilon''=O\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right)$.

由于 $f_\epsilon(r)=r$，第一条性质显然成立。最后两条性质可由引理 5.9 中 φ_ϵ 的构造轻易推出，并结合以下事实：$r<\delta+\epsilon$（这些正是证明引理 5.9 中性质 (7) 和 (8) 时所用的同一组估计）。

注意，我们的光滑化度量 g 将满足本证明开头所述的三个条件 (1)、(2) 和 (3)。应用定理 4.5，我们

得到 X_d 上的一个光滑度量 g_d，其所有截面曲率均有上界ε。

我们需要考虑的最后一项是（X_d，g_d）的体积。注意，在定义 g' 时，

$$\alpha(r,\theta) \le \cosh(r\cos(\theta)) \qquad \beta(r,\theta) \le \cosh(r\sin(\theta))$$

对 r 和 θ的所有取值均成立。此外，经过光滑化后，$f = r$ 和 $0 \le \varphi_\epsilon \le 1$。因此，我们的光滑度量 g满足 $\mathrm{Vol}(M, g) \le \mathrm{Vol}(M, \mathfrak{h}_m + \mathfrak{h}_n)$。这说明 X_d 上的拉回奇异度量 $\phi_d^* g$ 也满足不等式

$$\mathrm{Vol}(X_d, \phi_d^* g) \le d \cdot \mathrm{Vol}(M, \mathfrak{h}_m + \mathfrak{h}_n)$$

根据注 4.6 (1)，现在可以对 X_d 进行光滑化，使其体积任意接近 $\mathrm{Vol}(X_d, \phi_d^* g)$。因此，对于任意给定的 $\xi > 0$，都可以将其上界控制为$d \cdot \mathrm{Vol}(M, \mathfrak{h}_m + \mathfrak{h}_n) + \xi$。□

注 4.7。 出于与定理 1.1 (1) 的证明中相同的原因，上述证明中构造的度量将包含绝对值非常大的负截面曲率。截面曲率的下界将趋近于 $-\infty$，当 $\varepsilon \to 0$时。然而，如果 M 中的 S 的法向单射半径足够大，那么可以在 X_d 上构造一个度量，使其截面曲率位于区间（$-1-\varepsilon$，ε）内，并具有相同的体积界。对于较大的正常数 A 和 B，定义 φ 为一个光滑递增函数：当 $r \le A$时恒等于 0，并且当$r \ge B$时等于 1。然后，完全按照上述论证定义 g'。可以验证，当 A 取充分大时，定理 1.1 (1) 证明中的所有估计都可以被迫任意接近 0。最后，通过应用注 4.6 (3)，在 X_d 上得到所需的度量。

5. The special case of product lattices

本节中，我们聚焦于乘积格这一特殊情形。这意味着 M 分解为一个乘积，而连通子流形 S 也分解为一个乘积。在这一特殊情形下，我们可以在几何和代数两方面得到更强的结论。

5.1. 几何性质。

本小节中，我们给出定理 1.2 的证明。首先回顾一些定义。

定义 5.1。 具有曲率张量 R 的黎曼度量 g 称为 A-正则，若存在一个正数列 $\{A_k\}$，使得对每个 $k \ge 0$，k^{th}阶协变导数 R 满足 $|\nabla^k R|_{C^0} < A_k$。

注意，当 $k = 0$时，这意味着 g 的截面曲率有界。显然，紧流形上的任意度量都是 A-正则的，因此这一概念只对非紧流形有意义。容易看出，对称空间是A-正则的。因此，在我们的情形中，只需证明所构造的度量在我们将 S 变为尖点的 S 附近区域上是 A-正则的。

定理 *1.2 (1)* 的证明。 设 M 为乘积 $M_1 \times M_2$，且 $S = S_1 \times S_2$ 与 $S_i \subset M_i$ 为一个连通嵌入全测地子流形。我们希望在 $N = M \setminus S$ 上赋予一个完备的有限体积 A-正则非正曲率度量。如前所述，我们通过局部修改度量，在 S 附近产生尖点来实现这一点。

作为第一步，我们应用命题 3.4，得到 M 上的度量 g_2，它在横截于 S 的方向上是局部平坦的。设 η 表示 S 的法向单射半径，并选取足够小的 $\eta' < \eta$，使得在 S 的 η'-邻域中，度量 g_2 局部等距于 $\mathfrak{h}_{m-1} \oplus \mathfrak{h}_{n-1} \oplus e_{2\circ}$ 于是该邻域的万有覆盖可与 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$ 内 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1} \times \{0\}$ 的 η'-邻域等同。照例，我们将双曲空间 $\mathbb{H}^k$ 与配备双曲度量 $\mathfrak{h}_k$ 的 $\mathbb{R}^k$ 等同。

现在我们在 $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \times (-\infty, \varepsilon_1)$ 上定义度量 $\tilde{g}_1$，其中 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\eta'_{\circ}$ 由方程 (3.8)，令 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 1$，得到一个度量

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + f^2(r)d\theta^2 + dr^2. \tag{5.1}$$

我们希望构造一个函数 $f(r)$，使得当 $r \to -\infty$ 时，$f' > 0$、$f'' \geq 0$ 和 $f \to 0$ 指数地。令 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{1\circ}$ 那么存在 $c < \min\{1, \varepsilon_2\}$ 和一个 $\epsilon > 0$，使得 $\epsilon e^c = c_{\circ}$ 令 $\frac{1}{2}c = \varepsilon_3$，并定义两个函数 $f_1(r)$ 和 $f_2(r)$ 如下：

$$f_1(r) = \epsilon e^r, \quad r \in [\varepsilon_3, c], \tag{5.2}$$

$$f_2(r) = r, \quad r \in [c, \varepsilon_2]. \tag{5.3}$$

注意，$f_1(c) = \epsilon e^c = c = f_2(c)$，且 $f_1'(c) = \epsilon e^c = c \leq 1 = f_2'(c)_{\circ}$ 因此，由引理 5.6，存在一个定义在 $[\varepsilon_3, \varepsilon_2]$ 上的光滑函数 f，使得 $f'' \geq 0$，$f_1(\varepsilon_3) = f(\varepsilon_3)$，且 $f_2(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_2)_{\circ}$

因此，我们在 $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \times (-\infty, \varepsilon_1)$ 上定义了一个光滑度量 $\tilde{g}_1$，其形式为

$$\tilde{g}_1 = \begin{cases} \tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + (\epsilon e^r)^2 d\theta^2 + dr^2, & r \in (-\infty, \varepsilon_3] \\ \tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + f^2(r)d\theta^2 + dr^2, & r \in [\varepsilon_3, \varepsilon_2] \\ \tilde{\mathfrak{h}}_{m-1} + \tilde{\mathfrak{h}}_{n-1} + r^2 d\theta^2 + dr^2, & r \in [\varepsilon_2, \varepsilon_1] \end{cases}. \tag{5.4}$$

根据推论 3.9，$\tilde{g}_1$ 的截面曲率是非正的。根据我们的构造，显然度量 $\tilde{g}_1$ 在 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$的等距变换下保持不变，并且在 $\mathbb{R}^2$ 因子上的旋转和反射下也保持不变。因此，它下降为 S的（去掉中心点的）管状邻域上的良定义度量 g_1。注意，在环形区域 $\mathbb{R}^{m+n-2} \times \mathbb{S}^1 \times [\varepsilon_2, \varepsilon_1]$ 上，度量 $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$与˜ ˜相同，因为二者都与度量 $\mathfrak{h}_{m-1} + \mathfrak{h}_{n-1} + e_2$重合。这使我们能够将去掉中心点的管状 $r \in (-\infty, \varepsilon_1)$ 区域内侧的g_1 度量，与 S较小 ε_2-邻域外侧的g_2 度量粘合起来。这些度量粘合后，在 $M \setminus S$ 上定义了一个非正曲率度量 g。

由于 $(-\infty, 0)$ 上的 $\alpha = \beta = 1$ 和 $f = \epsilon e^r$，根据注4.1，度量 g 具有有限体积。对于 A-正则性，考察尖点附近的度量 g。根据推论 3.9，曲率张量只有三项非零，且都恒等于 $-1_{\circ}$ 因此，其所有导数均为零，故有界。于是度量g 是 A-正则的，证毕。□

注记 5.2。在某些 S 不连通的情况下，也可以扩展证明。只要 S 到两个因子的投影由一组两两不相交的余维一子流形组成即可。于是 $S \subset Y_1 \times Y_2$，其中 $Y_i \subset X_{i\circ}$ 随后，可以在 Y_i的有限个连通分支中的每一个的管状邻域内局部进行同样的修改，只需将 η_3 取得足够小，以确保这些管状邻域两两不相交。所得的 M 上的乘积度量将横截于 S的每个连通分支局部平坦，而其余论证无需改变即可继续进行。

5.2. **群论性质**。 本节将证明定理 1.4，该定理涉及在 M 为紧致乘积且 S 连通这一特定情形下， $\pi_1(N)$的各种群论性质。在此情形下，群 $\pi_1(N)$具有一些群图分解，可以加以利用。在不可约格的情形以及 S 不连通的情形下，这一工具将不再可用。

我们先来描述将要使用的群图分裂。在乘积格情形中，回忆一下 $N = (X_1 \times X_2) \setminus S$。回忆一下， S 投影到一对余维一全测地子流形 $Y_i \subset X_i$ 和 $S = Y_1 \times Y_2$。根据 Y_i 是否将 X_i 分开，现在出现了三种略有不同的可能性。记 W_i 为开流形 $X_i \setminus Y_i$。我们将称 N

- 若 W_1 和 W_2 均连通，则称为 • I 型；
- 若 W_1 连通而 W_2 不连通，则称为 • II 型；
- 若 W_1 和 W_2 均不连通，则称为 • III 型。

对两个因子重新标记后，这些便穷尽了所有可能性。在这三种情形下得到的群图描述略有不同。

引理 5.3。 在 M 紧致且 S 连通的乘积情形下，群 $\pi_1(N)$ 具有一个有限群图分解，并满足

- 顶点群是一个闭双曲流形与一个具有全测地边界的紧致双曲流形之乘积的基本群；
- 边群是两个带边界的紧致双曲流形之乘积的基本群。

此外，每个边群都是相邻顶点群中的一个拟凸子群。

证明。 群分解图是通过对 N应用塞弗特–范坎彭定理得到的。事实上，流形 $N = (X_1 \times X_2) \setminus S$ 可自然地由两个开集 $W_1 \times X_2$ 和 $X_1 \times W_2$ 覆盖（回想一下 $W_i := X_i \setminus Y_i$）。根据N的类型，这些开集各自有一个或多个连通分支。此外，注意到 W_i 的（内在）度量完备化 W_i 是一个带全测地边界的紧致双曲流形，并且 $\pi_1(W_i) \cong \pi_1(W_i)$。$W_i$ 的各个边界分支都与 Y_i等距。对这一覆盖应用塞弗特–范坎彭定理，我们看到顶点群的形式为 $\pi_1({W_1}^0 \times X_2)$ 或$\pi_1(X_1 \times {W_2}^0)$，其中 ${W_i}^0$ 表示 W_i的一个连通分支。

对于边群，我们需要考察两个集合交集的连通分支。这些群的形式为 $\pi_1({W_1}^0 \times {W_2}^0)$，正如所需。最后，从边群到顶点群的映射由子空间的包含诱导。由于与边群对应的子空间是与顶点群对应的空间中的凸子集，应用 π_1-函子即可得到拟凸子群。□

有了引理 5.3，我们现在可以证明定理 1.4，现为方便起见重述如下。

定理 5.4。 假设 $M = X_1 \times X_2$ 是一个紧致乘积，且 $S \subset M$ 是一个建模于 $\mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}^{n-1}$上的连通全测地余维二子空间。对于补集 $N = M \setminus S$，基本群 $\pi_1(N)$ 满足以下性质：

(1) 一致指数增长，

(2) 蒂茨替代定理，*(3) Kazhdan* 子群总是平凡的，*(4)* 有限渐近维数，*(5)* 带系数的 *Baum–Connes* 猜想，*(6) RD* 性质（快速衰减）。

证明。 定理中的所有性质均可由引理 5.3 中所述的 $\pi_1(N)$ 的群图分解推导得出。

1. 一致指数增长。引理 5.3 中群图分解的边群在顶点群中具有无限指数，这立即意味着一致指数增长，参见 Bucher–de la Harpe [14]。

2. 蒂茨替代定理。我们使用引理 5.3 中给出的 $\pi_1(N)$ 的群图分解。顶点群是具有全测地边界的紧致非正曲率流形的基本群。每个顶点群都是双曲空间中的一个格（来自 X_i-因子）与一个具有全测地边界的双曲流形的基本群（来自 W_i-因子中连通分支的闭包）的直积。由此，每个顶点群都是乘积李群 $\mathrm{SO}(m,1)\times\mathrm{SO}(n,1)$ 中一个一致格的收缩，因此满足经典蒂茨替代定理。于是，顶点群的任意子群要么包含非阿贝尔自由群，要么几乎可解。实际上，我们还能进一步了解可解子群。如果 H 是这样一个可解子群，我们可以将它投影到两个因子上，得到 $\mathrm{SO}(m,1)$、$\mathrm{SO}(n,1)$ 中一个一致无挠格子群的子群 H_1、H_2。这些格是格罗莫夫双曲且无挠的，因此它们的可解子群必为无限循环群。这说明 H 包含于一个 $\mathbb{Z}^2$-子群中，因而其自身也是阿贝尔群（秩至多为二）。我们已经证明，群图分解中的顶点群满足一种强形式的蒂茨替代定理：子群要么几乎阿贝尔且秩至多为二，要么包含非阿贝尔自由群。应用 [17, 命题 6.18]，可得 $\pi_1(N)$ 也满足蒂茨替代定理。事实上，该命题还给出稍强一些的结论：$\pi_1(N)$ 中任意可解子群的导出长度为 ≤ 3。

3. Kazhdan 子群。设 H 是 $\pi_1(N)$ 的 Kazhdan 子群。Kazhdan 群具有 (FA) 性质。因此，H 必须固定与 $\pi_1(N)$ 的分裂相关联的 Bass–Serre 树中的某个顶点，因而共轭于某个顶点稳定子的子群。因此，我们可以将 H 视为某个顶点群中一个 Kazhdan 子群的同构副本。根据引理 5.3 对顶点群的描述，顶点群自然地分裂为一个直积，并在 $\mathbb{H}^m\times\mathbb{H}^n$ 上继承乘积作用。第一个因子在 $\mathbb{H}^m$ 上无不动点地等距作用，因此根据 (FH) 性质，H 必须包含在投影映射的核中，参见 Bekka–de la Harpe–Valette [2, 命题 2.65]。对投影到第二个因子应用相同的推理，我们得出 H 是平凡的。

4. 有限渐近维数。Bell 和 Dranishnikov [6] 证明，若群图的所有顶点群都具有有限渐近维数，则该群图的基本群也具有有限渐近维数。根据引理 5.3 对顶点群的描述，我们知道这些顶点群是格罗莫夫双曲群的乘积。众所周知，格罗莫夫双曲群具有有限渐近维数（例如参见 Roe [33]），并且有限渐近维数群的乘积仍具有有限渐近维数（例如参见 [6] Thm [33]）。

因此，顶点群具有有限渐近维数，应用 Bell–Dranishnikov 性质即可得出结论 (4)。

5. 鲍姆–康恩猜想。Oyono-Oyono [31] 证明了，对于一个群图，鲍姆–康恩猜想（带系数）成立，当且仅当它对各顶点群成立。在我们对 $\pi_1(N)$ 的群图分解中，顶点群是 SO(m,1)（或 SO(n, 1)）中的一致格与 SO(m,1)（或 SO(n,1)）中某个格的收缩的直积。SO(m, 1)、SO(n,1) 这些李群中的格及格的收缩都满足鲍姆–康恩猜想，参见例如 Lafforgue [25], ; 此外，Chabert–Echterhoff [10]证明该猜想在群的直积下保持成立。应用 Oyono-Oyono 的结果，即得所需结论。

6. 快速衰减性质（RD）。受 Haagerup [21], 启发，Jolissaint 引入并研究了群的快速衰减性质（RD） [23] （关于这一主题的简要介绍，参见 [11] ）。此后，该性质被用于证明 Novikov 猜想和鲍姆–康恩猜想的某些情形 [24]。Chatterji–Gautero 的近期工作表明，如果一个群图的顶点群满足快速衰减性质（RD），且边群在顶点群中具有宽松多项式扭曲，那么整个群也满足快速衰减性质（RD）（参见 [12, 命题 1.3]）。根据引理 5.3，各顶点群都是格罗莫夫双曲群的乘积。众所周知，格罗莫夫双曲群满足快速衰减性质（RD）（参见 [13]），而且该性质在直积下保持（参见 [23]）。此外，运用与引理 5.3 中类似的论证，很容易证明边群在顶点群中确实是线性扭曲的（因而也是多项式扭曲的）。应用 Chatterji–Gautero 的结果，即完成快速衰减性质（RD）的证明。□

注5.5。 在定理 1.4 中，假设 S 连通在几个方面发挥了作用。首先，这保证了 S 到两个因子上的投影 Y_i 是嵌入的余维一子流形。如果 S 有多个连通分支，这一点就不再有保证。其次，即使 Y_i 是嵌入的，在不连通的情形下也可能出现 $S \neq Y_1 \times Y_2$。在这种情况下，引理 5.3 中描述的集合无法覆盖 N，因此也就不能为 $\pi_1(N)$构成群图结构。只要 $S = Y_1 \times Y_2$，即使 S有多个连通分支，定理 1.4 中的论证仍然成立。

Appendix: Smoothing continuous functions with controlled derivatives

在本附录中，我们汇集了本文前面用到的一些关于连续函数光滑化的结果。下面的第一个命题基本上是对 [3,命题 13.5]的重述。

命题 5.6。 设 $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一个正连续函数，且对于某个 $c \in (a,b)$， f在 $[a,c]$和 $[c,b]$ 上的限制是光滑的，并且满足$f'' \geq k$和 $f'(c_-) \leq f'(c_+)$。那么对于任意充分小的 $\epsilon > 0$，存在一个光滑函数 $f_\epsilon\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$，使其满足

(1) $f_\epsilon = f$ 在 c 的 ϵ 邻域之外。*(2)* $f_\epsilon'' \geq k$。
(3) 如果 f 是非递减的，那么 $f_\epsilon' \geq 0$。

[3] 的命题 13.5 针对 f 递增且 $f'_\epsilon > 0$ 的情形陈述了这一结果，但同样的论证也适用于非递减且 $f'_\epsilon \geq 0$ 的情形。函数 f_δ 是通过卷积构造的，例如可参见 [22, 第 2] 章。如果 f 是非递减的，那么与非递减的 卷积核 进行卷积会产生一个非递减函数。因此， $f'_\epsilon \geq 0$。

其余三个引理都用于定理 1.2 (1) 的证明中对函数进行光滑化。我们按照这些引理在论证中出现的顺序陈述它们。人工智能用于构造满足各引理性质的显式函数，作者则验证了这些解的正确性。前两个引理分别在 $r = 0$ 或 $r = \eta$ 处对一个函数进行光滑化，只需画图便可较容易地理解。因此，我们只展示人工智能针对 $r = \delta$ 处光滑化给出的构造；由于 f_ϵ 与 φ_ϵ 之间必须满足特定关系，这一情形要复杂得多。

在下文中， δ， $\eta > 0$ 是满足 $\delta \ll \eta$ 的常数。

引理 5.7 （在 $r = 0$ 处光滑化）。 任取 $\varepsilon > 0$ 。则存在充分小的 $\delta > 0$，以及一个光滑函数 $f_\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，满足以下性质：

(1) $f_\delta(r) = \delta e^{\delta r}$ ，对所有 $r \leq -1$ 均成立。*(2)* $f_\delta(r) = \delta$ ，对所有 $r \geq 0$ 均成立。*(3)* $|f_\delta(r) - \delta e^{\delta r}| < \varepsilon$ ，对所有 $r \in (-1,0)$ 均成立。*(4)* $-\frac{f''_\delta(r)}{f_\delta(r)} < \varepsilon$ ，对所有 $r \in (-1, 0)$ 均成立。

引理 *5.7* 的证明。定义函数 $f_\delta(r)$ 如下：

$$f_\delta(r) = \delta(1 + \chi(r)(e^{\delta r} - 1)),$$

其中 $\chi(r)\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个光滑的非增函数，满足

$$\chi(r) = 1 \text{ for } r \leq -1, \text{ and } \chi(r) = 0 \text{ for } r \geq 0.$$

则该函数直接满足条件 (1) – (3)。由于在 $(-1,0)$ 上 $|\frac{f''_\delta}{f_\delta}| = O(\delta)$，当 $\delta > 0$ 足够小时，性质 (4) 成立。□

引理 5.8 （在 $r = \eta$ 处的光滑化）。 令 $\varepsilon > 0$ 任意。取 ϵ、 $\eta > 0$ ，使得 $\epsilon \ll \eta$。令

$$h(r) = \frac{\ln(r/\delta)}{\ln(\eta/\delta)}.$$

则存在足够小的 $\delta > 0$ ，以及一个光滑函数 $\varphi_\epsilon\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$，满足以下性质：

(1) 对所有 $r \leq \eta - \epsilon$， $\varphi_\epsilon(r) = h(r)$。 *(2)* 对所有 $r \geq \eta$， $\varphi_\epsilon(r) = 1$ 。*(3)* 对所有 $r \in (\eta - \epsilon, \eta)$， $0 \leq \varphi'_\epsilon(r) \leq \varepsilon$ 。*(4)* 对所有 $r \in (\eta - \epsilon, \eta)$， $|\varphi''_\epsilon(r)| \leq \varepsilon$ 。*(5)* 对所有 $r \in (\eta - \epsilon, \eta)$， $r\varphi''_\epsilon(r) + 2\varphi'_\epsilon(r) \geq -\varepsilon$ 。

引理 5.9 (在 $r = \delta$处光滑化)。 假设 $\epsilon = C\delta$ 对于某个固定的 $0 < C < 1/4$。令

$$h(r) = \frac{\ln(r/\delta)}{\ln(\eta/\delta)}.$$

那么存在光滑函数 $f_\varepsilon, \varphi_\epsilon\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 以及常数 C_1 和 C_2，它们仅依赖于 C ，并满足

(1) $f_\epsilon(r) = \delta$ 对 $r \le \delta - \epsilon$成立。(2) $f_\epsilon(r) = r$ 对 $r \ge \delta + \epsilon$成立。(3) $0 \le f'_\epsilon(r) \le 1$ 对所有 r 成立。(4) $0 \le f''_\epsilon(r) \le \frac{1}{C\delta}$ 对所有 r成立。(5) $\varphi_\epsilon(r) = 0$ 对 $r \le \delta - \epsilon$成立。(6) $\varphi_\epsilon(r) = h(r)$ 对 $r \ge \delta + \epsilon$成立。(7) $|f_\epsilon(r)\varphi'_\epsilon(r)| < C_1\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right)$ 对所有 r成立。(8) $|f_\epsilon^2(r)\varphi''_\epsilon(r)| < C_2\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right)$ 对所有 r成立。

引理 *5.9* 的证明。 我们首先构造函数 f_ϵ 并验证条件 (1) –(4)，然后构造函数 φ_ϵ 并验证条件 (5) – (6)，最后验证不等式 (7) –(8)以完成证明。

构造 f_ϵ： 我们首先进行代换 $t = \frac{r-(\delta-\epsilon)}{2\epsilon}$ 并定义

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases},$$

and

$$\rho(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t) + \psi(1-t)}.$$

容易检验， ψ 和 ρ都是光滑的，并且 ρ 满足以下性质

$$\rho(t) = 0 \quad (t \le 0) \qquad \rho(t) = 1 \quad (t \ge 1) \qquad 0 < \rho'(t) \quad (0 < t < 1).$$

根据 ρ 的定义可立即得到

$$\rho(1-t) = 1 - \rho(t)$$

这意味着

$$\int_0^1 \rho(t)\,dt = \frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

然后我们定义 $f_\epsilon(r)$ 如下:

$$f_\epsilon(r) = \begin{cases} \delta & r \le \delta - \epsilon \\ \delta + 2\epsilon \int_0^t \rho(s)\,ds & \delta - \epsilon < r < \delta + \epsilon \\ r & r \ge \delta + \epsilon \end{cases},$$

其中我们回顾一下， $t = \frac{r-(\delta-\epsilon)}{2\epsilon}$。

由构造可知， f_ϵ 在 $r = \delta - \epsilon$处连续，而积分（5.5）表明， f_ϵ 在 $r = \delta + \epsilon$处连续。利用链式法则，有

$$f'_\epsilon(r) = \rho(t) \qquad f''_\epsilon(r) = \frac{1}{2\epsilon}\rho'(t) \ge 0.$$

由于函数 $\rho'(t)$ 在 $\rho'(1/2) = 2$ 处取得最大值，这也给出了上界

$$f''_\epsilon(r) = \frac{1}{2\epsilon}\rho'(t) \le \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{C\delta}.$$

因此，我们验证了条件 (1) –(4)。直接计算可得， ρ 的所有导数在 $t = 0,1$ 处均等于 0，这验证了 f_ϵ 是光滑的。

的构造：令 ξ 为一个较小的正参数，并将函数ψ_ξ 和 ρ_ξ 定义为

$$\psi_\xi(t) = \begin{cases} e^{-1/(t-\xi)} & t > \xi \\ 0 & t \le \xi \end{cases},$$

and

$$\rho_\xi(t) = \frac{\psi_\xi(t)}{\psi_\xi(t) + \psi_\xi(1-\xi-t)}$$

其中， t 与 f_ϵ的定义相同。令 $\xi = 0$ ，即可得到上文中的函数 ψ 和 ρ 。引入参数 ξ 的原因是，此时非负函数 ρ_ξ 在 $t = 0$的 ξ邻域内等于 0，而在 $t = 1$的 ξ邻域内等于 1。

定义函数 $q(t)$如下:

$$q(t) = \rho_\xi(t)\frac{\delta+\epsilon}{(\delta-\epsilon)+2\epsilon t} + D\rho_\xi(t)(1-\rho_\xi(2t-1)). \tag{5.6}$$

其中， D 是一个常数，选取它使得

$$\int_0^1 q(t)\,dt = \frac{h(\delta+\epsilon)}{2\epsilon h'(\delta+\epsilon)}. \tag{5.7}$$

将此积分分配到 (5.6) 中并求解，即可方便地得到一个 n D的显式公式。

$$D = \frac{\frac{h(\delta+\epsilon)}{2\epsilon h'(\delta+\epsilon)} - \int_0^1 \rho_\xi(t)\frac{\delta+\epsilon}{(\delta-\epsilon)+2\epsilon t}dt}{\int_0^1 \rho_\xi(t)(1-\rho_\xi(2t-1))dt} = \frac{\frac{(1+C)\ln(1+C)}{2C} - \int_0^1 \rho_\xi(t)\frac{1+C}{1-C+2Ct}dt}{\int_0^1 \rho_\xi(t)(1-\rho_\xi(2t-1))dt}.$$

当 $\xi = 0$时，我们有 $\rho_\xi = \rho$ ，而 D 的分子将为

$$\begin{aligned} &\frac{(1+C)\ln(1+C)}{2C} - \int_0^1 \rho(t)\frac{1+C}{1-C+2Ct}dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+C}{1-C+2Ct}dt - \int_0^1 \rho(t)\frac{1+C}{1-C+2Ct}dt \\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \rho(t)\Big(\frac{1+C}{1-C+2Ct} - \frac{1+C}{1+C-2Ct}\Big)dt. \end{aligned}$$

此外，我们可以很容易地验证

$$0 < \frac{1+C}{1-C+2Ct} - \frac{1+C}{1+C-2Ct} < 1,$$

因此 $-1 < D < 0$。由连续性可知，对于所有充分小的 $\xi > 0$，同样的不等式也成立。

现在我们可以定义 φ_ϵ 为

$$\varphi_\epsilon(r) = \begin{cases} 0 & r \le \delta-\epsilon \\ 2\epsilon h'(\delta+\epsilon)\int_0^t q(s)\,ds & \delta-\epsilon < r < \delta+\epsilon \\ h(r) & r \ge \delta+\epsilon. \end{cases},$$

由 (5.7) 和 t 的定义可立即得出， φ_ϵ 在 $r = \delta-\epsilon$ 和 $r = \delta+\epsilon$ 处连续。此外，引入参数 ξ 后，可以很容易地证明φ_ϵ 在 $r = \delta-\epsilon$ 和 $r = \delta+\epsilon$ 附近光滑，如下所示。

函数 $\rho_\xi(t)$ 在 0 的 ξ-邻域内恒等于 0。当 ξ 取值足够小时，这对应于 $r = \delta-\epsilon$ 的一个小邻域。A

直接观察可知，当 $\rho_\xi = 0$ 时 $q = 0$，因此 φ_ϵ 在 $r = \delta - \epsilon$ 附近是光滑的。

将 t 限制在 1 附近，相当于将 r 限制在 $\delta + \epsilon$附近。对于足够接近 1 的 t，$\rho_\xi(t) = 1$ 且 $\rho_\xi(2t-1) = 1$。因此，当 t 接近 1 时，我们有

$$q(t) = \frac{\delta + \epsilon}{(\delta - \epsilon) + 2\epsilon t}.$$

应用链式法则，我们有

$$\varphi'_\epsilon(r) = h'(\delta+\epsilon)q(t) = \frac{1}{(\delta+\epsilon)\ln\left(\frac{\eta}{\delta}\right)} \cdot \frac{\delta+\epsilon}{r} = \frac{1}{r\ln\left(\frac{\eta}{\delta}\right)} = h'(r).$$

因此，当 r 足够接近 $\delta + \epsilon$时，$\varphi_\epsilon = h$，从而 φ_ϵ 是光滑的。这验证了性质 (5) –(6)。

作为中间步骤，我们需要证明对于所有r，$0 \le \varphi'_\epsilon(r) \le C_1 \cdot h'(\delta+\epsilon)$。下界显然成立：

$$\varphi'_\epsilon(r) = h'(\delta+\epsilon)q(t) \ge 0$$

因为 $q(t) \ge \rho_\xi(t)(1+D) \ge 0$。

对于上界，回顾一下，$\epsilon = C\delta$ 对某个常数 $0 < C \le 1/4$成立。因此，在区间 $r \in (\delta-\epsilon,\ \delta+\epsilon)$（或 $t \in (0,\ 1)$）上，ρ_ξ、D和 $(\delta+\epsilon)/(\delta-\epsilon+2\epsilon t)$ 各项均有一致的上界，这些上界仅依赖于 C。因此，存在一个仅依赖于 C 的常数 C_1，使得$q(t) < C_1$ 对 $t \in [0,1]$成立。因此，在同一区域内

$$\varphi'_\epsilon(r) = h'(\delta+\epsilon)q(t) < C_1 h'(\delta+\epsilon).$$

对于性质 (7)，注意在 r 的区间 $(\delta-\epsilon, \delta+\epsilon)$ 上：

$$|f_\epsilon(r)\varphi'_\epsilon(r)| \le (\delta+\epsilon)\cdot C_1 h'(\delta+\epsilon) = \frac{C_1(\delta+\epsilon)}{(\delta+\epsilon)\ln(\eta/\delta)} = C_1\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right).$$

最后，我们验证性质 (8)。对于 $r \in (\delta-\epsilon, \delta+\epsilon)$，有

$$\varphi''_\epsilon(r) = \frac{h'(\delta+\epsilon)}{2\epsilon}q'(t) = \frac{1}{2\epsilon(\delta+\epsilon)\ln(\eta/\delta)}q'(t).$$

采用与 q 相同的推理，我们知道存在一个仅取决于 C 的常数 $K(C)$，使得 $|q'(t)| < K$。于是有

$$|f_\epsilon^2(r)\varphi''_\epsilon(r)| < \frac{K(\delta+\epsilon)^2}{2\epsilon(\delta+\epsilon)\ln(\eta/\delta)} = \frac{K\delta(1+C)}{2C\delta\ln(\eta/\delta)} = C_2\left(\frac{1}{\ln(\eta/\delta)}\right).$$

□

References

[1] G. Avramidi 和 T. T. Nguy˜ˆen-Phan。非紧非正曲率流 *Bull. Lond. Math. Soc.*形的例子，53(4):1061–1071，2021。[2] B. Bekka、P. de la Harpe 和 A. Valette。 *Kazhdan's property (T)* 11 *New Math-* , *ematical Monographs* 2008

第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，。[3] I. Belegradek。复双曲超平面补。 *Math. Ann.*，353 579，2012 2 545( ): – 。[4] I. Belegradek。实双曲超平面补的刚性与相对双曲性。*Pure Appl. Math. Q.*，8(1):15–51，2012。[5] I. Belegradek 和 G. C. Hruska。负曲率流形中的超平面配置与相对双曲性。 *Groups Geom. Dyn.*，7(1):13–38，2013。

[6] G. Bell 和 A. Dranishnikov。关于作用于树上的群的渐近维数。

Geom. , : –。

Dedicata 103 89 101, 2004

[7] G. Bell 和 A. Dranishnikov。渐近维数。 *Topology Appl.*，155 1296，2008 12 1265( ): –。[8] N. Bergeron、F. Haglund 和 D. T. Wise。算术双曲流形中的超平面截面。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，83(2):431–448，2011。[9] A. Borel 和 Harish-Chandra。代数群的算术子群。 *Ann. of Math. (2)*，75 485: –535，1962。[10] J. Chabert 和 S. Echterhoff。鲍姆–康恩猜想的保持性质。

Doc. , : –

Math. 6 127

183，2001。[11] I. Chatterji。快速衰减性质导论。载于 *Around Langlands correspondences*，*Contemp. Math.*第 691 卷，页码 53–72。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[12] I. Chatterji 和 F. Gautero。群的图中的畸变与三维流形群的快速衰减分类。 *preprint arXiv:2401.14803*，2024。[13] P. de la Harpe。双曲群、代数˙和算子´以及 Jolissaint 的一个´定理˙。

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.，307(14):771–774，1988。[14] P. de la Harpe 和 M. Bucher。带合并的自由积以及具有一致指数增长的 HNN 扩张。 *Mat. Zametki*，67(6):811–815，2000。[15] F. T. Farrell 和 L. E. Jones。具有

$\pi_1 \subset \quad m \quad Asian$ GL

J. Math. 2 2 215

(R) 的非球面流形的刚性。，( ): –262，1998。[16] S. Fornari 和 V. Schroeder。具有非正曲率的分歧覆盖。 *Math. Z.*，203 1 123( ): –128，1990。[17] R. Frigerio、J.-F. Lafont 和 A. Sisto。高维图流形的刚性。*Astérisque*，(372):xxi+177，2015。[18] M. Gromov。无限群的渐近不变量。载于

Geometric group theory Vol. 2 ，第 *(Sussex, 1991)* 182 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 1 295

[19] 卷，页码 –。剑桥大学出版社，剑桥，1993。[19] M. Gromov 和 W. Thurston。双曲流形的夹挤常数。 *Invent. Math.*，89 1 1( ): –12，1987。[20] H. Guenancia 和 U. Hamenst¨adt。负曲率的 K¨ähler–Einstein 度量。 *preprint*

arXiv:2503.02838 2025 , 。

[21] U. Haagerup。一个具有度量逼近性质的非核 C^*代数的例子。 *Invent. Math.*，50(3):279–293，1978/79。[22] M. W. Hirsch。 *Differential topology*，Springer 第 33 卷， *Grad. Texts Math.* ，Cham，1976。[23] P. Jolissaint。群的约化

C^* *Trans. Amer.* 代数

Math. Soc. 317 1 167

中的快速衰减函数。，( ): –196，1990。[24] V. Lafforgue。Banach 代数的 K-´双变理论与鲍姆–康恩猜想。*Invent. Math.*，149(1):1–95，2002。[25] V. Lafforgue。带系数的 Baum–Connes ˋ猜想与双曲群。*J. Noncommut. Geom.*，6(1):1–197，2012。[26] J.-F. Lafont 和 B. Minemyer。复双曲分歧覆盖上的负曲率爱因斯坦度量。 *J. Geom. Anal.*，36(11):30，2026年。编号 347。[27] G. A. Margulis。

Discrete subgroups of semisimple Lie groups 17 *Ergebnisse der* ，第 *Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]* 卷。Springer-Verlag，柏林，1991年。[28] B. Minemyer。复双曲平面中的实双曲超平面补。

Adv. , : –。

Math. 338 1038 1076, 2018

[29] B. Minemyer。具有几乎 -夹挤度量的 K

¨ 1/4 *To appear in J. Eur.*

Math. Soc. (JEMS) 2026

ähler 流形。，。[30] D. W. Morris。 *Introduction to arithmetic groups*。Deductive Press，[出版地不详], 2015。[31] H. Oyono-Oyono。鲍姆–康恩猜想与群在树上的作用。 *K-Theory*，24(2):115–134，2001。[32] M. S. Raghunathan。 *Discrete subgroups of Lie groups*。数学及其边疆领域成果 [Results in Mathematics and Related Areas]，第 68 卷。Springer-Verlag，纽约–海德堡，1972。[33] J. Roe。双曲群具有有限渐近维数。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，133 9 2489 2490，2005 ( ): –。

[34] A. Selberg。高维对称空间中的不连续群。载于 *Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)* 147 164 ，第 – 页。Tata 基础研究所，孟买，1960 年。[35] S. Stadler。通过不可压缩环面的模式研究奇异非正曲率度量在 4维流形上的光滑化性障碍。 *Geom. Funct. Anal.*，25(5):1575–1587，2015 年。[36] M. Stover 和 D. Toledo。PU(n，1) 中格的中心扩张以及负曲率射影簇的剩余有限性。 *Pure Appl. Math. Q.*，18(4):1771–1797，2022 年。[37] F. Zheng。非正曲率 K¨ahler 流形的例子。 *Comm. Anal. Geom.*，4(1- 2):129–160，1996 年。