arXiv:2611.30933v1 [cs.DS] 23 Nov 2026

针对全知对手和委托的最优拟阵先知

Hamed Abdi* Kiarash Banihashem† MohammadTaghi Hajiaghayi‡
Danny Mittal§

2026年11月24日

摘要

我们证明了：面对全知排序对手，存在最优的二分之一拟阵先知不等式。对手会在选择到达顺序之前观察所有已实现的价值，而算法只能在价值到达时看到它们，并且必须不可撤销地接受。该算法是确定性的，其保证对更强的事前松弛也成立。在揭示任何价值之前，算法会划分底集，用更严格的拟阵子式直和替代原拟阵，并为每个部分设定一个阈值。随后，算法在满足这些固定条件的前提下贪心地接受元素。

主要引理给出了合格元素中价值最低的基的期望值上界。一个元素的贡献要么来自合格元素所张成的秩，要么来自每个合格基都必须保留的超额价值。该界对所有基同时成立，因此允许到达顺序取决于整个实现。

同样的构造为（可能相关的）拟阵委托给出了一种确定性的、代理人无关机制，将 1/4 保证提高到最优的 1/2 因子。委托人的价值彼此独立，而严格为正的代理人效用可以与委托人的价值以及彼此之间存在任意依赖关系。该保证对每个最优响应都成立，包括会对委托人不利地解决平局的情况。在秩一情形下，这两个因子就已经是紧的。对于有理数有限支持分布，预处理需要多项式时间；每个符合条件的在线到达者至多需要向原始拟阵的独立性预言机查询一次。

1 引言

先知不等式研究的是：当必须在知晓所有随机价值之前进行选择时，会损失多少。在拟阵版本中，每个元素都具有一个从已知分布中独立抽取的非负价值。价值逐一揭示，而算法必须通过不可撤销的决策始终维护一个独立集。其基准值是在所有价值揭示后所得最大权独立集的期望值。经典的二分之一保证从选择一个元素扩展到了任意拟阵 [11, 16]。

揭示顺序与可行性约束同样重要。若对手仅根据此前已揭示的数值来选择下一个元素，那么未揭示的数值仍然相互独立，且独立于
历史。全能对手不存在这样的限制：它会先看到完整的价值向量，然后选择最不利的到达顺序。因此，一个元素的位置可能会透露有关其自身价值的信息

*马里兰大学帕克分校。电子邮件： hamedabdi37@gmail.com。
†马里兰大学帕克分校。电子邮件： kiarash@umd.edu。
‡马里兰大学帕克分校。电子邮件： hajiaghayi@gmail.com。§马里兰大学帕克分校。电子邮件： dannymittal@gmail.com。

以及尚未到达的元素的价值。特别是，当一个元素出现时，不能假设其价值与它是否可用相互独立。

这种更强的模型也自然地出现在委托问题中。委托人承诺提供一份可接受解决方案的菜单，而掌握信息的代理人则根据自身效用选择一种解决方案。如果委托人和代理人的效用相关，那么按代理人效用递减的顺序排列元素，所得顺序便取决于委托人的实现值。因此，针对全能对手的贪心先知规则可导出委托机制 [3, 4]。对于一般拟阵，贪心竞争消解方法给出四分之一保证 [3, 4, 7], ，而二元素秩一障碍给出的上界为二分之一 [4, 命题 5。3]。

我们在这两种情形下都得到了紧确的二分之一保证。证明并不分析对手选择的顺序，也不分析代理人采用的偏好。相反，预处理会构造一个可接受集合族，使得每个包含意义下极大的合格集合都有足够高的期望值，即便在每种实现中都分别选择其中价值最低的集合也是如此。正是这一共同结论，使这两个应用能够达到相同的紧确常数。

1.1 我们的结果

设 $M = (E,\mathrm{I})$ 是一个有限拟阵。每个元素 $i \in E$ 都有一个服从已知分布 D_i 的独立价值 $X_i \geq 0$ 。对于集合 S，记 $X(S) = \sum_{i\in S} X_i$，并令 $\mathrm{OPT}_M(X) = \max_{I\in\mathcal{I}} X(I)$。我们假设$\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)] < \infty$。令 $\mathrm{EA}(M, D)$ 表示标准的事前松弛，其定义见第 3 节；它是 $\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)]$的上界。

定理 1.1 (最优全能对手拟阵先知不等式)。 存在一个仅取决于 M 和边缘分布 D_i 的确定性在线算法，使得

$$\mathbb{E}_X\left[\min_{\pi\in\mathfrak{S}_E} \mathrm{ALG}(X,\pi)\right] \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{EA}(M,D) \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)]. \tag{1}$$

该算法固定一个拟阵子式的直和 M，并为每个直和项设定一个阈值。 M 的每个独立集在 M 中也都是独立集。对于到达的非环元素，若其满足阈值且在 M 中保持独立，则接受；对于原始环，则拒绝。

式（1）中的最小值位于 期望内部 。因此，对手可以针对每一种实现选择不同的排列。算法没有私有随机种子。该定理允许存在原子、分布不相同以及无界支撑；有限的期望最优解是唯一的可积性假设。

在委托中，委托人和代理人的可加效用分别为 $X(S)$ 和 $Y(S) = \sum_{i\in S} Y_i$。掌握信息的代理人在观察到所有效用后提出一个集合。委托人预先承诺一份菜单，仅核实所提交的身份和委托人价值，并完整实施被接受的提案。拒绝或未达成协议时，结果为空集。如果菜单既不使用代理人效用的分布，也不使用其实现值，则称其为 代理人无关 菜单。用 $\mathrm{BR}(X, Y)$ 表示已实施的最佳响应结果集合。

定理 1.2 (最优确定性相关委托)。 假设委托人价值 $(X_i)_{i\in E}$相互独立、非负且几乎必然有限，其边缘分布已知，为 D_i 和$\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)] < \infty$。代理人效用几乎必然满足 $0 < Y_i < \infty$ ，并且可以与委托人价值及彼此之间任意相关。

存在一个确定性、代理人无关的仅提案菜单，满足

$$\mathbb{E}\left[\min_{S\in\mathrm{BR}(X,Y)} X(S)\right] \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{EA}(M,D) \geq \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)]. \tag{2}$$

当且仅当提案中的物品达到各自的阈值，且其集合是$\frown$中的独立集时， M该菜单才接受该提案。向量 Y 可以任意依赖于 X ，且各坐标之间也可以存在任意依赖关系。特别地，该结果涵盖具有任意物品内相关性的独立物品对$(X_i,\ Y_i)$。定理1.2 中的更强表述不需要额外代价：证明只要求委托人价值之间相互独立。代理人效用严格为正，因而即使存在对抗性平局决策，每个最优响应也都是极大的。对其期望值无需作任何假设。

最优性与计算。 仅单选委托中，二分之一这一因子已经是紧的 [10,附录 B，命题 1]；另见 [4, 命题 5。3] 其针对一个含两个元素的秩一构造。定理 1.2中的因子与 Bechtel 和 Dughmi 给出的秩一下界相匹配 [4, 命题 5。3]即便委托人了解代理人效用并能够验证，这一下界对确定性仅提案菜单仍然成立。[1]这两个界都以期望离线最优值为比较基准，因此也适用于事前基准。由此，相关拟阵委托达到了秩一下界，弥合了这一确定性模型中的 $1/4$ 与$1/2$ 差距。

对于显式列出的有理数有限支持分布，以及 M的独立性预言机，预处理可在多项式时间内完成。若 n 表示非环元素的数量，且 L 表示输入描述长度，则需要执行 （n（$L+\log\max\{1,n\}$））次次模最小化。此后，每次符合条件的到达至多需要进行一次原始独立性查询。对于每个非空提交块，委托验证器至多进行一次此类查询。第 7节给出了精确的伪代码，包括阈值恢复以及对所有平局的确定性处理。

1.2 相关工作与模型的作用

先知与冲突消解。 Kleinberg 和 Weinberg [11] 通过依赖于已接受集合的阈值，得到了紧确的二分之一拟阵先知不等式。Lee 和 Singla [12]针对在数值实现之前固定的到达顺序，确立了相应的事前保证；当该固定顺序已知时，他们还证明了最优的在线冲突消解。Feldman、Svensson 和 Zenklusen [7] 提出了贪心在线冲突消解方案，该方案能够应对全能对手，并给出四分之一的拟阵先知保证。加权先知保证与逐元素竞争消解之间的区别在这里至关重要。我们的定理控制的是期望总价值；它并不保证对每个元素都具有统一的条件选择概率。尤其是，它并未给出二分之一的贪心在线冲突消解方案：Livanos [13]证明，即使在秩一的情形下，对这种更强的逐元素要求也存在一个 $1/e$ 上界。Dinev 和 Weinberg [6] 进一步研究了对手在均匀拟阵竞争消解中的作用。

固定阈值与可行性。我们的阈值是固定的，但可行性是在一个预先$\frown$确定的拟阵中进行检验的 M ，其独立集构成了 M的独立集的一个子族。这一区别将该算法与使用固定物品阈值、并在原始拟阵中只要可行就始终接受的规则区分开来。Chawla、Goldner、Karlin 和 Miller [5]以及 Jiang [8]研究了后者这种限制。限制可接受族是贪心竞争消解框架 [7]的一部分。Kalantarzadeh 和 Pashkovich [9]也研究了几乎非自适应的拟阵先知算法。本文证明的保证明确针对式（1）中依赖于实现的最坏顺序；仅有固定阈值形式并不能保证对抗这一对手。图2

[1]他们的双项目构造将风险物品的两种结果对应的代理人效用均设为零，而将安全项目的效用设为一。将前者的效用替换为任意固定的 $\eta\in(0,\ 1)$，既能保持确定性下界，又能使所有代理人效用均严格为正。

给出了一个具体例子，说明为何这些额外约束对我们的结果至关重要。比较器在 M 中始终保持为最优解。

委托。 Armstrong 和 Vickers [2] 研究委托项目选择，而 Kleinberg and Kleinberg [10] 则将近似委托与阈值停止规则联系起来。Bechtel 和 Dughmi [4]将这一联系扩展到委托随机探测，并展示贪心全能先知算法如何给出确定性委托策略。在存在拟阵选择约束且没有探测约束时，他们的保证为 $1/4$。Banihashem、Hajiaghayi、Krysta 和 Shin [3] 研究组合约束下的委托选择，包括相关效用模型及其拟阵联系。我们沿用这一已确立的联系；第 6 节中的直接证明清楚说明了为何涵盖所有最优响应和任意效用相关性。我们的贡献在于给出紧确的拟阵保证，而非在这两个问题之间建立新的通用归约。我们不设置外部探测约束、采样成本或转移支付。

其他信息与可行性模型。 MacRury、Nuti 和 Vondrák [14] 研究固定对抗性及均匀随机到达顺序下，匹配拟阵的事前先知不等式与冲突消解。在单样本模型中，Abdi 等人 [1] 针对独立于样本、价值和算法随机性的固定到达顺序，得到了最优的二分之一拟阵先知保证。一篇 OpenAI 预印本 [15] 在全能对手能够看到样本、价值和完整随机种子的情形下，给出了常数级单样本保证。我们的结果假设分布已知，并针对显式有限支撑集，在多项式时间内达到精确的二分之一因子。该证明专门针对拟阵结构：它利用了极大独立集的基数相等性、闭包和收缩。我们并未声称对任意向下封闭约束也有同样的保证，也未提出新的秘书问题保证。

结构安排。第2 节介绍证明和委托机制。第3 节确定记号和基准值。第4 节和5 节证明先知定理，第6 节证明委托保证。第7节给出多项式时间实现。

2 我们的方法与技巧

2.1 保护每个可选基

先分解，再运行分块贪心。拟阵的不同部分可能具有不同的价值尺度。丢弃环后，我们将 E 划分为互不相交的块 U_1、.....、U_m。记 $F_0 = \varnothing$和 $F_j = U_1 \cup ..... \cup U_j$ 为它们的前缀。对于每个块，我们使用拟阵 $N_j = (M/F_{j-1})|U_j$：先收缩较早的块，再限制到 U_j。这样可以为较早的块预留秩。我们仅根据价值分布来选择这些块和阈值 $t_1 \geq ..... \geq t_m \geq 0$，如下所述。

算法在每个 N_j中分别运行贪心算法：到达的项目 $i \in U_j$ 若满足可选 $X_i \geq t_j$，则为可选项；若将其加入后仍能保持 N_j中的独立性，就接受它。等价地，它在直和 $M = \bigoplus_j N_j$中维持独立性$\widehat{\ }$；该直和的独立集恰好是满足以下条件的 S：对于每个 j， $S \cap U_j$ 在 N_j 中独立。这样的每个集合在 M中也独立。

保护每一种可能的分块结果。在每个 N_j 中，分块贪心最终会得到合格集合的一个基。全能对手可以利用实现值影响选出哪些基，从而使价值较低的可选元素取代价值更高的元素。

选中的项目可能会使价值较低的可选元素挤掉价值较高的项目。因此，我们对每个块中价值最低的可选基的期望值进行界定。这个局部界适用于每一种到达顺序；分解则确保各块的界加起来达到原始基准的一半。

平衡阈值值与期望超额。对于项目 i，定义其超过 t的期望超额为

$$e_i(t) = \mathbb{E}[(X_i - t)_+].$$

将一个被接受的价值视为阈值支付加上超额。在秩一实例中，自然的平衡为 $\sum_i e_i(t) = t$：阈值与期望超额总和大小相同。初等不等式 $X_i \le t + (X_i - t)_+$ 于是将期望最大值限制为 $2t$。要达到二分之一，还需证明，即使是价值最低的极大可行集，其期望值也至少为 t；当没有符合条件的项目时，将其价值视为零。

为分析单个块，记 $N = N_j$、$U = U_j$ 和 $t = t_j$。相应的平衡条件为

$$e(A,t) \le tr_N(A) \quad (A \subseteq U), \qquad e(U,t) = tr_N(U). \tag{3}$$

其中 $e(A, t) = \sum_{i \in A} e_i(t)$。子集不等式表示，块的任何部分所承载的期望超额，都不会超过其秩所能支付的额度。整个块上的紧性给出了所需的平衡。我们将证明，即使对于符合条件的项目中价值最低的基，这些条件也能保证其期望值至少为 $e(U, t) = tr_N(U)$。

每个基必须保留的内容。令 $R = \{i \in U : X_i \ge t\}$ 为合格集合，并令 $F = \mathrm{cl}_N(R)$ 为其闭包。R的每个基都包含 $r_N(F)$ 个元素，且每个元素的价值至少为 t。因此，无论选择哪个基，都会产生共同贡献 $tr_N(F)$。

一些合格元素 还会贡献无法丢失的超额。对于每个 i，考虑偶数 t

$$H_i = \{i \notin \mathrm{cl}_N(R \setminus \{i\})\}.$$

如果 $X_i > t$ 和 H_i 发生，则其他合格元素不会张成 i。因此，每个基都必须包含 i，包括在看到所有价值后选出的基。因此，对于 R的每个基 B，同时有

$$X(B) \ge tr_N(F) + \sum_{i \in U} (X_i - t)_+ \mathbf{1}_{H_i}. \tag{4}$$

在图拟阵中，这些强制元素是由可选边构成的图中的桥；参见图 1。

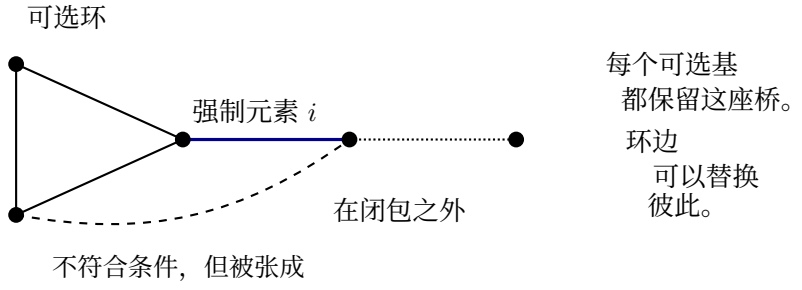


图1： 图拟阵中的强制元素：可选边的每个基都必须包含每一条桥。实线边为可选边。虚线边不可选，但属于它们的闭包，因为其端点已经连通。点线边连接孤立的最右侧顶点，位于该闭包之外。这条实线桥属于合格集合的每个基。

事件 H_i 是在移除 i后定义的。因此，它只取决于其他值，并且独立于 X_i。这是局部论证所需的唯一独立性。对（4）两边取期望，将超额项替换为 $\sum_i e_i(t)\mathbb{P}(H_i)$。

为什么这就足够了？如果 i 位于完整闭包 F 之外，那么删除它自身后，它当然仍位于闭包之外。因此，$\mathbb{P}(H_i) \geq \mathbb{P}(i \notin F)$。由事件 H_i 计入的期望超额至少为 $e(U,t) - \mathbb{E}[e(F,t)]$。可能缺少的部分位于 F 内，其中 (3) 给出$e(F,t) \leq tr_N(F)$。这恰好是阈值贡献已经补足的部分。这两项相互抵消，得到所需的单块基界：

$$\mathbb{E}\left[\min_{B \text{ basis of } R} X(B)\right] \geq e(U,t). \tag{5}$$

我们并未假设所选的基或随机闭包与任何元素的价值相互独立。尤其是，即使对手完全了解实现，这一论证依然成立。

找到处于正确价值尺度的块。现在我们概述如何选择上述块和阈值。在步骤 j，剩余拟阵为 $N = M/F_{j-1}$，初始为 $N = M$。对于这个无环拟阵中的非空集合 A，令 $\tau_N(A)$ 为满足 $e(A,t) = tr_N(A)$ 的解。选取这些根中最大的一个，记为 t。在该阈值下，每个集合都满足 (3) 中的子集不等式，并且至少有一个非空集合是紧的，即 $e(A,t) = tr_N(A)$。函数

$$A \longmapsto tr_N(A) - e(A,t)$$

是非负且次模的。其零点集对并集封闭，因此存在唯一的最大紧集 U。对紧集取闭包不会增加其秩，也不会减少其超额；因此，子集不等式迫使其闭包也为紧集。因此 U 是一个平坦。

设定 $U_j = U$、$t_j = t$ 和 $N_j = N|U_j$，更新 $F_j = F_{j-1} \cup U_j$，并在 N/U_j 中继续。收缩U_j 会预留其秩，然后再考虑阈值较低的后续块。收缩后的拟阵仍然是无环的。用 $U \cup A$ 的不等式减去 U 的等式，可知下一个阈值不会更大。重复此过程，可得到一条平坦链 $F_1 \subset \cdots \subset F_m = E$ 以及递减的阈值 $t_1 \geq \cdots \geq t_m$。

由此得到的直和可能会拒绝一个在原始拟阵中独立的集合。这种限制是有意为之：它能防止阈值较低的元素占用预留给期望超额较大的块的秩。反过来，直和允许的每个集合在原始拟阵中也都是独立的。根据收缩的定义，可行性直接成立，即使在某次实现中，较早的块没有填满其预留的秩。

两个相同的预算给出二分之一。 令 $d_j = r_M(F_j) - r_M(F_{j-1})$ 为分配给块j 的秩，并设 $K = \sum_j t_j d_j$。块的紧性意味着，期望超额总和也为 K。对单块基界（5）求和，可得预期奖励至少为 K，且这一结论对所有合格基的选择同时成立。

为原始基准给出上界，对块 j 中的每个项目定价为 t_j。原始拟阵中的任意独立集，其总价格至多为 K。事实上，该集合与每个前缀平坦F_j 的交集大小至多为 $r_M(F_j)$；由分部求和以及价格递减可得此结论。对拟阵多面体中的每个点，同样的计算也成立，因此也能为事前松弛给出上界。事前解支付的价格至多为 K，期望超额至多为 K。因此，其$\widehat{}$值至多为 $2K$；而在 M 中，即使是价值最低的极大合格集合，其期望值也至少为 K。

2.2 从基保证到委托

委托机制使用完全相同的预计算区块和阈值。若提交的每个值都达到其阈值，且提交的集合在直和中是独立集，则接受该提案。这些检验只涉及提案本身。特别是，委托人无需知道哪些未提交的元素符合资格、它们的值是多少，也无需知道代理人如何对它们排序。

固定任意一个实现，并考虑一个最优响应。如果提案不是符合条件的独立集中的极大集合，拟阵增广便允许加入一个符合条件的项目。这个额外项目具有严格为正的代理人效用，因此扩大的提案对代理人严格更优。这与最优性矛盾。因此，每个最优响应在每个块中都包含合格集合的一个基。

该界适用于每个可选基，因此也涵盖代理人的选择。代理人可以根据委托人的所有价值、代理人的所有价值以及任意平局规则来选择一个基。所有这些选择都已纳入（5）中的最小值。这里没有使用关于代理人效用的独立性假设。委托人的期望效用至少为 K，而事前最优值至多为 $2K$。

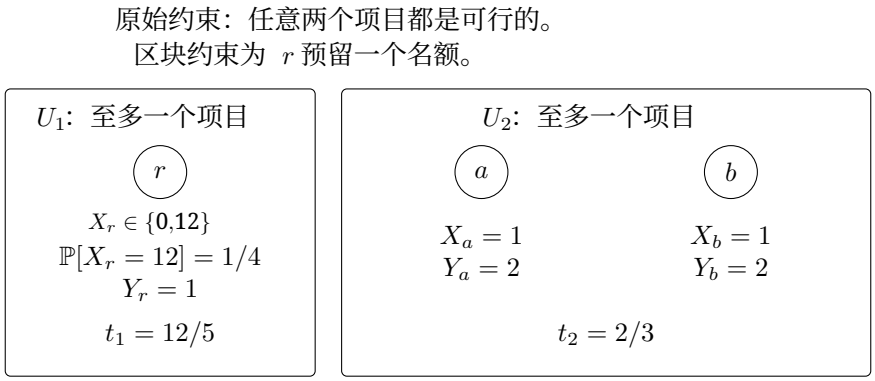


图 2： 为什么额外的区块约束很重要。原始拟阵为 $U_{2,\ 3}$。仅有原始的秩为二的约束时，代理人会选择两个安全物品，委托人获得 2。所展示的菜单至多允许选择一个安全物品，因此每个最优响应也会在 $X_r = 12$ 时选择 r。委托人的期望价值变为 4，而离线最优值为 $19/4$。

图 2 说明了收缩的经济学作用。风险物品为委托人带来了较大的上行空间，但其代理人效用低于任一安全物品。原始的秩为二的约束允许两个安全物品挤掉风险物品，即使风险物品的价值很高。为风险区块预留一个秩单位可以排除这种选择。验证器并不强迫代理人报告每一个符合条件的项目；严格正性通过代理人的激励实现了极大性。

3 模型与预备知识

3.1 拟阵记号

拟阵是一个二元组 $M = (E,\ \mathcal{I})$，其中 E 是一个有限集，且 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ 满足以下公理：$\varnothing \in \mathcal{I}$；$\mathcal{I}$ 中任一成员的每个子集都属于 $\mathcal{I}$；并且，如果 $I,\ J \in \mathcal{I}$ 且 $|I| < |J|$，那么对于某个 $j \in J \setminus I$，有 $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$。$\mathcal{I}$ 中的成员称为独立集。对于 $A \subseteq E$，定义秩函数和闭包运算如下

$$r_M(A) = \max\{|I| : I \subseteq A,\ I \in \mathcal{I}\}, \qquad \mathrm{cl}_M(A) = \{i \in E : r_M(A \cup \{i\}) = r_M(A)\}.$$

众所周知，秩函数是单调且次模的。A 的基是 A的按包含关系极大的独立子集。增广公理意味着，A 的每个基的大小均为$r_M(A)$，且 A的每个独立子集都可以扩充为 A的一个基。用 $\mathcal{B}_M(A)$ 表示 A 的基族；特别地，$\mathcal{B}_M(\varnothing) = \{\varnothing\}$。环是满足 $r_M(\{i\}) = 0$ 的元素 i。平坦是满足 $\mathrm{cl}_M(F) = F$ 的集合F。

对于 $U \subseteq E$，限制 $M|U$ 是定义在 U 上的拟阵，其独立集是 $\mathcal{I}$ 中包含于 U的成员。对于 $F \subseteq E$，收缩 M/F是定义在 $E \setminus F$上的拟阵，其秩函数为

$$r_{M/F}(A) = r_M(F \cup A) - r_M(F) \qquad (A \subseteq E \setminus F).$$

等价地，若 C是 F的基，则集合 $A \subseteq E \setminus F$在 M/F中独立，当且仅当 $C \cup A$在 M中独立。秩公式给出

$$\mathrm{cl}_{M/F}(A) = \mathrm{cl}_M(F \cup A) \setminus F.$$

特别地，对一个平坦进行收缩后得到的拟阵仍是无环的；若 U是 M/F的平坦，则 $F \cup U$是 M的平坦。对于定义在互不相交的集合 U_j上的拟阵 N_j，它们的直和 $\bigoplus_j N_j$ 的底集为 $\bigcup_j U_j$，其独立集为

$$\left\{ S \subseteq \bigcup_j U_j : S \cap U_j \in \mathcal{I}(N_j) \text{ for every } j \right\},$$

其中，$\mathcal{I}(N)$ 表示拟阵 N的独立集。

3.2 随机值与到达顺序

每个元素 $i \in E$ 都有一个非负且几乎必然有限的随机值 X_i，其已知分布为 D_i。变量 $(X_i)_{i \in E}$ 相互独立。记 $D = (D_i)_{i \in E}$，并且对于 $S \subseteq E$,

$$X(S) = \sum_{i \in S} X_i, \qquad \mathrm{OPT}_M(X) = \max_{I \in \mathcal{I}} X(I).$$

假设 $\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)] < \infty$。

每个元素恰好到达一次。元素到达时，算法会观察其标识和值，并不可撤销地接受或拒绝它。在每次到达后，已接受的集合必须是独立的。在第一个元素到达之前，全知排序对手观察整个实现 X，并选择 π 的一个排列 E。令 $\mathfrak{S}_E$ 表示这些排列组成的集合，并令 $\mathrm{ALG}(X, \pi)$ 表示指定确定性算法所接受元素的值之和。其最坏顺序期望收益为

$$\mathbb{E}_X \left[\min_{\pi \in \mathfrak{S}_E} \mathrm{ALG}(X, \pi) \right].$$

在预处理之前删除所有环，并在它们到达时拒绝它们。这不会改变 $\mathrm{OPT}_M(X)$。其余每个单元素集合都是独立的，因此对于每个剩余元素，都有 $\mathbb{E}X_i \le \mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)] < \infty$。下文中，$M$ 和 E 分别表示这一无环限制及其底集。如果 $E = \varnothing$，则使用空集作为输出。

3.3 事前松弛

对于向量 $z \in \mathbb{R}^E$，记 $z(A) = \sum_{i \in A} z_i$。定义

$$P(M) = \{ z \in \mathbb{R}^E_{\ge 0} : z(A) \le r_M(A) \text{ for every } A \subseteq E \}.$$

事前基准为

$$\mathrm{EA}(M,D)=\sup_{\substack{a_i:\mathbb{R}_{\ge 0}\to[0,1]\ \text{measurable}\ (i\in E)\\ (\mathbb{E}a_i(X_i))_{i\in E}\in P(M)}}\sum_{i\in E}\mathbb{E}[X_i a_i(X_i)]. \tag{6}$$

允许 a_i 取 $[0,1]$ 中的值，包含了在 D_i 的原子上进行分数选择。由于其余值均可积，$\mathrm{EA}(M,D)\le\sum_i\mathbb{E}X_i<\infty$。删除环不会改变该基准值：环单元素集对应的约束迫使 $\mathbb{E}a_i(X_i)=0$，因此 $a_i(X_i)=0$ 几乎处处成立。

引理 3.1。对于在非环上可积的任意非负随机价值向量 ，

$$\mathrm{EA}(M,D)\ge\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)].$$

该不等式不要求这些值相互独立。

证明。固定有限族 $\mathcal{I}$ 的一个排序，并令 $I^*(X)$ 为第一个达到 $\mathrm{OPT}_M(X)$ 的集合。对每个 i，选取一个可测函数 $a_i:\mathbb{R}_{\ge 0}\to[0,1]$，使得

$$a_i(X_i)=\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{i\in I^*(X)\}}\mid X_i]\quad\text{almost surely.}$$

对于每个 $A\subseteq E$,

$$\sum_{i\in A}\mathbb{E}a_i(X_i)=\mathbb{E}[|I^*(X)\cap A|]\le r_M(A).$$

这些函数在（6）中是可行的。由条件期望可得

$$\sum_i\mathbb{E}[X_i a_i(X_i)]=\sum_i\mathbb{E}[X_i\mathbf{1}_{\{i\in I^*(X)\}}]=\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)].$$

□

对于 $u\in\mathbb{R}$，令 $(u)_+=\max\{u,0\}$。定义

$$e_i(t)=\mathbb{E}[(X_i-t)_+],\qquad e(A,t)=\sum_{i\in A}e_i(t)\quad(t\ge 0,\ A\subseteq E). \tag{7}$$

这些函数始终使用原始边缘分布 D_i。每个 e_i 均为有限值、非递增且满足 1-利普希茨条件，因为 $|(x-s)_+-(x-t)_+|\le|s-t|$。

4 分解与选择规则

4.1 块的构造

设 N 是在非空子集 $W\subseteq E$上的无环拟阵。对于每个非空 $A\subseteq W$，按下式定义$\tau_N(A)$:

$$e(A,\tau_N(A))=\tau_N(A)r_N(A),\qquad\tau_N(A)\ge 0. \tag{8}$$

这个根存在且唯一。事实上，$r_N(A)>0$，且 $e(A,t)-tr_N(A)$ 关于 t 连续且严格递减，在零处非负，并且当 $t\to\infty$ 时趋于 $-\infty$。对于给定的 t，称 A 在N中是紧的，当且仅当 $e(A,t)=tr_N(A)$。

算法 1 分解为拟阵 minor

输入： 无环拟阵 M 和边缘分布 D_i。

1. 设置 $F_0 = \varnothing$、 $N = M$ 和 $j = 1$。

2. 当底集 W of N 非空时：

   (a) 设置 $t_j = \max_{\varnothing \neq A \subseteq W} \tau_N(A)$ 和

   $$U_j = \bigcup \{A \subseteq W : e(A, t_j) = t_j r_N(A)\}.$$

   (b) 设置 $N_j = N|U_j$、 $d_j = r_N(U_j)$ 和 $F_j = F_{j-1} \cup U_j$。

   (c) 将 N 替换为 N/U_j ，并将 j 加一。

3. 令 m 为迭代次数。返回 $(U_j, F_j, N_j, d_j, t_j)_{j=1}^m$ 和 $M = \bigoplus_{j=1}^m N_j$。为每个元素 $i \in U_j$ 指定阈值 $t_i = t_j$。

引理 4.1。 算法 *1* 定义良好，并将 E 划分为 $m \leq r_M(E)$ 个非空块。其前缀 F_j 是 M的平坦，并且

$$N_j = (M/F_{j-1})|U_j, \qquad d_j = r_M(F_j) - r_M(F_{j-1}) > 0.$$

对于每个块，

$$e(A, t_j) \leq t_j r_{N_j}(A) \qquad (A \subseteq U_j), \tag{9}$$

$$e(U_j, t_j) = t_j d_j. \tag{10}$$

这些阈值满足

$$t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_m \geq 0. \tag{11}$$

证明。 考虑一次迭代，其中无环残余拟阵 N定义在 W上，且 $t = \max_{A \neq \varnothing} \tau_N(A)$。根的定义意味着

$$f(A) := tr_N(A) - e(A, t) \geq 0 \qquad (A \subseteq W).$$

集合函数 $e(\cdot\ t)$ 是模的，这意味着 $e(A,t) + e(B,t) = e(A \cup B, t) + e(A \cap B, t)$。因此$f$ 是次模的。如果 $f(A) = f(B) = 0$，那么

$$0 \leq f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B) = 0.$$

因此，紧集在并集和交集运算下封闭。由于定义 t 的最大值可以取到，故存在非空紧集。因此，它们的并集 U 非空且为紧集，并且是唯一最大的紧集。

如果 A 是紧的且 $C = \mathrm{cl}_N(A)$，则根据超额的非负性可得

$$tr_N(A) = e(A, t) \leq e(C, t) \leq tr_N(C) = tr_N(A).$$

因此， C是紧的。将其应用于 U可证明 $\mathrm{cl}_N(U) = U$。因此， N/U是无环的。从无环拟阵 M中的平坦 $F_0 = \varnothing$ 开始，收缩闭包公式归纳表明，每个 F_j 都是 M的平坦。连续收缩在第 j次迭代时得到 $N = M/F_{j-1}$ ，因此显示的

关于 N_j和 d_j的公式随即得到。不等式 $f(A) \geq 0$在 U_j上，以及等式 $f(U_j) = 0$证明了（9）和（10）。

对于 $B \subseteq W \setminus U$，从关于 $U \cup B$ 的不等式中减去关于 U 的等式，得到

$$e(B,t) \leq t\big(r_N(U \cup B) - r_N(U)\big) = t r_{N/U}(B).$$

对于非空 B，其根定义函数的严格单调性意味着 $\tau_{N/U}(B) \leq t$。这证明了（11）。如果 $t = 0$，则单点不等式意味着 $\mathbb{E}X_i = 0$ 对于每个 $i \in W$，因此每个集合都是紧的，并且 $U = W$。在每次迭代中，U 在无环拟阵中非空，因此具有正秩。每次收缩至少使剩余秩减少一。因而，该过程至多经过 $r_M(E)$ 次迭代即可终止。提取出的集合两两不交，并且穷尽 E。 □

4.2 在线选择

算法 2 在线选择

预处理： 运行算法 1 ，并对每个块 $S_j = \varnothing$ 设置 j。

1. 拒绝每个原始环。
2. 当非环元素 $i \in U_j$ 以值 x_i到达时，当且仅当 $x_i \geq t_j$ 且$S_j \cup \{i\} \in \mathcal{I}(N_j)$ 时，接受它。接受后，将 S_j 替换为 $S_j \cup \{i\}$。
3. 返回 $S = \bigcup_{j=1}^{m} S_j$。

对于一个实现 X，定义

$$R_j(X) = \{i \in U_j : X_i \geq t_j\}, \qquad \mathcal{A}(X) = \{S \in \mathcal{I}(\widehat{M}) : X_i \geq t_i \text{ for every } i \in S\}.$$

用 $\mathcal{A}_{\max}(X)$ 表示$\mathcal{A}(X)$ 中按包含关系极大的成员。空集属于 $\mathcal{A}(X)$，因此这个有限族总有一个极大成员。

引理 4.2. 的每个独立集都是 M中的独立集。集合 S 属于 $\mathcal{A}_{\max}(X)$ 当且仅当 $S \cap U_j \in \mathcal{B}^{N_j}(R_j(X))$ 对每个 j都成立。对于每个实现和每种到达顺序，算法 2在每次到达后都可行，并返回 $\mathcal{A}_{\max}(X)$中的一个成员。

证明。设 $A \subseteq F_{j-1}$ 是 M 中的独立集，且 $B \subseteq U_j$ 是 M/F_{j-1}中的独立集。秩增量递减性和收缩公式给出

$$r_M(A \cup B) - r_M(A) \geq r_M(F_{j-1} \cup B) - r_M(F_{j-1}) = |B|.$$

由于 $r_M(A) = |A|$ 和 $A \cap B = \varnothing$，集合 $A \cup B$ 是独立的。对 j 进行归纳法可证明，M 的每个独立集都是 M中的独立集。

属于 $\mathcal{A}(X)$ 等价于要求：对于每个 j，$S \cap U_j$ 都是 $R_j(X)$ 的独立子集。当且仅当每个交集在其所在的块中都是极大的，该集合才是极大的，这正是所述的基条件。

在线规则在每个块中都保持独立性。如果符合条件的项目被拒绝，那么在当时，它属于其所在块中已接受集合的闭包。根据闭包的单调性，该项目仍属于最终已接受集合的闭包。因此，每个块中的最终集合都是 $R_j(X)$的基。第一个断言保证每次到达后都满足可行性，第二个断言则给出了所述的极大性。 □

5 预期奖励

5.1 最小权重合格基的一个界

引理 5.1。 设 N 是定义在 W上的有限拟阵，且$(X_i)_{i\in W}$ 是相互独立的非负可积随机变量，并固定 $t \geq 0$。令 $w_i = \mathbb{E}[(X_i - t)_+]$, $w(A) = \sum_{i\in A} w_i$，以及 $R = \{i \in W : \quad X_i \geq t\}$。若

$$w(A) \leq tr_N(A) \qquad (A \subseteq W), \tag{12}$$

then

$$\mathbb{E}\left[\min_{B\in\mathcal{B}_N(R)} X(B)\right] \geq w(W). \tag{13}$$

更一般地，对于满足以下条件的确定性权重 a_i

$$0 \leq a_i \leq \mathbb{E}[(X_i - t)_+], \qquad a(A) := \sum_{i\in A} a_i \leq tr_N(A) \quad (A \subseteq W), \tag{14}$$

相同的期望最小值至少为 $a(W)$。

证明。 令 $F = \mathrm{cl}_N(R)$，并对每个 $i \in W$ 定义事件

$$H_i = \{i \notin \mathrm{cl}_N(R \setminus \{i\})\}.$$

集合 $R\setminus\{i\}$ 仅取决于 $(X_k)_{k\neq i}$。因此， H_i 与 X_i 独立。在事件 $\{X_i > t\}\cap H_i$ 发生时， R 的每个基都包含 i：否则，某个基 $B \subseteq R\setminus\{i\}$ 将满足 $i \in R \subseteq \mathrm{cl}_N(B) \subseteq \mathrm{cl}_N(R\setminus\{i\})$，这与 H_i 矛盾。

B的每个基都有 R $r_N(F)$ 个元素，且所有元素的值至少为 t。因此，对于每个实现，同时对所有这些基均有：

$$\min_{B\in\mathcal{B}_N(R)} X(B) \geq tr_N(F) + \sum_{i\in W} (X_i - t)_+ \mathbf{1}_{H_i}. \tag{15}$$

这里， $\mathbf{1}_H$ 是事件 H的指示函数。取期望并利用独立性可得

$$\mathbb{E}\left[\min_{B\in\mathcal{B}_N(R)} X(B)\right] \geq t\mathbb{E}[r_N(F)] + \sum_{i\in W} w_i\mathbb{P}(H_i).$$

我们证明一般性断言。由于 $a_i \leq w_i$和 $\mathrm{cl}_N(R\setminus\{i\}) \subseteq F$，

$$\sum_i w_i\mathbb{P}(H_i) \geq \sum_i a_i\mathbb{P}(H_i) \geq \sum_i a_i\mathbb{P}(i \notin F) = a(W) - \mathbb{E}[a(F)].$$

子集不等式（14）对 F 的每个实现都成立，因此 a（F）。代入可得界 $\leq tr_N$（F）。取 a（W）可证明 $a_i = w_i$ （13）。该论证同样涵盖 $t = 0$、等于 t 的值，以及 $R = \varnothing$。

□

5.2 与事前基准值的比较

对于第 4 节中的分解，定义

$$K = \sum_{j=1}^{m} t_j d_j = \sum_{i\in E} e_i(t_i), \tag{16}$$

其中等式由（10）得出。

引理 5.2。 对于每个 $z \in P(M)$，$\sum_{i\in E} t_i z_i \le K$。

证明。若 $E = \varnothing$，该断言显然成立。否则，令 $t_{m+1} = 0$。嵌套的前缀$F_j = \bigcup_{k\le j} U_k$ 和非增阈值给出

$$\begin{aligned}\sum_{i\in E} t_i z_i &= \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j+1}) z(F_j) \\ &\le \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j+1}) r_M(F_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} t_j \big(r_M(F_j) - r_M(F_{j-1})\big) = K.\end{aligned}$$

该不等式利用了 $z(F_j) \le r_M(F_j)$，并且对每个 j都有 $t_j - t_{j+1} \ge 0$。 □

定理 5.3。对于第.....节中指定的独立值和拟阵 *3,*

$$\mathbb{E}\left[\min_{S\in\mathcal{A}_{\max}(X)} X(S)\right] \ge K \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{EA}(M, D). \tag{17}$$

证明。由引理4.2可知，极大可行集是每个块中 $R_j(X)$ 的一个基的并集。允许任意选择这些基。因此，逐点有

$$\min_{S\in\mathcal{A}_{\max}(X)} X(S) = \sum_{j=1}^{m} \min_{B\in\mathcal{B}_{N_j}(R_j(X))} X(B).$$

对每个 N_j 应用引理 5.1 ，阈值为 t_j。其假设为（9），因此

$$\mathbb{E}\left[\min_{S\in\mathcal{A}_{\max}(X)} X(S)\right] \ge \sum_{j=1}^{m} e(U_j, t_j) = K.$$

为证明第二个不等式，取（a_i）中的任意可行族（6），并令 $z_i = \mathbb{E}a_i(X_i)$。对于每个 i，界 $0 \le a_i \le 1$ 推出

$$X_i a_i(X_i) \le t_i a_i(X_i) + (X_i - t_i)_+.$$

取期望并对 i求和，再利用引理5.2可得

$$\sum_i \mathbb{E}[X_i a_i(X_i)] \le \sum_i t_i z_i + \sum_i e_i(t_i) \le 2K.$$

对所有可行族取上确界，得到 $\mathrm{EA}(M,\ D) \le 2K$。 □

定理 5.4 （针对全知排序对手的先知不等式）。设 M 是一个有限拟阵，其元素值相互独立、非负且几乎必然有限，并且其边缘分布 D_i 和 $\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M（X）] < \infty$已知。算法*2* 具有确定性，在每次到达后均可行，并满足

$$\mathbb{E}_X\left[\min_{\pi\in\mathfrak{S}_E} \mathrm{ALG}(X,\pi)\right] \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{EA}(M, D) \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_M(X)].$$

其预处理仅依赖于 M 和分布 D_i。

证明。 删除环不会改变两个基准值，而算法在任何顺序下都会拒绝这些环。因此，只需考虑无环限制。算法 1 是确定性的，因为每个阈值和最大的紧集都有唯一确定的定义。它的所有输入都是拟阵和边缘分布。在线决策仅使用这些预先计算的量、此前接受的集合，以及到达物品的身份和值。

引理 4.2 证明了可行性，并表明对于每种实现和排列，终端集合都属于 $\mathcal{A}_{\max}(X)$。因此，

$$\min_{\pi \in \mathfrak{S}_E} \mathrm{ALG}(X, \pi) \geq \min_{S \in \mathcal{A}_{\max}(X)} X(S).$$

取期望并应用定理 5.3 和引理 3.1 即可证明结论。所有最小值均取自具有可测资格条件和选择条件的有限族。它们的值是可测的，且有可积离线最优值作为上界；因此，所有文中所示的期望都有定义。

□

6 相关委托

现在，我们将合格集合的构造转化为一种委托机制，并证明定理 1.2中的二分之一事前保证。委托人在效用实现之前承诺提供一个菜单；代理人在观察到所有效用后，再从该菜单中选择一项提案。

该菜单采用与在线算法相同的块和阈值。只有当每件提交的物品都达到其阈值，且提交的集合在$\curlywedge M$中独立时，提案才会被接受。这些条件仅取决于所提交物品的身份和委托人价值，因此委托人无需观察代理人效用或被省略物品的价值即可核验这些条件。所得机制详见算法 3。

算法 3 仅提案委托机制

预处理： 使用主委托人的价值定律运行算法 1 ，并公布由此得到的块、阈值和剩余拟阵约束。

1. 给定一个具有可验证委托人价值的提案 S ，如果其中包含原始环，或包含任何满足 $X_i < t_i$ 的项目 i ，则拒绝该提案。
2. 如果对于任意块 j， $S \cap U_j \notin \mathcal{I}(N_j)$，则拒绝。
3. 否则，实施 S 中的每个项目。拒绝时实施空集。允许空提案。

定理 5.3 给出了所需的期望值界限，即使在每种实现中选择价值最低的极大可行集也是如此。要将该定理应用于此菜单，我们将证明，代理人效用严格为正时，无论代理人如何打破平局，每个最佳响应结果都是极大的。

定理*1.2*的证明。算法3 在实现 X 中接受的提案恰好是$\mathcal{A}(X)$中的集合；根据引理 M 4.2，这些集合均为独立集。该机制仅使用 M 和边际委托人价值分布，因此是确定性且代理人无关的。

固定一个实现 $(X,\ Y)$，并令 S 为任意最优响应所实现的结果。于是$S \in \mathcal{A}(X)$：被接受的提案属于此族，而拒绝或不参与会实现空集，空集也属于此族。若 S 在 $\mathcal{A}(\widehat{\quad X \quad})$ $i \notin S$ 中不是极大的，那么可以加入某个符合条件的项目，同时保持在 M中的独立性。因此，提案 $S \cup \{i\}$ 将会被

接受，并使代理人效用为 $Y(S) + Y_i > Y(S)$，这与最优性矛盾。因此，每个最佳响应结果都属于 $\mathcal{A}_{\max}(X)$，从而

$$\min_{S \in \mathrm{BR}(X,Y)} X(S) \geq \min_{S \in \mathcal{A}_{\max}(X)} X(S).$$

取期望并应用定理 5.3 即可证明（2）。最大性论证对每种实现都成立，且只用到 $Y_i > 0$，因此代理人效用可以任意依赖于委托人价值及彼此之间的关系。

□

为何假设代理人效用严格为正。对于一个确定性物品 $(X, Y) = (1, 0)$，空提案是对任意菜单的最优响应。若平局时结果偏向委托人，则不可能获得任何正的近似保证。因此，定理 1.2中的严格正性假设具有实质意义。

7 多项式时间实现

我们针对显式列出的有理数有限支持分布，借助拟阵 M的独立性预言机，精确实现该分解。令 n 为非自环物品的数量，$L \geq 1$ 为支持列表和物品标签的二进制总长度；对于空输入，取 $L = 1$ 。

该实现包含三项任务：模拟剩余拟阵，求出每个最大盈余阈值，并恢复其最大紧平坦。第 7.1–7.3 节依次讨论这些任务。第 7.4节将它们整合起来，并确立位复杂度和在线查询界。随后，第 7.5 节介绍提案验证和最佳响应计算。

定理 7.1（运行时间）。对于有理数有限支持分布，算法 *1* 可通过精确实现，在多项式位复杂度时间内运行，并使用多项式次独立性查询，以及$O(n(L + \log \max\{1, n\}))$次模最小化。此后，算法 *2*对每次符合条件的到达至多使用一次原始独立性查询，否则不使用查询。

此处的多项式时间包括精确有理数运算和编写预言机查询；它不仅仅是对实数运算次数的限制。如果一次原始独立性查询需要T_M时间，则预处理时间关于 n、L 和 T_M呈多项式级。我们不声称存在强多项式界，也不声称在线阶段的总运行时间为线性。对于一般的可积分布，除非提供支持所需期望计算的表示，否则定理 1.1 只是一个存在性结果。

输入表示。物品具有互不相同且非空的二进制标签。对于每个物品 i，输入列出有理数值 $v_{ia} \geq 0$ 和概率 $p_{ia} \geq 0$，使得 $\Pr[X_i = v_{ia}] = p_{ia}$ 和 $\sum_a p_{ia} = 1$。有理数均以最简形式表示，且分母为正；整数的位长按零计为一位。删除概率为零的条目，并合并每个物品中重复的支持值。这些规范化步骤的运行时间为多项式级，且不会改变分布。以下所有定义中的支持列表均指这些规范化后的列表。对每个原始物品进行一次独立性查询，以移除环。如果 $n = 0$，算法返回空集。下文假设 $n \geq 1$。
</output>

7.1 剩余拟阵的实现

存储一个基 C_j 对于每个前缀平坦 F_j，满足 $C_0 = \varnothing$。如果 C是 F的基，且 $A \subseteq E \setminus F$，那么

$$A \in \mathcal{I}(M/F) \quad \Longleftrightarrow \quad C \cup A \in \mathcal{I}(M). \tag{18}$$

事实上， C 和 F 具有相同的闭包，因此

$$r_{M/F}(A) = r_M(F \cup A) - r_M(F) = r_M(C \cup A) - |C|.$$

因此，一次残余独立性查询的代价相当于一次原始查询。要计算 $r_{M/F}(A)$，从 C 开始，并在保持独立性的情况下，贪心地插入 A 中的元素。插入次数就是所需的秩，而扫描至多使用 $|A|$ 次原始查询。限制可通过限制允许查询的元素来处理。

提取 U_j 后，使用 U_j 中的元素贪心地扩展 C_{j-1}，以获得 C_j。在整个分解过程中，这些扩展至多使用 n 次原始查询。存储基是用于模拟收缩的辅助集合。其中的元素无需在线选择，其实现值也绝不会用于预处理。

7.2 计算精确阈值

我们首先使用次模最小化来判定候选值是否低于最大阈值。随后，有理数分离使我们能够从足够短的二分区间中恢复一个精确的最大化集合；其阈值可通过求解一个分段线性方程获得。

判定预言机。 固定一个非空残余基集 W 和无环残余拟阵 $N = M/F$。对于有理数 $\lambda \geq 0$，定义

$$e_i(\lambda) = \sum_a p_{ia}(v_{ia} - \lambda)_+, \qquad f_\lambda(A) = \lambda r_N(A) - \sum_{i \in A} e_i(\lambda).$$

函数 f_λ 是次模的。其值预言机首先根据支持列表计算超额，然后使用一次剩余秩计算和一次求和来回答每个集合查询。特别地，一次值查询至多使用 n 次原始独立性查询。我们将 $\mathrm{SFM}(f)$ 记作一个多项式时间次模最小化例程，该例程返回 $(f(A)\ A)$，其中 $A \subseteq W$ 且 $f(A) = \min_{B \subseteq W} f(B)$，适用于定义在 2^W [17]上的取有理值的次模函数。

令 $\tau^* = \max_{\varnothing \neq A \subseteq W} \tau_N(A)$，其中 $e(A,\ \tau_N(A)) = \tau_N(A) r_N(A)$。根定义函数的严格单调性给出判定规则

$$\tau^* > \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \min_{A \subseteq W} f_\lambda(A) < 0. \tag{19}$$

空集的值为零，因此负的最小值总能提供一个非空见证。最小值为零意味着 $\tau^* \leq \lambda$，包括等式成立的情况。

候选阈值分离。 令 D 为规范化输入列表中所有概率和值的约分后的分母（按重数计）的乘积，并令 $Q = 2nD$。于是 $\log D = O(L)$。令 V 为所有原始项的规范化列表中的最大支持值。下面的分离界将判定过程转化为精确算法。

引理 7.2 (候选阈值分离)。 无环拟阵子式 M 中的每个候选阈值 $\tau_N(A)$ 都是有理数，且约分后的分母至多为 Q。任意两个不同的候选阈值之差至少为 Q^{-2}。

证明。 在根 τ 处，令

$$\alpha = \sum_{i \in A} \sum_{a : v_{ia} > \tau} p_{ia} v_{ia}, \qquad \beta = \sum_{i \in A} \sum_{a : v_{ia} > \tau} p_{ia}.$$

τ 处的原子贡献为零。由于 N 无环且 A 非空，$r_N(A) > 0$，由根方程可得

$$\tau = \frac{D\alpha}{Dr_N(A) + D\beta}.$$

分子和分母都是整数。分母为正且至多为 $2nD$，由此证明了第一个结论和分离界。

□

恢复精确的极大化集合。如果所有残差均值都为零，则最大阈值为零，且整个残余基集都是紧的。否则，$\tau^* > 0$。利用刚刚定义的全局 V，从 $\ell = 0$ 和 $u = V$开始。在 $\lambda = (\ell + u)/2$处进行二分；若（ $\ell = \lambda$ 19）中的最小值为负，则令 $u = \lambda$，否则令 $\ell = \lambda$。每一步之后，这都保持着

$$\ell < \tau^* \le u.$$

经过 $O(L + \log\, n)$ 次二分后，$u - \ell < 1/Q^2$。每个关于 f_ℓ 的极小化集合 A 都非空、取值为负，并满足

$$\ell < \tau_N(A) \le \tau^* \le u.$$

引理7.2保证 $\tau_N(A) = \tau^*$。因此，该过程恢复的是精确的极大化见证，而不只是近似阈值。

求解见证的阈值。要计算见证的根，将 0、V 以及 A 中各项的支持值按顺序排列为 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = V$。如果 $V = 0$，则返回零。在每个闭区间 $[s_r, s_{r+1}]$ 上，令

$$\alpha = \sum_{i \in A} \sum_{a : v_{ia} > s_r} p_{ia} v_{ia}, \qquad \beta = \sum_{i \in A} \sum_{a : v_{ia} > s_r} p_{ia}.$$

于是，在整个区间内（包括其端点），$e(A,\ t) = \alpha - \beta t$。候选根为$\alpha/(r_N(A) + \beta)$。按递增顺序扫描各区间，更新尾和，并返回第一个位于其闭区间内且满足 $e(A,\ t) = tr_N(A)$ 的候选值。这样的候选值总是存在：唯一的根位于 $[0, V]$ 中，且相邻区间的仿射公式在共同端点处一致。区间数至多为支撑项数加一，因此该子程序可在多项式时间内运行。将其记为 ExactRoot(N，A)。

7.3 恢复最大的紧平坦

在 $t = \tau^*$ 处，函数 f_t 非负，且其零点集在并集和交集运算下封闭。因此，它们的并集就是唯一最大的紧集 U。它是一个平坦：对紧集取闭包不会增加其秩，而非负的超额权重不会减少；由 f_t 的非负性可知，其闭包仍然是紧的。

还有一种直接选择 U 的方法，只需再进行一次次模最小化。将 $t = a/b$ 写成最简形式，并令 $q = |W|$。求最小值

$$g(A) = (q + 1)Dbf_t(A) - |A|. \tag{20}$$

函数 g 是次模的。由于 $Dbf_t(A)$ 是非负整数，每个非紧集合都有 $g(A) \ge q + 1 - |A| \ge 1$。每个紧集都有 $g(A) = -|A| \le 0$。因此，g 的一个极小化集合是基数最大的紧集，它必定是 U。这样便能精确实现规定的平局规则，无需进行数值扰动。

7.4 完整算法与运行时间

算法 4 将阈值恢复与最大紧平坦的选取结合起来。依次将其应用于剩余拟阵，即可实现算法 1。

算法 4 一个块的精确提取

输入： 定义在 $W \neq \varnothing$ 上的无环残余拟阵 N；归一化支撑列表；上述指定的例程 SFM；上述定义的分母乘积 D、$Q = 2nD$，以及所有原始元素中的最大归一化支撑值 V。

输出： 最大盈余阈值 t 及其最大紧平坦 U。

1. **若** $\mathbb{E}X_i = 0$ 对每个 $i \in W$ 都成立，则**返回** $(0,\ W)$。
2. 设定 $\ell \leftarrow 0$ 和 $u \leftarrow V$。
3. **当** $Q^2(u-\ell) \geq 1$:
   (a) 设置 $\lambda \leftarrow (\ell+u)/2$ 并计算 $(m,\ A) \leftarrow \mathrm{SFM}(f_\lambda)$。
   (b) **如果** $m < 0$，则设置 $\ell \leftarrow \lambda$；**否则**，设置 $u \leftarrow \lambda$。
4. 计算 $(m,\ A) \leftarrow \mathrm{SFM}(f_\ell)$。最小值为负，且 A 使根最大化。
5. 设置 $t \leftarrow \mathrm{ExactRoot}(N,\ A)$，并将 $t = a/b$ 写成最简形式，其中 $b \geq 1$。6. 对于 $B \subseteq W$，定义 $g(B) = (|W|+1)Db f_t(B) - |B|$；计算 $(m_g,\ U) \leftarrow \mathrm{SFM}(g)$。
7. **返回** $(t,\ U)$。

值预言机的位复杂度。第 7.2 节中的二分法将长度为 V的初始区间不断二分，直到其长度小于 $1/Q^2$。它至多使用 $\lceil \log_2(\max\{1, V\}Q^2) \rceil + 1 = O(L + \log\ n)$ 次迭代，并且每个端点都是 V 的二进有理倍数。因此，其分子和分母具有 $O(L + \log n)$ 位数。如果 b_λ 是查询 λ的分母，那么 $Db_\lambda f_\lambda(A)$ 是一个整数。对于$0 \leq \lambda \leq V$，有 $|f_\lambda(A)| \leq 2nV$，因此该整数具有 $O(L + \log\ n)$ 位数。对于恢复出的根也有相同的界，其分母至多为 Q；在用于恢复最大紧集的额外缩放之后，同样如此：$Db_\lambda f_\lambda(A)$ 和 $(|W|+1)Db_\lambda f_\lambda(A) - |A|$ 都是具有 $O(L + \log\ n)$ 位数的整数。因此，精确值预言机的输出大小为多项式级。

定理 *7.1* 的证明。运行算法 1，对每次提取使用算法4，并维护存储的前缀基。每个阶段都会收缩一个秩为正的非空平坦，因此阶段数至多为 $r_M(E) \leq n$。一个非零阶段需要 $O(L + \log\ n)$ 次二分法最小化、一次见证最小化，以及一次针对规范平坦的最小化。零阶段不需要最小化。这就证明了所述的调用次数。每次值预言机调用都使用多项式工作量，且至多进行 n次原始独立性查询。精度引理和精确的次模最小化意味着总预处理时间为多项式时间。

存储一张物品到块映射表，并为每个块存储 C_{j-1}。当一个符合条件的项目 $i \in U_j$ 到达时，在以下对象上查询原始预言机

$$C_{j-1} \cup S_j \cup \{i\}.$$

根据（18），这恰好是算法 2 所需的独立性测试。查询集可通过 O（n）次集合操作构造。每次非环到达都需要进行一次精确的阈值比较，其比特成本取决于到达值的编码长度。对于从输入中抽取的样本

支持此长度的取值范围为 L。对于每种非负有理数实现和每种到达顺序，该实现均与算法 2 一致。对于环或不符合条件的项目，它不会进行独立性查询；对于每个符合条件的项目，至多进行一次查询，因此总计至多进行 n 次。如果 $n = 0$，则返回空集。由于该实现精确地产生了数学构造中的阈值、块和在线决策，因此定理 1.1适用，且保证不会有任何损失。 □

7.5 委托验证与最优响应

验证提案。 同一组存储基可用于实现委托验证器。首先，拒绝任何包含原始环的提案。检查每个提交值是否符合其阈值，并针对每个非空提交块，在原始拟阵中查询 $C_{j-1} \cup (S \cap U_j)$。对于每个非空提交块，最多只需进行一次原始独立性查询。验证器既不检查被省略的实现值，也不检查代理人效用。

计算最优响应。 对于固定的非负实现代理人效用，删除原始环以及满足 $X_i < t_i$ 的元素，将剩余元素按 Y_i 非增序排列，并在 M 中应用加权$\widehat{\ }$拟阵贪心算法。这会最大化 $Y(S)$ 在 $\mathcal{A}(X)$ 上的值，因此可计算出针对算法 3 的最优响应。相同权重元素的顺序任意。利用存储前缀基，该计算所需的代理人效用比较次数为$O(n \log \max\{2, n\})$，原始独立性查询次数最多为 n。此计算结论也适用于代理人效用为零的情形；定理 1.2 中的近似保证要求效用严格为正，并且对每一种最优响应都成立，无论其计算方式如何。

人工智能使用声明。 本文是在作者与 OpenAI Astra 进行了广泛互动的基础上完成的。在反复交流的过程中，作者提出建议，并对 Astra 的回复进行批判性核查。作者还通过详细的提示词，使用 OpenAI Astra 撰写和修订了手稿，Gemini Argon 协助完成了其中的部分工作。作者主导了整个过程，并对提出的想法和论证进行了评估。本文的研究结果也已在 Lean 证明助手中形式化。

参考文献

[1] H. Abdi、K. Banihashem、M. Hajiaghayi、Z. Huang、D. Mittal 和 S. Singla。《秩一同样简单：拟阵秘书与单样本拟阵先知的最优算法》。arXiv:2611.08869，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2611.08869.[2] M. Armstrong 和 J. Vickers。《委托项目选择模型》。《计量经济学》，78(1):213–244，2010年。doi: 10.3982/ECTA7965.[3] K. Banihashem、M. Hajiaghayi、P. Krysta 和 S. Shin。《具有组合约束的委托选择》。载于第*26*届 *ACM* 经济学与计算大会（*EC*）论文集，第275–303页，2025年。doi: 10.1145/3736252.3742530。URL https://livrepository.liverpool.ac.uk/3193865/1/Combinatorial_Delegated_Choice-1.pdf.[4] C. Bechtel 和 S. Dughmi。《委托随机探测》。载于第*12*届理论计算机科学创新大会（*ITCS*），收录于莱布尼茨国际信息学论文集第185卷，第37:1–37:19页，2021年。doi: 10.4230/LIPIcs.ITCS.2021.37.[5] S. Chawla、K. Goldner、A. R. Karlin 和 J. B. Miller。《非自适应拟阵先知不等式》。载于算法博弈论（*SAGT*），收录于计算机科学讲义第15156卷，第389–404页，2024年。doi: 10.1007/978-3-031-71033-9_22。

[6] A. Dinev 和 S. M. Weinberg。《秩为 k的拟阵的简洁且最优在线冲突消解方案》。载于第15届理论计算机科学创新大会（ITCS），收录于莱布尼茨国际信息学论文集第287卷，第39:1–39:23页，2024年。doi: 10.4230/LIPIcs.ITCS.2024.39.[7] M. Feldman、O. Svensson 和 R. Zenklusen。《在线冲突消解方案及其在贝叶斯选择问题中的应用》。SIAM 计算杂志，50(2):255–300，2021年。doi: 10.1137/18M12261 30.[8] T. Jiang。《拟阵先知不等式中的非自适应性代价》。arXiv:2607.02766，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2607.02766。即将在 WINE 2026 发表。[9] S. Kalantarzadeh 和 K. Pashkovich。《拟阵先知不等式的简洁且几乎非自适应 $1/2$近似》。arXiv:2607.20269，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2607.20269.[10] J. Kleinberg 和 R. Kleinberg。《委托搜索近似高效搜索》。载于第19届 ACM 经济学与计算会议（EC）论文集，第287–302页，2018年。doi: 10.1145/3219166.3219205。URL https://arxiv.org/abs/1806.06933.[11] R. Kleinberg 和 S. M. Weinberg。《拟阵先知不等式》。载于第44届 ACM 计算理论年度研讨会（STOC）论文集，2012年。doi: 10.1145/2213977.2213991。URLhttps://arxiv.org/abs/1201.4764.[12] E. Lee 和 S. Singla。《通过事前先知不等式实现最优在线冲突消解方案》。载于第26届欧洲算法年度研讨会（ESA），收录于莱布尼茨国际信息学论文集第112卷，第57:1–57:14页，2018年。doi: 10.4230/LIPIcs.ESA.2018.57.[13] V. Livanos。《简洁且最优的贪心在线冲突消解方案》。载于《神经信息处理系统进展》第35卷，2022年。URL https://papers.neurips.cc/paper_files/paper/2022/file/3f45a1768ed452c1706e0a3a272e3bbc-Paper-Conference.pdf.[14] C. MacRury、P. Nuti 和 J. Vondrák。《匹配拟阵的先知不等式与在线冲突消解》。arXiv:2609.20939，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2609.20939.[15] OpenAI。《面对全能对手时，单个样本足以解决拟阵先知不等式》，2026年9月。URL https://github.com/openai/math/blob/main/preprints/One-Sample-Suffices-for-Matroid-Prophet-Inequalities-against-an-Almighty-Adversary-September-23-2026/final.pdf。OpenAI 数学发布预印本，9月23日。[16] E. Samuel-Cahn。《相互独立的非负随机变量的阈值停止规则与最大值的比较》。概率年刊，12(4):1213–1216，1984年。doi: 10.1214/aop/1176993150.[17] A. Schrijver。《一个在强多项式时间内最小化次模函数的组合算法》。组合理论杂志 B辑，80(2):346–355，2000年。doi: 10.1006/jctb.2000.1989。URLhttps://homepages.cwi.nl/~lex/files/minsubm6.pdf。